பொதுச் சடப்பொருள் இயல்புகள்

2—RR 19159–1,004 (66/11)

பட்டப் பௌதிகம்

பகுதி I

பொதுச் சடப்பொருள் இயல்புகள்

ஆக்கியோன் :

சி. ஜே. சிமிது
Ph.D., M.Sc., A.R.C.S., F. Inst. P.
பௌதிக ஆய் கூடங்களின் உதவிப் பணிப்பாளரும்
லண்டன் பல்கலைக்கழகத்து றேயல் ஹொலவேய்க் கல்லூரிச்
சிரேட்ட பௌதிக விரிவுரையாளரும்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்திற்காக
இலங்கை அரசாங்க அச்சாளர் திணைக்களத்திற் பதிப்பிக்கப்பட்டது.

முதற் பதிப்பு 1971

GENERAL PROPERTIES OF MATTER

by

C. J. SMITH

Translated and Published in Ceylon
by

THE EDUCATIONAL PUBLICATIONS DEPARTMENT

by arrangement with

MESSRS. EDWARD ARNOLD (PUBLISHERS) LTD.,
LONDON

லண்டன், வரைவுற்ற எட்வேட் ஆணல்ட் (பிரசுரிப்பாளர்) இசைவுடன்,
கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தால் வெளியிடப்பட்டது.

முன்னுரை

இது சி. ஜே. சிமிது என்பவர் எழுதிய "The General Properties of Matter" என்னும் ஆங்கில நூலின் மொழிபெயர்ப்பாகும்.

பி. எஸ்சி. பொதுப் பட்டத்துக்குத் தோற்றும் மாணவர்க்கு வழக்கமாகத் தேவைப்படுவதிலும் சற்று அதிகமான பாடத்திட்டத்தை இது அடக்குகின்றது. இது, பௌதிகத்தின் அடிப்படைகளை ஊடுருவி ஆராயவேண்டிய தேவைகளை உண்மையிற் பூர்த்தி செய்கின்றது. அத்துடன், முதலாண்டுச் சிறப்புப் பயிற்சிநெறியில் வழக்கமாகப் பயிற்றப்படும் இப்பௌதிகப் பிரிவை அடக்குவதாகவும் காணப்படுகின்றது.

ஒவ்வோர் அத்தியாய முடிவிலும் எண் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு தொடை வினாக்களை இந்நூல் கொண்டது. இவ்வினாக்கள் யாவும் லண்டன் பல்கலைக்கழகத் தேர்வுகளுக்குரியவை. பௌதிக அடிப்படைகளைக் கசடற நன்கு மாணவர் புரிந்து கொள்ளுமாறு உதவ, எண்கொண்ட கணக்குகளுக்குத் தீர்வுகள் தரப்பட்டுள.

இலங்கைப் பல்கலைக்கழகத்துப் பேராசிரியராகிய ஆ. வி. மயில்வாகனம் பி. எஸ்சி., எம். ஏ., பிஎச். டி. அவர்கள் இந்நூலை மொழிபெயர்த்துள்ளார். அவர் ஒத்துழைத்து உதவியமைக்கு இத்திணைக்களம் என்றும் நன்றி பாராட்டும்.

வ. ஆ. ஜயவர்த்தன,
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர்.

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்,
" சிறீமதிபாயா,"
58, சேர் எணெஸ்ற் டி சில்வா மாவத்தை,
கொழும்பு 3.

පෙරවදන

මේ පොත සී. ජේ. ස්මිත් විසින් ඉංග්‍රීසියෙන් ලියන ලද " The General Properties of Matter " නම් ග්‍රන්ථයේ දෙමළ පරිවර්තනයයි.

මෙහි විෂය ප්‍රමාණය බී. එස්සී. සාමාන්‍ය උපාධියක් සඳහා භෞතික විද්‍යාව හදාරන ශිෂ්‍යයන්ට සාමාන්‍යයෙන් වුවමනා වන විෂය ප්‍රමාණයට මඳක් වැඩි ය. ඇත්ත වශයෙන් ම මේ පොතෙන් භෞතික විද්‍යාවේ මූලික සිද්ධාන්ත පිළිබඳ පුළුල් දැනුමක් සැපැයෙතියි අපේක්ෂා කරනු ලැබෙයි. තවද භෞතික විද්‍යාවේ මේ ශාඛාව යටතේ ගෞරව උපාධි පාඨමාලාවෙක පළමු වැනි වර්ෂය තුළ දී සාමාන්‍යයෙන් සලකා බැලෙන කරුණු බොහොමයක් ද මීට ඇතුළත් වෙයි.

මේ පොතේ එක් එක් පරිච්ඡේදය අවසානයේ ප්‍රශ්න මාලාවක් ද ඇතුළත් වෙයි. මේවා ප්‍රධාන වශයෙන් ම ලන්ඩන් විශ්ව විද්‍යාලයීය විභාගවලින් ගත් සංඛ්‍යාත්මක ගැටලුයි. යෙදෙන මූලධර්ම මැනැවින් වටහා ගැනීමෙහි ලා සිසුන්ට සහාය වනු වස් සංඛ්‍යාත්මක ගැටලුවල විසඳුම් ද දී ඇත.

මේ පරිවර්තනය සපයා දීමෙන් දක්වන ලද අනුග්‍රහය ගැන මහාචාර්ය ඒ. ඩබ්ලිව්. මයිල්වාගනම් බී. එස්සී., එම්. ඒ., පීඑච්. ඩී. මහතාට දෙපාර්තමේන්තුවේ කෘතඥතාව හිමිවෙයි.

ව. ආනන්ද ජයවර්ධන,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස්.

කොළඹ 3,
ශ්‍රීමත් අර්නස්ට් ද සිල්වා මාවතේ අංක 58 හි
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ දී ය.

நூன்முகம்

"பட்டப் பௌதிகம்" என்ற தலைப்பில் வெளியிடும் ஒரு தொடர் பாட நூல்களில் முதற் றொகுதியின் இந்த இரண்டாம் பதிப்பினை மாணவர்க்கு நான் வழங்குகையில், தற்போது வழக்கற்றுப் போயினவெனக் கருதப் பெறும் பல விடயங்களை நீக்கி ஈர்ப்புத் தொடர்பாகத் தற்கால ஆய்வு பற்றி முழு விபரந்தரும் வாய்ப்பு எனக்கு ஏற்பட்டுளது. அன்றியும் விறைப்பான பொருள்களின் இயக்கம் பற்றியும் அலைவுகள் பற்றியும் ஆராய்கையில் சக்திக் காப்புக் கோட்பாடு அதிகம் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. பரப்பிழுவை பற்றிய அத்தியாயத்தில் இக்கணியத்தைத் திருத்தமாகத் துணிவதற்குப் புதிய முறைகள் ஆராயப்பட்டிருப்பதுடன் சக்திக் கோட்பாட்டிலிருந்து சில அடிப்படைச் சூத்திரங்கள் பெறப்பட்டுமுள்ளன. நீரியல் பற்றிய சில ஆய்வுகளைப் புகுத்தியமையினால், பிசுபிசுப்புப் பற்றிய பழைய அத்தியாயம் இரண்டாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒன்று பிசுபிசுப்புப் பற்றியது. இது முற்றாக மீளவாயப்பட்டுளது. மற்றது நீரியல், நியூற்றன அல்லாத திரவங்கள் பற்றியது. இவ்விறுதி அத்தியாயத்தில் பிற்றோ குழாயின் பயன் வற்புறுத்தப்பட்டுளது.

பி. எஸ்சி. பொதுப் பட்டத்துக்குத் தோற்றும் மாணவர்க்கு வழக்கமாகத் தேவைப்படுவதிலும் சற்று அதிகமான பாடத்திட்டத்தை இது அடக்குகின் றது. பௌதிகத்தின் அடிப்படைகளை ஊடுருவி ஆராய விரும்புவோரின் தேவைகளை உண்மையாய்ப் பூர்த்திசெய்யுமாறு இந்நூல் எழுதப்பட்டுளது. ஆகவே, இது முதலாண்டுச் சிறப்புப் பயிற்சிநெறியில் வழக்கமாகப் பயிற்றப்படும் இப்பௌதிகப் பிரிவை அடக்குவதாகக் காணப்படும்.

இம்முதலாந் தொகுதி, வழக்கமாக "பொதுப் பௌதிகம்" என்ற தலைப்பினகீழ்க் காணப்படும் நன்கு வரையறுக்காதவொரு விடயத் தொகுதி யின் அடிப்படைப் பிரிவுகளை ஆராய்கின்றது. ஆனால், பரிமாணக் கொள்கை உட்பட்ட மிகவும் ஆரம்பமான பிரிவுகள் எனது "இடைத்தரப் பௌதிகம்" என்னும் நூலில் ஆராயப்பட்டுள்ளமையால் இங்கு விடப்பட்டுள்ளன. தற்போதைய நூலில் இது I. P. எனக் குறிப்பிடப்படும்.

எழுத்துக் கூட்டுவதைப் பொறுத்த மட்டில், ஒக்ஸ்ஃபோட் அகராதியைப் பின்பற்றி, சொல்லாக்க முறைப்படி திருத்தமான எழுத்துக்கூட்டலைக் கையாண்டுள்ளேன். குறியீடுகளின் தெரிவைப் பொறுத்தவரையில், தோற்றும் ஒவ்வொரு கணியத்துக்கும் ஒவ்வொரு குறியீடாக உபயோகிக்கப் போதிய குறியீடுகளில்லை. காலத்துக்குக் காலம் விதந்துரைக்கப்படும் குறியீட்டுப் பட்டியல்கள் காலப்போக்கில் மாறுவதாகக் காணப்படுவதுடன், அவை முக்கியமாக விஞ்ஞானச் சஞ்சிகைகளில் வெளியிடுங் கட்டுரைகளுக்குப் பயன்படுவதற்காகவே உள்ளன. கல்வியுலகில், மேலும் பல குறியீடுகள்

தேவைப்படும். சஞ்சிகையொன்றில் ஒரு குறிப்பிட்ட தேவைக்கு ஒரு குறித்த குறியீடு தேவைப்படினும், வகுப்பறையில் அதே குறியீடு முற்றும் வேறுபட்டவொரு கணியத்தைக் குறித்தற்கு நன்கு பயன்படுத்தப்பெறும். ஒரு குறியீட்டைக் கையாளுகையில் அதனைத் தெளிவாக வரையறுக்க வேண்டுமென்பது முக்கியம், பின்னர், எழுத்தாளர் நூலாசிரியராகவோ தேர்வாளராகவோ ஒரு தேர்வில் அபேட்சகராகவோ எவ்வாறிருப்பினும் குறியீடு அவரது தெரிவுக்கு விடப்பட வேண்டும்.

குறிப்பாக, குறிப்பீடு பற்றி ஆராய்கையில், நீண்ட பரிசீலனையின் பின்னர் ஈர்ப்பு மாறிலிக்கு G யிலும் பார்க்க γ எனுங் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தத் தீர்மானித்தேன். இந்நடைமுறையைப் புவிப்பௌதிக, கணித அறிஞர் ஏற்பரெனினும் பௌதிக அறிஞர் ஏற்கமாட்டார். இந்நடைமுறை காரணமாக, மின், காந்தப் புலங்கள் தொடர்பாக $\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{H}}$ எனபன பயன்பட்டதுபோன்று $\vec{G}$ ஓ ஈர்ப்புப் புலத்தின வலிமையை வரையறுக்கின்றது. அன்றியும் ஈர்ப்பு அழுத்தமானது புலத்துக்கு எதிராகச் செய்யப் பெறும் வேலையில் வரையறுக்கப்படும். இது நிலைமின்னியலிலும் காந்தவியலிலும் பயன்படுத்திய முறைகளோடு இசைகின்றது. ஈர்ப்புப் புலக் கொள்கையில் இந்நடைமுறை மாற்றப்படுதற்கான அடிப்படைக் காரணமெதுவும் இல்லை.

இத்தொடர் நூல்களிலெங்கும் நான் காவிகளைக் கையாளத் தவறவில்லை. இதன் காரணமாக, அவற்றை மாணவர்க்குக் கணித ஏற்பாட்டிற் புகுத்தியுள்ளேன். எனினும், எழுதவும் அச்சிடவுங் கூடியவொரு குறிப்பீட்டையே கையாண்டுள்ளேன்.

இப்பாடத்தின் பல்வேறு பிரிவுகளையும் ஆராய்கையில், நான் ஒரு வரலாற்றுப் பின்னணியைப் பேண முயன்றுள்ளேன். அங்கு குறிப்பிட்ட மெய்ம்மைகள் உடன் பேறெதனையுந் தராவெனினும் முன்னைய பௌதிக ஆராய்ச்சியாளர்க்கு ஏற்பட்ட சில இடர்ப்பாடுகளைத் தெளிவுபடுத்தும். தற்கால ஆராய்ச்சியைப் பொறுத்தளவில் அடிப்படைக் கோட்பாடுகளை விளங்கிக் கொள்வதற்கு அண்மைய முறைகள் அவசியமில்லையாதலின அவைபற்றி எல்லா இடங்களிலும் குறிப்பிடவில்லை. மாணவர் முற்றிய அறிவைப் பெற்றதும் தற்கால ஆராய்ச்சி பற்றி அறிதல் சிறப்புடைத்து. பாட விடயங்களின் தெரிவானது பல்வேறு பல்கலைக்கழகங்களின் தேர்வுப் பாடத்திட்டங்களை ஓரளவு பொறுத்தது. எனினும் மிகப்பல இடங்களில், தற்காலத்துக்கேற்பச் சுவையான பாடப் பகுதிகளை முழுமையாக ஆராய்ந்துள்ளேன். இத்தகையவொரு நூலில் விவாதிக்க வேண்டிய விடயங்கள் பறறி நூலாசிரியர்களிடையே உடன்பாடு ஏற்படலரிது. இப்போதுள்ள பாடத் தெரிவை மிகப்பலர் விரும்புவரென எதிர்பார்க்கின்றேன்.

ஒவ்வோர் அத்தியாய முடிவிலும் எண் சம்பந்தப்பட்ட ஒரு தொடை வினாக்கள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றுட்சில லண்டன் பல்கலைக்கழகத் தேர்வுகளுக்கெனத் தயாரிக்கப்பட்டவை. அவற்றைப் பிரசுரிக்க

அனுமதியளித்தமைக்குப் பல்கலைக்கழக ஆட்சிக்குழுவுக்கு என் நன்றி உரியது. குறிப்பிட்ட இவ்வினக்கள் பொது, சிறப்பு வினத்தாள்களிலிருந்து எடுக்கப்பட்டமையைக் குறிக்க முறையே G, S என்னும் எழுத்துக்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன. எண்கொண்ட கணக்குகளை மாணவர் தீர்த்தல் பௌதிகப் பயிற்சிநெறியில் முக்கியமானதென நான் கருதுகின்றேன். மாணவர்க்கு உதவ, தீர்வுகள் தரப்பட்டுள. எவ்வளவுதான் கவனமாக இருப்பினும் ஆசிரியனுக்குத் தெரியாமலே பிழைகள் நூலில் நுழைந்து விடுகின்றன என்பதைப் பலகால அனுபவ வாயிலாக நான் அறிவேன் எனினும் இதில் அத்தகைய பிழைகள் சிலதான் இருக்குமென எதிர் பார்க்கிறேன். இது சூத்திரத்திற் பிரதியிட்டு மட்டும் தீர்வுபெற முயலும் மாணவர்க்குப் பெரும் ஏமாற்றுகும். அத்தகைய பயிற்சிகள் பலவற்றைத் தனித்தனியே நேர்மையாகச் செய்தலால், மாணவர் " இத்தீர்வு சரியன்றெனின், எதுவும் சரியாகாது " என்ற எண்ணத்தைப் பெறுவரென நம்புகின்றேன்.

இந்நூலை எழுத எனக்குப் பல ஆண்டுகள் எடுத்தது ; இந்நூலை எழுதுதல் எனக்கு மிகவும் சுவையாய் இருந்தது. அப்பணி யான் எதிர் பார்த்ததிலும் பெரிதாக இருந்ததெனினும் இந்நூல் மாணவரின் தேவையைப் பூர்த்தி செய்யுமெனின் மனநிறைவடைவேன்.

இறுதியாக, இந்நூலை எழுதுதல் தொடர்பாக வசதிகள் செய்தமைக்கும் அளவற்ற கருத்துரைகள் வழங்கியமைக்கும் பேராசிரியர் எஸ். ரொலன்ஸ்க்கி, F.R.S. அவர்களுக்கு என் நன்றி உரியது. அன்றியும், றோயல் ஹொலவேய்க் கல்லூரியைச் சேர்ந்த முன்னைய, தற்போதைய இணைவர்கள், உடனிணை தேர்வாளர் ஆகியோர் எனக்கு அளித்த ஆதரவைக் குறிப்பிட விரும்புகின்றேன். இவர்களுட் காலஞ்சென்ற பேராசிரியர் ஃபேகியூசன், கலாநிதி ஆர். சி. பிறவுண், கலாநிதி ஏ. ஆர். ஸ்ரோக்ஸ், செல்வி எம். பிக், எம். ஏ., கலாநிதி மேரி பிராட்பேண், திரு ஜே. டபிள்யு. றீட், எம். எஸ்சி, பேராசிரியர் ரி. எஸ். மூர், பேராசிரியர் எச். ரி. ஃபிளின்ற், திரு. ஜே. பிறைஸ் ஜோன்ஸ், கலாநிதி எஸ். பி. எஃப். ஹம்பிறிஸ்-ஒவின், கலாநிதி ஆர். மன்ஸ்ஃபீல்ட் ஆகியோரைக் குறிப்பிட விரும்புகின்றேன். கலாநிதி ஈ. ஜே. அயேண்ஸ் அவர்கள் எனக்கு அளித்த உதவியையும் இங்குக் குறிப்பிட விரும்புகின்றேன். சலாகையூசலின் கொட்டல் மையத்தைத் துணிதற்கான கலாநிதி சீ. ஏ. ஹேஹூட்டின் பரிசோதனையை விவரிக்க அனுமதி அளித்தமைக்கு அவருக்கும் பௌதிகத் தராசு பற்றிய ஒரு சரியான கொள்கையை எனக்கு வழங்கிய பேராசிரியர் லியோ எல். பகேனி அவர்களுக்கும் என் நன்றி உரித்து. புவியீர்ப்பு அளவையீடு தொடர்பாக கலாநிதி டபிள்யு. புல்லர்வெல் எனக்குப் பெரிதும் உதவியுள்ளார். புவியீர்ப்பைத் தனி அளவையிலே துணிதற்கான தன் முறைபற்றி விவரமான தகவலை கலாநிதி ஏ. எச். குக் வழங்கினர். திரு. சி.

சோல்ற்றர், எம். ஏ. அவர்கள் பிற்றே குழாய்கள் பற்றி விபரங்கள் தந்தார். சரவைகளைச் சரிபார்த்தும் பல தெளிவின்மைகளையும் வழுக்களையும் அகற்றியும் உதவிய என் வாழ்க்கைத் துணைவியார்க்கு என் நன்றி உரியது. அவர்தம் உதவியின்றி இந்நூலை வெளியிட முடியாதிருந்திருக்கும். இந்நூலின்கண் இருக்கக்கூடிய பிழைகளுக்கும் தவறுகளுக்கும் நானே பொறுப்பாவேன். எனினும் வாசகர்கள் அவற்றை எனது கவனத்துக்குக் கொண்டு வருவார்களென எதிர்பார்க்கின்றேன். இதன்தொடர்பாக, இந்நூலின் முதற் பதிப்பின் வாசகர்களிடையே வில்லியம் ஆர். ரொறன்ஸ், எம். ஏ., எம். டபிள்யு. மக்கெலின்னி என்போர் குறிப்பிடத் தக்கவர். இவர்களின் மதிப்புவாய்ந்த கருத்துக்கள் மிகவும் உதவின.

சி. ஜே. சிமிது.

றேயல் ஹொலவேய்க் கல்லூரி,
எங்கிள்பீல்ட் கிறீன், சறே.
யூன், 1960.

நன்றியறிவிப்பு

பல்வேறு வெளியீடுகளிலிருந்து சிறு பந்திகளை எடுத்தாளவோ பாடநூலிலுள்ள படங்கள் அடிப்படையாய் அமையத்தக்கதாக, வெளியிடப்பட்ட படங்களைப் பயன்படுத்தவோ அனுமதியளித்ததற்காக நூலாசிரியர் பின்வருவோர்க்குத் தம் நன்றியைத் தெரிவிக்க விரும்புகின்றார் :

கொன்ஸ்ரெபிள் & கொ., லிமிற்றெட்—ஜே. பெரின் என்பாரின் **அணுக்கள்** எனும் கட்டுரையிலிருந்து படம் 13.02 ஐப் பயன்படுத்தியமைக்கு.

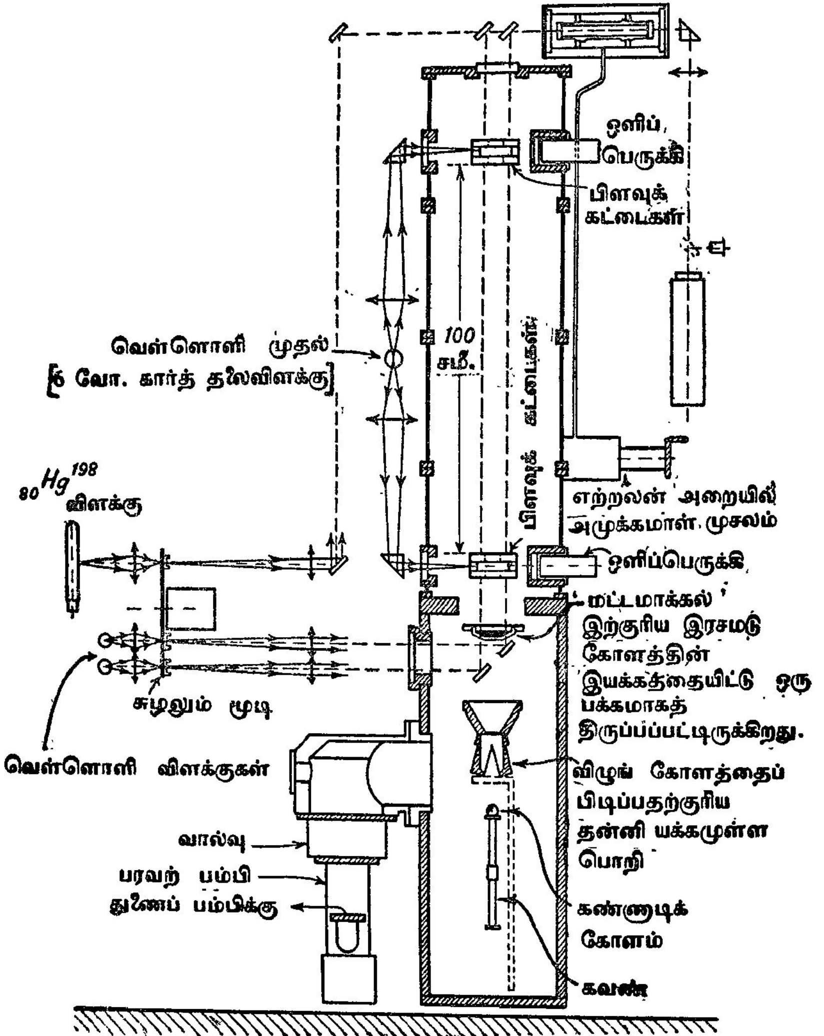
பேராசிரியர் ஈ. என். த சி. அந்திரேட், எஃப். ஆர். எஸ்., எம். டபிள்யு. ஹெஃபர் & சன்சும்—" பிசுபிசுப்பும் ஞெகிழிமையும் " எனும் கட்டுரையிலிருந்து ஒரு பந்தியை எடுத்தாண்டமைக்கு.

லொங்மன், கிறீன் & கொ., லிமிற்றெட்—பேராசிரியர் சீ. எச். டெஷ், எப். ஆர். எஸ். இன் " உலோகவியல் " எனும் கட்டுரையிலிருந்து இரு பந்திகளை எடுத்தாண்டமைக்கும், மேற்குறித்த நூலிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் படம் 12.13 ஐ ஆதாரமாகக் கொண்டமைக்கும்.

பிரிட்டிஷ் தேமஸ்ற்றுற் கொ. லிமிற்றெட்—அவர்களின் சிற்றேடு என். எஸ். 2 இல் முக்கியமாய் விகாரமானிகளில் எனது குறிப்பை அடிப்படையாய்க் கொண்டமைக்கு.

வய்க்கூம் இன்டஸ்ற்றியல் அப்பிளிகேஷன்ஸ் லிமிற்றெட்—படம் 14.27 இற்கும் " அல்பாக்கதிர் " அயனுக்கமானி பற்றிய விவரமான தகவலுக்கும்.

பொருளடக்கம்



புவியீர்ப்பு (*g*) இன் தனித் துணிபுக்கான தே. பௌ. ஆ. ஆய்கருவி.

[கலாநிதி ஏ. எச். குக், செல்வி எச். எம். றிச்சேட்சன் ஆகியோரால் உருவாக்கப்பெற்றது.]

பகுதி I

பொதுச் சடப்பொருள் இயல்புகள்

அதிகாரம் I

கணித ஏற்பாடுகள்

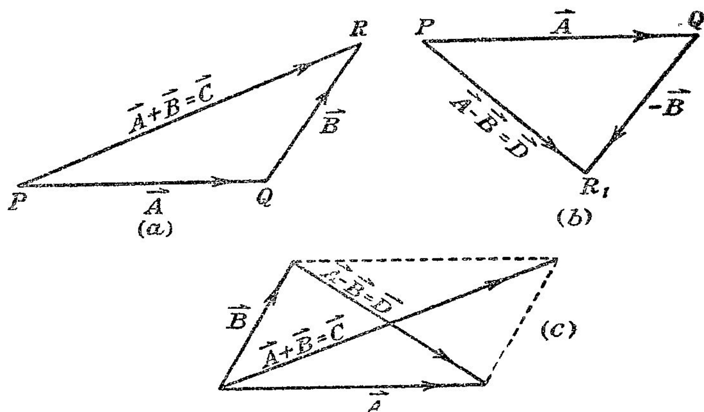
எண்ணிகளும் காவிகளும்.—*கணிதமுறைப் பௌதிகவியலின் எல்லாப் பிரிவுகளிலும்* **எண்ணிகள்** *எனவும்* **காவிகள்** *எனவும் வழக்கமாக அழைக்கப்படுகின்ற இரு வகையான கணியங்களை வேறுபடுத்திக் காட்டல் வேண்டும். திசையியல்புகள் இல்லாத கணியங்கள்* **எண்ணிகள்** *எனப்படு கின்றன ; அவ்வொவ்வொன்றையும் யாதும் ஓர் எண்ணால் முற்றிலும் குறித்தல் இயலும். ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட அட்சரகணிதக் கருத்துக்களுக் கிணங்கப் பருமனும், அத்துடன் வெளியிடத்தே திசையும் உடைய மற்றைக் கணியங்கள்* **காவிகள்** *ஆகும் ; காவியொன்றின் எண்பெறுமானமானது* ***அதன் பருமன்*** *எனக் கூறப்படுகின்றது. காவியின் பருமனுக்கு யாதும் ஒரு வரையறுத்த அளவினைப்படி நீளம் சமமும, காவியின் திசையும் போக்கும் உடையதுமான, நேர்கோட்டுத் துண்டொன்றால் காவி யொன்றைக் குறிக்கலாம். இங்கு, காவியொன்றின் போக்கு என்பது அக் காவியின் ஒரு முனையிலிருந்து அதன் மறு முனைக்கு வரையப்பட்டதாகும். அவ்வாறு குறிக்கின்ற நேர்கோட்டுத் துண்டின் தொடக்கமுனை* **உற்பத்தி** *எனவும், அதன் மறுமுனை* **முடிவு** *எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. காவியொன்றையும், இன்றியமையாதவகையில் நேரெண்ணளவாகிய அதன் பருமனையும் வேறுபடுத்திக் கூறவேண்டுமாயின் பிந்தியதை எழுத் தொன்றாலும் (A என்றவாறு), காவியை $\vec{A}$ என்பதாலும் குறிக்கலாம். சிலவேளைகளில் மயக்கம் தவிர்க்கும் பொருட்டுக் காவியொன்றின் பருமன் $|A|$ என்பதாற் குறிக்கப்படும். கீழே தரப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுக்கள் போன் றனவற்றில் இக்குறிப்பீடானது தனி உபயோகமுடையதெனக் காண் போம். $|A||B|$ என்பது $\vec{A}, \vec{B}$ ஆகிய இரு காவிகளின் பருமன்களின் பெருக்கமாகும். இத்துறைக்குரிய நூல்களில் பெரும்பாலும் காவியானது* **A** *என்பதாற் குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றது. ஆனால் கையெழுத்துப்பிரதிகளில் அவ்வாறு செய்தல் கடினமாகும்.*

இவ்வண்ணம், ஒரு தானத்திலிருந்து தொடங்கி வேறொரு தானத்தை அடைகின்ற துணிக்கையொன்றின் இடப்பெயர்ச்சி ஒரு காவியாகும். அக்காவியானது துணிக்கையின் தொடக்கத் தானத்திலிருந்து அதன் இறுதித் தானத்தை நோக்கி வரையப்பட்ட நேர்கோட்டின் துண்டொன்றாற் குறிக்கப்படுகின்றது. வேகம், ஆர்முடுகல், விசை, காந்தப் புல வலிமை முதலியவை காவி என்பதற்கு வேறு எடுத்துக்காட்டுக்கள் ஆகும்.

திணிவு, வேலை, சக்தி, அழுத்தம் (அது மின்னழுத்தம், காந்தவழுத்தம், ஈர்ப்பழுத்தம் எதுவாகிலும்) எண்ணிக்கு எடுத்துக்காட்டுக்கள் ஆகும். (ஆனால், பழைய பொறியியலின்படி அசையும் இலத்திரன் ஒன்றின் 'குறுக்குத' திணிவும் 'நீள்பக்கத்' திணிவும வேறுபடுகின்றமையால் அவ்விலத்திரனின் திணிவு திசையுடையதாம்.)

நாம் ஆராயும் கேத்திரகணித வெளியில் வலக்கைத்திருகு வழக்குக் கிணங்கும் செவ்வக அச்சுத்தொகுதியொன்று மாட்டேற்றுச்சட்டமாக உபயோகிக்கப்படும். அதாவது அத்தொகுதியின் z அச்சின் நேரான திசை நெடுக வலக்கைத்திருகொன்று செலுத்தப்படின், அது x அச்சிலிருந்து, x அச்சுக்கும் y அச்சுக்கும் இடையிலுள்ள செங்கோண மார்க்கமாக, y அச்சை நோக்கித் திரும்பும்.

காவிகளுக்குரிய மூலகச்செய்கைகள்.—(a) காவிகளைக் கூட்டலும் கழித்தலும். $\vec{A}$ உம் $\vec{B}$ உம் இரு காவிகள் ஆகுக.



படம் 1.01. காவிகளைக் கூட்டலும் கழித்தலும்.

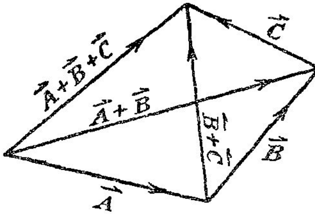
$\vec{A}$ ஆனது PQ என்னும் நேர்கோட்டால் குறிக்கப்படட்டும், படம் 1.01(a). அப்பொழுது, $\vec{A}$ ஐக குறிக்கும் நேர்கோட்டின் முடிவிலிருந்து $\vec{B}$ ஐக் குறிக்கும் பொருட்டு நேர்கோடு QR ஐ வரைவோமாயின், $\vec{A}$ இன் உற்பத்தியையும் $\vec{B}$ இன் முடிவையும் இணைக்கின்ற நேர்கோடு, அதாவது PR, என்பதாற் குறிககப்படுகின்ற காவியானது காவிகள் $\vec{A}$, $\vec{B}$ என்பனவற்றின் காவிக் கூட்டுத்தொகை என்று அழைக்கப்படும். இக்காவிக் கூட்டுத் தொகையை $\vec{C}$ என்பதாற் குறித்தால் $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ எனப் பெறுவோம்.

ஒரு சோடி காவிகள் $\vec{A}$, $\vec{B}$ என்பனவற்றிற்கிடையே உள்ள காவி வித்தியாசத்தைப் பெறும்பொருட்டு, படம் 1·01(b) $\vec{A}$ ஐக் குறிக்கின்ற நேர்கோடு PQ ஐ வரைந்து, அதன் முடிவிலிருந்து $\vec{B}$ இன் பருமனுக்குச் சமமாகவும் ஆனல் போக்கில் $\vec{B}$ இற்கு எதிராகவும் நேர்கோட்டுத்துண்டு QR_1 ஆனது வரையப்படுகின்றது. PR_1 ஆற் குறிக்கபபடுகின்ற காவி $\vec{D}$ ஆனது $\vec{A}$, $\vec{B}$ என்பனவற்றின் காவி வித்தியாசம் எனப்படும். இவ்வாறு,

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{D}.$$

இணைகரமொன்றின் அடுத்துள்ள இரு பக்கங்களால் இரு காவிகள் $\vec{A}$ யும் $\vec{B}$ யும் முறையே குறிக்கப்பட்டிருந்தால் அவ்விரு பக்கங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளி ஊடாக வரைந்துள்ள மூலைவிட்டமானது அவ்விரு காவிகளின காவிக் கூட்டுத்தொகையையும், மற்றை மூலைவிட்டமானது அதே இரு காவிகளின் காவி வித்தியாசத்தையும் குறிகின்றன என்று நாம் மேற் கூறியதிலிருந்து உடனே முடிவுசெய்கின்றோம் ; படம் 1·01(c) ஐ ஒப்பிடுக.

இரு காவிகளை கூட்டவோ கழிக்கவோ உபயோகிக்கும் முறையை இரண்டு காவிகளிலிருந்து மூன்று அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட காவி



படம் 1·02. பல காவிகளைக் கூட்டல்



படம் 1·03· ஓர் அலகுக்காவி.

களுக்கும் விரிக்கலாம். ஏனெனில், இரு காவிகளின் கூட்டுத்தொகை அல்லது வித்தியாசம் காவியாகவும் இருப்பதால். வரிசையொன்றில் மூன்று காவிகளை ஒழுங்குபடுத்தி

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

என்று படம் 1·02 இல் காண்கிறோம். இதுபோலவே காவிகளின் தொகை எதுவெனினும் நாம் அவற்றைக் கையாளலாம்.

தேற்றம் I. காவிகள் எத்தனை எனினும் அவற்றின் கூட்டுத்தொகையை, கூட்டப்படும் காவிகளைக் கூட்டமாக்கும் முறையோ அவற்றின் வரிசை ஒழுங்கோ பாதிக்கமாட்டாது ; அதாவது, காவிகளின் கூட்டலானது பரிவர்த்தனை, தொகுப்பு விதிகளுக்கு இணங்கும்.

காவிகளைக் கூட்டுமிடத்துப் பொது அட்சரகணிதக் கூட்டல்முறைக்குரிய அடிப்படையான விதிகளை யாதொரு தடையுமின்றிப் பிரயோகிக்கமுடியும் என்பதையே மேற்கூறியுள்ள தேற்றமானது உண்மையில் உறுதிப்படுத்துகின்றது.

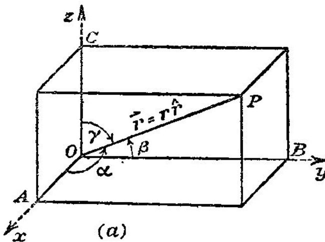
அலகுக்காவியின் வரைவிலக்கணம்.—அலகுக்காவி என்பது நீளம் ஓர் அலகாகவும், பரவெளியில் யாதுமொரு திசைகுறி, போக்கு ஆகியவற்றை உடையதுமான நேர்கோடொன்றால் முற்றிலும் குறிக்கப்படுகிறதொன்றாகும். அத்தகைய காவி $\hat{a}$ அல்லது என்னும் $\vec{a}$ குறியீட்டால் குறிக்கப்படும்.

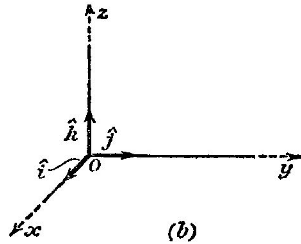
அலகுக்காவிகளிலிருந்து காவிகளைப் பெறுதல்.—$\overrightarrow{ON}$, படம் 1·03 (a) என்பதாற் குறிக்கப்படும் யாதுமோர் அலகுக்காவியை எடுத்து அதன் திசையையோ போக்கையோ மாற்றாது, அதன் நீளத்தை மட்டும் A மடங்கு பெரிதாக்க முடியும்; இங்கு $\vec{A}$ என்பது யாதுமொரு மெய் நேரெண் ஆகும்; அது ஒரு முழுவெண் ஆக இருக்க வேண்டியதேயில்லை. இதன் விளைவு, படம் 1·03 (b),

$$\hat{a}A = \overrightarrow{OA} = \vec{A}$$

ஆயிருக்கும் காவி $\overrightarrow{OA}$ ஆகும்.

ஆகவே, A என்பது $\vec{A}$ இன் எண்பெறுமானம் ஆகும். அன்றியும் A ஆனது $\hat{a}$ என்பதின் திசையையோ போக்கையோ மாற்றாமல் அதன் நீளத்தை மட்டும் A மடங்கு பெரிதாக்கித்தரும் ஒரு செயலி என நாம் கருதலாம்.





படம் 1·04. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ என்னும் மூன்று அலகுக்காவிகள்.

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, என்னும் அலகுக்காவிகள்.—ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று குறிப்பிட்ட திசைகள் வழியே $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ என்னும் மூன்று அலகுக்

காவிகள் இருக்கட்டும். $\vec{r}$ என்னும் யாதுமொரு காவியை, குறிப் பிட்ட மூன்று திசைகளில் இருக்கின்ற வேறு மூன்று காவிகளின் கூட்டுத்தொகையாக எடுத்துரைக்கும் பொருட்டு $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ எனக் கொள்க (படம் 1·04 ஐ ஒப்பிடுக). OP ஐ மூலைவிட்டமாகவும் OA, OB, OC களை விளிம்புகளாகவும் கொண்ட செவ்வக இணைகரப்பரவையொன்றை வரைக அப்பொழுது, x, y, z என்பன முறையே OA, OB, OC களின் அளவுகள் ஆயின்

$$\vec{r}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
$$=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z$$

எனப் பெறுகிறோம்.

ஆகவே $\vec{r}$ ஆனது $\hat{i}x, \hat{j}y, \hat{k}z$ என்னும் மூன்று காவிகளின் விளையுள் ஆகும். இவை, தரப்பட்ட மூன்று திசைகளில் $\vec{r}$ இன் கூறுகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு ஒரேயொரு இணைகரப்பரவையை மட்டும் வரையமுடியுமாதலால், $\vec{r}$ இன் துணிப்பு ஒருதனியானதாகும்.

$\overrightarrow{OP}$ ஆனது அச்சுக்களுடன் α, β, γ என்னும் கோணங்களை ஆக்கின், $\overrightarrow{OP}$ இன் திசைக்கோசைன்கள் கோசை α, கோசை β, கோசை γ என்பன ஆகும். வழக்குக்கிணங்க இவை l, m, n களாற் குறிக்கப்படும்.

இனி, $x=r$ கோசை α, $y=r$ கோசை β, $z=r$ கோசை γ. ஆகவே, $\hat{r}$ என்பது $\overrightarrow{OP}$ வழியே இருக்கும் அலகுக்காவியைக் குறிக்குமாயின், $\vec{r}=r\hat{r}$ ஆக இருப்பதால்,

$$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}=\hat{i}\text{ கோசை }\alpha+\hat{j}\text{ கோசை }\beta+\hat{k}\text{ கோசை }\gamma=\hat{i}l+\hat{j}m+\hat{k}n$$

ஆகும்.

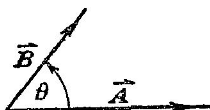
(b) காவிகளைப் பெருக்கல். எண்ணிப் பெருக்கங்கள். $\vec{A}$, $\vec{B}$ என்னும் இரு காவிகளின் **எண்ணிப்பெருக்கம்** என்பது AB கோசை θ என்னும் எண்ணி ஆகும் என வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகின்றது. இங்கு θ என்பது அவ்விரு காவிகளுக்குமிடையில் உள்ள கோணமாகும். இப்பெருக்க மானது $\{\vec{A}.\vec{B}\}$ அல்லது $(\vec{A}.\vec{B})$ என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படுகின்றது. மயக்கம் நேரிடமுடியாத சந்தர்ப்பங்களில் அடைப்புக்களை நீக்கலாம்.

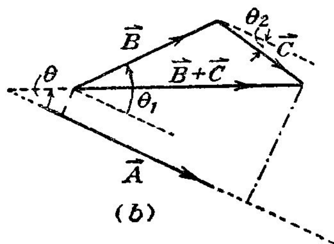
மேற்கூறியுள்ள வரைவிலக்கணத்திலிருந்து

$$\{\vec{A}\cdot\vec{B}\}=\{\vec{B}\cdot\vec{A}\}$$

என்னும் சமன்பாடு பெறப்படுகின்றது.

அன்றியும், $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ஆக அல்லது $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ஆக இருப்பின் $\{\vec{A}.\vec{B}\}$ என்பது நேராம்; $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$ ஆக இருப்பின் $\{\vec{A}.\vec{B}\}$ மறையாம். கோசை $\frac{\pi}{2}=0$ ஆக இருப்பதால், அவ்விரு காவிகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாய் இருப்பின் $\{\vec{A}\cdot\vec{B}\}=o$ ஆகும்.





படம் 1.05. இரு காவிகளின் எண்ணிப்பெருக்கம்.

மேலும், ஒரு சோடி காவிகளின் எண்ணிப்பெருக்கமானது முதற் காவியின் பருமன், அம்முதற் காவியின் திசைமீதுள்ள இரண்டாவது காவியின் எறியத்தின் பருமன் ஆகியவற்றின் பெருக்கத்துக்குச் சமன் என மேற்கூறியுள்ள வரைவிலக்கணத்திலிருந்து பெறப்படுகின்றது — படம் 1·05 ஐ ஒப்பிடுக.

அடுத்தாற்போல் $\vec{A}$ யினதும் $(\vec{B}+\vec{C})$ என்னும் காவிக்கூட்டுத் தொகையினதும் எண்ணிப் பெருக்கத்தைக் கவனிப்போம். மேற்கூறியதிலிருந்து,

$\{\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})\}=A\times\vec{A}$ மீதுள்ள $(\vec{B}+\vec{C})$ இன் எறியம் எனப் பெறுகின்றோம்.

இனி, யாதாயினுமொரு காவிமீது இரு காவிகளினது கூட்டுத்தொகையின் எறியமானது இக்காவி மீது (கூட்டுக் காவிகள் எனப்படும்) அவ்விரு காவிகளின் தனித்தனி எறியங்களின் கூட்டுத்தொகையாகும்— படம் 1·05 (b) ஐ ஒப்பிடுக.

$$\{\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})\}=AB\text{கோசை}\theta_1+AC\ \text{கோசை}\theta_2=\{\vec{A}.\vec{B}\}+\{\vec{A}.\vec{C}\}$$

அதுபோலவே,

$$\{\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}\ \ldots)\}=\{\vec{A}.\vec{B}\}+\{\vec{A}.\vec{C}\}+\{\vec{A}.\vec{D}\}+\ldots$$

தேற்றம் II. காவிச்சோடிகளிடத்தும் காவித்தொகைகளிடத்தும் எண்ணிப் பெருக்கல் முறையானது பரிவர்த்தனை, பங்கீட்டு விதிகளுக்கிணங்கும்.

ஆகையால், ஒரு சோடிக் காவித்தொகையின் எண்ணிப்பெருக்கத்தை விரிக்கப் பொது அட்சரகணிதத்தின் விதிகள் இடந்தரும்.

$$\{(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{C}+\vec{D})\}=\{\vec{A}\cdot\vec{C}\}+\{\vec{B}\cdot\vec{C}\}+\{\vec{A}\cdot\vec{D}\}+\{\vec{B}\cdot\vec{D}\}.$$

மேற்கூறியுள்ள விதியானது இரு காவிகளின் எண்ணிப்பெருக்கத்தை வேறொரு வகையில் எடுத்துரைக்க உதவுகின்றது.

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று அச்சுக்கள் வழியே $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ என்பன அலகுக்காவிகள் எனின்,

$$\vec{A}=\hat{\imath}A_x+\hat{\jmath}A_y+\hat{k}A_z.$$

இங்கு A_x, A_y, A_z என்பன அம்மூன்று அச்சுக்கள் மீது முறையே $\vec{A}$ யின் எறியங்களின் பெறுமானங்கள் ஆகும். அதுபோலவே,

$$\vec{B}=\hat{\imath}B_x+\hat{\jmath}B_y+\hat{k}B_z.$$

$$\therefore\quad\{\vec{A}\cdot\vec{B}\}=(\hat{\imath}A_x+\hat{\jmath}A_y+\hat{k}A_z)\cdot(\hat{\imath}B_x+\hat{\jmath}B_y+\hat{k}B_z)$$
$$=\hat{\imath}.\hat{}\ A_xB_x+\hat{\jmath}.\hat{\jmath}\ A_yB_y+\hat{k}.\hat{k}\ A_zB_z.$$

இங்கு $\hat{\imath}.\hat{\jmath}$ முதலியவற்றைக் கொண்டுள்ள உறுப்புக்கள் அத்தகைய எண்ணிப்பெருக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் பூச்சியம் ஆதலால் மறைந்து போகின்றன ; மேலும், ஒவ்வொரு பெருக்கத்திலும் தோன்றும் காவிகளி டையே உள்ள கோணமானது பூச்சியமாய் இருப்பதாலும், கோசை $\theta=1$ ஆனதாலும்,

$$\hat{\imath}.\hat{\imath}=\hat{\jmath}.\hat{\jmath}=\hat{k}.\hat{k}=1.$$

$$\therefore\quad\{\vec{A}.\vec{B}\}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z.$$

(l_1, m_1, n_1) என்பனவும் (l_2, m_2, n_2) என்பனவும் முறையே $\vec{A}, \vec{B}$ ஆகிய வற்றின் திசைக்கோசைனகள் ஆகவும், θ என்பது அவைகுள்ள அமைகோண மாகவும் இருப்பின்,

$$AB\ \text{கோசை}\ \theta=\{\vec{A}.\vec{B}\}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$
$$=l_1A.l_2B+m_1A.m_2B+n_1A.n_2B$$
$$=(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)AB.$$
$$\therefore\quad\text{கோசை}\ \theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2.$$

காவிப்பெருக்கங்கள்.—காவிகள் $\vec{A}$ யும் $\vec{B}$ யும், θ ஆனது அவற்றின் அமைகோணமாக, ஒன்றேடொன்று சாய்ந்திருக்கும் இரு காவிகள் ஆகுக. அவை படம் 1·06 இல் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. அப்பொழுது, அச்சோடிக் காவிகளின் **காவிப் பெருக்கம்** என்பதன் வரைவிலக்கணம் பின்வருமாறு கூறப்படுகின்றது :—

அது AB சைன்θ என்னும் பருமன் உடையவொரு மூன்றுவது காவி ($\vec{C}$) ஆகும்.

$\vec{C}$ இன் திசையை அச்சாகக் குறித்து π என்னும் கோணத்துக்குக் குறைந்ததான வலக்கைச்சுழற்சியொன்று $\vec{A}$ ஐக் கொண்டுபோய் $\vec{B}$ இன் திசையுடன் அடையச்செய்யும்.

இக்காவிப்பெருக்கமானது $[\vec{A}\times\vec{B}]$ ஆல் அல்லது $[\vec{A}_{\wedge}\vec{B}]$ ஆற் குறிக்கப் படுகிறது. இவ்வாருக

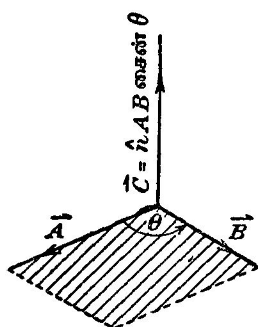
$$\vec{C}=[\vec{A}\times\vec{B}]=\hat{n}AB \text{ சைன்}\theta.$$

இங்கு $\hat{n}$ என்பது ஓர் அலகுக்காவியாகும்; அது $\vec{A}$ யையும் $\vec{B}$ யையும் கொள்ளும் தளத்துக்குச் செங்குத்தாயும், $\vec{A}$ யிலிருந்து $\vec{B}$ யை நோக்கித் திரும்பும் வலக்கைத் திருகொன்றின் பெயர்வின் அதே போக்கை உடைய தாயும் இ நக் த ம்.

காவிப்பெருக்கம் ஒன்றின் காரணிகளை இடமாற்றம் செய்வதால் அக் காவிப்பெருக்கத்தைக் குறிக்கும் காவியின் திசையானது நேர்மாருகின்றது : ஆனுல், அதன் பருமன் மாருது இருக்கும் ; அதாவது

$$[\vec{B}\times\vec{A}] = -[\vec{A}\times\vec{B}].$$

ஆகவே, காவிப்பெருக்கமானது பரிவர்த்தனை விதிக்கு இணங்காது ; எனவே நாம் காரணிகளின் ஒழுங்குமீது கவனஞ் செலுத்தவேண்டியதாகின்றது.



படம் 1.06. இரு காவிகளின் காவிப் பெருக்கம்.

மேலும், $\theta=0$ ஆயின், காவிப்பெருக்கமான $[\vec{A}\times\vec{B}]=\hat{n}AB$ சைன் $\theta=0$; இதன் மறுதலை யும் உண்மையாகும். அதாவது $[\vec{A}\times\vec{B}]=0$ ஆயின், காவிகள் $\vec{A}$ யும் $\vec{B}$ யும் ஒன்றுக் கொன்று சமாந்தரமாகும்.

$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ ஆகிய அலகுக்காவிகளிடத்து

$$\hat{\imath}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}=-\hat{\jmath}\times\hat{\imath},$$

$$\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}=-\hat{k}\times\hat{\jmath},$$

$$\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}=-\hat{\imath}\times\hat{k}.$$

சிலவேளைகளில் $[\vec{A}\times\vec{B}]$ என்னும் காவிப்பெருக்கத்தை அதில் இருக்கின்ற காவிகளின் கூறுகளால், அதாவது முறையே (A_x, A_y, A_z), (B_x, B_y, B_z) என்பனவற்ருல் எடுத்துரைத்தல் வேண்டற்பாலது. நாம் முன்பே ஏற்படுத்தியுள்ள தேற்றங்கள் மூலம் இதைச் செய்ய முடியும். இவ்வாறு, $[\vec{A}\times\vec{B}]=[(\hat{\imath}A_x+\hat{\jmath}A_y+\hat{k}A_z)\times(\hat{\imath}B_x+\hat{\jmath}B_y+\hat{k}B_z)]$

$$=\hat{\imath}(A_yB_z-B_yA_z)+\hat{\jmath}(A_zB_x-B_zA_x)+\hat{k}(A_xB_y-B_xA_y).$$

ஆகவே

$$[\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}] = \begin{vmatrix} \hat{i}, & \hat{j}, & \hat{k} \\ A_x, & A_y, & A_z \\ B_x, & B_y, & B_z \end{vmatrix}.$$

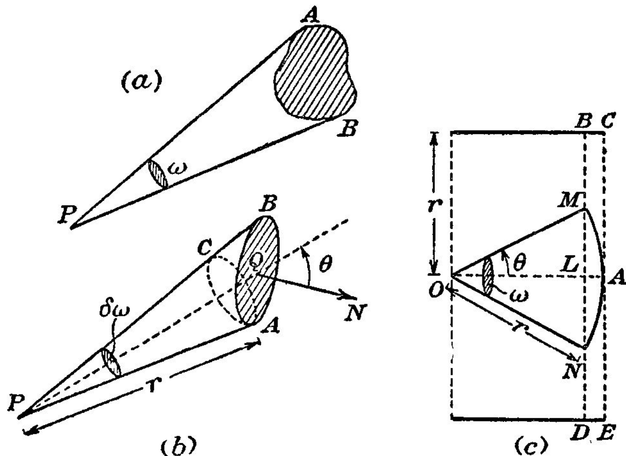
எவ்வாறு இரு காவிகளின் எண்ணிப் பெருக்கம் அவற்றின் அமை கோணத்தின் கோசைனை அக்காவிகளின் திசைக்கோசைன்கள் மூலம் எடுத்துரைக்க உதவுகின்றது என்பதை நாம் ஏற்கெனவே கண்டுகொண்டோம். காவிப்பெருக்கம் அமைகோணத்துச் சைனின் பெறுமானத்தைத் தருகின்றது. ஏனெனில், $\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}=\hat{n}AB$ சைன்θ ஆதலால், நாம்

$$A^2B^2 \text{ சைன}^2\theta = \{[\overrightarrow{A}\times B]\cdot[\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}]\}$$
$$=\hat{i}\cdot\hat{i}(A_yB_z-B_yA_z)^2+\hat{j}\cdot\hat{j}(A_zB_x-B_zA_x)^2+\hat{k}\cdot\hat{k}(A_xB_y-B_xA_y)^2$$
$$=[(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2]A^2B^2$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

$$\therefore \text{ சைன்}^2\theta=(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2.$$

திண்மக் கோணங்கள். AB என்பது [படம் 1·07 (a)] பரப்பொன்றின் வரையறையுள்ளவொரு பாகத்தின் எல்லை எனவும், P ஆனது அங்கு தரப்பட்ட



படம் 1.07. திண்மக்கோணங்களும் அவற்றை அளத்தலும்.

வொரு புள்ளி எனவும் கொள்க. P யிலிருந்து, எண்ணிக்கை பெரிதாயுள்ள ஒரு தொகை நேர்கோடுகள் அவை ஒவ்வொன்றும் இவ்வெல்லையிலுள்ள ஒரு புள்ளியூடாகச் செல்லக் கூடிய வகையில் வரையப்பட்டால் அவை கூம்

பொனறைப் பிறப்பிக்கும். P ஐ மையமாகக் கொண்ட கோளப்பரப்புத் தொடரொன்று அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது எனப் பாவித்துக் கொள்க. இக்கூம்பானது அவ்வொவ்வொரு பரப்பிலிருந்தும் பரப்பளவுகளை வெட்டும். அப்பொழுது இப்பரப்பளவுகளில ஏதோவொன்றை அப்பரப்பளவுக்கு ஒத்த கோளத்தினது ஆரையின் வர்க்கத்தாற் பிரித்து வரும் விகிதமானது PAB என்னும் கூம்புக்கு ஒரு மாறிலியாகும் எனத் தெரியவரும். தளக்கோணத்தை அளக்கும் வழக்க முறைக்கு ஒப்பாக, இவ்விகிதமானது, புள்ளி P யில் AB என்னும் பரப்பு எதிரமைக்கின்ற **திண்மக் கோணத்தின் அளவு** என்று அழைக்கப்படுகின்றது. இக்கோணம் வழக்கமாக ω என்பதாற் குறிக்கப்படும்.

இத்திண்மக்கோணவளவானது (எல்லைப்பட்ட) அடைதத வளையியை மட்டுமே சார்ந்திருககும் என்றும், அது அவ்வளையி வரையப்பட்டிருக்கிற பரப்பின் உருவைச் சார்ந்திராது என றும், மேற்கூறியுள்ள வரைவிலக்கணத் திலிருந்து தெரியவருகிறது.

இனி, AB என்பது [படம 1·06 (*b*)] ஒரு சிறு அடைத்த வளையியாய் இருக் கட்டும் ; இது P யில் எதிரமைக்கின்ற திண்மக்கோணமானது $\delta\omega$ ஆகுக. APB என்னும் கூம்பை AC என்னும் அடைத்த வளையியில் வெட்டுமாறு, P ஐ மையமாகவும் PA ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட கோளமொன்றை வரைக. AB ஆகிய மூலகப் பரப்பை Q என்பதில் வெட்டும் கூம்பின் அச்சு PQ ஆகவும், Q இலுளள அப்பரப்பின் செவ்வன் QN ஆகவும் இருக்கட்டும் θ, காட்டப்பட்ட கோணம் ஆகுக. அப்பொழுது AC $=$ AB கோசைθ PA $= r$ ஆக இருப்பின்,

$$\delta\omega = \frac{\mathrm{AC}}{r^2} = \frac{\mathrm{AB}\,\text{கோசை}\,\theta}{r^2} \quad \text{ஆகும்.}$$

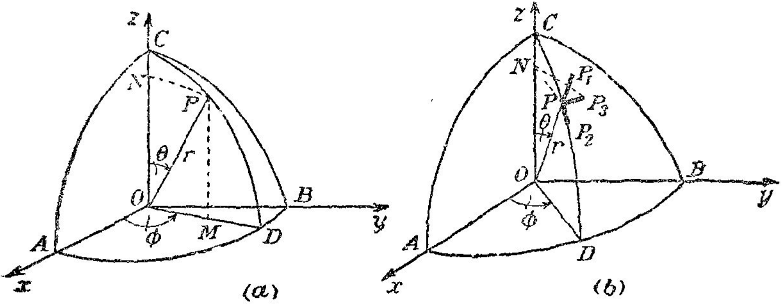
AMN ஆகிய கோளமூயானது [படம் 1·06 (c)] அதையொரு பாகமாகக் கொண்ட கோளத்தின் மையம் O இல் எதிரமைக்கின்ற திண்மக் கோணத் தின் அளவை, அம்மூயின் எல்லையை கோள மையமாகிய O விற்கு இணைத்துவரும் கூம்பின் அரையுச்சிக்கோணம் θ என்பதன் மூலம் பின்வருமாறு பெறமுடியும். ஒரு நன்கறிந்த தேற்றத்தின்படி, கோளமூய் AMN என்பதன் பரப்பளவானது OA ஐ அச்சாகவும் கோளத்தின் ஆரை r ஐ தன் ஆரை ஆகவும் உடைய செவ்வட்டவுருளையின் வளைபரப்பு BCED யின் பரப்பளவுக்குச் சமன். ஆகவே,

பரப்பளவு AMN $= 2\pi\,$AC.BC $= 2\pi . r.(\mathrm{OA}-\mathrm{OL}) = 2\pi r^2(1-\text{கோசை}\ \theta)$.
எனவே, தேவையான திண்மக்கோணமானது ω ஆயின்,

$$\omega = \frac{2\pi r^2(1-\text{கோசை}\ \theta)}{r^2} = 2\pi(1-\text{கோசை}\ \theta)$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

கோளமுனைவாள்கூறுகள் பற்றியவொரு குறிப்பு.— O என்பது, படம் 1·08 (*a*), செவ்வகவாள்கூறுத் தொகுதியொன்றின் உற்பத்தி ஆகுக. P என்பது அதன் நிலையத்தைக் குறிப்பிட வேண்டிய ஒரு புள்ளி ஆகுக.



படம் 1.08. கோள முனைவாள்கூறுகள்.

அச்சுக்களை முறையே A, B, C என்னும் இடங்களில் வெட்டுமாறு O வை மையமாகவும், $OP=r$ ஐ ஆரையாகவும், உடைய கோளமொன்றை வரைக. எவ்வாறு இக்கோளத்தின் பரப்பிலுள்ள P யின் தானத்தை விவரிக்கலாம் என்பதைச் செய்துகாட்ட வேண்டியதாகின்றது.

புள்ளியாகிய P ஐக் கொள்ளும் வரை, AOC என்னும் தளமானது OC ஐக் குறித்துக் கோணம் ϕ அளவு சுழலட்டும். இத்தளத்தின் நிலை COD ஆகுக. இத்தளத்தில் OP யை அடையும் வரை OC ஆகிய கோடு கோணம் θ அளவு சுழலட்டும். அப்பொழுது P ஆனது (r, θ, ϕ) என்னும் புள்ளியாகும். இவை P என்னும் புள்ளியின் **கோளமுனைவாள்கூறுகள் எனப்படும்.**

OD, OC என்பனவற்றின் மீது P யின் எறியங்கள் முறையே M உம் N உம் ஆயின்,

$$z = \mathrm{ON} = r \text{ கோசை } \theta,$$
$$\mathrm{OM} = r \text{ சைன்} \theta.$$

ஆனால் M என்பது $(x, y, 0)$ என்னும் புள்ளியாகும். ஆகவே,

$$\left.\begin{array}{l} x = \mathrm{OM} \text{ கோசை } \phi = r \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi, \\ y = \mathrm{OM} \text{ சைன் } \phi = r \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } \phi; \\ \text{மேலும், ஏற்கெனவே காட்டியவாறு } z = r \text{ கோசை } \theta. \end{array}\right\}$$

ஒரு கனவளவின் மூலகத்துக்குக் கோளமுனைவாள்கூறுகளாற் கோவையொன்று பெறும்பொருட்டுப் படம் 1·08 (*b*) யைக் கருதுக. r ஆனது $(r+\delta r)$ ஆகின், P என்னும் புள்ளி தளம் COD இல் P_1 இற்குப் போகும். மேலும், $PP_1 = \delta r$. θ ஆனது $\theta+\delta\theta$ ஆகின், P என்பது P_2 இற்குப் போகும். அதனால் $PP_2 = r.\delta\theta$; கடைசியாக ϕ ஆனது $\phi+\delta\phi$ ஆகின்,

P என்னும் புள்ளி P_3 இற்குப் போகும். அதனால் $PP_3 = PN\,\delta\phi = r$ சைன் $\theta\,\delta\phi$. PP_1, PP_2, PP_3 என்பனவற்றைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகமூலகமானது r^2 சைன் $\theta\cdot\delta r\,\delta\theta\,\delta\phi$ கனவளவு உடையதாகும்.

நீள்வளையங்களின் சில முக்கியமான இயல்புகள்.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ **என்னும் நீள்வளையத்தில்** $x=0$, $y=-b$ **என்னும் புள்ளியிலுள்ள வளைவாரை.** x ஐக குறித்துவகையிட்டு,

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

எனப் பெறுகின்றோம். மீண்டும் வகையிட்டு

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

எனக் காண்கிறோம்.

ஆகவே,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=0\\y=-b}}=0;$$

மேலும்,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\substack{x=0\\y=-b}}=\left[-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{y}\right]_{\substack{x=0\\y=-b}}=\frac{b}{a^2}.$$

$x=0$, $y=-b$ என்பதில் வளைவாரையானது R ஆயின்,

$$R=\left[\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right]_{\substack{x=0\\y=-b}}=\frac{a^2}{b}$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

நீள்வளையமொன்றின் ஒரு புள்ளி P யில் உள்ள தொடலிக்குக் குவியங்களிலிருந்து வரைந்துள்ள செங்குத்துக்கள் (SY, S′Y′) ஆகியவற்றின் அடிகள் துணைவட்டமீது கிடக்கின்றன என்றும், $SY.S'Y'=b^2$ என்றும் நிறுவுதல். படம் 1·09 இல் அதன் துணைவட்டத்துடன் காட்டியுள்ள நீள்வளையத்தின் மையம் C ஆகுக. அதன் குவியங்கள் S உம் S′ உம் ஆகுக. Q இல் வெட்டுமாறு S′P யையும் SY யையும் நீட்டுக. ஆரைக் காவிகள் SP உம் S′P உம் P யிலுள்ள தொடலியுடன் சமமாகச் சாய்ந்திருக்கின்றமையால் ,

$$S\hat{P}Y=Y\hat{P}Q$$

என்பது தெளிவு.

Δ SPY யும் Δ QPY யும் சர்வசமமாகும். ஆகவே SP = PQ.

மேலும் SY = YQ ; அன்றியும் CS = S′C ஆதலால், CY ஆனது S′Q இற்குச் சமாந்தரம் என்பது தெளிவாகும்.

எனவே,

$$CY = \tfrac{1}{2} S'Q = \tfrac{1}{2}(S'P + PS)$$
$$= CA = a.$$

$\therefore$ Y துணைவட்டமீது கிடக்கின்றது.

அதுபோலவே Y′ உம் இந்தவட்டமீது கிடக்கின்றது.

படம் 1·09. நீள்வளையமொன்றின் சில முக்கிய இயல்புகள்.

அடுத்து, துணைவட்டத்தை Y_1 இல் சந்திக்குமாறு, Y′S′ ஐ நீட்டுக. YY_1 ஐ இணைக்க. அப்பொழுது, $Y\widehat{Y'}Y_1 = \tfrac{1}{2}\pi$ ஆதலால், YY_1 ஆனது C ஊடாகச் செல்கின்றது.

$$\text{மேலும்,}\ S'Y_1 = SY.$$
$$\therefore\ SY.S'Y' = S'Y_1.S'Y' = A'S'.AS'$$
$$= (a - S'C)(a + S'C) = a^2 - CS^2 = b^2.$$

SY, S′Y′ என்பனவற்றை முறையே p, p' எனக் குறித்தால் மேற்படி சமன்பாடு,

$$pp' = b^2$$

என ஆகும்.

நீள்வளையமொன்றிற்கான முனைவுச்சமன்பாடு.—S உம் S′ உம், படம் 1·10 (a), $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் நீள்வளையத்தின் குவியங்கள் ஆகுக ; இங்கு, வழக்கமான குறியீட்டுமுறைப்படி CA = a, CB = b. S இனூடாக SL ஐ நீள்வளையத்தின் பேரியச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும், நீள்வளையத்தை

L இல் வெட்டுமாறும் வரைந்தால், அது அரைச் செவ்வகலம் l ஆகின்றது. e, நீள்வளையத்தின் மையவகற்சித்திறன் எனின்,

$$SL = e.SZ$$

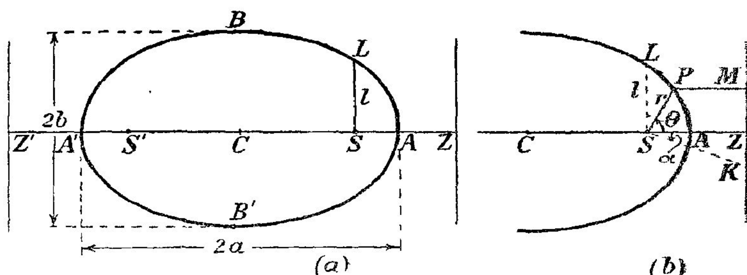
ஆகும் ; இங்கு, Z என்பது நீள்வளையத்தின் பேரியச்சானது நீட்டப்படும்போது செலுத்தலியை வெட்டும் புள்ளியாகும்.

அடுத்து, S ஐக் குறித்து (r, θ) என்னும் புள்ளி P ஆனது நீள்வளையத்தின் ஒரு புள்ளி ஆகுக, படம 1.10(b).

அப்பொழுது,

$$r = SP = e.PM = e[SZ - r \text{ கோசை } \theta]$$
$$= l - er \text{ கோசை } \theta.$$
$$\therefore\ r = \frac{l}{1 + e \text{ கோசை } \theta};$$

இது, நீள்வளையத்தின் முனைவுச் சமன்பாடாகும்.



படம் 1.10. நீள்வளையத்தின் முனைவுச்சமன்பாடு.

ஆரைக்காவி SP என்பதின் திசையளி குறித்தற்கென SK தொடக்கக் கோடு ஆகவும், SZ உடன் SK ஆக்கும் கோணம் α ஆகவும் இருப்பின், $\widehat{PSZ} = (\theta - \alpha)$ ஆகும் ; எனவே, நீள்வளையத்தின் முனைவுச்சமன்பாடு,

$$r = \frac{l}{1 + e \text{ கோசை } (\theta - \alpha)}$$

என ஆகின்றது.

வளையியின் p, r அல்லது பாதச்சமன்பாடு.—நிலையான புள்ளியொன்றிலிருந்து வளையியின் தொடலிக்கு வரைந்த செங்குத்தின் நீளத்தையும், வளையியைத் தொடலி தொடும் புள்ளிக்குரியதும் அதே நிலையான புள்ளியிலிருந்து அளக்கப்பட்டதுமான ஆரைக்காவியையும் தொடர்புபடுத்திக் கூறுகின்ற சமன்பாடானது வளையியின் **பாதச் சமன்பாடு** எனப்படும்.

குவியமொன்றைக் குறித்து, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள்வளையத்தின் பாதச் சமன்பாடானது $\frac{b^2}{p^2}=\frac{2a}{r}-1$ ஆகும் என்பதைக் காட்டுதல்.

$SP=r$, $S'P=r'$ எனவும் $SY=p$, $S'Y'=p'$ எனவும் அமையுமாறு P நீள்வளையத்தின் ஒரு புள்ளி எனின், படம் 1.11(a), அப்பொழுது ΔSPY உம் ΔS'PY' உம் வடிவொத்து இருப்பதால்,

$$\frac{p}{r}=\frac{p'}{r'}=\sqrt{\frac{pp'}{rr'}}.$$

$$\therefore\ \frac{p}{r}=\frac{b}{\sqrt{r(2a-r)}}. \qquad [\because\ pp'=b^2,\ SP+PS'=2a.]$$

இச்சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களையும் வர்க்கமாக்கி,

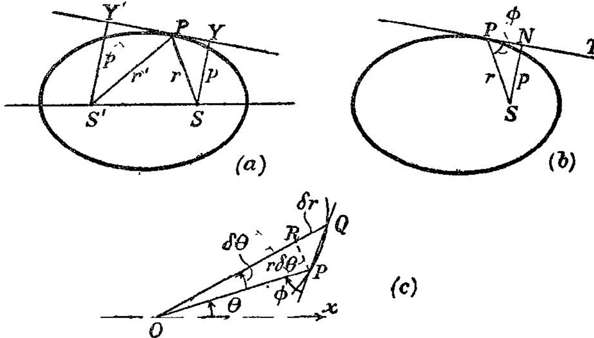
$$\frac{b^2}{p^2}=\frac{2a}{r}-1$$

எனக் காண்கின்றோம்.

இச்சமன்பாட்டை வேறொரு முறையால் பெறும்பொருட்டு, நீள்வளையத்தின் முனைவுச்சமன்பாட்டை அதாவது,

$$l=r(1+e \text{ கோசை } \theta) \qquad \text{(i) [ஒப்பிடுக – ப. 14]}$$

ஐக் கவனிப்போம்.



படம் 1.11. நீள்வளையத்தின் பாதச் சமன்பாடு.

P யிலுள்ள தொடலி PT யுடன் SP ஆக்கும் கோணம் ϕ ஆகுக. அப்பொழுது, ஒப்பிடுக – படம் 1.11 (c),

$$\text{தான் } \phi = \text{எல் } \frac{PR}{RQ} = \text{எல் } \frac{r\delta\theta}{\delta r}$$

$$= r\,\frac{d\theta}{dr} \qquad \text{ஆதலின்,}$$

$$p = r \text{ சைன்}\phi \text{ எனவும்} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

$$\text{தான் } \phi = r \frac{d\theta}{dr} \text{ எனவும்} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

ஆகின்றன, ஒப்பிடுக— படம் $1{\cdot}11(b)$.

எனவே, சமன்பாடுகள் (i), (ii), (iii) என்பனவற்றிலிருந்து θ உம் ϕ உம் நீக்கப்பெற்றால் p யையும் r ஐயும் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடானது கிடைக்கும். இங்கு,

$$1 + e \text{ கோசை } \theta = \frac{l}{r} = \frac{b^2}{ar}, \quad \because l = \frac{b^2}{a}$$

$$\therefore e \text{ சைன் } \theta \frac{d\theta}{dr} = -\frac{b^2}{ar^2}.$$

ஆனால், சைன் $\phi = \frac{p}{r}$ ஆதலால், தான் $\phi = \frac{p}{\sqrt{r^2 - p^2}}$.

$$\therefore \frac{p^2}{r^2 - p^2} = r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = r^2 \cdot \frac{b^4}{a^2 r^4} \cdot \frac{1}{e^2 \text{ சைன்}^2 \theta}$$

$$= \frac{b^4}{a^2 r^2} \cdot \frac{1}{e^2\left[1 - \left(\frac{b^2}{ar} - 1\right)^2 \div e^2\right]};$$

இது, $b^2 = a^2(1 - e^2)$ என்பதைப் பயன்படுத்தவும், சிறிதளவு சுருக்கவும்

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$$

என்பதைத் தருகின்றது.

ஃபூரியே பகுப்பு

விடையத்தின் பொது நோக்கு.—தரப்பட்ட வளையி ஒன்று

$$y = f(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

என்னும் சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படட்டும். அப்பொழுது, வளையி (i) உம்

$$y = a_0 + a_1 \text{ கோசை } x \ \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

என்னும் வளையியும் $0 < x < \pi$ என்னும் வீச்சிலுள்ள யாதேனுமிரு புள்ளிகளில் ஒன்றையொன்று வெட்டுமாறு சமன்பாடு (ii) இலுள்ள மாறிலிகள் a_0, a_1 என்பனவற்றைத் துணியலாம். அவ்வண்ணம், $0 < x_1 < \pi$, $0 < x_2 < \pi$ என்றவாறு, (x_1, y_1) உம் (x_2, y_2) உம் $y = f(x)$ என்னும் சமன்பாட்டின் யாதேனும் இரு இணைப்பெறுமானங்கள் ஆகுக. அப்பெறுமானங்களை (ii) இல் பிரதியிட்டு,

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 \text{ கோசை } x_1 \\ y_2 &= a_0 + a_1 \text{ கோசை } x_2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

என்பனவற்றைப் பெறுகிறோம்.

a_0 ஐயும் a_1 ஐயும் பெறும்பொருட்டுச் சமன்பாடுகள் (iii) போதியன வாகும். இவ்வண்ணம், தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட இரு இடங்களில் அவ்விரு வளையிகளின் பொருந்துகை கட்டாயமாகின்றது. அதேபோல, $0<x<\pi$ என்னும் வீச்சிலே தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட $(n+1)$ இடங்களில்,

$$y=f(x)$$
$$y=a_0+\sum_{n=1}^{n} a_n \text{ கோசை } nx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iv)}$$

என்னும் வளையிகளைப் பொருந்துமாறு செய்யலாம்.

எனவே $0<x<\pi$ என்னும் வீச்சு முற்றிலும், எந்தச் சார்பையும், இவ்வகையான முடிவில் தொடரொன்றுற் பிரதிசெய்ய இயலுமோ இய லாதோ என்னும் வினு எழுகின்றது. x இன் சார்பு $f(x)$ என்பது எதுவாகிலும், $0<x<\pi$ என்னும் வீச்சில் அது தனியன் பெறுமானமுடைய தாயும், முடிவுளளதாயும், தொடர்ச்சியாயும் இருக்குமாயின், அல்லது, அதேவீச்சில், முடிவான எணணில், ஒவ்வொன்றிற்கும் முன்னும் பின்னும் தொடர்ச்சியான பாகங்கள் உடைய தொடர்ச்சியில் புள்ளிகள் இருக்குமா யின, அச்சார்பை அத்தகைய முடிவில் திரிகோணகணிதத் தொடரொன்றுல் குறிககமுடியும் எனக் காட்டலாம். 0 இற்கும் π இற்கும் இடையிலுள்ள x இன் எல்லாப் பெறுமானஙகளுககும் சார்பும் தொடரும் சர்வசமமாகும்; $x=0$, $x=\pi$ என்னும் குறிப்பிட்ட இடங்களில், தரப்பட்ட சார்பானது பூச்சியமாக இராவிட்டால் x இற்கு இவ்விரு பெறுமானங்களும் விலக்கு.

கோசைன் தொடர்.— $0<x<\pi$ என்னும் வீச்சில்

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ கோசை } nx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(v)}$$

ஆகுக. இத்தொடரை உறுப்புறுப்பாகத் தொகையிடலாம் எனக் கொள் வோம். (v) இன் இருபக்கங்களையும் dx என்பதாற் பெருக்கி அவற்றை, $x=0$, $x=\pi$ என்னும் எல்லைகளுக்குள்ளே, x குறித்துத் தொகையிடுவோம். அப்பொழுது,

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx=a_0\int_0^{\pi} dx+\text{மறைகின்ற உறுப்புக்கள்}=a_0\pi.$$
$$\therefore\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx\,.$$

ஏனைய குணகங்களைக் காணும் பொருட்டு, நாம் எங்கும் கோசை $mx\,dx$ என்பதால் பெருக்கி முன்போன்று தொகையிடுவோம். அப்பொழுது,

$$\int_0^{\pi} f(x) \text{ கோசை } mx\,dx=a_0\int_0^{\pi} \text{ கோசை } mx\,dx+\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^{\pi} a_n \text{ கோசை } mx \text{ கோசை } nx\,dx.$$

ஆனால், $\int_0^\pi$ கோசை $mx\, dx = 0$; மேலும், $m \neq n$ எனின்

$$\int_0^\pi \text{கோசை } mx \text{ கோசை } nx\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi [\text{கோசை } (m-n)x + \text{கோசை } (m+n)\, x]\, dx = 0.$$

$m = n$, $n \neq 0$ எனின்,

$$\int_0^\pi \text{கோசை}^2\, nx\, dx = \tfrac{1}{2}\,\pi.$$

$$\therefore\; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \text{ கோசை } nx\, dx.$$

குணகங்களைக் காண்பதற்கான மேற்படி முறையானது (v) இலிருந்து $(n+1)$ உறுப்புக்களை எடுத்து, $y = f(x)$ என்னும் வளையியில் இருக்கின்ற சமதூரமான இடைக்கூறுகளுடைய $(n+1)$ புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளை

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{n} a_n \text{ கோசை } nx$$

என்பதில் பிரதியிட்டு, $(n+1)$ சமன்பாடுகளைப் பெறும் செய்கைக்கு ஒத்ததாகும். இவ்வண்ணம் கிடைக்கப்பெற்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து மாறிலிகள் துணியப்படுகின்றன ; கோசைன் தொடரிலுள்ள மாறிலிகள், $n \to \infty$ ஆகும்போது மேலே துணியப்பெற்ற மாறிலிகளின் எல்லைப்பெறுமானங்கள் ஆகும்.

உதாரணம்.— $0 < x < \pi$ என்னும் வீச்சில் $f(x) = x$ ஆகும்.

அப்பொழுது, $\int_0^\pi x\, dx = a_0 \int_0^\pi dx$, $\therefore\; a_0 = \frac{\pi}{2}$;

மேலும், $\int_0^\pi x$ கோசை $nx\, dx = a_n \int_0^\pi$ கோசை^{2} $nx\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot a_n$.

ஆனால், $$\int_0^\pi x \text{ கோசை } nx\, dx = \left[\frac{x}{n} \text{சைன் } nx + \frac{1}{n^2} \text{கோசை } nx\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\text{கோசை } \pi n - \text{கோசை } 0\right] = \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

$\therefore$ n ஒற்றை எண்ணுயின் $a_n = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2}$,

ஆனால் n இரட்டை எண்ணுயின் $a_n = 0$.

$$\therefore\; x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\text{கோசை } x}{1^2} + \frac{\text{கோசை } 3x}{3^2} + \frac{\text{கோசை } 5x}{5^2} + \cdots + \frac{\text{கோசை } (2n+1)\, x}{(2n+1)^2} + \cdots\right] \quad \ldots\ldots \text{(vi)}$$

இனி, (vi) ஆனது $x=0$, $x=\pi$ எனனும் பெறுமானங்களுக்கும் உண்மையாம்; ஏனெனில்

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\right]$$ எனபதாலும்

$$\pi=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[(-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\right]$$ எனபதாலும்,

$\sum_{n=1}^{\infty}$ என்னும் குறியீட்டின்கீழுள்ள தொடரானது $\frac{\pi^2}{8}$ ஆகின்றது [ப. 29 ஐ ஒப்பிடுக] எனத் தெளிக.

சைன் தொடர்.—அதேபோலவும், அதே நிபந்தனைகளுக்கிணங்கவும்,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{ சைன் } nx$$

எனக் காட்ட முடியும் ; இங்கு, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)$ சைன் $nx\,dx$ ஆகும்.

உதாரணம்.— $0<x<\pi$ என்னும் வீச்சில் $f(x)=x$

$$x=2\left[\frac{\text{சைன் } x}{1}-\frac{\text{சைன் } 2x}{2}+\frac{\text{சைன் } 3x}{3}-\ldots\right]$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{சைன் } nx}{n}$$

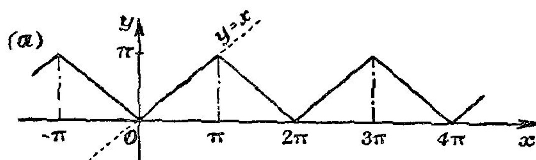
ஆகும்.

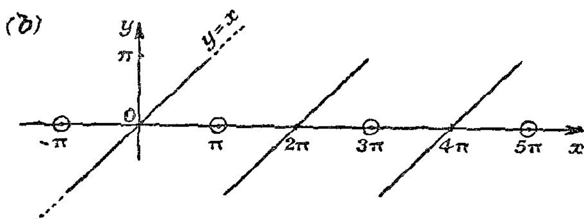
கோசைன் தொடரையும் சைன் தொடரையும் ஒப்பிடுதல். x இன் சார்பு எதுவாகினும், அதைக் குறிப்பிட்ட நிபந்தனைகளுக்கிணங்கக் கோசைன் தொடராகவோ சைன் தொடராகவோ எடுத்துரைக்கலாம் என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. இனி, $0<x<\pi$ எனபதற்கும், அத்துடன் ஒருவேளை $x=0$, $x=\pi$ என்பனவற்றிற்கும் இணங்கும் x இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் இவ்விரு தொடர்களுள் ஒவ்வொன்றும் $f(x)$ என்பதற்குச் சர்வசமன் ஆயினும், x இன் ஏனைய பெறுமானங்களிடத்து அவ்விரு தொடர்களும் குறிப்பிடத்தக்க வகையில் வேறுபடுகின்றன.

மேற்படி தொடர்கள் இரண்டும் x இன் ஆவர்த்தனச் சார்புகள் ஆகும். அவற்றின் ஆவர்த்தன காலம் 2π ஆகும். கருதப்படும் தொடரானது y ஆகுக. $-\pi<x<\pi$ என்னும் எல்லைகளுக்குள் அடங்கும் வளையித்துண்டை வரைந்தால், அதே துண்டை மீண்டும் மீண்டும் வரைந்து முழு வளையியை யும் பெறலாம்.

கோசைன் தொடரை முதலாவதாகக் கருதுக. கோசை $nx=$ கோசை $(-nx)$ ஆதலால், கோசைன் வளையியில், $-\pi<x<\pi$ என்னும் வீச்சில், x என்பதின் எந்தப் பெறுமானத்துக்கும் ஒத்த நிலைக்கூறானது x இன் நேர்ப்பெறு

மானத்துக்கு ஒத்த நிலைக்கூறுக்குச் சமன் எனத் தெளிவாகும் ; அதாவது, வளையி $y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ கோசை nx ஆனது y அச்சைக் குறித்துச் சமச்சீருள்ளதாம்.





படம் 1.12. (a) $y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{கோசை } (2n-1)x}{(2n-1)^2}$ என்னும் கோசைன் தொடரும் $y = x$ எனனும் தொடரும்.

(b) $y = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\text{சைன் } nx}{n}$ என்னும் சைன் தொடரும் $y = x$ என்னும் வளையியும்.

சைன் தொடரை மீண்டும் கருதும் பொழுது, $-$சைன் $nx =$ சைன் $(-nx)$ ஆதலால், வளையி உற்பத்தியைக் குறித்துச் சமச்சீருள்ளது எனத் தெளிவாகும் ; அதாவது, (x_1, y_1) என்பது வளையியிற் கிடக்குமாயின் $(-x_1, -y_1)$ உம் வளையியிற் கிடக்கும்.

படங்கள் 1.12 (a) இலும் 1.12 (b) இலும் முறையே

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{கோசை } (2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad y = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\text{சைன் } nx}{n}$$

என்பனவற்றிற்கு ஒத்த வளையிகள் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. சைன் தொடர் ஆனது $y = x$ என்பதை, $-\pi < x < \pi$ என்னும் வீச்சில், குறிக்கையில் கோசைன் தொடரானது அதை $0 < x < \pi$ என்னும் வீச்சில் மட்டுமே குறிக்கும். $0 < x < \pi$ என்னும் வீச்சில் இவ்விரு வளையிகளும் $y = x$ என்பதுடன் ஒன்றுகின்றன ; மேலும், $-\pi < x < 0$ என்னும் வீச்சில், சைன் தொடர் ஒன்றுகின்றபோதிலும், $-\pi < x < \pi$ என்னும் வீச்சுக்கு வெளியேயுள்ள x இன் பெறுமானங்களிடத்து ஒன்றுபடுதலில்லை.

அன்றியும், $[\pm(2n-1)\pi, 0]$ ஆகிய தனியியல்புள்ள புள்ளிகளைச் சைன் தொடர் தருகின்றது ; இங்கு, $n = 1, 2, 3, \ldots$

மேற்படி குறிப்புக்கள் கீழ்வருகின்ற பொது விதிகளை விளக்கிக்காட்டுகின்றன :

(a) $f(x)$ ஆனது இரட்டையான சார்பு, அதாவது $f(x) = f(-x)$, ஆயின் அதற்கு ஒத்த கோசைன் தொடர், $-\pi < x < \pi$ என்னும் வீச்சில், $f(x)$ இற்குச் சமன் ; இங்கு, $x = 0$ என்னும் பெறுமானம் விலக்கன்று.

(b) $f(x)$ ஆனது ஒற்றையான சார்பு, அதாவது $f(x) = -f(-x)$ ஆயின் $-\pi < x < \pi$ என்னும் வீச்சில், சைன் தொடர் அதற்குச் சமன் ; இங்கு $x = 0$ என்னும் பெறுமானத்துக்குத் தொடரானது பூச்சியம் ஆதலால் அப்பெறுமானம் விலக்காக இருக்கக்கூடும்.

ஃபூரியே தொடர்.— $-\pi < x < \pi$ என்னும் வீச்சில், $f(x)$ என்பதைக் குறிக்க வேண்டிய தொடரொன்றை விருத்திசெய்ய மேற்படி விதிகள் இடம் தருகின்றன ; ஏனெனில்,

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

என்னும் சர்வசமனிலிருந்து,

$$f(x) = x \text{ இன் இரட்டையான சார்பு } +$$
$$+ \, x \text{ இன் ஒற்றையான சார்பு}$$
$$= \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ கோசை } nx\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ சைன் } nx\right)$$

ஆதலால் எனக் கொள்க ;

இங்கு, $z = -x$ எனின்,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ கோசை } nx\, dx,$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x) \text{ கோசை } nx\, dx + \int_0^{\pi} f(-x) \text{ கோசை } nx\, dx\right],$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x) \text{ கோசை } nx\, dx + \int_0^{\pi} f(z) \text{ கோசை } (-nz)(-dz)\right].$$

எனவே,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} f(x) \text{ கோசை } nx\, dx + \int_{-\pi}^{0} f(z) \text{ கோசை } nz\, dz\right],$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ கோசை } nx\, dx. \quad \left[\because \int_1^2 \mathbf{F}(p)\, dp = \int_1^2 \mathbf{F}(q)\, dq.\right]$$

அதுபோலவே,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ சைன் } nx\, dx,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

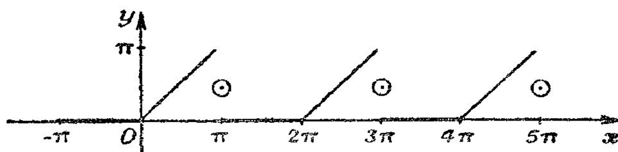
$$\therefore \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \text{ கோசை } nx + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \text{ சைன் } nx.$$

இது ∴ **பூரியே தொடர்** எனப்படும்.

$f(x)$ ஒரேயொரு சமன்பாட்டால், முழு வீச்சிலும், எடுத்துரைக்க வேண்டும் என்பது கட்டாயமன்று. எடுத்துக்காட்டாக, $-\pi < x < 0$ என்னும் வீச்சில், $y = f_1(x)$ உம் $0 < x < \pi$ என்னும் வீச்சில் $y = f_2(x)$ உம் எனின், தொகையிட்லில் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு உரிய எல்லைகளுக்குள் தொகையிடப்பட வேண்டும். அதாவது,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)\, dx + \int_{0}^{\pi} f_2(x) dx\right].$$

அவ்வண்ணமே, a_n இற்கும் b_n இற்கும்.



படம் 1·13.

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\text{கோசை } x + \frac{\text{கோசை } 3x}{3^2} + \dots\right]$$
$$+ \left[\text{சைன் } x - \frac{\text{சைன } 2x}{2} + \frac{\text{சைன் } 3x}{3} - \dots\right] \text{ எனனும் தொடா.}$$

∴ பூரியே விரிக்கு ஓர் உதாரணம்.— $-\pi < x < 0$ **என்னும் வீச்சில்** $f(x) = 0$ **உம்** $0 < x < \pi$ **என்னும் வீச்சில்,** $f(x) = x$ **உம் ஆகுக.**

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} [0]\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{4} \text{ உம்,}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} [0] \text{ கோசை } nx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \text{ கோசை } nx\, dx,$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n} \text{ சைன் } nx + \frac{1}{n^2} \text{ கோசை } nx\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \text{ உம் ஆம்.}$$

அதுபோலவே, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x$ சைன் $nx\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$\therefore\ f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\text{கோசை } x + \frac{\text{கோசை } 3x}{3^2} + \dots\right]$$
$$+\left[\text{சைன் } x - \frac{\text{சைன் } 2x}{2} + \frac{\text{சைன் } 3x}{3} - \dots\right].$$

$x = 0$ என்பதில், $y = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right] + 0 = 0,$

$$\left[\because \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},\ \text{ப. 29 ஐ ஒப்பிடுக.}\right];$$

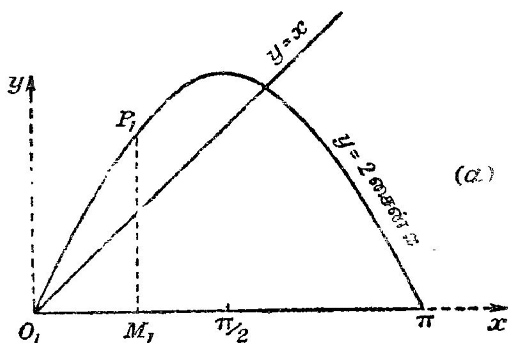
$x = \pi$ என்பதில், $y = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\right] = \frac{\pi}{2}$.

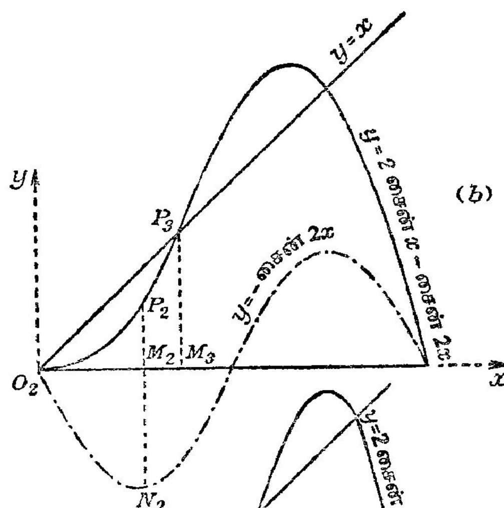
எனவே, தனியியல்புள்ள புள்ளிகள் $[(2n-1)\pi, \frac{1}{2}\pi]$ என்பனவற்றையும் இத்தொடரானது குறிக்கின்றது, படம் 1.13 ஐ ஒப்பிடுக.

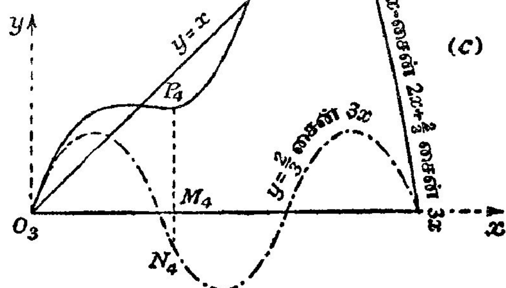
சைன் தொடரொன்றுக்கு அடுத்தடுத்த அண்ணளவாக்கம். $0 < x < \pi$ என்னும் வீச்சில், $y = x$ என்னும் வளையியுடன்

$$y = 2\left[\frac{\text{சைன் } x}{1} - \frac{\text{சைன் } 2x}{2} + \frac{\text{சைன் } 3x}{3} - \dots\right] \quad \dots\dots\dots\text{(vi)}$$

என்னும் வளையியானது பொருந்துகின்றதென ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கிறது. எவ்வாறு $y = x$ என்பதின் வரைபைத் தொடர்ந்துவரும் அண்ணளவுத் தொடரொன்றின்மூலம் வரைபுமுறைப்படி அமைக்கலாம் எனக் காட்டினால் ஒருவேளை இங்கு விவரித்துக் கூறியுள்ள பகுப்பு முறைகளை மேலும் தெளிவாக்கலாம். படம் 1.14 (*a*) ஆனது $y = 2$ சைன் x என்பதின் வரைபைக் காட்டுகின்றது. படம் 1.14 (*b*) யில் குற்றிட்ட வளையியானது $y = -$ சைன் $2x$ என்பதாகும்; P_2 என்னும் புள்ளிகளின் தொடரொன்றைப் பின்வருமாறு அமைத்து வளையி $y = 2$ சைன் $x -$ சைன் $2x$ கிடைக்கப்பெறுகின்றது. ஒவ்வொரு விளக்கப்படத்தின் x அச்சிலும் M_1, M_2 ஆகிய ஒத்த புள்ளிகளில் நிலைக்கூறுகள் வரையப்படுகின்றன. M_2 ஊடாகச் செல்லுகின்ற நிலைக்கூறானது வளையி $y = -$ சைன் $2x$ ஐ N_2 என்பதில் வெட்டினால், அப்பொழுது N_2 ஐ மையமாகவும் $N_2P_2 = M_1P_1$ ஐ ஆரையாகவும் பயன்படுத்தி, நிலைக்கூற்றை P_2 இல் வெட்டுமாறு, வில்லொன்று வரையப்படுகிறது. படம் 1·14 (*c*) ஆனது வளையி $y = 2$ சைன் $x -$ சைன் $2x + \frac{2}{3}$ சைன் $3x$ என்பதைக் காட்டுகிறது; இங்கு, N_4P_4 ஐ M_3P_3 இற்குச் சமனாக்கி வளையிக்குரிய புள்ளி P_4 ஆனது பெறப்படுகிறது; இங்கு பயன்படுத்தியுள்ள குறிப்பீடு தானே விளங்கும். எவ்வாறு, தரப்பட்ட வீச்சில், நேர்கோடு $y = x$ என்பதை விரைவில் அணுகும் வளையியொன்றைத் தருதற்குச் சைன்தொடரின் ஒருசில உறுப்



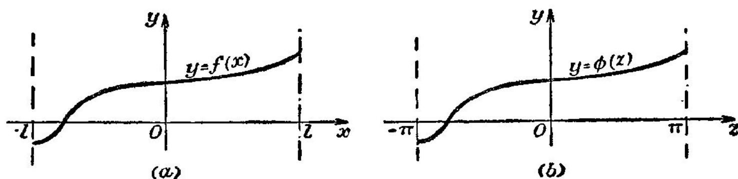




படம் 1.14. $0 < x < \pi$ என்னும் வீச்சில், $y = x$ என்பதைக் குறிக்கும் சைன்தொடரின் தொடர்ந்துவரும் அண்ணளவுகள்.

புக்களே போதியனவாகும் என்பதை இம்மூன்று வளேயிகள் தெளிவாக்கு கின்றன. எனினும், அவ்வீச்சுக்கு வெளியே வளேயிகள் அமைக்கப்படு மாயின் பொருந்துதல் ஒருபோதும் நேராது.

வீச்சை விரித்தல்.—வழக்கில், x இற்கு $-\pi < x < \pi$ என்னும் வீச்சு அரிதாம்; ஆகவே, பகுப்பைப் பொதுவாகப் பிரயோகிக்க வேண்டின் அக்குறுகிய எல்லேகளே அகலிக்க வேண்டிவரும். ஏற்கெனவே கருதி



படம் 1.15. ஃபூரியே பகுப்பு : வீச்சை விரித்தல்.

யுள்ள வகையைச் சேர்ந்த x இன் சார்பொன்றை, $-l < x < l$ என்னும் வீச்சில், அச்சார்புடன் ஒன்றுபடும் திரிகோணகணிதத் தொடரொன்ருக விரித்தல் வேண்டும் எனக் கொள்க, படம் 1.15 (a) ஐ ஒப்பிடுக. $x = -l$ ஆயின் $z = -\pi$; $x = l$ ஆயின் $z = \pi$ என்னும் நிபந்தனே களுக்கிணங்கும் z என்னும் புது மாறியொன்றைப் புகுத்துவோம். அப்பொழுது,

$$\frac{x}{z} = \frac{l}{\pi} \text{ அல்லது } z = \frac{\pi x}{l}.$$

அதே வீச்சில், $\phi(z)$ ஆனது வளேயியைக் குறிக்கட்டும், படம் 1.15 (b) ஐ ஒப்பிடுக. அப்பொழுது x மாறியாக இருக்க $f(x)$ ஆனது வளேயியின் சமன்பாடாயின்

$$\phi(z) = y = f(x);$$

இங்கு, y ஆனது இரு வரிப்படங்களிலும் ஒரே நிலேக்கூறுகும்.

இனி, $\phi(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{ கோசை } nz + b_n \text{ சைன் } nz)$ ஆயின், ஏற்கெனவே ஏற்படுத்தியுள்ள முறைகளால்

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(z)dz \text{ எனவும், } a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(z) \text{ கோசை } nz\, dz \text{ எனவும்}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(z) \text{ சைன் } nz\, dz \text{ எனவும்}$$

பெறுகின்ருேம்.

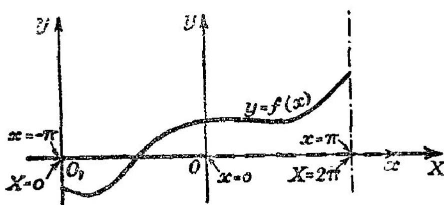
மேலும் $\phi(z) = f(x)$ ஆதலால்

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \text{ கோசை } \frac{n\pi}{l}x + b_n \text{ சைன் } \frac{n\pi}{l}x\right);$$

இங்கு, a களையும் b களையும் கணிக்கும்பொருட்டு நாம் இப்பொழுது $\phi(z)=f(x)$, $\delta z=\frac{\pi}{l}\delta x$ என்பனவற்றைப் பயன்படுத்துகிறோம் ; விளைவாக :

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\frac{\pi}{l}\,dx=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(x)\text{ கோசை }\frac{n\pi}{l}x\cdot\frac{\pi}{l}\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\text{ கோசை }\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$



படம் 1.16. பூரியே பகுப்பு : வீச்சு $0<X<2\pi$.

அதுபோலவே,

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\text{ சைன் }\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

$0<X<2\pi$ என்னும் வீச்சைப் பற்றிய குறிப்பு.— $-\pi<x<\pi$ என்னும் வீச்சில் $y=f(x)$ எனக் கொள்க. O என்னும் உற்பத்தியைப் புதியவோர் உற்பத்தி O_1 இற்கு இடம் மாற்றி வைப்போம், படம்1.16; அதாவது, பழைய உற்பத்தியைக் குறித்துப் புது உற்பத்தியானது $x=-\pi$, $y=0$ ஆகும். (x, y) என்னும் புள்ளியொன்றுக்குப் புது அச்சுக்களைக் குறித்து வரும் ஆள்கூறுகள் (X, y) ஆகுக. இப்பொழுது, வீச்சானது $0<X<2\pi$ ஆகும் ; மேலும் $y=F(X)$.

$$y=a_0+a_1\text{ கோசை }x+a_2\text{ கோசை }2x+\ldots$$
$$+\,b_1\text{ சைன் }x+b_2\text{ சைன் }2x+\ldots \qquad \text{எனின்,}$$

$$y=a_0+a_1\text{ கோசை }(X-\pi)+a_2\text{ கோசை }2(X-\pi)+\ldots$$
$$+\,b_1\text{ சைன் }(X-\pi)+b_2\text{ சைன் }2(X-\pi)+\ldots$$
$$=a_0-a_1\text{ கோசை }X+a_2\text{ கோசை }2X-\ldots$$
$$+\,(-b_1)\text{ சைன் }X+b_2\text{ சைன் }2X-\ldots \qquad \text{ஆகும் ;}$$

எனவே, விரியின் வடிவம் மாறவேயில்லை.

$$F(X)=A_0+A_1\text{ கோசை }X+A_2\text{ கோசை }2X+\ldots$$
$$+\,B_1\text{ சைன் }X+B_2\text{ சைன் }2X+\ldots$$

எனின், a களேயும் b களேயும் காணும்பொருட்டு

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(X-\pi)dX$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(X)\,dX = A_0$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

மேலும்,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ கோசை } nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(X-\pi) \text{ கோசை } n(X-\pi)dx$$
$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^{2\pi} F(X) \text{ கோசை } nX\,dX.$$
$$\therefore\ A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(X) \text{ கோசை } nX\,dX.$$

அதுபோலவே B_n இற்கும்.

உதாரணம்.— $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ எனின்,

$$\frac{\pi}{4} = \text{கோசை } x - \tfrac{1}{3} \text{ கோசை } 3x + \tfrac{1}{5} \text{ கோசை } 5x - \dots$$

எனக் காட்டுக.

முதன்முதலாக, $0 < X < \pi$ என்னும் வீச்சில், $\frac{\pi}{4}$ என்பதைக் குறிக்கும் விரித்தொடரொன்றைக் கருதுக.

$$\frac{\pi}{4} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ கோசை } nX \qquad \text{ஆகுக.}$$

அப்பொழுது, $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi;$$

$a_n = 0$ என இது உடனே உணர்த்துகிறது; இதை எளிதில் மெய்ப்பிக்கலாம். ஆகவே,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ சைன் } nX$$

என எழுதுவோம்.

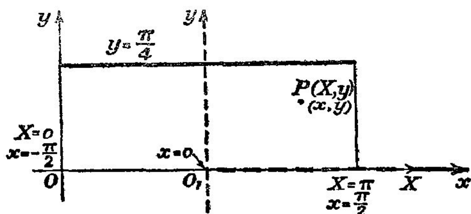
அப்பொழுது,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \text{ சைன் } nX\ dX = \frac{1}{2n}\left[-\text{ கோசை } nX\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2n}\,[\text{கோசை } n\pi - \text{கோசை } 0]$$
$$= \frac{1}{n} \text{ சைன் } \tfrac{1}{2}n\pi \text{ சைன் } \tfrac{1}{2}n\pi$$
$$= \frac{1}{n} \quad n \text{ ஒற்றை எண்ணுயின்,}$$
$$= 0 \quad n \text{ இரட்டை எண்ணுயின்.}$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4} = \text{சைன் } X + \tfrac{1}{3} \text{ சைன் } 3X + \tfrac{1}{5} \text{ சைன் } 5X + \dots$$

இனி, O இலிருந்து O_1 இற்கு உற்பத்தியை இடமாற்றிவைக்க; படம் 1.17 ஐ ஒப்பிடுக; மேலும், பழைய தொகுதியில் (X, y) என இருந்த புள்ளி P யின் புது ஆள்கூறுகள் (x, y) ஆகுக. அப்பொழுது,

$$x+\frac{\pi}{2}=\mathrm{X}.$$



படம் 1.17.

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}=\text{சைன் }\mathrm{X}+\tfrac{1}{3}\text{ சைன் }3\mathrm{X}+\tfrac{1}{5}\text{ சைன் }5\mathrm{X}+\dots$$

$$=\text{சைன் }(x+\frac{\pi}{2})+\tfrac{1}{3}\text{ சைன் }3\,(x+\frac{\pi}{2})+\tfrac{1}{5}\text{ சைன் }5\,(x+\frac{\pi}{2})+\dots$$

$$=\text{கோசை }x-\tfrac{1}{3}\text{ கோசை }3x+\tfrac{1}{5}\text{ கோசை }5x-\dots;$$

இதனையே நிறுவ வேண்டியிருந்தது.

சில முதன்மையான தொடர்களும் அவற்றைக் கூட்டலும். (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ என்னும் தொடர்கள் பௌதிகவியற் பிரச்சினைகளில் அடிக்கடி தோன்றுகின்றன அவற்றின், பெறுமானங் கணிப்பது பின்வருமாறு.

$n\neq 0$ எனின், பகுதிகளாகத் தொகையிட்டு

$$\int_0^{\pi}x^2\text{ கோசை }nx\,dx=2\left[\frac{x\text{ கோசை }nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=(-1)^n\frac{2\pi}{n^2}$$

என உடனடியாகக் காட்டப்படுகின்றது. $-\pi<x<\pi$ என்னும் வீச்சில் x^2 என்பதைக் கருதுக. அப்பொழுது,

$$f(x)=x^2=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ கோசை }nx.$$

மேற்படி கோவையிலுள்ள குணகங்களின் பெறுமானக்கணிப்புக்கு ஏற்கெனவே உறுதிப்படுத்தியுள்ள விதிகளின்படி

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=a_0.\,2\pi.$$

$$\therefore\quad a_0=\frac{\pi^2}{3}.$$

மேலும், $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2$ கோசை $nx\,dx = (-1)^n.\ \frac{4}{n^2}$.

$$\therefore\quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\frac{1}{1^2}\text{ கோசை } x + \frac{1}{2^2}\text{ கோசை } 2x - \frac{1}{3^2}\text{ கோசை } 3x + \ldots\right].$$

$x = 0$ என இட்டால்

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right\} - \left\{\frac{2}{2^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{2}{6^2} + \ldots\right\}\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + 4\left(\frac{2}{2^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\quad \therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

எனப் பெறுகின்றேம்.

மேலும், $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots - \frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\quad \text{ஆதலின்,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$ என்பதைப் பெறுகின்றேம்.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ என்னும் தொடரும் பௌதிகவியலில் அடிக்கடி வருகின்றது; அதன் பெறுமானக் கணிப்பானது ஃபூரியே தொடர்ப் பிரயோகத்தின் இன்னுமொரு பயனுள்ள எடுத்துக்காட்டாகிறது.

$$\int_0^\pi x^4\text{ கோசை } nx\,dx = \left[x^4\frac{\text{சைன் } nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{4}{n}\int_0^\pi x^3\text{ சைன் } nx\,dx$$

எனப் பெறுகின்றேம்; $n \neq 0$ எனின், இதுபோன்ற இன்னும் சில ஒடுக்கங்களின்பின், இது

$$(-1)^n\left[\frac{4\pi^3}{n^2} - \frac{24\pi}{n^4}\right],\quad \ldots\quad \text{இற்குச் சமனாகும்.}$$

$n \neq 0$ எனின், $\int_0^\pi x^2$ கோசை $nx\,dx = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}$ ஆதலின்,

$$\int_0^\pi (x^4 - 2\pi^2 x^2) \text{ கோசை } nx\,dx = (-1)^{n-1} \frac{24\pi}{n^4}$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

அடுத்ததாக, $-\pi < x < \pi$ என்னும் வீச்சில், $x^4 - 2\pi^2 x^2$ என்பதை ஃபூரியே தொடரொன்றாக விரிப்போம். வழக்கம்போல்,

$$x^4 - 2\pi^2 x^2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ கோசை } nx$$

எனப் பெறுகின்றோம் ; இங்கு காட்டப்படவேண்டிய சார்பு இரட்டையாதலின் சைன் உறுப்புக்கள் சேர்க்கப்படவில்லை.

இனி, $$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^4 - 2\pi^2 x^2)\,dx = -\frac{7}{15}\pi^4.$$

மேலும்,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \text{ கோசை } nx\,dx = 2\int_0^\pi x^4 \text{ கோசை } nx\,dx$$

$$= 2\left[(-1)^n\left(\frac{4\pi^3}{n^2} - \frac{24\pi}{n^4}\right)\right];$$

அன்றியும், $-2\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} x^2$ கோசை $nx\,dx = (-1)\,(-1)^n \frac{8\pi^3}{n^2}$.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} (x^4 - 2\pi^2 x^2) \text{ கோசை } nx\,dx = (-1)^n \left(\frac{-48\pi}{n^4}\right).$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^4 - 2\pi^2 x^2) \text{ கோசை } nx\,dx = (-1)^n \left(\frac{-48}{n^4}\right).$$

$$\therefore x^4 - 2\pi^2 x^2 = -\frac{7}{15}\pi^4 + 48 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\text{கோசை } nx}{n^4},$$

$[-\pi < x < \pi]$. $x = 0$ எனப் போடுக. அப்பொழுது,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} = \frac{7}{15.48}\pi^4.$$

ஆனால், $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} + 2\left[\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \dots + \frac{1}{(2n)^4} + \dots\right]$$

$$= \sum_{n-1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} + \frac{1}{2^3}\left[\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots\right].$$

$$\therefore \frac{7}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^4} = \frac{7}{15.48}\pi^4; \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

பிரயோக பௌதிகவியலின் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள் சில.

முதல் வரிசைச் சமன்பாடுகள்.

ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்.—P உம் Q உம் ஒன்றில் x இன் சார்புகளாய் அல்லது மாறிலிகளாய் இருக்கும்பொழுது

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

என்பது முதல் வரிசையைச் சேர்ந்த ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடு எனப்படும். Q=0 எனின், (i) ஐ

$$\frac{dy}{y}=-\mathrm{P}\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

என எழுதலாம் ;

இதன் தொகையீடு

$$\text{மட}_e\; y=-\int \mathrm{P}dx+\mathrm{A}$$

என்பதைத் தருகின்றது, இங்கு A ஆனது ஏதேனுமொரு விரும்பிய மாறிலி ஆகும் ; அது மட$_e$ u என்க.

$$\therefore\ \frac{y}{u}=\text{அடுக்கு}\left(-\int\mathrm{P}dx\right),\ \text{அதாவது } y=u\ \text{அடுக்கு}\left(-\int\mathrm{P}\,dx\right)\ldots\text{(iii)}$$

Q ஆனது பூச்சியத்திலிருந்து வேறுபடும்போதும் (iii) ஆனது y ஐ இன்னும் தரும் எனக் கொள்கிறோம் ; ஆனால், இப்பொழுது, u ஆனது x இன் சார்பொன்றாகும் எனக் கருதுகிறோம்.

$$\text{இனி, } \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dz}\left\{u\ \text{அடுக்கு}\ (-z)\right\}.\ \frac{dz}{dx} \qquad \left[\text{இங்கு, } z=\int\mathrm{P}\,dx\right]$$

$$=\left[\frac{du}{dz}\ \text{அடுக்கு}\ (-z)-u\ \text{அடுக்கு}\ (-z)\right]\mathrm{P} \quad \left[\because\ \frac{dz}{dx}=\mathrm{P}\right]$$

$$=\left[\frac{du}{dx}-u\,\mathrm{P}\right]\ \text{அடுக்கு}\left(-\int\mathrm{P}dx\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\text{(iv)}$$

(i) இல் y இற்கும் அதன் முதற்பெறுதிக்கும் பிரதியிட,

$$\left[\frac{du}{dx}-u\mathrm{P}\right]\text{அடுக்கு}\left(-\int\mathrm{P}dx\right)+\mathrm{P}u\ \text{அடுக்கு}\left(-\int\mathrm{P}\,dx\right)=\mathrm{Q}.$$

$$\therefore\frac{du}{dx}=\mathrm{Q}\ \text{அடுக்கு}\left(\int\mathrm{P}dx\right).$$

$$\therefore\ u=\mathrm{B}+\int\mathrm{Q}\ \text{அடுக்கு}\left(\int\mathrm{P}\,dx\right)dx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(v)}$$

இங்கு, B ஆனது ஏதேனுமொரு விரும்பிய மாறிலி ஆகும்.

$$\therefore y = u \text{ அடுக்கு} \left(-\int P dx\right)$$
$$= B \text{ அடுக்கு}\left(-\int P dx\right) + \text{அடுக்கு}\left(-\int P dx\right)\int Q \text{ அடுக்கு}\left(\int P dx\right) dx$$

என்பது வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் மூலி ஆகும்.

மேற்படி கணித்தலானது

$$\frac{dy}{dx} + Py = \frac{du}{dx} \text{ அடுக்கு}\left(-\int P dx\right)$$

என்றும், அதன் பயனாக

$$\text{அடுக்கு}\left(\int P dx\right)\left(\frac{dy}{dx} + Py\right)$$

ஒரு பூரண வகையீடு, அதாவது $\frac{du}{dx}$ ஆகும் என்றும் காட்டுகின்றது.

அடுக்கு $\left(\int P dx\right)$ என்னும் கணியமானது **தொகையீட்டுக் காரணி** எனப்படுகின்றது ; ஏனெனில், $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்னும் சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்களும் இக்காரணியால் பெருக்கப்படின் எளிய தொகையீட்டால் தீர்க்கக்கூடிய சமன்பாடொன்றைப் பெறுகிறோம். தொகையீட்டுக் காரணி (தொ.கா.) ஒன்று பயன்படுத்தப்பட்டிருந்தால் சமன்பாடு (i)

$$\frac{d}{dx}\,(y \times \text{தொ.கா.}) = Q \times \text{ - தொ.கா.}$$

என்னும் வடிவத்தை ஏற்றுக்கொள்கின்றது என்பதை ஞாபகத்தில் வைத்துக்கொள்வது முதன்மையாம். எனவே, $\int (Q \times \text{தொ. கா.})\, dx$ என்பதைத் தொகையிட முடியுமாயின், தீர்வை உடனடியாகப் பெறமுடிகின்றது.

உதாரணம்.—

$$\frac{dy}{dx} + y \text{ கோசை } x = \tfrac{1}{2} \text{ சைன் } 2x.$$

இங்கு $P =$ கோசை x; மேலும் $\int$ கோசை$x\, dx =$ சைன் x ஆதலின், தொகையீட்டுக் காரணியானது அடுக்கு. சைன் x ஆகின்றது.

$$\therefore y \text{ அடுக்கு. சைன் } x = B + \int \text{சைன் } x \text{ கோசை } x \text{ அடுக்கு (சைன் } x)\, dx$$

$$= B + \int \theta \text{ அடுக்கு } (\theta)\, d\theta \qquad [\text{இங்கு } \theta = \text{சைன் } x]$$

$$= B + \theta \text{ அடுக்கு } (\theta) - \int \text{அடுக்கு } (\theta)\, d\theta$$

$$= B + (\text{சைன் } x - 1) \text{ அடுக்கு (சைன் } x).$$

மாறுக் குணகங்களுடைய இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்

செயலி D யும் அதன் இயல்புகளும்.—*மாறுக் குணகங்களுடைய இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள், அதாவது* a *உம்* b *உம் மாறிலிகளாகவும்* $\phi(x)$ *என்பது தனிய* x *இன் சார்பு ஆகவும் உடைய*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = \phi(x)$$

போன்ற சமன்பாடுகள் என்பனவற்றின் தீர்த்தலை விவரிக்குமுன் வகையிடுதல் தொகையிடுதல் என்பன பற்றிய சில தேற்றங்களின் உண்மையை உறுதிப்படுத்த வேண்டியதாகின்றது.

$Dy = \frac{dy}{dx}$ *என்றவாறு,* D *என்பது* $\frac{d}{dx}$ *என்னும் செயலியைக் குறிக்கட்டும்;* *அப்பொழுது,* D^2 *என்பது* $\frac{d^2}{dx^2}$ *என்னும் செயலியைக் குறிக்கின்றது;* *எனவே,* $D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}$. *அதுபோலவே தொடர்ந்து செய்யின்,*

$$D^ny = \frac{d^ny}{dx^n}$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

u *உம்* v *உம்* x *இன் வகையிடத்தக்க சார்புகள் ஆகவும்,* m *உம்* n *உம் நேர்முழுவெண்கள் ஆகவும் இருப்பின்,*

$$D(u + v) = Du + Dv,$$
$$D^mD^nu = D^{m+n}u = D^nD^mu$$

எனப் பெறுவோம்; மேலும், κ *ஒரு மாறிலி எனின்,*

$$D(\kappa u) = \kappa Du$$

ஆகும்.

மேற்படி செய்திகளிலிருந்து செயலி D *ஆனது அட்சரகணிதத்தின் அடிப்படை விதிகளுக்கு இணங்கும் எனத் தெரியவருகின்றது; எனினும்,* x *இன் சார்புகளுடன்* D *ஆனது மாறியமையாது என்பது கவனித்தற்பாலது. அதாவது,* $D(xy)$ *என்பது* $x(Dy)$ *என்பதற்குச் சமன் அன்று; ஆனல், அது* $y + xDy$ *என்பதற்குச் சமன் ஆகும்.*

மேற்படி இயல்புகளைப் பயன்படுத்துமுகத்தால்

$$\frac{du}{dx} + \alpha u = (D + \alpha)u,$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2 u = (D^2 - \alpha^2)u,$$
$$= (D - \alpha)(D + \alpha)u,$$
$$= (D + \alpha)(D - \alpha)u,$$

எனவும், $$\frac{d^2u}{dx^2} - (\alpha + \beta)\frac{du}{dx} + \alpha\beta u = (D - \alpha)(D - \beta)u$$

எனவும் எழுதிக்கொள்ளலாம்; இங்கு, α உம் β உம் மாறிலிகள் ஆகும். இக்கோவைகளை விளக்குமிடத்துக் கடைசிச் சமன்பாட்டில் தோன்றும் $(D - \alpha)$ போன்ற காரணியொன்று அதைப் பின்தொடர்கின்ற எல்லாச் சார்புகளையும் பாதிக்கும் என்பது குறித்தற்பாலது.

நேர்மாறு செயலி D^{-1}.—D^{-1} என்னும் குறியீடானது தொகையிடலுக்கு ஒத்ததாகும் ; ஏனெனில், $v = Du$ எனின், $u = D^{-1}v$ என்று எழுதி,

$$v = Du = D.D^{-1}v.$$

என்பதாலேயாம்.

எனவே, D^{-1} எத்தகையது எனின், அது $D^{-1}v$ என்பது விளையுமாறு v மீது ஆற்றி, அப்புதுப் பெறுமானம் மீது D ஆற்றின், பழைய பெறுமானம் v கிடைக்கப்பெறும். இங்ஙனம், D^{-1} என்னும் செய்கையானது தொகையிடலுக்கு ஒத்ததாகும்; ஆனால், இச்செயலிகளின் சிறப்பான நோக்கு முழுத் தொகையீடு அன்று; அது ஏதாவதொரு தொகையீடு ஆதலின், தொகையிடுதலில் வரும் விரும்பிய மாறிலி பூச்சியம் ஆகப் போடப்படுகின்றது. எனவே,

$D^{-1}(2x) = x^2$; D^{-1} கோசை x = சைன் x ; D^{-1} அடுக்கு αx = α^{-1} அடுக்கு αx ஆகும்.

கருதும் நேர்மாறுன செய்கையை மீண்டும் பயன்படுத்துமிடத்து அதை $D^{-2}u$ எனக் குறிக்கிறேம்; அது x ஐக் குறித்து u வை இருமுறை தொகையிடுதலின் விளைவாகும்; இங்கு, எதேச்சை மாறிலிகள் தவிர்க்கப்படுகின்றன. எனவே,

$$D^{-2}(2x) = D^{-1}(x^2) = \tfrac{1}{3}x^3;$$

அன்றியும், D^{-2} அடுக்கு $\alpha x = D^{-1}\{\alpha^{-1}$ அடுக்கு $\alpha x\} = \alpha^{-2}$ அடுக்கு αx.

அதுபோலவே, $$D^{-n}x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

எனவே, மேலே காட்டியுள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கும் வகையில், m, n என்பனவற்றின் எல்லா முழுவெண் பெறுமானங்களிடத்தும்,

$$D^mD^nu = D^{m+n}u.$$

$(D - \alpha)^{-1}$ என்னுஞ் செயலி.—குறியீடுமுகமாக $(D - \alpha)^{-1}$ என்பதால் குறிக்கப்படுகின்ற செயலியானது $(D - \alpha)$ என்னுஞ் செயலியின் பிற்பட்ட பிரயோகத்தால் புறமாற்றப்படுகிறதொன்றுகும் ; இங்கு, α ஆனது ஏதேனுமொரு மாறிலியாகும்.

இங்ஙனம்,

$$(D - \alpha)[(D - \alpha)^{-1}u] = u;$$

இதை $$(D - \alpha)\ v = u$$

என எழுதலாம் ; இங்கு $$v = (D - \alpha)^{-1}u.$$

இனி, D என்பதைப் பொதுவெண் எனக் கருதி $(D-\alpha)^{-1}$ என்பதை விரித்தால்

$$(D-\alpha)^{-1}=\frac{1}{-\alpha\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)}=-\frac{1}{\alpha}\left[1+\frac{D}{\alpha}+\frac{D^2}{\alpha^2}+\frac{D^3}{\alpha^3}+\ldots\right].$$

எனப் பெறுகிறோம்.

இவ்வண்ணம்

$$(D-\alpha)^{-1}x^2=\frac{(-1)x^2}{\alpha\left(1-\frac{D}{\alpha}\right)}=-\left[\frac{I}{\alpha}+\frac{D}{\alpha^2}+\frac{D^2}{\alpha^3}+\frac{D^3}{\alpha^4}+\ldots\right]x^2$$

$$=-\left[\frac{x^2}{\alpha}+\frac{2x}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^3}+0\right].$$

இத்தகைய செய்கைகளிடத்து விளைவு எப்பொழுதும் முடிவுள்ளதொன்றாகும்; ஏனெனில், $n>p$ எனின் பொதுவாக $D^nx^p=0$ ஆதலால் என்பதேயாம்.

D என்னுஞ் செயலியைப் பற்றிய பொதுத் தேற்றங்கள்.—(*a*) $\phi(x)$ என்பது x இன் விகிதமுறு சார்பொன்றாயின், அதாவது

$$\phi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$
$$+b_1x^{-1}+b_2x^{-2}+b_3x^{-3}+\ldots$$

என்போமாயின்,

$$\phi(D) \text{ அடுக்கு } \lambda x=\phi(\lambda) \text{ அடுக்கு } \lambda x$$

ஆகும் என்பதை நிறுவுதல்; இங்கு a களும் b களும் x ஐச் சாராதவை.

இனி, D அடுக்கு $\lambda x=\lambda$ அடுக்கு λx;

மேலும், D^{-1} அடுக்கு $\lambda x=\lambda^{-1}$ அடுக்கு λx.

∴ n நேரெண்ணோ மறையெண்ணோ எதுவாகினும், D^n அடுக்கு $\lambda x=\lambda^n$ அடுக்கு λx. ஆகையால்,

$$\phi(D) \text{ அடுக்கு } \lambda x=[a_0+a_1D+a_2D^2+a_3D^3+\ldots$$
$$+b_1D^{-1}+b_2D^{-2}+b_3D^{-3}\ldots] \text{ அடுக்கு } \lambda x$$
$$=(a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+a_3\lambda^3+\ldots$$
$$+b_1\lambda^{-1}+b_2\lambda^{-2}+b_3\lambda^{-3}+\ldots) \text{ அடுக்கு } \lambda x$$
$$=\phi(\lambda) \text{ அடுக்கு } \lambda x. \qquad \text{(i)}$$

(*b*) x இன் ஏதேனுமொரு விகிதமுறு சார்பு X ஆகுமிடத்து

$$\phi(D)\{\text{அடுக்கு } \lambda x.\, X\}=\text{அடுக்கு } \lambda x.\,\phi(D+\lambda)X$$

என்பதை நிறுவுதல்.

இங்கு, $D\{\text{அடுக்கு } \lambda x.\, X\}=\lambda \text{ அடுக்கு } \lambda x.\, X+\text{அடுக்கு } \lambda x.\, DX$

$$=\text{அடுக்கு } \lambda x.\,(D+\lambda)X.$$

இதை $\text{அடுக்கு }(-\lambda x)D\{\text{அடுக்கு } \lambda x.\, X\}=(D+\lambda)X \qquad \text{(ii)}$

என எழுதலாம் ; எனவே, அடுக்கு $\lambda x.X$ இன் மீது [அடுக்கு $(-\lambda x).D$] என்பதால் ஆற்றிவரும் விளைவானது $(D+\lambda)X$ என்பதைத் தருகிறது.

மேலும், D^2(அடுக்கு $\lambda x.X) = D\{\lambda$ அடுக்கு $\lambda x.X +$ அடுக்கு $\lambda x.DX\}$

$$= \lambda^2 \text{ அடுக்கு } \lambda x.X + \lambda \text{ அடுக்கு } \lambda x.DX + \lambda \text{ அடுக்கு } \lambda x.DX + \text{ அடுக்கு } \lambda x.D^2X$$
$$= \text{அடுக்கு } \lambda x.(D+\lambda)^2X.$$

n ஒரு நேரெண்ணாயிருப்பின், இப்பேறுகள்

$$D^n(\text{அடுக்கு } \lambda x.X) = \text{அடுக்கு } \lambda x.(D+\lambda)^nX \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

என உணர்த்துகின்றன. இது சரி எனக் கொள்ளின் நாம் மீண்டுஞ் செய்கையால்,

$$D^{n+1}(\text{அடுக்கு } \lambda x.X) = D\{\text{அடுக்கு } \lambda x.(D+\lambda)^nX\}$$
$$= \text{அடுக்கு } \lambda x.(D+\lambda)\{(D+\lambda)^nX\}, \text{ (ii) ஐப் பயன்படுத்தி}$$
$$= \text{அடுக்கு } \lambda x.(D+\lambda)^{n+1}X.$$

எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, n இற்கு வழங்கப்படும் எந்த நேர்ப் பெறுமானத்திற்கும் சமன்பாடு (iii) சரியாயின் அது அடுத்துவரும் மேலான பெறுமானத்திற்கும் சரியாகும். $n=1$, $n=2$ களுக்கு அது சரியெனக் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. ஆகவே, அது n இன் எல்லா நேர் முழுவெண் பெறுமானங்களுக்குஞ் சரியாகும்.

[$\phi(D)$ {அடுக்கு $\lambda x.X\} \neq$ அடுக்கு $(\lambda x).\phi(D)\{X\}$ ஆதலால்

$\phi(D)$ அடுக்கு $\lambda x.X =$ அடுக்கு $\lambda x.\phi(D+\lambda)X$

என்பதால் உணர்த்தப்படுகின்ற செய்கையானது D யும் D யின் சார்புகளும் x இன் சார்புகளுடன் மாறி அமையமாட்டா என்னுஞ் செய்தியை எடுத்துக்காட்டுகிறது என்பதை இவ்விடத்தில் குறித்தற்பாலது.]

மாறுக் குணகங்களுடைய இரண்டாம் வரிசை ஏகபரிமாண வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்.—இவ்வின வகையீட்டுச் சமன்பாடானது

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = X \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

என்பதால் உணர்த்தப்படுகிறது ; இங்கு, a உம் b உம் மாறிலிகள், X ஆனது தனிய x இல் மட்டும் உள்ள சார்பு.

η என்பது (i) என்பதற்கு இணங்கும் y யின் ஏதேனுமொரு பெறுமானம் ஆகுக. $y = \eta + Y$ ஆகுக. அப்பொழுது, (i) இல் பிரதியிட்டு

$$\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + a\frac{d\eta}{dx} + b\eta\right) + \left(\frac{d^2Y}{dx^2} + a\frac{dY}{dx} + bY\right) = X \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

ஆனால், η ஆனது (i) இற்கு இணங்குகிறபடியால்

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+a\frac{d\eta}{dx}+b\eta=X;\ \text{எனவே,}\ \frac{d^2Y}{dx^2}+a\frac{dY}{dx}+bY=0$$

ஆகும் ; சமன்பாடு (i) இன் முழுத்தீர்வைப் பெறுமுன் இச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்தாகவேண்டும்.

எனவே (i) இன் முழுத்தீர்வானது இரு பகுதிகளுடைத்து :

(α) **நிரப்புசார்பு** எனப்படும் பெறுமானம் Y ; இது, தரப்பட்ட சமன் பாட்டின் வலக்கைப் பக்கத்தைப் பூச்சியமாக்கிக் கிடைக்கப்பெறுகின்ற தீர்வு ஆகும்.

(β) **குறிப்பிட்ட தொகையீடு** எனப்படும் பெறுமானம் η ; இது, முதற் சமன்பாட்டின் ஏதேனுமொரு தீர்வு ஆகும்.

இவ்விரு பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகையே தரப்பட்ட வகையீட்டுச் சமன் பாட்டின் முழுத்தீர்வு அல்லது மூலி ஆகும்.

நிரப்புசார்பு காண் முறைகள்.—

$$(D^2+aD+b)y=X$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கான நிரப்புசார்பைப் பெறும்பொருட்டு

$$(D^2+aD+b)y=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாடானது தீர்க்கப்படவேண்டும் என ஏற் கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

இனிப் ப. 35 இலுள்ள இரண்டாவது தேற்றத்தின்படி

$$(D^2+aD+b)\ \text{அடுக்கு}\ \lambda x=(\lambda^2+a\lambda+b)\ \text{அடுக்கு}\ \lambda x \qquad \text{ஆகும்.}$$

$\lambda^2+a\lambda+b=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் λ_1 உம் λ_2 உம் ஆகுக.

அப்பொழுது, (i) ஆனது

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y=0 \qquad \text{ஆகின்றது.}$$

$$(D-\lambda_2)y=z\ \ \text{ஆகுக. அப்பொழுது}\ (D-\lambda_1)z=0$$

ஆகையால்

$$\frac{dz}{dx}-\lambda_1 z=0.$$

$\therefore z=A$ அடுக்கு $\lambda_1 x$; இங்கு A ஓர் எதேச்சையான மாறிலி ஆகும்.

எனவே,

$$(D-\lambda_2)y=A\ \text{அடுக்கு}\ \lambda_1 x\ ;$$

இது,

$$\frac{dy}{dx}-\lambda_2 y=A\ \text{அடுக்கு}\ \lambda_1 x \qquad \text{ஆகும்.}$$

இச்சமன்பாட்டைத் தொகையீட்டுக் காரணி அடுக்கு $(-\lambda_2 x)$ என்பதால் முற்றிலும் பெருக்கி, x ஐக் குறித்துத் தொகையிட்டு

$$y = \text{அடுக்கு } (-\lambda_2 x) = A \int \text{அடுக்கு } [(\lambda_1 - \lambda_2) x]\, dx$$

$$= B + \frac{A}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{ அடுக்கு } (\lambda_1 - \lambda_2)\, x$$

எனப் பெறுகின்றோம் ; இங்கு, B என்பது ஒரு மாறிலி ஆகும்.

$$\therefore\; y = B \text{ அடுக்கு } \lambda_2 x + C \text{ அடுக்கு } \lambda_1 x \;; \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

இங்கு,
$$C = \frac{A}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

λ_1 உம் λ_2 உம் வேறுபடின் (ii) என்பதே முழுத்தீர்வு ஆகும். எனினும், $\lambda_1 = \lambda_2$ ஆயின் $y = (B + C)$ அடுக்கு $\lambda_2 x$ ஆகும் ; $B + C = C_1$ என்க ; இது தனித்தவொரு எதேச்சையான மாறிலி ஆதலால், y என்பதின் மேற்படிக் கோவையானது தரப்பட்ட சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு ஆகமாட்டாது. இச்சூழலுக்கேற்ற முழுத்தீர்வைப் பெறும்பொருட்டு

$$(D - \lambda_1)^2 y = 0$$

என எழுதுகிறோம்.

எனவே, $(D - \lambda_1) z = 0$; இங்கு $(D - \lambda_1) y = z$;

அல்லது
$$z = A \text{ அடுக்கு } \lambda_1 z.$$

z இற்கான இப்பெறுமானத்தை $(D - \lambda_1) y = z$ என்னும் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

$$\frac{dy}{dx} - \lambda_1 y = A \text{ அடுக்கு } \lambda_1 x.$$

இங்கு தொகையீட்டுக் காரணியானது அடுக்கு $(-\lambda_1 x)$ ஆகும் ;

எனவே,

$$y \text{ அடுக்கு } (-\lambda_1 x) = \int A\, dx = B + Ax.$$

$$\therefore\; y = (B + Ax) \text{ அடுக்கு } \lambda_1 x.$$

இரு மூலங்களும் கற்பனையானவையெனின் (கற்பனை மூலங்கள் சோடி சோடியாகவே நிகழ்கின்றன),

$$\lambda_1 = \theta + j\phi,\; \lambda_2 = \theta - j\phi \text{ என்க ; இங்கு, } j = \sqrt{-1}.$$

அப்பொழுது, நாம் கருதும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வானது

$$y = A_1 \text{ அடுக்கு } (\lambda_1 x) + A_2 \text{ அடுக்கு } (\lambda_2 x)$$
$$= \text{அடுக்கு } (\theta x)[(A_1 + A_2) \text{ கோசை } \phi x + j(A_1 - A_2) \text{ சைன் } \phi x]$$
$$= \text{அடுக்கு } (\theta x)[F \text{ கோசை } \phi x + G \text{ சைன் } \phi x] ;$$

இங்கு,
$$F = A_1 + A_2,\; G = -j(A_1 - A_2).$$

F உம் G உம் எதேச்சையான மாறிலிகள் ஆகும் ; பார்க்குமிடத்து G என்பது கற்பனேயானதாய் இருக்கவேண்டும் எனத் தோற்றுகின்றது ; ஆனல், அது கண்டிப்பாய் அவ்வாறு இருக்கவேண்டியதில்லே.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A_1 = 3 + 2j \text{ உம்}, \ A_2 = 3 - 2j \quad \text{உம் ஆயின்}$$

$$F = 6, \ G = -4.$$

தீர்வை $y = C$ அடுக்கு θx கோசை $(\phi x + \alpha)$

என்றவாறு அமையும்படி எழுதினல் அது சிலவேளேகளில் வசதியாகும் ; இங்கு, C உம் α உம் எதேச்சையான மாறிலிகள் ஆகும்.

உதாரணங்கள்.—(i) $D^2y + 4Dy + 3y = 0.$

λ எனபதற்கான சமன்பாடு

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

எனவே, $\lambda = -1$ அல்லது $\lambda = -3.$

$$\therefore \ y = A \text{ அடுகசு } (-x) + B \text{ அடுக்கு } (-3x) \ ;$$

இங்கு, A உம் B உம எதேசசை மாறிலிகள் ஆகும்.

(ii) $(D^2 + \beta)y = 0.$

இங்கு, λ எனபதறகான சமன்பாடு

$$\lambda^2 + \beta = 0 \ ;$$

இது $\lambda = \pm j\beta^{\frac{1}{2}}$ எனத் தருகின்றது.

எனவே $y = A$ கோசை $(\beta^{\frac{1}{2}}x + \phi)$; இங்கு, A உம் ϕ உம் மாறிலிகள் ஆகும்.

(iii) $\dfrac{d^2s}{dt^2} + \alpha\dfrac{ds}{dt} + \beta s = 0$ அல்லது $\ddot{s} + \alpha\dot{s} + \beta s = 0.$

அப்பொழுது, $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0,$ அல்லது $\lambda = \dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}.$

$\alpha^2 > 4\beta$ எனின், $s =$ அடுக்கு $(-\frac{1}{2}\alpha t)$ [A அடுக்கு $(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}.t)$
+B அடுக்கு $(-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}.t)$].

$\alpha^2 < 4\beta$ எனின், $s =$ அடுக்கு $(-\frac{1}{2}\alpha t)$ [A அடுகசு $(\frac{1}{2}j\sqrt{4\beta - \alpha^2}.t)$
+B அடுக்கு $(-\frac{1}{2}j\sqrt{4\beta - \alpha^2}.t)$]
$= C$ அடுக்கு $(-\frac{1}{2}\alpha t)$ கோசை $(\frac{1}{2}\sqrt{4\beta^2 - \alpha^2}.t + \phi)$;

இங்கு, A, B, C, ϕ என்பன மாறிலிகள் ஆகும்.

குறிப்பிட்ட தொகையீடுகாண் முறைகள்.—தீர்த்தற்கான சமன்பாடு

$$(D^2 + \alpha D + \beta)y = f(x)$$

ஆகும் ; இங்கு, $f(x)$ என்பது தனிய x இன் சார்பு ஆகும். எனவே,

$$y = \frac{f(x)}{D^2 + \alpha D + \beta}.$$

$f(x)$ ஆனது x இன் பல்லுறுப்பியொன்ருய், அல்லது x இன் அடுக்குக்குறிச் சார்பொன்றைக் காரணியாகக் கொண்டுள்ளதாய் இருக்கும் பொழுது மேற்கூறியுள்ளதை மதிப்பிடும் முறைகள் பின்வருகின்ற உதாரணங்களால் விளக்கம் பெறுகின்றன.

உதாரணம் (i). $(D^2-6D+9)y=x^2$.

குறிப்பிட்ட தொகையீட்டுக்கு

$$y=\frac{x^2}{(3-D)^2}=\frac{1}{9}\left[1-\frac{D}{3}\right]^{-2}x^2$$
$$=\tfrac{1}{9}[1+\tfrac{2}{3}D+\tfrac{1}{3}D^2+\ \ldots]x^2$$
$$=\tfrac{1}{9}(x^2+\tfrac{4}{3}x+\tfrac{2}{3}).$$

நிரப்புகின்ற சார்பு $(A+Bx)$ அடுக்கு $3x$ ஆதலால், தரப்பட்ட சமன்பாட்டின மூலியானது

$$y=(A+Bx)\text{ அடுக்கு }3x+\tfrac{1}{9}(x^2+\tfrac{4}{3}x+\tfrac{2}{3}).$$

$f(x)$ ஆனது அடுக்குக காரணியொன்றைக் கொணடிருககுமபொழுது $f(x)=\{$அடுக்கு $(\kappa x)\}X$ ஆகுக ; இங்கு, X ஆனது தனி x இன் சாாபு ஆகும. அபபொழுது,

$$y=\frac{1}{(D^2+\alpha D+\beta)}\{\text{அடுக்கு }(\kappa x)\}X$$
$$=\text{அடுககு }kx\,.\,\frac{1}{(D+\kappa)^2+\alpha(D+\kappa)+\beta}\,.\,X\quad[\text{ஒப்பிடுக : ப. 35,}]$$

உதாரணம் (ii). $(D^2-5D+6)y=x$ அடுக்கு x.

குறிப்பிட்ட தொகையீட்டுக்கு,

$$y=\frac{x\text{ அடுககு }x}{D^2-5D+6}=\text{அடுககு }x\,.\,\frac{1}{(D+1)^2-5(D+1)+6}\,.\,x$$
$$=\text{அடுக்கு }x\{\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{3}{2}D+\tfrac{1}{2}D^2)^{-1}\}x$$
$$=\tfrac{1}{2}\text{ அடுககு }x(1+\tfrac{3}{2}D+\ \ldots)x=\tfrac{1}{2}\text{ அடுககு }x(x+\tfrac{3}{2}).$$

எனவே, மூலியானது

$$y=A_1\text{ அடுக்கு }2x+A_2\text{ அடுககு }3x+\tfrac{1}{2}\text{ அடுககு }x(x+\tfrac{3}{2}).$$

X என்பது தனி x இன் சார்பு எனின், $f(x)=X$ கோசை $(mx+\kappa)$ என இருக்கும்பொழுது குறிப்பிட்ட தொகையீடு

$$y=\frac{1}{\psi(D)}X\text{ கோசை }(mx+\kappa)\ ;$$

இங்கு, $\psi(D)=(D^2+\alpha D+\beta)$.

எனவே y ஆனது

$$\frac{1}{\psi(D)}X\text{ அடுக்கு }j(mx+\kappa)$$
$$=\text{அடுக்கு }j(mx+\kappa)\,.\,\frac{1}{\psi(D+jm)}\,.\,X$$
$$=\{\text{அடுக்கு }j(mx+\kappa)\}(u+jv)$$

என்பதின் மெய்ப்பகுதி ஆகும் ; இங்கு, u உம் v உம் x இன் சார்புகள் ஆகும்.

$$\therefore\quad y=u\text{ கோசை }(mx+\kappa)-v\text{ சைன் }(mx+\kappa).$$

வழக்கமாக, X ஒரு மாறிலி ஆகும் ; அதை C என்க ; அப்பொழுது

$$\frac{1}{\psi(D+jm)}\,.\,C=\frac{1}{\psi(jm)}\,.\,C.$$

உதாரணம் (iii). $\frac{d^2s}{dt^2}+\alpha\frac{ds}{dt}+\beta s=\gamma$ கோசை ωt.

குறிப்பிட்ட தொகையீட்டைக் காண்பதற்கு

$$\frac{\gamma \text{ அடுக்கு } j\omega t}{D^2+\alpha D+\beta} = \text{அடுக்கு } j\omega t \cdot \frac{1}{(D+j\omega)^2+\alpha(D+j\omega)+\beta}\cdot\gamma$$

$$= \text{அடுக்கு } j\omega t \cdot \frac{\gamma}{(\beta-\omega^2)+j\alpha\omega}$$

$$= \frac{\gamma(\text{கோசை } \omega t + j \text{ சைன } \omega t)\,(\beta-\omega^2-j\alpha\omega)}{(\beta-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}$$

எனப் பயன்படுத்துவோம்.

மேற்படிக் கோவையின் உண்மையான பகுதி

$$s = \frac{\gamma[(\beta-\omega^2) \text{ கோசை } \omega t + \alpha\omega \text{ சைன் } \omega t]}{(\beta-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{(\beta-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}} \text{ கோசை } (\omega t-\theta)$$

எனத் தருகிறது ; இங்கு தான $\theta = \frac{\alpha\omega}{\beta-\omega^2}$.

இதன முழுத் தீர்வானது

$$s = \text{அடுக்கு } (-\tfrac{1}{2}\alpha t)[\text{A அடுக்கு } (\tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}\,.\,t)+\text{B அடுக்கு } (-\tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}\,.\,t)]$$

$$+\frac{\gamma}{\sqrt{(\beta-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}}.\text{ கோசை } (\omega t-\theta).$$

[$\beta=\omega_0^2$ என எழுதினல் குறிப்பிட்ட தொகையீடானது

$$s = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}} \text{ கோசை } (\omega t-\theta)$$

என்னும் சமச்சீர் வடிவத்தைப் பெறும ; அது அடிக்கடி வசதிமிக்கதாய இருக்கும.]

பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள்.—பகுதி வகையீட்டுக் குணகங்களைக் கொண்ட சமன்பாடே பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடு எனப்படும். மாறிகள் ஒவ்வொன்றும் தொடர்பாகத் தொடர்ந்துவரும் தொகையீடுகளால் அல்லது ஏதேனு மொரு எளிய முறையால், தீர்க்கக்கூடிய வகைகள் மட்டுமே இங்கு கருதப்படும். எவ்வாறு பிரயோகப் பௌதிகவியலின் பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கலாம் என்பதைக் கீழ்வரும் உதாரணங்கள் விளக்கு கின்றன.

உதாரணங்கள் (i). $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$ **என்பதைத் தீர்க்க.**

y தொடர்பாகத் தொகையிட,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{A}.$$

இங்கு, A ஆனது, y யைக் கொண்டிராத, x இன் ஏதேனுமொரு ஏதேச்சைச் சார்பாகும்; ஏனெனில், y யைக் குறித்து வரும் அதன் பகுதிப் பெறுதியானது பூச்சியம் எனபதேயாம். ஆகவே,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \psi (x).$$

இங்கு, $\psi(x)$ என்பது தனி x இன் ஏதேச்சைச் சார்பு ஆகும். x ஐக் குறித்துத் தொகையிட,

$$z = \int \psi (x)\, dx + \phi_2 (y) ;$$

இங்கு, $\phi_2 (y)$ எனபது தனி y யின் ஏதேச்சைச சார்பு ஆகும். இச்சமன்பாட்டை

$$z = \phi_1 (x) + \phi_2 (y)$$

என எழுதிக்கொள்ளலாம.

(ii) λ ஆனது t யைச் சாராது இருக்க, $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\right) z = 0$

எனின்,

$$z = \text{A அடுக்கு } \lambda t.$$

இங்கு, A ஆனது t யைச் சாராது.

ஆகவே, $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) z = 0$ என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வில, A என்பதை, $\phi(x)$ என்றவாறு, x இன் ஏதேச்சையான ஒரு சார்பாகப் பயன்படுததிக்கொள்ள முடிகின்றது.

$$\therefore \text{ தெயிலரின் தேற்றப்படி, } z = \phi (x) \text{ அடுக்கு} \left(ct\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= \left[1 + \frac{ct\frac{\partial}{\partial x}}{1!} + \frac{c^2t^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}}{2!} + \ldots\right] \phi (x)$$

$$= (\phi) x + \frac{ct}{1!}\phi' (x) + \frac{c^2t^2}{2!}\phi'' (x) + \ldots$$

$$= \phi (x + ct).$$

இதுவே வேண்டிய தீர்வு ஆகும.

(iii) **அலையியக்கச் சமன்பாடு.**—அலைக்கொள்கையின் முதன்மைவாய்ந்த பகுதி வகையீட்டுச் சமனபாடொன்று

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

என்பதாம்; இஙகு, ξ ஆனது பெயர்ச்சியையும், t ஆனது நேரத்தையும் குறிக்கின்றன; x ஆனது பெயர்ச்சி ξ உள்ள இடததைக குறிக்கின்றது.

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும்பொருட்டு

$$v = (x - ct), \quad w = (x + ct)$$

என எழுதுவோம்.

அப்பொழுது,

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t}\right]\frac{\partial t}{\partial w}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial t}\right] + \left]\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right]\frac{1}{c};$$

அதாவது, $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial w\,\partial v} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0.$$

$$\therefore \quad \xi = \phi_1(x - ct) + \phi_2(x + ct)$$ [உ-ம். (1) ஐ ஒப்பிடுக.]

அலையியக்கச் சமன்பாட்டின் தீர்வைப் பெறுவதற்கான வேறொரு வழி பின்வருமாறு.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi = 0$$

என்னும் குறியீட்டுவடிவத்தில் சமன்பாட்டை எழுதிக்கொள்ளலாம்.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2\right)\xi = 0$$

என்பதின் தீர்வானது

$\xi = A$ அடுக்கு $\lambda_1 t + B$அடுக்கு $\lambda_2 t$ [ப. 38 ஐ ஒப்பிடுக.]

எனத் தெரிந்ததே. இங்கு, λ_1 உம் λ_2 உம் t யைச் சாரா ; A உம் B உம் மாறிலிகள் ஆகும்.

λ_1 உம் λ_2 உம் x இன் சார்புகளாயின், A உம் B உம் x இன் சார்புகள் ஆகலாம். அவை $\phi_1(x)$ உம் $\phi_2(x)$ உம் என்க.

இங்ஙனம்,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi = 0$$

என்பதின் தீர்வானது

$$\xi = \phi_1(x) \text{ அடுக்கு } \left(-ct\frac{\partial}{\partial x}\right) + \phi_2(x) \text{ அடுக்கு } \left(ct\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= \phi_1(x - ct) + \phi_2(x + ct).$$

$\xi = \phi_1(x - ct)$ என்னும் தீர்வானது, வேகம் c யுடன் x அச்சின் நேர்திசை வழியே இயங்கும் அலையொன்றைக் குறிக்கின்றது. இதை நிறுவும்பொருட்டு, x' என்னும் புள்ளியில், t' என்னும் நேரத்தில், பெயர்ச்சி ξ' ஆகுக. $t'' (> t')$ என்னும் நேரத்தில், x'' இல், பெயர்ச்சி ξ' ஆகுக. அப்பொழுது,

$$\phi_1(x' - ct') = \xi' = \phi_1(x'' - ct''),$$

அதாவது $$x' - ct' = x'' - ct'',$$

அல்லது $$c = \frac{x'' - x'}{t'' - t'}.$$

எனவே, $t'' > t'$ ஆனபடியால், $x'' > x'$; அதாவது, x அச்சின் நேர்த்திசையில் அலை செல்கின்றது. அதுபோலவே, தீர்வு $\xi = \phi_2(x + ct)$ ஆனது வேகம் c யுடன் x அச்சின் மறைத்திசையில் செல்கின்ற அலையாகும்.

(iv) $a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial z}{\partial t}$ என்னுஞ் சமன்பாடு. இது ஓர் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடாகும் ; பாவற் கொள்கை, வெப்பக் கடத்தற் கொள்கை முதலியனவற்றில இது தோன்றும். பொதுவான வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை ஆராயும்பொழுது அடுக்குக்குறிச் சார்புகளுடைய தீர்வுகள் அடிக்கடி வருகின்றன. இங்கு, $z =$ அடுக்கு $(mx + nt)$ ஒரு தீர்வு ஆகக்கூடும் என இது தூண்டுகிறது. பிரதியிடுமிடத்து $n=m^2a^2$ எனின், இக்கோவை வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுடன் இணங்குகிறது. எனவே,

அடுக்கு $(mx+m^2a^2t)$ உம் அடுக்கு $(-mx+m^2a^2t)$ உம் தீர்வுகள் ஆகும்.

$t \to \infty$ எனின், அதே சமன்பாட்டிற்கு, மறையும் தீர்வொன்றைக் காணும் பொருட்டு ஏறகெனவே கிடைத்துள்ள தீர்வுகளில் t ஆனது அடுக்கு (m^2a^2t) என்னும் உறுப்பிலே தோற்றுகிறது எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இது t உடன் கூடுகிறது ; இதைக் குறையச்செய்யும் பொருட்டு $m=jp$ என இடுவோம் : இங்கு $j=\sqrt{-1}$; எனவே, $m^2a^2=-p^2a^2$. இவ் வண்ணம் அடுக்கு $(jpx-p^2a^2t)$ உம் அடுக்கு $(jpx-p^2a^2t)$ உம் தீர்வுகள் ஆகின்றன. சமன்பாடு ஏகபரிமாணமானது என்றபடியால்

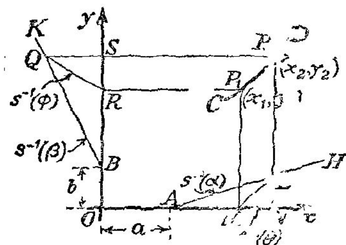
அடுக்கு $(-p^2a^2t)$ [A அடுக்கு (jpx) +B அடுக்கு $(-jpx)$] உம

தீர்வொன்றாகும ; மேலும், இதற்குப் பதிலாக

அடுக்கு $(-p^2a^2t)$ [P கோசை px + Q சைன் px]

என்பதைப் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம ; இங்கு, A, B, P, Q என்பன மாறிலிகள் ஆகும்.

$y-b=\kappa(x-a)^n$ என்னும் வளைவி.—படம் 1·18 இல், Ox, Oy வழக்கமான செவ்வகவச்சுக்களும் P_1 என்பது $y-b=\kappa(x-a)^n$ என்னும் வளையியிலுள்ள புள்ளியொன்றும் ஆகுக. $OA=a$, $OB=b$ ஆகுக; மேலும், A, B என்பவற்றினூடாக, முறையே சரிவுகள் α உம் β உம் உடைய நேர்கோடுகள் AH ஐயும் BK யையும் வரைக; இங்கு, ஆள்கூற்றச்சுக்கள் பூச்சியச் சரிவு உடைய நேர்கோடுகள் எனக் கருதப்படுகின்றன. Ox இல் M ஆனது P_1 இன் எறியம் ஆகுக; AH ஐ L இல் வெட்டுமாறு M ஊடாகச் சரிவு θ வுடன் ML ஐ வரைக. Ox இல் N ஆனது L இன் எறியம் ஆகுக. அதுபோலவே, R ஆனது Oy இல் P_1 இன் எறியம் ஆகுக; பின்னர், Oy யைக் குறித்துச் சரிவு ϕ யுடன் RQ வை வரைக; நேர்கோடுகள் BK உம் RQ உம் காட்டியவாறு இருக்கும்பொழுது β உம் ϕ உம் நேர்க்கணியங்கள் எனக் கருதப்படும். Oy யில் S ஆனது Q இன் எறியம் எனின், நீட்டப்பட்ட NL உம் QS உம் புள்ளி P_2 இல் சந்திக்கும் ; சில நிபந்தனைகள் நிறைவேற்றப்படின் P_2 ஆனது,



படம் 1·18. [$s^{-1}(\phi) \equiv$ சாய்வு ϕ உடைய நேர்கோடு என்றவாறு.] வளையி $y-b=\kappa(x-a)^n$ என்பதிலுள்ள புள்ளியொன்று தெரிந்திருக்கும்பொழுது அவ் வளையியை வரைதல்.

P_1 இருக்கின்ற அதே வளையியில் இருக்கும். இந்நிபந்தனைகளைக் காண்பதற்கு P_1 ஆனது (x_1, y_1) எனவும் P_2 ஆனது (x_2, y_2) எனவும் இருப்பின்,

$$x_2 = \text{ON} = \text{OM} + \text{MN} = x_1 + \left(\frac{\text{NL}}{\theta}\right) = x_1 + \left\{ (x_2 - a)\,\frac{\alpha}{\theta}\right\}$$

உம்,

$$y_2 = \text{OS} = y_1 + \text{RS} = y_1 + \left(\frac{\text{QS}}{\phi}\right) = y_1 + \left\{ (y_2 - b)\,\frac{\beta}{\phi}\right\}$$

உம் ஆகும்.

இவை

$$x_2 = \left[x_1 - a\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right] \div \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right],$$

$$y_2 = \left[y_1 - b\left(\frac{\beta}{\phi}\right)\right] \div \left[1 - \left(\frac{\beta}{\phi}\right)\right]$$

எனத் தருகின்றன ;

எனவே, $x_2 - a = [x_1 - a] \div \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right],$

$$y_2 - b = [y_1 - b] \div \left[1 - \left(\frac{\beta}{\phi}\right)\right].$$

$y_1 - b = \kappa\,(x_1 - a)^n$ ஆனபடியால்

$$\frac{y_2 - b}{(x_2 - a)^n} = \left[\frac{(y_1 - b)}{1 - \left(\frac{\beta}{\phi}\right)}\right]\left[\frac{\left\{1 - \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right\}^n}{(x_1 - a)^n}\right]$$

எனவே,

$$\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^n\right] = \left[1 - \left(\frac{\beta}{\phi}\right)\right]$$

எனின், P_2 ஆனது கருதும் வளையியில்† இருக்கும்.

இவ்வண்ணம், வேறு புள்ளிகளை இடங்கண்டு, முழு வளையியின் பகுதி CD பெறப்படுகின்றது.

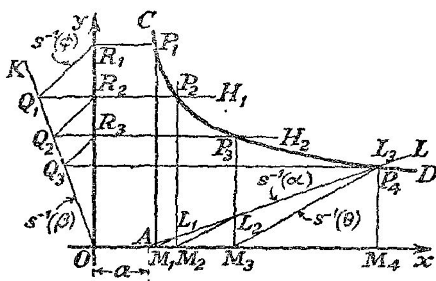
ஏற்கெனவே விவரித்துள்ள சமன்பாட்டுவகைக்குத் தரப்பட்ட வளையியொன்று இணங்குமோ இணங்காதோ எனத் தீர்ப்பதற்குச் செயன்முறையை நாம் மறுதலையாக நோக்கவேண்டும் ; அப்பொழுது, a அல்லது b பூச்சியமாய் இருந்தாற்றான் முறையானது வசதியானவொன்றாகும் என விரைவில் அறியக்கிடக்கும் ; அதாவது, வளையியின் சமன்பாடானது

$$y = \kappa\,(x - a)^n, \quad \text{அல்லது} \quad y - b = \kappa\,x^n$$

என்னும் வகையில் அடங்கும் என அனுமானிக்க முடிந்தாற்றான் மாறிலிகளைத் துணிய முடியும். இவ்வண்ணம், படம் 1.19 இல்,

† ஒப்பிடுக : பெறி (Perry), *Elementary Practical Mathematics*, C. J. சிமிது, *Phil. Mag.*, XXXVII, ப. 505, 1946.

CD ஆனது பரிசோதனையால் கிடைக்கப் பெற்ற புள்ளித்தொகுதி ஊடாகச் செல்லும் ஒப்பமான வளையி எனக் கொள்க. பரிசோதனைக்குரிய வழுக்களால் நியமிக்கப்பட்ட எல்லைகளுக்குள் அடங்கும் வகையில், இவ்வளையி



படம் 1·19. $y = \kappa(x-a)^n$ என்னும் வளையி.

$y = \kappa(x-a)^n$ என்னுஞ் சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகின்றதோ இல்லையோ என்பதைச் சோதிக்க விரும்பப்படுகின்றது. $b=0$ ஆனபடியால், O ஊடாக நேர்கோடு OK என்பது வரையப்படுகின்றது; இந்நேர்கோட்டின் சரிவு எதேனுமொரு வசதியான பெறுமானம் β ஆக எடுக்கப்படுகின்றது. CD யில் உள்ள ஒரு புள்ளி P_1 ஊடாக, Ox இற்குச் சமாந்தரமாக, P_1R_1 என்பதை வரைக; OK யை Q_1 இல் வெட்டுமாறு R_1Q_1 ஐ வரைக; கோணம் OR_1Q_1 45° ஆக அமையவேண்டும்; எனவே, இந்நேர்கோட்டின் சரிவு ϕ மறையானது; அது,

$$\phi = \frac{R_2Q_1 \text{ (நேர்) ஆல் குறிக்கப்படும் கணியம்}}{R_1R_2 \text{ (எதிர்) ஆல் குறிக்கப்படும் கணியம்}}$$

$$= -\frac{|Q_1R_2| \text{ ஆல் குறிக்கப்படும் கணியம்}}{|R_1R_2| \text{ ஆல் குறிக்கப்படும் கணியம்}}.$$

அடுத்ததாக, Oy யை R_2 இலும், CD யைப் P_2 இலும் வெட்டுமாறு Q_1 ஊடாகக் Q_1H_1 ஐ OX இற்குச் சமாந்தரமாக வரைக; P_1 உம் P_2 உம் ஊடாக முறையே P_1M_1 ஐயும் P_2M_2 ஐயும் Oy இற்குச் சமாந்தரமாக வரைக; P_2M_2 ஐ L_1 இல் வெட்டுமாறு M_1 ஊடாகக் கோணம் 30° (விடயத்துக்கேற்றவாறு அது 45° அல்லது 60° ஆகக்கூடும்) என அமையும்படி M_1L_1 ஐ வரைக. அப்பொழுது, L_1 ஆனது Ox இல் $OA = a$ என்னும் வெட்டுத்துண்டு உள்ளதும் சரிவு α உடையதுமான நேர்கோட்டிலுள்ள புள்ளியொன்றுகும்; இங்கு θ ஆனது M_1L_1 இன் சரிவு எனின்,

$$\left[1-\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right]^n = \left[1-\left(\frac{\beta}{\phi}\right)\right].$$

எனினும், இதுவரை ஒரேயொரு புள்ளி L_1 என்பதின் இடம் மட்டுமே கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கின்றது ; ஆனாலும், P_2 (அல்லது வளையியின் வேறொரு புள்ளி) இல் தொடங்கி P_3 ஐக் காணலாம் ; ஏற்கெனவே விவரித்தவாறு மீண்டும் வரைந்து L_2 ஐக் காணலாம். இவ்வண்ணம், L_1, L_2, L_3,... என்னும் புள்ளித்தொடரொன்றைப் பெறலாம் ; இவை நேர்கோடொன்றில் கிடக்குமாயின் சமன்பாடு $y = \kappa(x-a)^n$, வளையி CD இற்குப் பொருத்தமாயிருக்கும் ; இங்கு, α, θ, β, ϕ என்பனவற்றின் தெரிந்துள்ள பெறுமானங்களிலிருந்து a, n ஆகிய மாறிலிகளைக் காணலாம். அடுத்ததாக, a உம் n உம் இப்பொழுது தெரிந்துள்ளபடியால், $(x-a)^n$ ஐக் குறித்து y யை வரைந்து மாறிலி κ ஐக் காணலாம். எவ்வாறு இச்செயன்முறையைப் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம் என்பதை விளக்கிவைக்கக் கீழ்வரும் ஈர் எடுத்துக்காட்டுகளைக் கவனிப்போம்.

(a) சதமவளவை நைதரசன் திட்டத்தில் வெப்பநிலை θ விலுள்ள திரவமொன்றின் பரப்பிழுவை γ என்பதின் மாறலானது 0° ச. இலுள்ள அத்திரவத்தின் பரப்பிழுவை γ_0 உடன் $\gamma = \gamma_0(1-b\theta)^n$ என்னுஞ் சமன்பாட்டால் தொடர்புபடுத்தப்படுகின்றது ; இங்கு, b உம் n உம் மாறிலிகளாம் ; ப. 597 ஐ ஒப்பிடுக.

$x = \dfrac{\gamma}{\gamma_0}$ என்றும், $y = \theta$ என்றும் கூறி, மேற்படிச் சமன்பாட்டை

$$y = \left(\frac{1}{b}\right) - \left(\frac{1}{b}\right)x^{\frac{1}{n}}$$

என எழுதிக்கொள்ளலாம்.

இச்சமன்பாடு, இப்போது கருதிவரும் வகைச் சமன்பாட்டுள் அடங்கும் ; எனவே, b, n ஆகிய மாறிலிகளைக் காணலாம். இம்முறை ஃபேகசன்† (Ferguson) என்பவர் பயன்படுத்தியுள்ளதைக் காட்டிலும் இலகுவானது ; மேலும், வளையியொன்றிற்குத் தொடலிகள் வரைதல், $b = \theta_c^{-1}$ எனக் கொள்ளுதல் என்பனவற்றை இது தவிர்க்கும் ; இங்கு, θ_c ஆனது கருதப்படும் திரவத்தின் அவதி வெப்பநிலையாகும்.

(b) எவ்வாறு திரவமொன்றின் பிசுபிசுப்பு η ஆனது வெப்பநிலை θ (°ச.) உடன் மாறுகின்றது என்பதைச் **சுலொற்** (Slotte) என்பாரின் சமன்பாடு $\eta = \eta_0(1+b\theta)^n$ குறிக்கிறது, ப. 702 ஐ ஒப்பிடுக ; இங்கு η_0, b, n என்பன மாறிலிகள். இச்சமன்பாட்டை

$$\left[\frac{\eta}{\eta_0}\right] = b^n\left[\theta + \left(\frac{1}{b}\right)\right]^n$$

என எழுதிக்கொள்ளலாம் ; எனவே, $y = \dfrac{\eta}{\eta_0}$ என்றும் $\theta = x$ என்றும் எழுதுவோமாயின், நாம் கருதுகின்ற வரைபு முறைக்குப் பொருத்தமான வடிவத்தைச் சமன்பாடு பெறுகின்றது.

† *Phil. Mag.* **L.** ப. **971, 1925.**

பயிற்சி I

1.01. சராசரியடர்த்திகள் முறையே 10, 1, 0·1 கி. சமீ.$^{-3}$ உடைய பொருள்களை நிறுக்கும் பொழுது 0·00125 கி. சமீ.$^{-3}$ அடர்த்தியுடைய வளியின மீயுந்தலைப் புறக்கணிப்பதால் வரும் சதவீத வழுவைக் காண்க. பித்தளையாலான நியமத்திணிவுகளின அடர்த்தி=8·4 கி. சமீ.$^{-3}$ எனக் கொள்க. அடிப்படையான கொள்கையைக் கூறுக. [$-0·0024$, 0·11, 1·24]

1.02. தராசொன்றின உணர்திறனுக்கு வரைவிலக்கணம் கூறி, அந்த உணர்திறனைத் தராசின் மற்றை மாறிலிகளுடன் தொடர்புபடுத்தும் சூத்திரத்தைப் பெறுக. எவ்வாறு சுமையுடன் உணர்திறன் மாறுகிறது என்பதை ஆராய்ந்தெழுதுக.

பௌதிகத் தராசொன்றைப் பயன்படுத்தும்பொழுது பூச்சியச் சுமைக்கான உணர்திறன் மிகி. ஒன்றிற்கு 4·0 திட்டப் பிரிப்புக்கள் எனத் தெரிந்துள்ளது. 100 கி. சுமைக்கு அது மிகி. ஒன்றுக்கு 3·5 பிரிப்புக்கள் ஆகும். தட்டொவ்வொன்றின திணிவு 20 கி. எனக்கொண்டு 50 கி. சுமைக்குரிய உணர்திறனின பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

[மிகி. ஒன்றிற்கு 3·7 பிரிப்புக்கள்.]

1.03. பொருளொன்றின் திணிவைச் செம்மையாகக் காண்பதற்கான வளியின் மீயுந்தல் திருத்தத்தை விளக்குக. பொருளொன்றின் தோற்றத்திணிவு M எனவும், ρ_a, ρ_w, ρ_x என்பன முறையே வளி, நியமத்திணிவுகள், பொருளின திரவியம் ஆகியவற்றின் அடர்த்திகள் எனவும் இருப்பின், அப்பொருளின உண்மையான திணிவு X ஆனது

$$X = M\left[1-\rho_a\left(\frac{1}{\rho_w}-\frac{1}{\rho_x}\right)\right]$$

என்னும் கோவையால் தரப்படுகிறது என்பதைக் காட்டுக.

1.04. $[|\vec{A}\times\vec{B}|]^2+(\vec{A}\,\vec{B})^2=A^2B^2$ என நிறுவுக.

1.05. தணித்த கல்வனோமானிச் சுருளொன்றின மூன்று அடுத்துவருகின்ற ஓய்வுப்புள்ளிகளின திட்டவளவீடுகள் x_1, x_2, x_3 எனின் சுருளின் ஓய்வுநிலையானது

$$x_0=\frac{x_1x_3-x_2^2}{x_1+x_3-2x_2}$$

ஆல் தரப்படுகிறது எனக் காட்டுக.

தணித்தல் சிறிதாயின்,

$$4x_0=x_1+2x_2+x_3$$

எனவும், வட்டமொன்றிற்குக் குறைப்பு விகிதம் δ எனின்

$$\delta(x_3-x_2)^2=(x_1-x_3)(x_1+x_3-2x_2)$$

எனவும் நிறுவுக.

1.06. இரு விசைகள் F உம் $(1+n)$ F உம துணிக்கையொன்றைத் தாக்குகின்றன ; இங்கு, n ஆனது சிறிதாகும். அவ்விரு விசைகளின தாக்கக் கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள கோணம் θ எனின், விளையுள் விசையானது பெரிதான விசையுடன சைன $\phi\simeq(1-\frac{1}{2}n)$ சைன் $\frac{1}{2}\theta$ என்பதற்கு இணங்கும் கோணம் ϕ யை ஆக்குகின்றது எனக் காட்டுக.

1.07. $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ இன் ஈருறுப்பு விரிவின முதன் நான்கு உறுப்புக்களை எழுதுக. $x=0·020$ என இட்டு $\sqrt{2}$ என்பதற்கு அண்ணளவான பெறுமானமொன்றைப் பெறும் பொருட்டு மேற்படிக் கோவையைப் பயன்படுத்துக ; எத்தனை தசமதானங்களுக்கு அப்பெறுமானம் திருத்தமானது என்பதைக் கூறுக. [1·4142134, ஆறு.]

1.08. a உம் b உம் நேர்மாறிலிகள் எனின்,

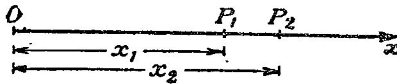
$$y = \text{அடுக்கு }(-ax)\text{ சைன் }bx$$

என்னுஞ் சாரபின் நிலையான பெறுமானங்களைக் காண்க. அப்பெறுமானங்கள் தமது பொதுவிகிதம் − அடுக்கு$\left(-\frac{\pi a}{b}\right)$ ஆக உடைய பெருக்கல் விருத்தியொன்றை அமைக்கின்றன என நிறுவுக ; வரிப்படமொன்றின மூலம் உம்முடைய முடிபுகளை எடுத்துக்காட்டுக.

அதிகாரம் II

துணிக்கை இயக்கவியற் கோட்பாடுகள்

நேர்கோட்டியக்கம்.—நேர்கோடொன்று அல்லது அச்சு Ox, படம் 2·01, வழியே ஒரு புள்ளி அல்லது சடத்துணிக்கையொன்று இயங்குகின்றது எனக் கருதுக ; இங்கு புள்ளி O நிலையானது. அத்துணிக்கையின் நிலைகள் t_1, t_2 என்னும் நேரங்களில் முறையே P_1, P_2 ஆகுக. அப்பொழுது, $OP_1 = x_1$, $OP_2 = x_2$ எனின், $(t_2 - t_1)$ என்னும் காலத்தில் துணிக்கையின் பெயர்ச்சி $(x_2 - x_1)$ ஆகும். $(t_2 - t_1)$ என்னும் காலத்தில் சராசரிப் பெயர்ச்சி வீதம் அல்லது **சராசரி வேகம்** $\dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ ஆகும். எல்லாக்கால அளவுகளுக்கும் இப்பின்னத்தின் பெறுமானம் u என்பது மாருதிருப்பின், துணிக்கையின் வேகம் சீரானது எனப்படும்.



படம் 2.01. சடத்துணிக்கையொன்றின் நேர்கோட்டியக்கம்.

துணிக்கை O விலிருந்த கணத்திலிருந்து நேரம் அளக்கப்படின், காலம் t யில் மேற்படி துணிக்கை $x = ut$ என்னும் தூரத்தைக் கடந்துவிடும். இது துணிக்கையின் **இயக்கச் சமன்பாடு** ஆகும்.

x அச்சு வழியே செல்லுகின்ற துணிக்கையொன்று x, $(x + \delta x)$ என்னும் தூரங்களை முறையே t, $(t + \delta t)$ என்னும் நேரங்களிற் கடக்கின்றது என்க. அப்பொழுது, காலம் δt யில் சராசரி வேகம் $\dfrac{\delta x}{\delta t}$ ஆகும். δt பூச்சியத்தை அணுகும்போது $(\delta t \to 0)$, மேற்படி பின்னம் ஓர் எல்லைப் பெறுமானம் v ஐ நாடிச் செல்லும்; அது, நேரம் t யில், துணிக்கையின் வேகமாகும். எனவே,

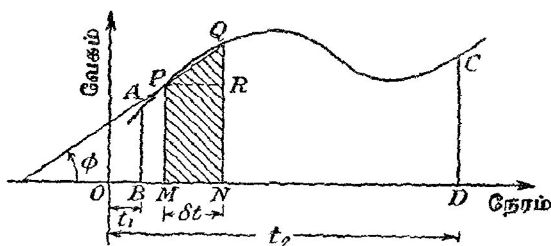
$$v = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

ஆர்முடுகல்.—இது, வேகம் மாறும் வீதம் என வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகின்றது. நேரங்கள் t_1, t_2 இல் அசையும் புள்ளியொன்றின் வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 எனின், அக்காலத்தில் வேகத்தின் சராசரி மாறல் வீதமானது $\dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ ஆகும். தேர்ந்தெடுத்த காலம் எதுவாகி

லும், மேற்படி பின்னம் அதைச் சாராது இருப்பின், ஆர்முடுகல் சீரானது எனப்படும். நேரங்கள் t, $(t+\delta t)$ இல் அசையும் துணிக்கையொன்றின் வேகங்கள் முறையே v, $(v+\delta v)$ எனின், குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஆர் முடுகலின் சராசரிப் பெறுமானம் $\dfrac{\delta v}{\delta t}$ என்னும் பின்னமாகும்; மேலும், δt பூச்சியத்தை அணுகும்பொழுது மேற்படி பின்னத்தின் எல்லைப் பெறுமானம் நேரம் t யிலுள்ள ஆர்முடுகலாம். அது a எனின்,

$$a = \underset{\delta t \to 0}{\text{எல்.}} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}.$$

வேக-நேர வளையிகள்.—நேரத்தைக் கிடைக்கூறாகவும் வேகத்தை நிலைக் கூறாகவும் பயன்படுத்தி வளையியொன்று வரையப்படின், அது **வேக-நேர** வளையி எனப்படும். இவ்வகையான வளையியொன்று படம் 2·02 இல் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. வளையிக்குக் கீழேயுள்ள பரப்பளவின் ஒரு சிறு மூலகம் PQNM என்பதைக் கருதுவோம்.



படம் 2·02. ஒரு வேக-நேர வளையி.

அசையும் புள்ளியின் வேகமானது $MN = \delta t$ என்னும் காலவிடையில் ஒரு மாறிலி என்றும், அது PM என்பதற்குச் சமன் என்றும் கருதக் கூடியவகையில் அக்காலவிடை போதிய அளவு சிறிதாகுக. சிறுமை வரிசையில் முதல் வரிசைப் பெறுமானத்தைத் தவிர்த்து அதனினும் மேலானவற்றைப் புறக்கணித்தால் அம்மூலகத்தின் பரப்பளவு $PM.\delta t$ ஆகும்; இது காலம் δt இல் சென்ற தூரத்தைக் குறிக்கும்; எனவே, ஒவ்வொரு மூலகமும் சென்ற தூரமொன்றைக் குறிக்கின்றமையால், வளையி, நிலைகூறுகள் AB யும் CD யும், x அச்சு என்பனவற்றுள் அடங்கி யுள்ள பரப்பளவானது காலம் BD இல், அதாவது காலம் $(t_2 - t_1)$ இல் சென்ற தூரத்தைக் குறிக்கும் என்பது தெளிவாம்.

$$\text{பரப்பளவு} = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{dt}\,dt = \Big[x\Big]_{x_1}^{x_2},$$

என்று எழுதி மேற்படி விவாதத்துக்கு ஓரளவு நியமவடிவம் கொடுக் கலாம்.

மேலும், குறிப்பிட்ட புள்ளியொன்றில் வளையியின் படித்திறன் அல்லது தொடலியின் சரிவு $\frac{dv}{dt}$ ஆகும்; இது, அக்கணத்தில் இருந்த ஆர்முடுகலைத் தருகின்றது.

சீரான ஆர்முடுகலுடைய இயக்கம்.—சீரான ஆர்முடுகலுடைய இயக்கத்தில், ஆர்முடுகல் ஒரு மாறிலி ஆகும்; அது, a யிற்குச் சமன் என்க. எனவே, அவ்வியக்கம் ஒன்றில் $\dot{v} = a$ என்பதால் அல்லது $\ddot{x} = a$ என்பதால் எடுத்துரைக்கப்படுகின்றது. நேரத்தைக் குறித்து முந்தியதைத் தொகையிட,

$$v = at + C.$$

இங்கு, C ஒரு மாறிலியாகும். $t = 0$ ஆய் இருந்த பொழுது வேகம் u (அல்லது $\dot{x}_0$) ஆய் இருந்திருந்தால் $C = u$. மேலும்,

$$\left.\begin{aligned} v &= u + at \\ \text{அல்லது} \quad \dot{x} &= \dot{x}_0 + \ddot{x}t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

அல்லாமலும், A யும் B யும் மாறிலிகள் எனின், $\ddot{x} = a$ என்னும் சமன்பாட்டைத் தொகையிட,

$$\dot{x} = at + A = at + u.$$

ஏனெனில், $t = 0$ ஆய் இருந்தபொழுது $\dot{x} = u$ ஆதலின் என்க. எனவே $A = u$. மீண்டும் தொகையிட,

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 + ut + B.$$

ஆனால் $t = 0$ ஆய் இருந்தபொழுது $x = 0$ ஆய் இருந்தமையால் $B = 0$; எனவே,

$$\left.\begin{aligned} x &= ut + \tfrac{1}{2}at^2 \\ &= \dot{x}_0 t + \tfrac{1}{2}\ddot{x}t^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

(i) இலும் (ii) இலும் இருந்து t யை நீக்க,

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= u^2 + 2ax \\ \text{அல்லது} \quad \dot{x}^2 &= \dot{x}^2{}_0 + 2\ddot{x}x \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$$

நியூற்றன் பொறியியல்.—பதினேழாம் நூற்றுண்டில் **நியூற்றன்** என்பவரால் இயற்றப்பெற்ற இயக்க விதிகள் மூன்றும் இயக்கவியல் என்னும் இயலுக்கு அடிப்படை ஆதாரங்கள் ஆகும். சாதாரண பொருட்களின் இயக்கத்தைப் பொறுத்தமட்டில் 'நியூற்றன் பொறியியல்' எனப்படும் இவ்வியலின் வாய்மையானது பல பரிசோதனைகளில் போதிய அளவில் உறுதிப்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது. அணுக்களின் கூறுகள் அல்லது வான்பொருட்கள் ஆகியவற்றின் இயக்கங்களில் இவ்வியலைப் பிரயோகிக்கும்பொழுது மட்டுமே சிறு முரண்பாடுகள் தோன்றுகின்றன; நியூற்றனின் இயக்க விதிகளின் அடிப்படையில் பிழை உளது என்னும் கருத்தை ஆதரிக்க முடியாது என்ற அளவிற்கு கிரகணங்களின் தோற்றங்களைத் திருத்தமாக முன்கூட்டிச் சொல்லுவதற்கு நியூற்றனின் பொறியியல், வானியல் விற்

பன்னருக்குப் பயன்படுகிறது என்று எண்ணுங்காலே முரண்பாடுகளின் சிறுமை உணரப்படும். பொதுவாக, இதுமுதல், இனிமேல் எடுத்துக் கொள்ளப்படும் விடயங்களில் நுணுக்குப் பொருட்கள் அல்லது மாண பொருட்கள் என்பனவற்றின் இயக்கங்களுக்கு நியூற்றன பொறியியல் தத்துவங்களின் பிரயோகத்தால் ஏற்படும் வழுக்கள் புறக்கணிக்கப்படும்.

விசையும் சடத்துவ விதியும்.—பொருளொன்றின் வேக மாற்றங்கள் (பருமனில் அல்லது திசையில் அல்லது இரண்டிலும்) வெளிக் கருவிகள் காரணமாகவே உற்பத்தியாகின்றன எனக் கொள்ளப்படுகின்றது ; நாம் கருதும் இயக்கமுடைய பொருள் மீது இக்கருவிகளால் **விசைகள்** பிரயோகிக்கப்படுகின்றன எனக் கூறுகிறோம். எனவே, **எது பொருளொன்றின் இயக்கத்தை மாற்றும் அடையச் செய்கிறதோ அல்லது அவ்வாறு செய்ய நாடுகிறதோ அதுவே விசை** என வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகின்றது. பொருள் ஒவ்வொன்றினதும் ஒய்வு நிலையையோ சீரான நேர்கோட்டு இயக்க நிலையையோ மாற்றுமாறு அழுத்திய விசைகள் பொருளைத் தூண்டாது இருப்பின், அப்பொருள் அதே நிலையில் தொடர்ந்து இருக்க முயலும் ; இதுவே **நியூற்றனின்** முதலாவது இயக்க விதி (அல்லது சடத்துவ விதி) ஆகும்.

திணிவு.—சடப்பொருள் என்பது அடிப்படையான கருத்தொன்றாகும் ; அதற்கு வரைவிலக்கணம் கூறுதல் கடினமாகும். எனினும், தரப்பட்ட சடப்பொருள் துண்டொன்றின் இயக்கத்தில் வரையறுத்த மாற்றம் ஏதேனுமொன்றைத் தோற்றச் செய்தற்கு ஊக்கம் வேண்டும் என்பது எல்லா வகையான சடப்பொருட்களிடத்துமுள்ள இயல்பாம். இவ்வியல்பு காரணமாகச் சடப்பொருள் **சடத்துவம்** உடையது எனவும், பொருளொன்று நேர்கோடொன்றில் அசையுங்கால் அதன் **திணிவானது அதன் சடத்துவத்தின் அளவாகும்** எனவும் கூறப்படுகின்றது. புவியின் பரப்பிற்கு அணித்தாயுள்ள பொருள் எதுவாகிலும் அதன் முதன்மையான இயல்புகளுள் அதன் நிறையும் ஒன்றாகும்.

விசையை அளத்தல்.—**நீட்டல் உந்தத்தின் மாறுகை வீதமானது அழுத்திய விசைக்கு நேர்விகிதசமன் என்றும், விசை பிரயோகிக்கப்படும் திசையிலேயே அது நிகழ்கின்றது என்றும், நியூற்றனின் இரண்டாவது இயக்க விதி கூறுகின்றது** : இங்கு, சடத் துணிக்கையின் உந்தம் என்பது துணிக்கையின் திணிவு, அதன் வேகம் என்பனவற்றின் பெருக்கம் என வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகின்றது.

ஏதேனுமொரு கணத்தில் வேகம் v யுடன் அசையும் துணிக்கையொன்றின் திணிவு m எனின், அக்கணத்தில் அதன் உந்தம் mv ஆகும். துணிக்கையின் ஆர்முடுகல் a யும் அதைத் தோற்றுவிக்கும் விசை $\mathbf{F}$ உம் எனின், மேற்படி விதிக்கேற்ப

$$\mathbf{F} \propto \frac{d}{dt}(mv).$$

திணிவு ஒரு மாறிலி எனின்

$$\mathbf{F} \propto mv \text{ அல்லது } \mathbf{F} \propto ma.$$

அலகுத் திணிவுடைய பொருளொன்றின் மீது தாக்கி அலகு ஆர்முடுகலைத் தருகின்ற விசையே அலகு விசையெனின், மேற்படி விதியின்படி

$$F = ma = m\ddot{x}\cdot$$

ச.கி.செ. தொகுதியில் அலகு விசை தைன் ஆகும். அ.இ.செ. தொகுதியில் அதற்கொத்த அலகு இருத்தலி ஆகும்.

கணத்தாக்கு.—விசையொன்றன் கணத்தாக்கு என்பது அவ்விசை கொடுக்கும் நீட்டல் உந்தமாற்றம் என வரையறுக்கப்படுகின்றது. விசை F மாறாது t நேரத்திற்குத் தாக்குகின்றது எனவும், ஆர்முடுகல் $\ddot{x}$ எனவும், வேகம் $\dot{x}_1$ இலிருந்து $\dot{x}_2$ இற்கு மாறுகிறது எனவும் கொள்ளின், அவ்விசையின் கணத்தாக்கு I ஆனது,

$$I = m(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m\ddot{x}t = Ft$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது.

மாறும் விசையினிடத்து

$$\delta I = m\,[(\dot{x} + \delta\dot{x}) - \dot{x}] = m\,\delta\dot{x} = m\ddot{x}\,\delta t = F\,\delta t.$$

$$\therefore \quad I = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt\,;$$

இங்கு, தொகையீட்டின் எல்லைகள் t_1 உம் t_2 உம் தரப்பட்ட பிரசினத்திற்கேற்ப அமையும்.

புவியீர்ப்பால் ஆகும் நிலைக்குத்தியக்கம்.—இங்கு, x இன் நேர்த் திசை மேன்முகமானது எனவும், புவியீர்ப்பு g எனவும் இருக்குமாயின் இயக்கச் சமன்பாடானது

$$\ddot{x} = -g,$$

$$\therefore \quad \dot{x} = -gt + A\,;$$

மேலும், $x = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B\,;$ ....(iv)

இங்கு, A யும் B யும் மாறிலிகள்.

தொடக்கத்தில் $\dot{x} = u$ எனவும், $x = 0$ எனவும் இருந்தால் $A = u$, $B = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad \dot{x} = u - gt\,;$ ....(v)

மேலும், $x = ut - \frac{1}{2}gt^2$ ....(vi)

நேரம் $\frac{u}{g}$ இற்குப்பின் துணிக்கை அதனது உச்சி நிலையை அடைகின்றது எனச் சமன்பாடு (v) காட்டுகின்றது; ஏனெனில், அப்பொழுது $\dot{x} = 0$ ஆதலால். (vi) இல் t யிற்கு இப்பெறுமானத்தைப் பிரதியிட்டு துணிக்கை அடைந்துள்ள உயர்வுயரம் (மிகக்கூடிய) என்பதற்கு

$$h = \frac{u^2}{2g}$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

எறிபடைகள்.—O என்னும் புள்ளியொன்றிலிருந்து, கிடையான Ox உடன் கோணம் α ஆக்கும் திசையில் துணிக்கையொன்று தொடக்க வேகம் u_0 உடன் எறியப்படட்டும், படம் 2·03. புள்ளி (x, y) இலே துணிக்கை இருக்கும் பொழுது அதன் வேகம் u ஆகுக; அப்பொழுது அது Ox உடன் கோணம் θ ஆக்கும் திசையில் அசைவதாகுக. தொடக்க வேகத்தை

$$\dot{y}_0 = u_0 \text{ சைன் } \alpha,$$
$$\dot{x}_0 = u_0 \text{ கோசை } \alpha$$

எனக் கூறுபடுத்தலாம். இதன்பின் துணிக்கையின் இயக்கம்

$$\ddot{y} = -g, \ddot{x} = 0$$

என்பனவற்றால் எடுத்துரைக்கப்படும்.

எனவே, தரப்பட்ட தொடக்க நிபந்தனைகளுக்கேற்ப

$$x = (u_0 \text{ கோசை } \alpha)\, t,$$
$$y = (u_0 \text{ சைன் } \alpha)\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$\dot{y} = 0$ ஆகும் பொழுது, அதாவது $t = \dfrac{u_0 \text{ சைன் } \alpha}{g}$ ஆகும் பொழுது, எறிபொருள் பாதையிலுள்ள மிக உயர்வான புள்ளியை அடைகின்றது. இக்காலத்தினுள் x இன் திசையில் துணிக்கை சென்ற தூரமானது

$$u_0 \text{ கோசை } \alpha \left(\frac{u_0 \text{ சைன் } \alpha}{g}\right) = \frac{u_0^2 \text{ சைன் } 2\alpha}{2g}$$

ஆகும். எனவே, கிடைத தளமொன்றில், வீச்சானது $\dfrac{u_0^2 \text{ சைன் } 2\alpha}{g}$ ஆகும்.

அதுபோலவே, துணிக்கை அடைந்துள்ள அதியுயர் புள்ளிக்கு

$$y_{\text{உயர்}} = u_0 \text{ சைன் } \alpha . \left(\frac{u_0 \text{ சைன் } \alpha}{g}\right) - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{u_0 \text{ சைன் } \alpha}{g}\right)^2 = \frac{u_0^2 \text{ சைன்}^2 \alpha}{2g}$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

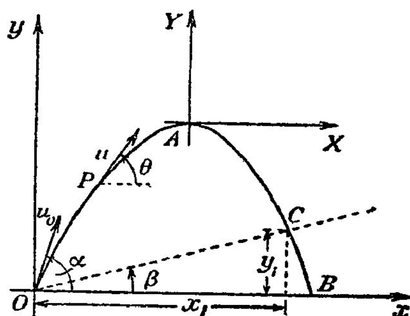
எறிபடையின் கடவை எனப்படும் அதன் சுவட்டுக்குச் சமன்பாடு காணும் பொருட்டுக் காலம் t இற்குப் பின், துணிக்கையானது P என்னும் புள்ளியொன்றில் இருக்கும் பொழுதுள்ள நிலைமையைக் கருதுக.

அப்பொழுது
$$\dot{x} = u \text{ கோசை } \theta = u_0 \text{ கோசை } \alpha,$$
$$\dot{y} = u \text{ சைன் } \theta = u_0 \text{ சைன் } \alpha - gt.$$

எனவே
$$x = (u_0 \text{ கோசை } \alpha)\, t.$$
$$y = (u_0 \text{ சைன் } \alpha)\, t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$= u_0 \text{ சைன் } \alpha \left(\frac{x}{u_0 \text{ கோசை } \alpha}\right) - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u_0^2 \text{ கோசை}^2 \alpha}$$
$$= x \text{ தான் } \alpha - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{u_0^2 \text{ கோசை}^2 \alpha}.$$

இங்கு, $t=0$ எனின் $x=0$, $y=0$ ஆதலால் தொகையீட்டு மாறிலிகள் சேர்க்கப்படவில்லை.

ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தியை O விலிருந்து, எறிபடை அடைந்துள்ள அதியுயர் புள்ளி A யிற்கு மாற்றுவோம். A யை உற்பத்தியாகப் பயன்



படம் 2·03. எறிபடையின் கடவை.

படுத்தி முந்திய அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமான திசைகளுடைய புது அச்சுத்தொகுதியொன்றைக் குறித்து ஏதேனுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறு கள் (X, Y) ஆகுக. அப்பொழுது,

$$\mathrm{Y}+\frac{u_0^2 \text{ சைன்}^2\, \alpha}{2g}=\left(\mathrm{X}+\frac{u_0^2 \text{ சைன் } 2\alpha}{2g}\right)\text{தான் }\alpha-\frac{1}{2}g\frac{\left(\mathrm{X}+\dfrac{u_0^2 \text{ சைன் } 2\alpha}{2g}\right)^2}{u_0^2 \text{ கோசை}^2\, \alpha}.$$

$$\therefore \quad \mathrm{Y}=-\frac{1}{2}g\frac{\mathrm{X}^2}{u_0^2 \text{ கோசை}^2\, \alpha}.$$

எனவே, கடவையானது புது ஆள்கூற்றுத் தொகுதியின் X அச்சுக்கு முற்றிலும் கீழே இருக்கின்ற ஒரு பரவளைவாகும். $\mathrm{U}_0=u_0$ கோசை α என்று எழுதினுல் மேற்படி சமன்பாடு

$$2\mathrm{U}_0^2\mathrm{Y}+g\mathrm{X}^2=0$$

ஆகும்.

சாய்தளமொன்றில் வீச்சு.—படம் 2·03 இல், Ox உடன் கோணம் β வை ஆக்கும் சாய்தளம் OC ஆகுக. எறிபடையானது இத்தளமீது C யில் மோதுகின்றது எனக் கொள்க. இப்புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் $(x_1,\ y_1)$ எனின், அவை

$$y_1=x_1 \text{ தான் } \beta=x_1 \text{ தான் } \alpha-\frac{1}{2}\frac{gx_1^2}{u_0^2 \text{ கோசை}^2\, \alpha}$$

என்பனவற்ருல் துணியப்படுகின்றன.

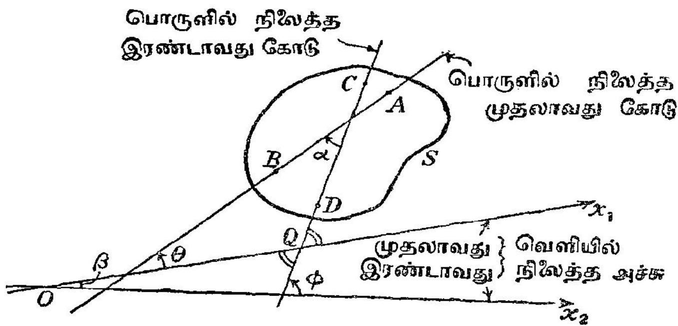
எனவே, $x_1 = 0$ அல்லது $2 \dfrac{(\text{தான் } \alpha - \text{தான் } \beta)}{g} u_0^2$ கோசை^{2} α.

தளத்திலுள்ள அதன் வீச்சு

$$s = 0 \text{ அல்லது } s = x_1 \text{ சீக } \beta = \frac{2u_0^2}{g}\left[\frac{\text{சைன் } (\alpha - \beta) \text{ கோசை } \alpha}{\text{கோசை}^2 \beta}\right]$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது.

கோணவேகம்.—படம் 2·04 இல், S ஆனது படத்தினது தளத்தில் எப்பொழுதும் இருக்கின்ற அடர் அல்லது விறைப்பான பொருளொன்றின் குறுக்குவெட்டு ஆகுக. S இல், அதைக்குறித்து நிலைத்திருக்கின்ற ஒரு



படம் 2·04. கோணவேகம்.

நேர்கோடு AB யிற்கும், வெளியில் நிலைத்த ஒரு மாட்டேற்றச்சு Ox_1 இற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் θ எனின், அப்பொழுது சுழலும் பொருளின் **கோணவேகம்** $\dot{\theta} = \omega$ ஆகும்.

பொருளில் வேறொரு நிலைத்த நேர்கோடு CD யிற்கும் வெளியில் நிலைத்த ஓர் இரண்டாவது அச்சு Ox_2 இற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் ϕ ஆகுக ; CD உம் Ox_1 உம் ஒன்றையொன்று Q வில் வெட்டுமாயின்,

$$\theta + \alpha = \phi - \beta$$

எனப் பெறுவோம் ; இங்கு, α உம் β உம் காட்டியுள்ள மாறுக் கோணங் கள் ஆகும்.

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \dot{\phi} \; ;$$

அதாவது, ஒன்று பொருளில் நிலைத்ததும் மற்றையது வெளியில் நிலைத்ததுமான இரு தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட மாட்டேற்றுக் கோடுகளைக் கோண வேகம் சாராது.

கோணவேகங்களைச் சேர்த்தல்.—OA, OB என்னும் அச்சுக்களைக் குறித்துப் பொருளொன்று ஒரே சமயத்தில் இரு சுழற்சிகளுக்காளாகுக, படம் 2·05 ; அவற்றின் கோணவேகங்கள் முறையே ω_a, ω_b ஆகுக. தளம் AOB யிலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி P யைக் கருதுக. OA, OB என்பன P யின் நிலையைக் குறிப்பதற்கான சரிவாள்கூற்றச்சுக்கள் ஆகுக.

படம் 2·05. கோணவேகங்களின் சேர்க்கை.

O விலிருந்து OA, OB என்னும் திசைகளில் நோக்கும் பொழுது சுழற்சிகள் வலஞ்சுழியானவை எனக் கொள்க. OA, OB என்பன கோணவேகங்களின் பெறுமானங்களைக் குறிக்கட்டும். அப்பொழுது, OA யைக் குறித்த சுழற்சியின் விளைவாகப் புள்ளி P யானது காலம் δt யில் $\omega_a.\mathrm{PM}.\delta t$ என்னும் அளவு மேன்முகமாகப் பெயர்க்கப்படும் ; அது போலவே, அதே காலத்தில் அது கீழ்முகமாகப் பெயர்ச்சி $\omega_b.\mathrm{PN}.\delta t$ அடைகின்றது ; இங்கு, PM உம் PN உம் P யிலிருந்து ஆள்கூற்றச்சுக்களுக்கு வரைந்துள்ள செங்குத்துக்கள் ஆகும். எனவே, மேன்முகமான மொத்தப் பெயர்ச்சி சைன் $\hat{\mathrm{AOB}}$ $(y\omega_a - x\omega_b)$ ஆகின்றது. $y = \dfrac{x\omega_b}{\omega_a} = x\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$ எனின் இது பூச்சியமாகும் ; ஆனால், இதுவே OA உம் OB உம் அடுத்துள்ள பக்கங்களாயுடைய இணைகரத்தின் மூலவிட்டம் OC யினது சமன்பாடு ஆகும். OC யிலுள்ள எந்தப் புள்ளியும் பெயர்ச்சி அடையாதபடியால் OC யையே அச்சாகக் குறித்து விளையுட் கோணவேகம் தாக்குகின்றது. OC ஆனது இவ்விளையுட் கோணவேகத்தின் பருமனைக் குறிக்கிறது என்பதைக் காட்டும்பொருட்டு படத்தின் தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி Q வின் பெயர்ச்சியைக் கருதுவோம். Q ஊடாக, அச்சுக்களுக்குச் செங்குத்தாக QK ஐயும் QL ஐயும், OC இற்குச் செங்குத்தாக QS ஐயும் வரைக ; AC யை L_1 இல் வெட்டுமாறு LQ வை நீட்டுக. அப்பொழுது, காலம் δt யில், OA ஐயும் OB ஐயும் குறித்த சுழற்சிகளின் பயனாக Q வின் மேன்முகப் பெயர்ச்சி

$$\omega_a\,.\,\mathrm{QK} - \omega_b\,.\,\mathrm{QL} = \kappa\,(\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{QK} - \mathrm{OB}\,.\,\mathrm{QL})$$

ஆகும் ; இங்கு, κ ஒரு மாறிலி. அது OA இன் பருமனை ω_a முதலியவற்றின் பருமன்களுடன் விகிதப்படி உணர்த்துகிறது. இனி, $\mathrm{LQ} = \mathrm{LL}_1 - \mathrm{QL}_1$

ஆனபடியால்,

$$OA.QK - OB.QL = 2\,(\Delta\, OAQ - \Delta\, OBC + \Delta\, AQC).$$

மேற்படி கோவையானது $-2\,\Delta\, OQC = -\kappa.\omega_c.QS$ இற்குச் சமன்; OC ஆனது விளையுட் கோணவேகத்தின் பருமனைக் குறிக்குமாயின், இது OC ஐக் குறித்த கோணவேகம் ω_c ஆல் Q விற்கு மேன்முகமாக ஏற்படும் பெயர்ச்சியாகும்.

தொடலி ஆர்முடுகலும் செவ்வன் ஆர்முடுகலும்.—வளையி ஒன்றின் புள்ளியொன்றிலுள்ள தொடலியும் செவ்வனும் அவ்வளையிக்கு உள்ளீடானவை ஆதலாலும் அவற்றின் திசைகள் எந்த ஆள்கூற்றுத் தொகுதியுடனும் தொடர்பில்லாதவை ஆதலாலும், வளையி வழியே அசையும் துணிக்கையொன்றின் ஆர்முடுகலைக் குறிப்பிட்டவொரு கணத்தில், துணிக்கை இருக்கின்ற வளையிப் புள்ளியிலுள்ள தொடலி செவ்வன் என்பவைகளின் வழியே கூறுகளாகத் துணித்தல் அடிக்கடி தேவைப்படும்.

படம் 2.06. தொடலி, செவ்வன் ஆர்முடுகல்கள்.

படம் 2.06 இல், P_1, P_2 என்பன முறையே t, $(t+\delta t)$ ஆகிய நேரங்களில் இத்தகைய துணிக்கையொன்றின் நிலைகள் ஆகுக; இப்புள்ளிக்குரிய செவ்வன்கள் C இல் சந்திப்பதாகுக; இவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் $\delta\psi$ என்க. மேற்படி நேரங்களிலிருந்த வேகங்கள் v உம் $(v+\delta v)$ உம் ஆகுக. இவை கண்டிப்பாய் P_1, P_2 களிலுள்ள தொடலிகள் வழியே இருக்கும். அப்பொழுது வளையி வழியே அளக்கப்பட்ட தூரம் P_1P_2 ஆனது δs எனின்,

$$v = \frac{ds}{dt};$$

இங்கு, $\frac{ds}{dt}$ என்பது δt பூச்சியத்தை அணுகும்பொழுது $\frac{\delta s}{\delta t}$ இன் எல்லைப் பெறுமானமாகும். P_2 இல் வேகம் $(v+\delta v)$ ஐ P_1 இலுள்ள தொடலிக்கு முறையே சமாந்தரமாகவும் செங்குத்தாகவும் $(v+\delta v)$ கோசை $\delta\psi$, $(v+\delta v)$ சைன் $\delta\psi$ என்னும் இரு கூறுகளாகத் துணிக்கலாம். $\delta\psi$ சிறிதாத

லின் கோசை $\delta\psi = 1 - \frac{\delta\psi^2}{2}$ உம் சைன் $\delta\psi = \delta\psi$ உம் ஆகும்; எனவே இரண்டாம் சிறுமை வரிசை நிற்கும் பெறுமானங்கள் புறக்கணிக்கப்படின், மேற்படிக் கூறுகள் முறையே $(v + \delta v)$ உம் $v\delta\psi$ உம் ஆகும். ஆகவே காலம் δt இல், P_1 இலுள்ள தொடலியின் திசைக்குச் சமாந்தரமாக நேரிடுகின்ற வேகமாற்றம் δv ஆகும்; ஆகையால் P_1 இல் தொடலி ஆர்முடுகல்,

$$\text{எல்}_{\delta t \to 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

அதுபோலவே, காலம் δt இல், வேகத்தின் செவ்வன் கூறுனது $v\,\delta\psi$ என்னும் அளவால் மாற்றம் அடைகின்றது. ஆகையால், P_1 இல் செவ்வன் ஆர்முடுகலானது $v \cdot \frac{d\psi}{dt}$ ஆகும்.

அதை $$v \cdot \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \qquad \left[\because \ \frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds}\right]$$

என்று எழுதலாம்; இங்கு, ρ ஆனது P_1 இலுள்ள வளைவாரை ஆகும். [ந.கு. இவ்வார்முடுகல் C முகமாகவே இருக்கும்.]

சீரான வட்டவியக்கம்.—சீரான வட்டவியக்கத்திற்கு v ஒரு மாறிலியும் தொடலி ஆர்முடுகல் பூச்சியமும் ஆகும்; அப்பொழுது, செவ்வன் ஆர்முடுகல் $\frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ ஆகும்; இங்கு, r என்பது வட்டத்தின் ஆரை. ω என்பது கோணவேகம். இக்கோவையை $r\dot{\theta}^2$ என்றும் எழுதலாம்; இங்கு, அசையும் துணிக்கையின் கோண நிலை θ ஆனது வட்டத்தின் மையம் ஊடாகச் செல்கின்ற தொடக்கக் கோடொன்றைக் குறித்துள்ளது.

உதாரணம்.—நீளம் λ உடைய இலேசான இழையொன்றுல நிலைத்த புள்ளியொன்றுடன கட்டுண்ட m திணிவுடைய துணிககையொனறு மாறாக கோணவேகம் ω உடன் ஆரை a உடைய கிடையான வட்டமொன்றை வரைதற்கான நிபந்தனையைக காணபது.

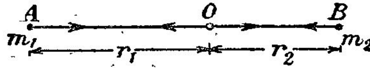
இழையிலுள்ள இழுவை F உம், நிலைக்குத்துடன இழையின் சாய்வு θ உம் ஆகுக. இனி, விசைகளை நிலைக்குத்தாகவும் கிடையாகவும் துணித்தால்,

$$F \text{ கோசை } \theta = mg\ ; \quad F \text{ சைன } \theta = m\omega^2 a\ ;$$

எனவே, $$g \text{ தான } \theta = a\omega^2\ ; \text{ இங்கு, } \theta = \text{சைன}^{-1}\left(\frac{a}{\lambda}\right).$$

சுழலும் பொருட்களைச் சமநிலைப்படுத்துதல்.—A யில், (படம் 2.07), திணிவு m_1 உடைய சடத்துணிக்கையொன்றைக் கருதுக; வட்டமொன்றின் மையம் O ஊடாகச் செல்கின்ற மாறாத, நிலைத்த அச்சொன்றைக் குறித்து அது மாறாக் கோணவேகம் ω உடன் வட்டமிடுகின்றது என்க. இதற்கான விகாரப் படை துணிக்கைக்கும் O விற்கும் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற இலேசான

கயிறொன்றிலுள்ள இழுவையால் தரப்படுகிறது எனக் கொள்க. சுழற்சியை உண்டாக்கும் பொருட்டு AO வழியே விசை F என்பது $m_1\omega^2r_1$



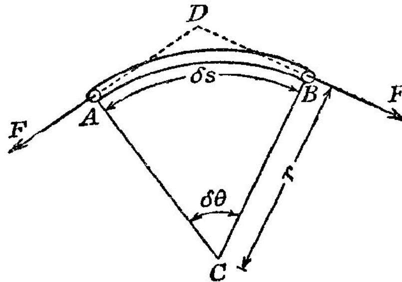
படம் 2.07. சுழலும் பொருட்களைச் சமநிலைப்படுத்துதல்.

ஆகும். [பொருளானது சடத்துணிக்கையொன்ருக இராதுவிடின், விசையைப் பொறுத்தமட்டில், O விலிருந்து தூரம் r_1 இலிருக்கும் புள்ளியொன்றில் பொருளின் திணிவு செறிந்திருக்கும் பொழுது கிடைக்கப்பெறும் விளைவு போலவே இங்கும் கிடைக்கும் எனக் கருதலாம்.] புள்ளி O வில், திசை OA யில், இதற்கு ஒத்த விசை (அச்சாணியில் மறுதாக்கம்) பருமனைப் பொறுத்தமட்டில் F இற்குச் சமன், அதாவது $m_1r_1\omega^2$; ஆனல், திசையைப் பொறுத்தமட்டில் அது இன்றியமையாது நேர்மாருகவே இருக்கும். இவ்விசை பூச்சியமாக்கப்படாதுவிடின் அதிகமான தேய்வு விளையக்கூடும். அது அதிர்வுகளை உண்டாககவும் கூடும். எனினும், O விலிருந்து r_2 தூரத்தில் A யிற்குச் சேய்மையான O வின் பக்கத்திலுள்ள B யில், திணிவு m_2 என்பது வைக்கப்பட்டிருக்கிறது என்க. இத்திணிவும் O ஊடாகச் செல்கின்ற அதே அச்சைக் குறித்து, கோணவேகம் ω வுடன் சுழலுமாயின் m_1, m_2 என்பனவற்றின் சுழற்சி காரணமாக அச்சாணி மீதுள்ள முழு விசை

$$(m_1r_1 - m_2r_2)\,\omega^2$$

ஆகும் ; $m_1r_1 = m_2r_2$ எனின் இது பூச்சியமாகும். அப்பொழுது, சுழல்கின்ற பொருட்கள் சமநிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றன என்ப.

சுற்றும் பெருவளையமொன்றில் ஏற்படும் இழுவை.—பெருவளையமொன்று, அதன் மையம் C ஊடாகச் செல்கின்றதும அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்



படம் 2.08. சுற்றும் பெருவளையமொன்றில் ஏற்படும் இழுவை.

தானதுமான அச்சொன்றைக் குறித்து, மாருக் கோணவேகம் ω வுடன் சுற்றுகின்றது எனக் கொள்க. A, B களுக்கு இடையில் இருக்கின்றதும்

மையம் C யில் $\delta\theta$ என்னும் சிறு கோணமொன்றை எதிரமைக்கின்றது மான சிறு வளையமூலகம் δs ஐக் கருதுக, படம் 2.08. இப்புள்ளிகளில் AC, BC என்பன வளையத்தின் செவ்வன்கள் ஆகுக ; A யிற்கும் B யிற்கும் உரிய தொடலிகள் D யிற் சந்திக்கட்டும் ; $AC = BC = r$ என்க. பெருவளையத்தின் கோணவேகம் மாறுது இருக்கின்றமையால், அதன் கணுள்ள இழுவை F எல்லாப் புள்ளிகளினிடத்தும் ஒன்றே ; எனவே, A, B களிலுள்ள இழுவைகளின் விளையுளானது கோணம் $\widehat{ADB}$ இன் இரு கூறுக்கி வழியே தாக்கும் ; அது

$$2F \text{ சைன் } \tfrac{1}{2}\delta\theta = F\,\delta\theta.$$

பெருவளையத்தின் நீளவலகுக்கான திணிவு λ எனின், **மையநாட்ட** விசையானது

$$(\lambda\,\delta s)\, r\dot{\theta}^2 = \lambda . r^2\dot{\theta}^2 . \delta\theta\,;$$

இதுவே A, B களிலுள்ள இழுவைகளின் விளையுள். எனவே,

$$F = \lambda r^2\dot{\theta}^2 = \lambda v^2\,;$$

இங்கு, v என்பது வளையத்தின் ஏதேனுமொரு புள்ளியின் வேகமாகும். எனவே, இழுவை வளையத்தின் ஆரையைச் சாராது ; ஆகவே, பல்வேறு விட்டங்கள் உடைய ஒப்பமான கப்பிகள மீது வளையுந்தன்மையுடைய வாரொன்று ஓடுங்கால் வாரிலுள்ள இழுவை மாறிலி ஆகும்.

கப்பியில் வார் நழுவுதல்.—வட்டக்கப்பியொன்றின்மீது செல்கின்றதும் கப்பியின் மையம் O வில கோணம் θ வை எதிரமைக்கும் வில் BC வழியே கப்பியுடன் தொடுகையுடையதுமான வார் ABCDEH ஐக் கருதுக, படம் 2.09. வார் வலஞ்சுழியாக நழுவப்போகும் நிலையில் இருககட்டும். வாரின் பகுதி களாகிய AB, EH என்பனவற்றில இழுவைகள் முறையே F_1, F_2 ஆகுக. அப்பொழுது, வாருக்கும் கப்பிக்கும் இடையேயுள்ள உராய்வால் $F_2 > F_1$. μ என்பது உராய்வுக்குணகம் ஆகுக. வாரின் நுண்ணளவான பகுதி CD யைக் கருதுக. $\widehat{COD} = \delta\theta$ ஆகுக ; வாரில், C யிலும் D யிலும் இழுவைகள் முறையே F உம் $F+\delta F$ உம் ஆகுக.

∴ C, D களிலுள்ள இழுவைகள் காரணமாகக் கப்பியைத் தாக்கும் விசை O வை நோக்கும் ; அதன் பெறுமானம்

$$F \text{ சைன் } \frac{\delta\theta}{2} + (F + \delta F) \text{ சைன் } \frac{\delta\theta}{2} = F\,\delta\theta.$$

CD மீது கப்பியின் மறுதாக்கத்தின் செவ்வன் கூறு δN ஆகுக ; வாரின் நீளவலகுககான திணிவு λ ஆகுக. அப்பொழுது,

$$F\,\delta\theta - \delta N = (\lambda\,\delta s)\, r\dot{\theta}^2.$$

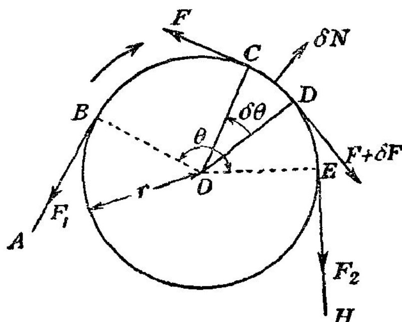
மேலும்,

$$\delta F = \mu\,\delta N.$$

$v = r\dot{\theta}$ எனின், எல்லையில்,

$$(\mathrm{F} - \lambda v^2) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mathrm{F}}{d\theta}$$

என மேற்படிச் சமன்பாடுகள் தருகின்றன.



படம் 2.09. கப்பியொன்றில் வார் நழுவுதல்.

இதிலிருந்து

$$\text{இ.ம.}\ (\mathrm{F} - \lambda v^2) = \mu\theta + \text{மாறிலி}$$

அல்லது $$\mathrm{F} - \lambda v^2 = \mathrm{A}\ \text{அடுக்கு}\ (\mu\theta)\ ;$$

இங்கு, A ஒரு மாறிலி. $\theta = 0$ ஆகும்பொழுது $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1$ ஆயின்

$$\mathrm{A} = \mathrm{F}_1 - \lambda v^2\ ;$$

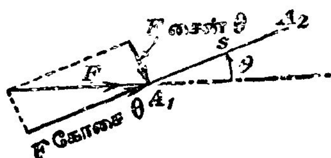
அதாவது, $$\mathrm{F}_2 - \lambda v^2 = (\mathrm{F}_1 - \lambda v^2)\ \text{அடுக்கு}\ (\mu\theta).$$

சக்தியும் வேலையும்.— விசையொன்றின் பிரயோகப் புள்ளியானது அவ்விசை தாக்குங் கோடு வழியே பெயர்ச்சியொன்றைப் பெறும்பொழுது அவ்விசை **வேலை** செய்கிறது எனக் கூறப்படுகின்றது. இவ்வாறாக, விசை F ஒன்றின் பிரயோகப் புள்ளி அவ்விசை தாக்குங் கோடு வழியே தூரம் s சென்றால் விசையாற் செய்யப்பட்ட வேலை Fs என்பதாகும்.

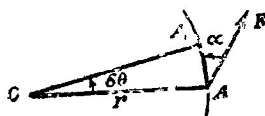
விசையின் பிரயோகப் புள்ளியானது அவ்விசை தாக்குங் கோட்டுடன் கோணம் θ வை ஆக்கும் திசையில் தூரம் s சென்றால் (படம் 2.10), அவ் விசையை, பெயர்ச்சி s வழியேயும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் கூறுகளாகத் துணித்து அங்கு செய்யப்பட்ட வேலையைக் காணலாம். இக்கூறுகளின் பருமன்கள் முறையே F கோசை θ, F சைன் θ என்பனவாகும். முன்னையதால் செய்யப்பட்ட வேலை (F கோசை θ)s ஆகும்; ஆனால் பின்னைய கூறானது வேலை செய்யாது. செய்யப்பட்ட முழு வேலையும்

$$\mathrm{F}s\ \text{கோசை}\ \theta = \{\vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{s}\}.$$

பிரித்தானிய அலகுமுறை, மீற்றர் அலகுமுறை என்பனவற்றில் வேலை யின் தனியலகுகள் முறையே அடியிருத்தலியும், தைன். சமீ அல்லது



படம் 2.10. விசையொன்றால் செய்யப்படும் வேலை.



படம் 2.11. இணையொன்றால் செய்யப்படும் வேலை.

எக்கும் ஆகும். அடியிருத்தல் நிறை, யூல் (இது 10^7 எக்குகள் ஆகும்), இலத்திரன் வோல்ற்று (இது $1{\cdot}602\times10^{-12}$ எக்குகள் ஆகும்) என்பன செய்முறையலகுகள் ஆகும்.

சக்தி என்பது வேலை செய்வதற்கெனப் பொருளொன்று கொண்டிருக்கும் ஆற்றல் என வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகின்றது. இயக்கத்தாலான சக்தி **இயக்கச் சக்தி** எனப்படுகின்றது ; பொருளொன்றின் இயக்கச் சக்தியானது தடையை எதிர்த்து ஈற்றில் ஓய்வு நிலையை அடையும் வரை அப் பொருளாற் செய்யப்படும் வேலையால் அளக்கப்படுகின்றது. பொருளொன்றின் நிலையாலான சக்தி அதன் **நிலைச் சக்தி** எனப்படுகின்றது. பொருளொன்றின் நிலைச் சக்தியானது அப்பொருளை, அது இருக்கின்ற நிலையிலிருந்து நிலைச் சக்தி பூச்சியம் எனக் கொள்ளப்படுகின்ற ஏதேனுமொரு நியம நிலைக்கு இயங்குங்காலே பொருளைத் தாக்குகின்ற விசைகளாற் செய்யப்படுகின்ற வேலையால் அளக்கப்படுகின்றது. நியம நிலையை விரும்பியவாறு எடுத்துக்கொள்ளமுடியுமாதலால் புவியின் மேற்பரப்பிலுள்ள பொருள்களின் நிலைச் சக்தி பூச்சியம் எனக் கொள்வது வழக்காம். என்றும் நிலைச் சக்தி மாற்றங்களையன்றித் தனிநிலைச்சக்தியைக் கருத்தில் கொள்ளாததால் பூச்சியத்தை விரும்பியவாறு எடுப்பதால் இடர்ப்படமாட்டோம்.

இணையொன்றாற் செய்யப்படும் வேலை.—விசைகளின் தொகுதியொன்றால் தாக்கப்படுகின்ற விறைப்பான பொருளொன்றைக் கருதுக ; பொருளின் புள்ளியொன்றில் தாக்கும் விசை F என்பதை (படம் 2.11) மாதிரி விசையாகக் கருதுவோம். O ஊடாகவும் விளக்கப்படத் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் செல்கின்ற அச்சொன்றைக் குறித்து இத்தொகுதியானது பொருளை ஒரு சிறுகோணம் $\delta\theta$ அளவில் சுழலச் செய்கின்றது எனவும், A என்பது A_1 ஐ அடைகின்றது எனவும் கொள்க. A_1A யிற்கும் F இற்கும் இடையேயுள்ள கோணமானது α எனின், விசை F என்பது செய்த வேலை

F கோசை α $(AA_1) = AA_1$ வழியே இருக்கின்ற F இன் உறுப்பு $\times\ r.\delta\theta$

$= \delta\theta\times$ சுழற்சியச்சைக் குறித்து F இன் திருப்பம்.

O வைக் குறித்துப் பொருளைத் தாக்குகின்ற எல்லா விசைகளின் திருப்பம் Γ எனின், விசைத்தொகுதி செய்த வேலை $\Gamma\delta\theta$ ஆகும். சிறப்பாக, விசைகள் மாறுப் பருமனுடையவோர் இணையாக அமைந்தால் செய்த வேலையானது இணை, சுழறசி ஆகியவற்றின் பெருக்கத்துக்குச் சமன் ஆகும்.

காப்புநிலை விசைத் தொகுதிகள்.

(*a*) ஈர்ப்புக் கவர்ச்சிக்கு எதிராகத் திணிவு m ஐ நிலைக்குத்துத் தூரம் h ஊடாக உயர்த்தும்பொழுது செய்யப்படும் வேலையையும்,

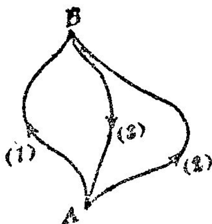
(*b*) உராய்வுவிசை F என்பதற்கு எதிராகப் பொருளொன்றைத் தூரம் s ஊடாகத் தள்ளும்பொழுது செய்யப்படும் வேலையையும்

இப்போது கவனிப்போம்.

(*a*) யில், ஈர்ப்புக் கவர்ச்சிக்கு எதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலை mgh ஆகும். பொருளை அதனது தொடக்க நிலைக்கு இறங்கவிடும் பொழுது பெறக்கூடிய தான வேலை mgh; எனவே, பொருள் மீது செய்யப்பட்ட முழுவேலை பூச்சியம். எனினும், (*b*) யிற் செய்யப்பட்ட வேலையானது Fs ஆகும்; ஆனால், பொருளானது அதன் தொடக்க நிலையை மீளுங்காலே அதே அளவு வேலை மீண்டும் செய்யப்படவேண்டியதாகின்றது ; அதாவது இங்கு செய்யப் படுகின்ற முழு வேலையும் $2Fs$; (*a*) ஐப் போன்ற முறைகளிலே பொருட் களின் தொகுதியானது அதன் தொடக்க நிலையை மீளுங்காலே அதைக் கொண்டு பொறிமுறை வேலை செய்வித்து அதனின் முன் செய்த வேலையைத் திரும்பப் பெறலாம். ஆனால், (*b*) யில் முன் செய்த வேலையின் ஏதேனுமொரு பங்கைக்கூட திரும்பப் பெறமுடியாது. இதுவே இங்கு எடுத்துக் காட்டியுள்ள இருவகை வேலைகளின் அடிப்படை வேறுபாடு.

வரைவிலக்கணம். **ஏதேனுமொரு தொகை பெயர்ச்சிகளை ஆற்றி, ஈற்றில் தொடக்க நிலையை அடையும் பொருட்டொகுதியொன்றுற் செய்யப்படும் அட்சரகணித வேலை பூச்சியமாய் இருக்கும் வண்ணம் அப்பொருட்டொகுதியைத் தாக்கும் விசைகள் அமைந்திருப்பின் அவ் விசைகள் காப்புநிலை விசைத்தொகுதியொன்றாகும்.**

ஈர்ப்புப் புலம், நிலையின் புலம், காந்தப் புலம் என்பனவற்றுடன் தொடர் புள்ள விசைகள் காப்புநிலை விசைகள் ஆகும். ஆனால், உராய்வால் அல்லது ஊடகமொன்றில் பொருளொன்று அசையுங்காலே அவ்வூடகம் அளிக்கும் தடையால் தோறறும் விசைகள் காப் பில் விசைகளாம்.



படம் 2.12. ஒரு காப்புநிலை விசைத்தொகுதி.

தேற்றம். பொருட்டொகுதியொன்றை A என் னும் நிலையொன்றிலிருந்து B என்னும் இரண் டாவது நிலைக்கு இயக்கி வைக்கும் காப்புநிலை விசைகளின் தொகுதியொன்றால் செய்யப்படும் வேலையானது A யிலிருந்து B யிற்குச் சென்ற பாதையைச் சாராது.

A யிலிருந்து B வரை, பாதைகள் (1), (2) வழியே செல்லும் பொழுது, படம் 2.12, செய்யப்பட்ட வேலைகள் முறையே W_1, W_2 ஆகுக ; B யிலிருந்து A வரை, பாதை (3) வழியே செல்லும்பொழுது செய்யப்படும் வேலை W_3 ஆகுக. அப்பொழுது, விசைகள் ஒரு காப்புநிலைத் தொகுதியாக அமைந்திருக்கின்றமையால்

$$W_1 + W_3 = 0,$$
$$W_2 + W_3 = 0.$$

எனவே, $W_1 = W_2$; இது தேற்றத்தை நிறுவுகிறது.

வரைவிலக்கணம். ஏதேனுமொரு நிலை A நியம நிலையாக எடுக்கப்பட்டுக் காப்புநிலை விசைகளின் தாக்கத்தால் பொருட்டொகுதியொன்று அந்நிலை A யிலிருந்து இரண்டாவது நிலை B யிற்குச் செல்லும்பொழுது செய்யப்பட்ட வேலையானது, B யில் அத்தொகுதி கொண்டிருக்கின்ற நிலைச்சக்தி எனக் கூறப்படுகின்றது.

எனவே, தொகுதியானது நிலை B யை அடைந்திருக்கும் பொழுது அத்தொகுதியிற் சேமிக்கப்பட்டிருக்கின்ற வேலை அந்நிலையின் நிலைச் சக்தி என்பதால் அளக்கப்படுகின்றது.

தேற்றம். பொருட்டொகுதியொன்றை நிலையொன்றிலிருந்து வேறொரு நிலைக்கு இயக்கிவைக்கும்பொழுது காப்புநிலை விசைகளுக்கு எதிராகச் செய்யப்படும் வேலையானது $W_2 - W_1$ ஆகும் ; இங்கு, W_1 உம் W_2 உம் முறையே முதலாம் இரண்டாம் நிலைகளுக்குரிய நிலைச் சக்திகள் ஆகும்.

இனி, W_1 ஆனது, ஒரு நியமநிலை S இலிருந்து முதல் நிலைக்குத் தொகுதி செல்லும்பொழுது செய்யப்படும் வேலையின் அளவு ஆகும் ; மேலும், W_2 ஆனது அதே நியம நிலையிலிருந்து இரண்டாவது நிலைக்குத் தொகுதி செல்லும்பொழுது செய்யப்படும் வேலையின் அளவு ஆகும். ஆனால், W_2 ஆனது, S இலிருந்து (i) வரை செல்லும்பொழுது செய்யப்பட்ட வேலை சக (i) இலிருந்து (ii) வரை செல்லும்பொழுது செய்யப்பட்ட வேலை ஆகும். எனவே, (i) இலிருந்து (ii) வரை செல்லும்பொழுது செய்யப்பட்ட வேலையானது $W_2 - W_1$ ஆகும்.

சக்திச் சமன்பாடு.—X என்னும் விசையொன்றால் தாக்கப்படும் திணிவு m இன் நேர்கோட்டியக்கத்தின் பொதுச்சமன்பாடு

$$m\ddot{x} = X$$

ஆகும் ; இங்கு, $\ddot{x}$ என்பது ஆர்முடுகல் ஆகும். இதை $\dot{x}$ என்பதாற் பெருக்கி

$$m\ddot{x}\dot{x} = X\dot{x}, \quad \text{அல்லது} \quad \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = X\frac{dx}{dt}$$

எனப் பெறுகிறோம்.

நுண்பெயர்ச்சி δx இன் போது X என்னும் விசையாற் செய்யப்பட்ட வேலை $X\,\delta x$ ஆனதால், $X\dfrac{dx}{dt}$ ஆனது, நேரம் t யில் பொருள் மீது எவ் வீதத்தில் வேலை செய்யப்படுகிறது என்பதைக் குறிக்கிறது. எனவே,

எவ்வீதத்தில் பொருளொன்றின் இயக்கச் சக்தி கூடிக் கொண்டுபோகிறதோ அதே வீதத்தில் பொருள் மீது வேலையுஞ் செய்யப்படுகின்றது என்பதை மேற்படிச் சமன்பாடு உணர்த்துகிறது. நேரம் t_1 இலிருந்து t_2 வரை தொகையிட,

$$\tfrac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) = \int_{t_1}^{t_2} X \frac{dx}{dt} dt,$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} X \, dx$$

எனப் பெறுகின்றோம் ; இங்கு, x_1, x_2 என்பன தொடக்க நிலையும் இறுதி நிலையும் ஆக, $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ அவற்றிற்கு ஒத்த வேகங்கள் ஆகும்.

விசைகளின் தொகுதி காப்பியல்பினதாய் இருக்குமாயின், அப்பொழுது $X = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$ ஆகும் ; இங்கு, V நிலைச் சக்தி ஆகும் ; மேலும்,

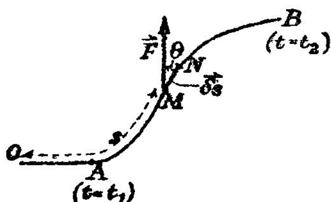
$$\int_{x_1}^{x_2} X \, dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x} dx = V_1 - V_2.$$

$$\therefore \; \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + V_2 = \tfrac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + V_1 ,$$

அதாவது, இயக்கச் சக்தி நிலைச் சக்தி என்பனவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலியாகும். இக்கூட்டுத்தொகை, **முழுச்சக்தி** எனப்படும் ; இது வேகத்தாலும் இடத்தாலும் தீர்மானித்துள்ள அதன உண்மையான நிலையிலிருந்து அப்பொருள் நியம நிலையொன்றை அடைந்து ஓய்வாய் இருக்கும் பொருட்டுப் புறக்கருவிகளுக்கு எதிராகச் செய்யும் வேலையின் அளவு ஆகும்.

இங்கு நிறுவியுள்ள தேற்றமானது ஒரேயொரு மாறிக்கு (அதாவது x) மட்டுமே உரியதெனினும் அது பொதுவாக உண்மையானதாம்.

வலு. வேலை செய்யப்படுகின்ற வீதம் வலு எனப்படும் ; அதாவது, நேரவலகொன்றிற் செய்யப்படும் வேலையே வலு.



படம் 2.13.

அது F என்னும் விசையொன்றுல் தாக்கப்படுகின்ற துணிக்கையொன்று, படம் 2.13, நேரம் t_1 இல் புள்ளி A யிலிருந்து நேரம் t_2 இல் புள்ளி B யை அடைகின்றது எனக் கொள்க. அவ்விசையாற் செய்யப்பட்ட வேலை,

$$\int_A^B \vec{F} \cdot \hat{s} \, ds.$$

இங்கு, $\hat{s}$ என்பது A யிலிருந்து B யிற்குச் செல்லும் பாதையில் இருக்கின்றதும் δs நீளமுடையதுமான மூலகம் MN இற்குரிய அலகுக்காவியாம் ;

அப் பாதை வழியே தொகையீட்டின் பெறுமானம் காணப்படுகின்றது. இனி,

$$\hat{s}\,\delta s=\overrightarrow{\delta s}=\vec{v}\,dt\ ;$$

இங்கு, $\vec{v}$ ஆனது δs வழியே அசையும்பொழுது துணிக்கை கொண்ட வேகமாம்.

எனவே, செய்யப்பட்ட வேலை,

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{\mathbf{F}}.\,\vec{v}\,dt\,.$$

அதாவது, வலு $\mathbf{P}$ யின் கணநிலைப் பெறுமானம்

$$\mathbf{P}=\vec{\mathbf{F}}.\,\vec{v}$$
$$=\ \mathbf{F}v\ \text{கோசை}\ \theta$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது. இங்கு, $\theta=(\widehat{\vec{\mathbf{F}},\ \vec{v}})$. எனவே, வலு ஆனது விசை, வேகம் என்பனவற்றின் எண்ணிப் பெருக்கத்தால் அளக்கப்படுகின்ற எண்ணிக் கணியமொன்றாகும்.

ச.கி.செ. அலகுத் திட்டத்தில் வலுவின் அறிமுறையலகானது செக்கனொன்றிற்கான ஓர் எக்கு ஆகும்; அது ஒரு தைன் அளவான விசையொன்று தன் தாக்கக்கோடு வழியே துணிக்கையொன்றை ஒரு செக்கனில் ஒரு சதமமீற்றர் தூரம் அசையுமாறு தொழில் ஆற்றும்பொழுது வேலை செய்யும் வீதம் ஆகும். இதன் சிறுமை காரணமாகப் பல தேவைகளுக்கு இவ்வலகு வசதியற்றது; வாற்று என்பது அதனினும் பெரிய அலகொன்றாகும்; அது 10^7 எக்கு. செக். $^{-1}$ அல்லது 1 யூல். செக். $^{-1}$ ஆகும். மின்னெந்திரிகள் கிலோவாற்றையும் மெகவாற்றையும் பயன்படுத்துகின்றனர்.

முனைவாள் கூறுகளில் வேகமும் ஆர்முடுகலும். படம் 2·14 இல், $\mathbf{P}$ ஆனது செவ்வகவச்சுக்கள் $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ என்பனவற்றைக் குறித்துள்ள புள்ளி $(x,\ y)$ ஆகுக; அதுபோலவே, O வை உற்பத்தியாகவும் $\mathrm{O}x$ ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் பயன்படுத்தி அப் புள்ளியின் முனைவாள்கூறுகள் $(r,\ \theta)$ ஆகுக. OP வழியேயும், θ கூடும் முகமாக அதற்குச் செங்குத்தாகவும், $\mathbf{P}$ யின் வேகக்கூறுகள் முறையே v_1, v_2 ஆகுக.

$x=r$ கோசை θ, $y=r$ சைன் θ ஆதலால், வேகங்களை $\mathrm{O}x$ இற்குச் சமாந்தரமாகத் துணிக்க,

$$v_1\ \text{கோசை}\ \theta-v_2\ \text{சைன்}\ \theta=\dot{x}=\frac{d}{dt}(r\ \text{கோசை}\ \theta)$$
$$=\dot{r}\ \text{கோசை}\ \theta-r\ \text{சைன்}\ \theta.\,\dot{\theta}.\quad\ldots\ldots\ldots\ \text{(i)}$$

அதுபோலவே,

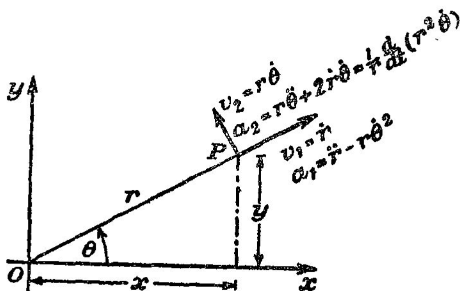
$$v_1\ \text{சைன்}\ \theta+v_2\ \text{கோசை}\ \theta=\dot{y}=\dot{r}\ \text{சைன்}\ \theta+r\ \text{கோசை}\ \theta.\dot{\theta}\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

சைன் θ வையும் கோசை θ வையும் சமன்பாடுகள் (i), (ii) இலிருந்து நீக்க

$$(v_1 - \dot{r})^2 + (v_2 - r\dot{\theta})^2 = 0.$$

மேலும், இரு மெய்யான கணியங்களினுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாவதற்கு அவ்வொவ்வொரு கணியமும் பூச்சியமாக இருக்கவேண்டும் ; ஆதலால்

$$v_1 = \dot{r},\ v_2 = r\dot{\theta}.$$



படம் 2·14. வேகம், ஆர்முடுகல் என்பனவற்றின் குறுக்கான கூறுகளும் ஆரைக் கூறுகளும்.

a_1, a_2 என்பன மேற்படித் திசைகளிலுள்ள ஆர்முடுகல்கள் எனின், முன்பு காட்டியவாறு

$$a_1 \text{ கோசை } \theta - a_2 \text{ சைன் } \theta = \ddot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \text{ கோசை } \theta - r \text{ சைன் } \theta.\ \dot{\theta})$$

$$= \ddot{r} \text{ கோசை } \theta - (\dot{r} \text{ சைன் } \theta)\,\dot{\theta} - (\dot{r} \text{ சைன் } \theta)\,\dot{\theta}$$

$$- r\,(\text{கோசை } \theta)\,\dot{\theta}^2 - r\,(\text{சைன் } \theta)\,\ddot{\theta}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \text{ கோசை } \theta - (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \text{ சைன் } \theta \ldots \text{(iii)}$$

அதுபோலவே,

$$a_1 \text{ சைன் } \theta + a_2 \text{ கோசை } \theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \text{ சைன் } \theta + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\theta) \text{ கோசை } \theta \ \ldots \text{(iv)}$$

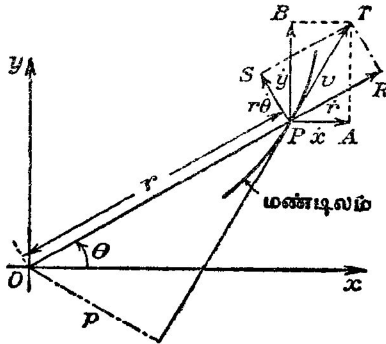
சமன்பாடுகள் (iii) இலும் (iv) இலும் இருந்து சைன் θ வையும் கோசை θ வையும் நீக்க, முன்னர்போல்,

$$a_1 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\ ,$$

$$a_2 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}).$$

a_1, a_2 ஆகிய கூறுகள் முறையே ஆர்முடுகலின் **ஆரைக்கூறு** என்றும் **குறுக்கான கூறு** என்றும் கூறப்படுகின்றன.

மைய மண்டிலங்கள்.—படம் 2·15 இல் O என்னும் நிலையான புள்ளியொன்றை நோக்கும் விசையொன்றின் தாக்கத்தால் P என்னும் துணிக்கை மண்டிலமொன்றை வரைந்துகொண்டிருப்பின், எந்தக் கணத்திலும் ஆரைக்காவி OP யையும் கருதப்படும் புள்ளியில் மண்டிலத்தின் தொடலியையும் கொண்ட தளத்திலே துணிக்கை இயங்கும். துணிக்கையைத் தாக்குகின்ற விசை இதே தளத்தில் கிடக்கின்றபடியாலும், துணிக்கையை வேறொரு விசையும் தாக்காதபடியாலும் மண்டிலம் ஒரே தளத்தில் முற்றிலும் கிடக்க வேண்டும் என்பது தெளிவாம்.



படம் 2·15. மைய மண்டிலமொன்றில் இயக்கம்.

மேலும், ஆரைக்காவிக்குச் செங்குத்தான விசை இல்லாதபடியால் ஆர் முடுகலின் குறுக்குக் கூறு பூச்சியம்; அதாவது, OP$=r$ எனவும், ஒரு நிலையான கோடு Ox உடன் OP ஆக்கும் கோணம் θ எனவும் இருந்தால்,

$$r^2\dot{\theta} = \text{மாறிலி} = h \text{ (என்க)}.$$

ஆரைச்சிறையான மூலகமொன்றின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}r^2\,\delta\theta$ ஆதலால் ஆரைக்காவி பரப்பை வரையும் வேகமானது ஒரு மாறிலி என மேற்கூறியவற்றிலிருந்து தெளிவாகின்றது. O வைக் குறித்து வேகம் $\dot{r}$ இன் திருப்பம் பூச்சியம் ஆதலால், O வைக் குறித்து விளையுள் விசையின் திருப்பம் $r^2\dot{\theta}$ ஆகும்; எனவே, தரப்பட்ட புள்ளியொன்றைக் குறித்து எந்தக் காவியின் திருப்பமும் அக் காவியைத் துணித்து வரும் கூறுகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன் ஆதலரல்

$$h = r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x} = pv.$$

இங்கு, $(x,\ y)$ என்பன மண்டிலத்திலுள்ள புள்ளியொன்றின் செவ்வக ஆள்கூறுகள் (இவற்றிற்கு O உற்பத்தி) ஆகவும், p ஆனது புள்ளி (x, y) யில் துணிக்கை இருக்கும்பொழுது அதன் விளையுள் வேகம் v யைக் குறிக்கும் நேர்கோட்டிலிருந்து உற்பத்தியின் செங்குத்துத் தூரம் ஆகவும் உள்ளன.

தூரத்தின் வர்க்கத்துக்கு நேர்மாறு விகிதசமமான கவர்ச்சியொன்றின் தாக்கத்தின் கீழ் வரையப்படும் மண்டிலம்.—*நிலையான புள்ளியொன்றை நோக்கும் விசையொன்றின் தாக்கத்தால் துணிக்கையொன்று ஒரு மண்டிலத்தில் அசையும்பொழுது ஆரைக்காவியானது சமகாலங்களிற் சமபரப் பளவுகளை வரைகின்றது என ஏற்கெனவே காட்டப் பட்டிருக்கின்றது. துணிக்கையின் முழுச்சக்தி ஒரு மாறிலி என்னும் செய்தியையும் இத்துடன் சேர்த்துக்கொண்டால் மண்டிலத்திற்கான சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.*

இத்தகைய துணிக்கையொன்றின் வேகம் v எனின்,

$$v^2=(\dot{r})^2+(r\dot{\theta})^2=\left(\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)^2+(r\dot{\theta})^2=\dot{\theta}^2\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right]$$

$$=\frac{h^2}{r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right].$$

துணிக்கை O விலிருந்து தூரம் r இல் இருக்கும்பொழுது திணிவலகொன்றிற்கான கவர்ச்சியானது $f(r)$ எனின், அத்துணிக்கையின் நிலைச் சக்தி $m\int_\infty^r f(r)\,dr$ ஆகும்; ஏனெனில், முடிவிலிப் புள்ளியிலிருந்து கருதப்படும் புள்ளி வரை சிறு திணிவு δm மீது தாக்கும் விசைக்கு எதிராகப் புறக்கருவியொன்றல் செய்யப்படும் வேலை ஒரு திணிவலகுக்கு $\int_\infty^r -f(r)\,(-dr)$ ஆதலின் என்க. இங்கு, $f(r)=\kappa r^{-2}$, κ ஒரு மாறிலி; எனவே, நிலைச் சக்தி $-\kappa m r^{-1}$. திணிவலகொன்றிற்கு முழுச்சக்தி E எனின்,

$$\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right]-\frac{\kappa}{r}=\mathrm{E}.$$

இது $$d\theta=\frac{h\,dr}{r\sqrt{2\mathrm{E}r^2+2\kappa r-h^2}}$$

$$=\frac{-h\,dx}{x^2\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{\frac{2\mathrm{E}}{x^2}+\frac{2\kappa}{x}-h^2}}\qquad\left[x=\frac{1}{r}\ \text{எனின்}\right]$$

$$=-\frac{dx}{\sqrt{\frac{2\mathrm{E}}{h^2}+\frac{\kappa^2}{h^4}-\left(x-\frac{\kappa}{h^2}\right)^2}}.$$

$$\therefore\ \theta=\text{சைன்}^{-1}\left\{\left(\frac{\kappa}{h}-\frac{h}{r}\right)\div\sqrt{2\mathrm{E}+\frac{\kappa^2}{h^2}}\right\}+\beta$$

எனத் தருகின்றது ; இங்கு, β ஒரு மாறிலி. மேற்படி சமன்பாட்டை

$$\sqrt{2E+\frac{\kappa^2}{h^2}}\cdot \text{சைன்}\ (\theta-\beta)=\frac{\kappa}{h}-\frac{h}{r}$$

என எழுதலாம்.

$$\therefore\quad r=\frac{h^2}{\kappa}\div\left\{1+\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{\kappa^2}}\cdot \text{கோசை}\left(\theta-\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

இச்சமன்பாட்டை $r=\dfrac{l}{1+e\ \text{கோசை}\ (\theta-\alpha)}$ என்னும் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடுமிடத்து, மண்டிலமானது அரைச் செவ்வகலம் $\dfrac{h^2}{\kappa}$ உம், மையவகற்சித் திறன் $\sqrt{1+\dfrac{2Eh^2}{\kappa^2}}$ உம் உடைய கூம்பின் வெட்டுக்கோடு எனக் காண்கிறோம். எனவே, $E<0$ எனின், மண்டிலம நீள்வளையமொன்றாகும். $E=\frac{1}{2}v^2-\dfrac{\kappa}{r}$ ஆதலால், $v^2<\dfrac{2\kappa}{r}$ எனின், மண்டிலம் நீள்வளையமொன்றாகும்.

மாற்று முறை: அசையுந் துணிக்கையொன்றின் ஆர்முடுகலின் ஆரைகூறும் குறுக்குக்கூறும் முறையே

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\ (r^2\dot{\theta})$$

ஆகும் என நிறுவப்பட்டிருக்கின்றது [ப. 68 ஐ ஒப்பிடுக]. கவர்ச்சி திணிவலகொன்றுக்கு $f(r)$ என்னும் வீதத்திலும், அது நிலையான புள்ளியொன்றை நோக்கியும் இருக்குமாயின்

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-f(r),$$
$$r^2\dot{\theta}=\text{மாறிலி}=h$$

எனப் பெறுகின்றோம் ; குறுக்கு ஆர்முடுகல் பூச்சியம் என்னும் காரணத்திலிருந்து பின்னைய சமன்பாடு பெறப்படுகின்றது.

$r^{-1}=u$ என்பதைப் பயன்படுத்தி மேற்படிச் சமன்பாடுகளைக் கோவைப் படுத்தினல் அது சிலவேளைகளில் வசதியாக இருக்கும். எனின்,

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}=hu^2,$$
$$\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\dot{\theta}=-h\cdot\frac{du}{d\theta}$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

எனவே, $$\frac{d^2r}{dt^2}=-h\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)=-h\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{dt}=-h^2u^2\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

ஆகவே, $f\left(\dfrac{1}{u}\right)=\kappa u^2$ எனின், அதாவது கவர்ச்சி தூரத்தின் வர்க்கத்துடன்

நேர்மாறுக மாறுமாயின், மண்டிலத்தைத் தரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2u^2}=\frac{\kappa}{h^2}.$$

மேற்படி வகையீட்டுச் சமன்பாடு இரண்டாம் வரிசையில் படுகின்றது; முழுத் தீர்வானது (*a*) குறிப்பிட்ட தொகையீடு, (*b*) நிரப்புசார்பு என்பனவற்றைக் கண்டு அவ்விரண்டையும் கூட்டி [ப. 37 ஐ ஒப்பிடுக] பெறப்படுகின்றது.

$D=\frac{d}{d\theta}$ எனின், குறிப்பிட்ட தொகையீட்டிற்கு

$$u=\frac{1}{(D^2+1)}\cdot\left(\frac{\kappa}{h^2}\right)=\frac{\kappa}{h^2}.$$

$u=A$ கோசை $(\theta+\gamma)$ என்பதே நிரப்புசார்பு ; இங்கு, A, γ என்பன எதேச்சையான மாறிலிகள். முழுத் தீர்வானது

$$u=[A \text{ கோசை } (\theta+\gamma)]+\frac{\kappa}{h^2}.$$

$$\therefore \quad r=\frac{1}{\frac{\kappa}{h^2}+A \text{ கோசை } (\theta+\gamma)}=\frac{\frac{h^2}{\kappa}}{1+\frac{Ah^2}{\kappa}\text{ கோசை } (\theta+\gamma)}.$$

எனவே, மண்டிலமானது மையவகற்சித்திறன் $\frac{Ah^2}{\kappa}$ உம் அரைச் செவ்வகலம் $\frac{h^2}{\kappa}$ உம் உடைய கூம்புவளைவொன்றுகும்.

துணிக்கையின் திணிவலகொன்றிற்குரிய முழுச்சக்தி E என்பதைக் குறித்து A என்னும் மாறிலியைப் பின்வருமாறு துணியலாம்.

$$E=\tfrac{1}{2}v^2-\frac{\kappa}{r}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right]\frac{h^2}{r^4}-\frac{\kappa}{r}$$

எனப் பெறுகின்றேம்.

இனி,
$$\frac{1}{r}=u=[A \text{ கோசை } (\theta+\gamma)]+\frac{\kappa}{h^2}.$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}=-A \text{ சைன் } (\theta+\gamma).$$

$$\therefore \quad E=\frac{1}{2}\left[\{A^2h^2 \text{ சைன்}^2(\theta+\gamma)\}+\frac{h^2}{r^2}\right]-\frac{\kappa}{r}$$

$$=\frac{1}{2}A^2h^2\left[1-\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{\kappa}{h^2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2}-\frac{\kappa}{r}$$

$$=\frac{1}{2}\left[A^2h^2-\frac{\kappa^2}{h^2}\right].$$

$$\therefore \quad 2E + \frac{\kappa^2}{h^2} = A^2h^2 ;$$

மண்டிலத்தின் மையவகற்சித்திறனுக்குக் கிடைக்கப்பெற்ற இரு பெறுமானங்களையும் சமன்படுத்தி இதே கோவையைப் பெறுகிறோம்.

நீள்வளைய மண்டிலத்திற்குரிய ஆவர்த்தனகாலம்.—நீள்வளையத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமனான பரப்பளவை வரையும் பொருட்டு ஆரைக் காவிக்குத் தேவைப்படும் நேரம் இதுவாம். a யும் b யும் நீள்வளையத்தின் அரையச்சுக்கள் எனின், அதன் பரப்பளவு πab ஆகும்; எனவே, நேரவலகொன்றில் வரையப்படும் பரப்பளவு $\frac{1}{2}h$ ஆதலின், ஆவர்த்தனகாலம்

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h}.$$

அரைச் செவ்வகலம் $\frac{h^2}{\kappa}$ ஆகும்; இங்கு, அது $\frac{b^2}{a}$ என்பதற்குச் சமன்.

எனவே,

$$\frac{b^2}{a} = \frac{h^2}{\kappa} \text{ அல்லது } b = h\sqrt{\frac{a}{\kappa}}.$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi ab}{h} = 2\pi a^{\frac{3}{2}}\kappa^{-\frac{1}{2}}.$$

இக்கோவையானது நீள்வளையத்தின் அரைச்சிறியச்சு b யைச் சாராது; ஆகவே, சமபேரியச்சுக்களுடைய நீள்வளைய மண்டிலங்கள் எல்லாவற்றுக்கும் ஆவர்த்தனகாலம் அதுவேயாகும்.

கெப்ளரின் விதிகள்.—ஈர்ப்பு விதியும் ஒரு நேர்மாறு வர்க்க விதியாதலின், முன்னர் ஆராயப்பட்ட இயக்கங்களையெல்லாம் கோள்கள் ஞாயிற்றை வலம் வருகின்ற இயக்கங்களாகக் கருதலாம்; இம்மண்டிலங்கள் சிறிய மையவகற்சித்திறனுடைய நீள்வளையங்களாம்; ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் ஞாயிறு ஒரு குவியத்தில் இருக்கிறது. ஆகாயக் கற்கள் நீள்வளைய மண்டிலங்கள் உடையன என்றும், அவற்றின் ஆவர்த்தனகாலம் பெரும்பாலும் மிகச் சிறிது என்றும், ரேடார் முறையைப் பயன்படுத்தி நடாத்தியுள்ள ஆராய்ச்சி தெரிவிக்கின்றது; எனவே, அவை ஞாயிற்றுத் தொகுதியில் அடங்குமாம். வால்வெள்ளிகளும், அவற்றின் மண்டிலங்கள் அடிக்கடி மிகையான மையவகற்சித்திறன் உடையதாயும், கோள்களின் குழப்பங்கள் காரணமாகச் சிலவேளைகளில் பரவளைவுவடிவம் உள்ளதாயும் இருக்கின்றபோதிலும், அவையும் ஞாயிற்றுத் தொகுதியைச் சேர்ந்தவை என ஏற்றுக்கொள்ளப்படும். எனவே, எமது கொள்கையை அவற்றுக்கும் பயன்படுத்தலாம்; ஆனால், உற்பத்தியையிட்டு, ஆகாயக் கற்களிலிருந்து வேறுபடக்கூடிய எரிந்த ஆகாயக் கற்களின் மண்டிலங்களுக்கு இக்கொள்கையைப் பிரயோகிப்பது பெரும்பாலும் சாதிக்கத்தக்கதொன்றன்று.

கோள்களின் இயக்கங்களைப் பற்றிய முதன்மையான மூன்று விதிகள் கெப்ளர் என்பவரால் 1609–1619 எனனும் காலத்தில் கண்டுபிடிக்கப் பட்டுள்ளன ; ஆயினும், நியூற்றன் என்பவரே அவற்றைக் கணிதமுறை ஆராய்ச்சியால் முதன்முதலாகக் கண்டுபிடித்தவர் ; இவ்வாராய்ச்சி 1687 இல் வெளியிடப்பட்டது.

விதி 1. ஒவ்வொரு கோளும், ஞாயிறு தன் குவியங்கள் ஒன்றில் இருக்கும்படியாக நீள்வளையமொன்றை வரைகிறது.

விதி 2. எந்த ஒரு சந்தர்ப்பத்திலும் ஞாயிற்றிலிருந்து கோளுக்கு வரைந்துள்ள ஆரைக்காவி, சம காலங்களிற் சம பரப்பளவுகளை வரைகிறது.

விதி 3. ஆவர்த்தனகாலங்களின் வர்க்கங்கள் வெவ்வேறன மண்டிலங்களின் பேரியச்சுக் களின் கனங்களுக்கு விகிதசமமானவையாம்.

பயிற்சி II

2·01. நீட்டல் உந்தக காபபு, சக்திக காப்பு என்பனவற்றிற்கான தத்துவஙகளைக் கூறுக.

ஹிக்சின் எறியியற்றராசில், அதன் மேடைகளுள் 1·0 கிகி. திணிவுடைய ஒன்றுனது, அதன் சமநிலைத் தானத்துககு மேலே 10 சமீ. உயருமாறு பக்கமாக இழுக்கப்படுகிறது. மோதுகைக்குப் பின்னர் இரு மேடைகளும் ஒன்றுசேர்ந்து அசைகின்றன. இரண்டாவது மேடை யின் திணிவு 1·5 கிகி. எனின், எவவுயரத்துககு அவை எறும் ? மோதுகையில் நேரிடுகின்ற இயக்கச் சக்தி நட்டத்தைக் கணிகக.

2·02. 32 தொன் திணிவுடைய புகையிரத எஞ்சின் ஒனறு 448 மாறுப் பரிவலுவைப் பிரயோகிக்கின்றது ; 1·25 தொன் நிறையான மாறு விசையொனறுல எஞ்சினின் இயக்கம் எதிர்க்கப்படுகின்றது. எஞ்சினின் இயக்கச் சமன்பாடு

$$v^2 \frac{dv}{dx} = \frac{5}{4}(88 - v)$$

என நிறுவுக ; இஙகு, v என்பது அடி செக $^{-1}$ இல் வேகமும், x என்பது அடிகளில் கடந்த தூரமும் ஆகும் ; g யை 32 அடி செக் $^{-2}$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

எஞ்சினின் மிக உயாவான வேகத்தைக் காணக ; எஞ்சின ஒய்வுநிலையிலிருநது இயங்கத் தொடங்கிக் கிட்டத்தட்ட 423 அடிகளில 30 மைல மணி $^{-1}$ வேகத்தை அடையும் என நிறுவுக. (இ.ம. $2 = 0·6932$ எனக் கொளக.)

2·03. முனைவாள்கூறுகள (r, θ) எனபனவற்றினிடத்து ஆரைக்காவி வழியேயும் அதற்குச் செஙகுத்தாகவும் உள்ள ஆர்முடுகலுறுப்புக்கள் முறையே $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ உம் $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ உம் ஆகும் என நிறுவுக.

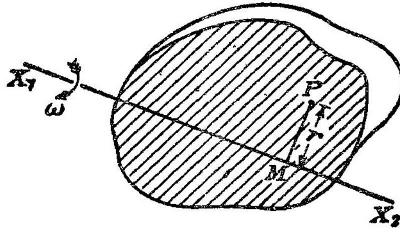
சிறு கோளொன்று ஞாயிறறைச் சுற்றி வட்டமொன்றை வரைகின்றது. திசை மாறுது இருக்க, வேகம் திடீரென $\frac{1}{n}$ இற்குத் தாழ்ததப்படுகிறது. மையவகறசித்திறன், ஆவர்த்தன காலம் என்பனவற்றில் வரும் மாற்றங்களைக காண்க.

2·04. நெப்ரியூன் எனனும் கோள 165 ஆணடு ஆவர்த்தனகாலத்துடன் ஞாயிற்றை வலம் வருகின்றது. அதன் மண்டிலத்தின விட்டமானது புவிமண்டிலத்தின் விட்டத்தைக் காட்டிலும் 30 மடங்கு பெரியது என நிறுவுக. இரு மணடிலங்களும் வட்டவடிவமானவை எனக் கொள்க.

அதிகாரம் III

விறைப்பு இயக்கவியற் கோட்பாடுகள்

நிலைத்த அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழலும் பொருளொன்றின் இயக்கச் சக்தி.—X_1X_2 என்பது ஒரு நிலைத்த அச்சு ஆகும் (படம் 3·01); அதைக் குறித்துக் குறிப்பிட்டவொரு கணத்தில், கோணவேகம் ω வுடன் பொருளொன்று சுழல்கின்றதெனக் கொள்க. P இல், பொருளின் சிறு மூலகம் அல்லது துணிக்கையொன்றைக் கருதுக. அத்துணிக்கையின் திணிவு m உம், அச்சு X_1X_2 இலிருந்து அதன் செங்குத்தான தூரம் r உம் ஆகுக. அம்மூலகத்தின் வேகம் $r\omega$ ஆதலின் அதன் இயக்கச் சக்தி $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ ஆகும்.



படம் 3·01. சுழலும் பொருளொன்றின் இயக்கச் சக்தி.

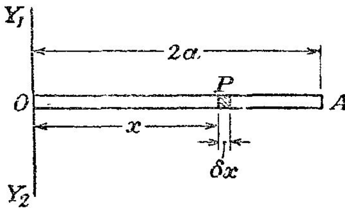
எனவே, கருதப்படும் கணத்தில், முழுப் பொருளின் இயக்கச் சக்தியானது 'அதனது தனித்தனித் துணிக்கைகளின் இயக்கச் சக்திகளின் கூட்டுத் தொகையே' என வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகிறதாதலால் அது

$$\Sigma(\tfrac{1}{2}mr^2\omega^2) = \tfrac{1}{2}\Sigma(mr^2)\omega^2$$

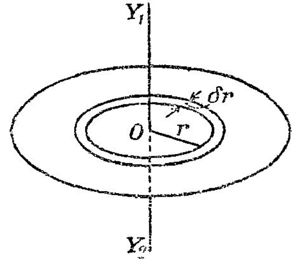
ஆகும்; இங்கு, கூட்டலில் பொருளின் அத்தகைய எல்லா மூலகங்களும் கணிக்கப்படுகின்றன. Σmr^2 என்னும் கோவை, **குறிப்பிட்ட அச்சைக் குறித்து** பொருளின் **சடத்துவத் திருப்பம்** எனப்படுகின்றது; அது I என்பதாற் குறிக்கப்படுகின்றது.

κ^2 ஐ $\dfrac{\Sigma(mr^2)}{\Sigma m}$ இற்குச் சமன் என இட்டால், இயக்கச் சக்திக்கான கோவை $\frac{1}{2}\kappa^2(\Sigma m)\omega^2$ ஆகின்றது; எனவே, பொருளின் முழுத் திணிவும் சுழற்சியச்சிலிருந்து தூரம் κ யிலுள்ள புள்ளியொன்றிற் செறிந்திருக்கிறதுபோல் சக்தி விளங்குகிறது. κ என்னும் கணியமானது **சுழற்சியச்சைக்** குறித்துப் பொருளின் **சுழிப்பாரை** எனப்படும். பொருளின் ஒவ்வொரு துணிக்கையிடத்தும் r^2 ஐக் கணித்து அக்கணியங்களின் சராசரியைத் தரும் வண்ணமே κ^2 அமைந்திருக்கிறது. செயன்முறைக்கு முதன்மையான சில எடுத்துக்காட்டுக்கள் கீழே தரப்பட்டிருக்கின்றன.

முனையொன்றூடாகவும் அதன் நீளத்துக்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து சீரான மெல்லிய கோலொன்றின் சடத்துவத் திருப்பம்.—OA ஆனது, படம் 3.02, நீளம் $2a$ உடைய கோலும், Y_1OY_2 ஆனது அதன் சுழற்சியச்சும் ஆகுக. P இல், கோலின் சிறு மூலகமொன்றைக் கருதுக ; அதன் நீளம் δx ஆகும் ; இங்கு O விலிருந்து P யின் தூரம் x ஆகும். கோலினிடத்து நீட்டல் அலகொன்றிற்கான



படம் 3·02. சீரான ஒரு மெல்லிய கோலின் முனையொன்றூடாகவும் அதன் நீளத்துக்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்.



படம் 3·03. சீரான ஒரு வட்ட அடரின் மையமூடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்.

திணிவு λ ஆகுக. எனவே, P யிலுள்ள மூலகத்தின் திணிவு $\lambda\,\delta x$ ஆகும் ; மேலும், இம்மூலகம் O விலிருந்து தூரம் x இல் இருக்கிற படியால், Y_1OY_2 ஐக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம் δI ஆனது $\lambda.\delta x.x^2$ ஆகும். எனவே,

$$I = \int_0^{2a} \lambda x^2\,dx = \lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{8\lambda a^3}{3}.$$

ஆனால் கோலின் திணிவு $2\lambda a$ ஆகும்.

$$\therefore \quad I = \frac{4ma^2}{3} = \tfrac{1}{3}m\,(2a)^2, \text{ அதாவது } \kappa = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

சீரான ஒரு மெல்லிய கோலின் அதன் நீளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் அதன் மையம் ஊடாகவுமுள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்.—கோலின் நீளம் $2a$ எனவும் நீட்டலலகொன்றிற்கான அதன் திணிவு λ எனவும் ஆகுக ; முதன்முதலாகக் கோலின் ஓர் அரையைக் கருதுக. அப்பொழுது, ஏற்கெனவே கருதியுள்ள எடுத்துக்காட்டுடன் இது சர்வசமனாயிருக்கிறது ; எடுத்துக்கொண்ட அச்சைக் குறித்துக் கோலின் இப்பகுதிக்கான சடத்துவத் திருப்பம் $I_{\frac{1}{2}}$ எனின்,

$$I_{\frac{1}{2}} = \lambda\int_0^a x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\,\lambda a^3$$

எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, முழுக் கோளுக்கும்

$$I = 2I_{\frac{1}{2}} = \frac{2\lambda a^3}{3} = \frac{ma^2}{3};$$

இங்கு, கோலின் திணிவு m ஆகும். எனவே, $\kappa = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

அதன் மையமூடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து ஒரு சீரான வட்டத் தகட்டின் சடத்துவத் திருப்பம்.—தகட்டின் ஆரை a யும் பரப்பலகொன்றிற்கு அதன் திணிவு σ வும் ஆகுக. ஆரை r உம் அகலம் δr உம் உடைய வளையமூலகமொன்றைக் கருதுக, படம் 3·03. அப்பொழுது, இவ்வளையத்தின் திணிவு $2\pi r\sigma\,\delta r$ ஆகும்; மேலும், அதன் எல்லாப் பாகங்களும் சுழற்சியச்சு Y_1Y_2 என்பதிலிருந்து ஒரே பொதுத் தூரம் r இல் இருக்கிறபடியால், மேற்படி அச்சைக் குறித்து வளையத்தின் சுழிப்பாரை r ஆகும். எனவே, Y_1Y_2 ஐக் குறித்து இவ்வளைய மூலகத்தின் சடத்துவத் திருப்பம்

$$\delta I = 2\pi r^3\sigma\,\delta r.$$

$$\therefore\quad I = \int_0^a 2\pi\sigma r^3\,dr = \tfrac{1}{2}\pi\sigma a^4 = \tfrac{1}{2}ma^2;$$

இங்கு, m என்பது தகட்டின் திணிவு.

எடுத்துக்காட்டானது தடிப்பு t உடைய வட்டத்தகடொன்றைப் பற்றியே எனின், தகட்டின் திரவியத்தின் அடர்த்தி ρ ஆகுக. தகட்டின் மையமூடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் சுழற்சியச்சு செல்லட்டும். அப்பொழுது, ஆரை r, அகலம் δr, நீளம் t உடைய உருளை மூலகமொன்றிற்கு,

$$\delta I = (2\pi rt\rho\,\delta r)r^2.$$

$$\therefore\quad I = 2\pi\rho t\int_0^a r^3\,dr = 2\pi\rho t\left(\frac{a^4}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\pi\rho ta^4.$$

ஆனால், $m = \pi a^2 t\rho$.

$$\therefore\quad I = \tfrac{1}{2}ma^2, \text{ அல்லது } \kappa^2 = \tfrac{1}{2}a^2.$$

எனவே, அதன் சொந்தச் சுழற்சியச்சைக் குறித்து வட்டத்தகடொன்றின் சுழிப்பாரையானது தகட்டின் தடிப்பைச் சாராது.

தன் விட்டத்தைக் குறித்துச் சீரான ஒரு (கோள) ஓட்டின் சடத்துவத் திருப்பம்.—ஓட்டின் மையமானது செவ்வக ஆள்கூற்றுத் தொகுதியொன்றின் உற்பத்தி எனவும், Ox என்பதையே அச்சாகக் குறித்து சடத்துவத் திருப்பம் தேவைப்படுகிறது எனவும் கொள்வோம். ஓட்டில், P ஒரு புள்ளி ஆகுக; இப்புள்ளியில் திணிவு δm உடைய துணிக்கையொன்று இருக்கட்டும்; புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் (x, y, z) என்க.

அப்பொழுது, ஓட்டின் ஆரை r எனின்

$$\delta m \,.\, r^2 = \delta m(x^2+y^2+z^2).$$

இதுவொரு சடத்துவத் திருப்பமன்று ; எனினும், இதை δS என்பதால் குறிப்போம். எனவே, திணிவு m உடைய முழுக் கோளத்துக்கும்

$$S = \Sigma\ \delta m(x^2+y^2+z^2).$$

ஆனல், சமச்சீரையிட்டு

$$\Sigma(\delta m \,.\, x^2) = \Sigma(\delta m \,.\, y^2) = \Sigma(\delta m \,.\, z^2) = \tfrac{1}{3}mr^2.$$

எனவே, அச்சைக் குறித்து ஓட்டின் சடத்துவத் திருப்பம் I_x ஆனது

$$I_x = \Sigma\ \delta m(y^2+z^2) = \tfrac{2}{3}mr^2.$$

விட்டத்தைக் குறித்து சீரான ஒரு கோளத்தின் சடத்துவத் திருப்பம்.— ஏற்கெனவே இடைக்கப்பெற்ற பேற்றை இவ்வெடுத்துக்காட்டில் உடனடியாகப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். இதன்பொருட்டு ஆரை a உடைய சீரான கோளமொன்றைக் கருதுக ; அதன் திரவியத்தின் அடர்த்தி ρ ஆகுக. கோளமானது மெல்லிய, ஒரேமையமுள்ள ஓடுகளாகப் பிரிக்கப்படுமிடத்து அவற்றுள் ஏதேனுமொன்றை ஆரைகள் r உம் $r+\delta r$ உம் துணிவனவாகுக. Ox ஐக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்

$$\delta I_x = \tfrac{2}{3}(4\pi r^2\rho\ \delta r)r^2.$$

எனவே, முழுக் கோளத்துக்கும்,

$$I_x = \frac{2}{3}\int_0^a (4\pi r^4\rho)dr$$
$$= \frac{8}{3}\pi\rho \,.\, \frac{a^5}{5} = \frac{2}{5}ma^2 ;$$

இங்கு, m கோளத்தின் திணிவு, அதாவது $\tfrac{4}{3}\pi\rho a^3$.

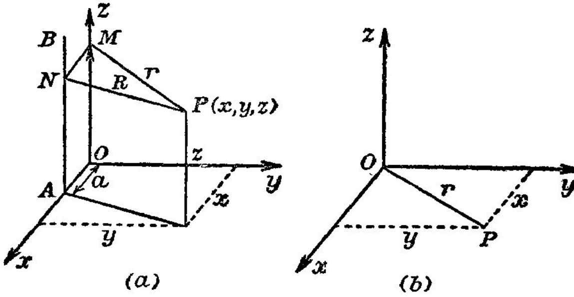
சடத்துவத் திருப்பங்களைப்பற்றிய தேற்றங்கள்.— I ஆம் தேற்றம். பொருளொன்றின் திணிவுமையமூடாகச் செல்கின்ற எந்த அச்சொன்றையும் குறித்து சடத்துவத் திருப்பம் I எனவும், சமாந்தர அச்சொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம் I_a எனவும் இருக்குமாயின்

$$I_a = I + ma^2 ;$$

இங்கு, a அவ்விரு அச்சுக்களுக்கிடையேயுள்ள செங்குத்துத் தூரமும், m பொருளின் திணிவும் ஆகும்.

செவ்வக அச்சுக்கள் Ox, Oy, Oz என்பவற்றைக் குறித்து P ஆனது புள்ளி (x, y, z) ஆகுக, படம் 3·04 (a). இங்கு, O பொருளின் திணிவு மையம். Oz ஐச் சுழற்சியச்சாகக் குறித்தே பொருளின் சடத்துவத் திருப்பம் I என்க. AB ஆனது Oz இற்குச் சமாந்தரமானதும் அதிலிருந்து தூரம் a யில் இருக்கின்றதுமானவொரு நேர்கோடு ஆகும். [இச் செயன்முறையில் பொதுமைக் குறைவு இன்று ; [ஏனெனில், நிலைத்த

Oz இனிடத்துத் தளம் xOz இல் AB கிடக்குமாறும் Ox இற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறும் Ox ஐயும் Oy யையும் எப்பொழுதும் தெரிந்தெடுத்துக்கொள்ள முடியும் என்பதேயாம்.] P யில் திணிவு



படம் 3·04. (a) சமாந்தர அச்சுக்களைக் குறித்து விறைப்பான பொருளொன்றின் சடத்துவத் திருப்பங்கள்.

(b) அடரொன்றின் தளத்துக்குச் செங்குத்தான அச்சொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்.

δm உடைய மூலகமொன்றைக் கருதுக ; Oz இலிருந்து P யின் இழிவுத் தூரம் r ஆகட்டும். அப்பொழுது,

$$\mathrm{I} = \Sigma\,(r^2\,\delta m)\,;$$

இங்கு, கூட்டலில் முழுப்பொருளும் கவனிக்கப்படுகிறது. AB யிலிருந்து P யின் இழிவுத்தூரம் R ஆகட்டும் ; அதாவது R = PN. அப்பொழுது,

$$\mathrm{I}_a = \Sigma\,(\mathrm{R}^2\,.\,\delta m).$$

ஆனால்,

$$\mathrm{R}^2 = (x-a)^2 + y^2$$
$$= r^2 - 2ax + a^2.$$

$$\therefore \quad \mathrm{I}_a = \Sigma[(r^2 - 2ax + a^2)\delta m]$$
$$= \mathrm{I} + a^2\,\Sigma\,\delta m - 2a\,\Sigma\,(x\,\delta m)$$
$$= \mathrm{I} + ma^2\,;$$

ஏனெனில், திணிவுமையத்தின் x ஆள்கூறு $\dfrac{\Sigma(x\,\delta m)}{\Sigma\,\delta m}$ ஆதலாலும் திணிவுமையம் ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தியில் இருப்பதாலும் இவ்வெடுத்துக் காட்டில் இவ்வாள்கூறும், அத்துடன் $\Sigma(x\,\delta m)$ உம் பூச்சியமேயாம்.

எனவே,

$$\kappa_a^{\,2} = \kappa^2 + a^2\,;$$

இங்கு, κ_a என்பது அச்சு AB யைக் குறித்து சுழிப்பாரை ஆகும்.

இத்தொடர்பைப் பரிசோதிக்கக்கூடிய முறையொன்று ப. 135 இல் விவரிக்கப்பட்டிருக்கிறது.

II ஆம் தேற்றம். அடரொன்றின் தளத்தில் Ox, Oy என்பன, படம் 3.04 (*b*), ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தான இரு அச்சுக்கள் எனவும், Oz தளம் xOy இற்குச் செங்குத்தான அச்சொன்று எனவும் இருக்குமாயின், அப்பொழுது

$$I_x + I_y = I_z$$

ஆகும் ; இங்கு, I_x, I_y, I_z என்பவை முறையே அச்சுக்கள் Ox, Oy, Oz என்பவற்றைக் குறித்துத் தளத்தின் சடத்துவத் திருப்பங்கள் ஆகும்.

அடரில் P யானது திணிவு δm உடைய துணிக்கையொன்று ஆகுக ; P என்பது புள்ளி (x, y) ஆகுக. $OP = r$ ஆகுக. அப்பொழுது

$$\begin{aligned} I_x + I_y &= \Sigma(\delta m \,.\, x^2) + \Sigma(\delta m \,.\, y^2) \\ &= \Sigma[\delta m(x^2+y^2)] \\ &= I_z \qquad [\because\ r^2 = x^2+y^2]. \end{aligned}$$

[தேற்றம் I, எந்தப் பொருளுக்கும் பொருந்தும் ; ஆனால் தேற்றம் II, அடரொன்றிற்கு மட்டுமே பொருந்தும் என்பது குறித்தற்பாலது.]

செவ்வக அடர்.—பக்கங்கள் $2a$, $2b$ உம், பரப்பலகொன்றிற்கான திணிவு σ வும் உடைய செவ்வக அடரொன்றைக் கருதுக.

(i) அதன் (திணிவு) மையம் ஊடாகவும் நீளம் $2a$ உடைய பக்கத்துக்குச் சமாந்தரமாகவும்,

(ii) அதன் திணிவுமையம் ஊடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும்,

செல்கின்ற அச்சொன்றைக் குறித்து அடரின சுழிப்பாரையைக் காண்போம்.

(i) O ஆனது அடரின் திணிவுமையம் ஆகுக ; அடரின் தளத்தில், முறையே $2a$, $2b$ என்னும் பக்கங்களுக்குச் சமாந்தரமாக இருக்கும் வண்ணம் அச்சுக்கள் Ox உம் Oy உம் தெரிந்தெடுக்கப்படட்டும். P_1P_2 எனபது அடரின் மூலகம் ஒன்றுகுக ; அது Ox இற்குச் சமாந்தரமாகவும், அதிலிருந்து தூரம் y யிலுள்ளதாகவும், அகலம் δy உடையதாகவும் இருக்கட்டும். அப்பொழுது, அம்மூலகத்தின் திணிவு $2a\sigma \,.\, \delta y$ ஆகும் ; அன்றியும் Ox ஐக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்

$$\delta I_x = (2a\sigma \,.\, \delta y)y^2.$$

எனவே,

$$I_x = 2\left[2a\sigma\int_0^b y^2\,dy\right] = \frac{4\sigma ab^3}{3}.$$

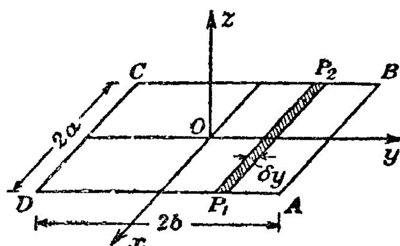
ஆனால், $m = 4ab\sigma$; எனவே,

$$I_x = \frac{mb^2}{3}.$$

அதுபோலவே,
$$I_y = \frac{ma^2}{3}.$$

(ii) O ஊடாகவும் அடரின் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் Oz வரையப் பட்டால்,

$$I_z = I_x + I_y = \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2).$$



படம் 3.05. (a) Ox, (b) Oz ஐக் குறித்து சீரான ஒரு செவ்வக அடரின் சடத்துவத் திருப்பம்.

மாற்றுமுறை.—$\delta x\ \delta y$ என்பது அடரின் தளத்திலுள்ள சிறு மூலக மொன்றுயின், சுழற்சியச்சிலிருந்து அதன் தூரம் $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ ஆனபடியால்,

$$I_z = 4\int_0^a\int_0^b (x^2+y^2)\sigma\, dx\, dy$$

$$= 4\sigma\int_0^a (x^2 b + \tfrac{1}{3}b^3)dx = \tfrac{4}{3}\sigma(a^3 b + b^3 a)$$

$$= m\left[\tfrac{1}{3}(a^2+b^2)\right].$$

AD யைக் குறித்து மேற்படி அடரின் சடத்துவத் திருப்பத்தை எழுத ப. 78 இலுள்ள முதலாவது தேற்றம் உதவுகின்றது. இது,

$$m\left(\frac{a^2}{3}+a^2\right) = \tfrac{4}{3}ma^2.$$

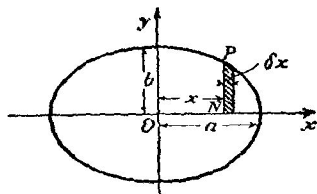
வட்ட அடர்.—வட்ட அடரொன்றின் மையம் ஊடாகவும் தன் தளத்துக் குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம் $\frac{1}{2}ma^2$ என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இவ்வச்சு Oz எனவும், Ox உம், Oy உம் ஒன்றிற்கொன்றும், இரண்டும் Oz இற்கும் செங்குத்தானவை எனவும் ஆயின்,

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{2}I_z = \tfrac{1}{4}ma^2.$$

எனவே, எந்த விட்டத்தையும் குறித்து சுழிப்பாரை $\dfrac{a}{2}$ ஆகும்.

சீரான ஒரு நீள்வளைய அடர்.—படம் 3.06 இல் காட்டியுள்ளவாறு, ஆள் கூற்றச்சுக்கள் Ox, Oy என்பவற்றிற்கு முறையே சமாந்தரமான அரையச் சுக்கள் a யும் b யும் உடைய நீள்வளையமொன்றின் வடிவமும்,

திணிவு m உம் உடைய மென்னடரொன்றைக் கருதுக. Ox ஐக் குறித்து அடரின் சடத்துவத் திருப்பம் I_x ஆகுக. அப்பொழுது, அடரின் பரப்படர்த்தி σ எனின், உயரம் h உம், அகலம் δx உம் உடைய மூலகம் PN என்பதற்கு



படம் 3·06. சீரான ஒரு நீள்வளைய அடரின் சடத்துவத் திருப்பம்.

$$\delta I_x = \tfrac{1}{3}\sigma(y\,\delta x)y^2 = \tfrac{1}{3}\sigma y^3\,\delta x.$$

$$\therefore\ I_x = 4\left[\frac{\sigma}{3}\int_0^a y^3\,dx\right].$$

இத்தொகையீட்டை நிறைவேற்றும் பொருட்டு மையவகற்சிக் கோணம் ϕ என்பதைப் பயன்படுத்தலாம்; இதை யிட்டு $x = a$ கோசை ϕ, $y = b$ சைன் ϕ என்று எழுதுகிறோம். அப்பொழுது, $\delta x = -a$ சைன் $\phi\,\delta\phi$, எனவே,

$$I_x = \frac{4}{3}\sigma\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^3\,\text{சைன்}^3\phi\,(-a\,\text{சைன்}\,\phi)\,d\phi$$

$$= -\frac{4}{3}\sigma ab^3\left[-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}ma^2,\ [\because m = \pi ab\sigma].$$

அதுபோலவே,

$$I_y = \tfrac{1}{4}mb^2.$$

$$\therefore\quad I_z = I_x + I_y = \tfrac{1}{4}m(a^2+b^2);$$

இங்கு, Oz ஆனது Ox இற்கும் Oy இற்கும் செங்குத்தாகும்.

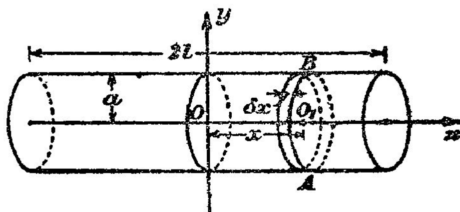
சீரான ஓர் உருளையின் மையம் ஊடாகவும் அதன் நீளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்.— உருளையின் நீளம் $2l$ உம் அதன் குறுக்குவெட்டு ஆரை a யும் ஆகட்டும். படம் 3·07 இல், உருளையின் திணிவுமையம் O எனவும் அதன் சுற்றச்சு Ox எனவும் Ox இற்குச் செங்குத்தான அச்சொன்று Oy எனவும் ஆகட்டும்; Ox என்பதை அச்சாகக் குறித்தே சடத்துவத் திருப்பம் கணிக்கவேண்டியதாகிறது. உருளையினது திரவியத்தின் அடர்த்தி ρ ஆகுக. x, $x+\delta x$ ஆகிய தளங்களால் வரையறுத்த வட்டமூலகம் AB யைக் கருதுக; அப்பொழுது, அதன் மையம் O_1 ஆனது O விலிருந்து தூரம் x இல் இருக்கிறது. Ox ஐக் குறித்து இத்தட்டின் சடத்துவத் திருப்பம்

$$(\pi a^2.\delta x)\,\rho\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}\pi\rho a^4.\delta x.$$

விட்டமொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம் $\tfrac{1}{4}\pi\rho a^4.\delta x$ ஆகும்.

எனவே, Oy யைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்

$$(\pi\rho a^2\,\delta x)\,x^2+\tfrac{1}{4}\pi\rho a^4\,\delta x=\delta I \quad (\text{என்க}).$$



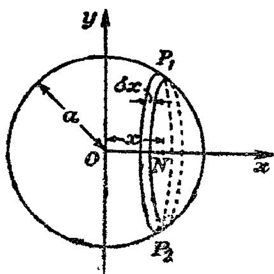
படம் 3.07. Oy யைக் குறித்து ஒரு சீரான வட்டவுருளையின் சடத்துவத் திருப்பம்.

$$\therefore \quad I=2\left[\pi\rho a^2\int_0^l\left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)dx\right]=2\pi\rho a^2\left[\frac{l^3}{3}+\frac{a^2l}{4}\right]$$

$$=m\left(\frac{l^2}{3}+\frac{a^2}{4}\right);$$

இங்கு, உருளையின் திணிவு $m=2\pi a^2 l\rho$.

சீரான கோளமொன்றின் விட்டமொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்.—கோளத்தின் மையம் O வும், படம் 3·08, அதன் ஆரை a யும், அதன் திரவியத்தின் அடர்த்தி ρ வும் ஆகுக. Ox இற்குச் செங்குத்தான தளங்களாற் கோளத்தைத் துண்டுகளாகப் பிரிக்க. Ox ஐ அச்சாகக் குறித்தே சடத்துவத் திருப்பத்தைக் காணவேண்டும். δx இடையீடுள்ள இத்த கைய இரு தளங்கள் அமைக்கின்ற துண்டைக் கருதுக. ஆரை y உடைய இம்மூலகத்தின் மையம் N எனின், $ON=x$ ஆகுக. Ox ஐக் குறித்து இம்மூலகத்தின் சடத்துவத் திருப்பம் $m\dfrac{y^2}{2}$ ஆகும்; இங்கு, அதன் திணிவு m ஆனது $\pi y^2\rho.\delta x$ ஆகும். எனவே, Ox ஐக் குறித்து முழுக்கோளத்தின் சடத்துவத் திருப்பம் I ஆனது,



படம் 3.08. சீரான கோளமொன்றின் விட்டமொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்.

$$I=2\int_0^a \pi y^2\rho\left(\frac{y^2}{2}\right)dx$$

$$=\pi\rho\int_0^a (a^2-x^2)^2\,dx \qquad [\because\ a^2=x^2+y^2]$$

$$=\pi\rho\left[a^5-2a^2.\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}\right]$$

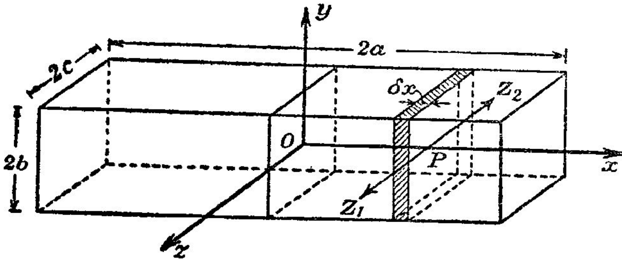
$$=\tfrac{8}{15}\pi\rho a^5.$$

ஆனால் கோளத்தின் திணிவு $=\frac{4}{3}\pi a^3\rho=m$(என்க).

$$\therefore \quad I=\frac{2}{5}ma^2, \text{ அதாவது } \kappa^2=\frac{2}{5}a^2.$$

செவ்வகக் குறுக்குவெட்டுடைய சீரான சட்டம்.— படம் 3·09 இல், செவ்வகச் சட்டத்தின் திணிவு மையம் O ஆகுக. சட்டத் திரவியத்தின் அடர்த்தி ρ ஆகும். O ஊடாக, சட்டத்தின் ஓரங்களுக்குச் சமாந்தரமாக மூன்று செவ்வக அச்சுக்களை வரைக. ஓரங்களின் நீளங்கள் $2a$, $2b$, $2c$ ஆகுக. தளங்கள் x இற்கும் $(x+\delta x)$ இற்கும் இடையில் அடங்கியுள்ள மூலகத்தைக் கருதுக. இம்மூலகத்தின் திணிவுமையம் P ஆகுக. Oz இற்குச் சமாந்தரமாக Z_1PZ_2 என்பதை வரைக. அப்பொழுது, இம் மூலகத்தின் திணிவு $4bc\rho\delta x$; Z_1Z_2 என்பதைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்

$$[4bc\rho\,\delta x].\,\tfrac{1}{3}b^2.$$



படம் 3·09. அச்சு Oz ஐக் குறித்து செவ்வகக் குறுக்குவெட்டுடைய சீரான சட்டத்தின் சடத்துவத் திருப்பம்.

எனவே, Oz ஐக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்

$$4bc\rho\,[\tfrac{1}{3}b^2+x^2]\,\delta x,$$

மேலும், Oz ஐக் குறித்து முழுச் சட்டத்தின் சடத்துவத் திருப்பம்,

$$I=2\left[4bc\rho\int_0^a\{\tfrac{1}{3}b^2+x^2\}\,dx\right]$$

$$=8\rho bc\,[\tfrac{1}{3}ab^2+\tfrac{1}{3}a^3].$$

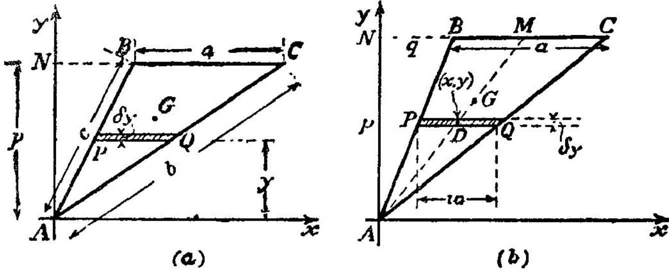
ஆனால், சட்டத்தின் திணிவு $=8abc\rho=m$ (என்க).

$$\therefore \quad I=\tfrac{1}{3}m\,(a^2+b^2),$$

அதாவது, $$\kappa^2=\tfrac{1}{3}(a^2+b^2).$$

சீரான முக்கோணி அடரொன்றும் அதன் சில சடத்துவத் திருப்பங்களும்.—படம் 3·10 (a) இல், ABC என்பது பரப்படர்த்தி σ உடைய ஒரு

சீரான முக்கோணி அடராகுக. Ax உம் Ay உம் A ஊடாக, ஒன்றிற் கொன்று செங்குத்தான இரு அச்சுக்கள் ஆகுக ; இங்கு, அச்சு Ax ஆனது முக்கோணியின் அடி BC இற்குச் சமாந்தரம்.



படம் 3·10. சீரான முக்கோணி அடரொன்றும் அதன் சில சடத்துவத் திருப்பங்களும்.

Ay மீது AB யின் எறியம் AN ஆனது p ஆகுக. நிலைக்கூறு y யும், அகலம் δy உம், Ax ஐக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம் (δI_x) உம் உடைய கீலம் PQ வைக் கருதுக. கீலத்தின் நீளம் $\frac{a}{p}.y$ ஆகும்.

$$\therefore\ I_x = \frac{a\sigma}{p}\int_0^p y.y^2\,dy = \frac{a\sigma}{4}p^3$$
$$= \tfrac{1}{2}\,mp^2\,;$$

இங்கு, $m = \frac{1}{2}ap\sigma$, முக்கோணியின் திணிவு ஆகும்.

அதன் புவியீர்ப்புமையம் G ஊடாகச் செல்கின்ற சமாந்தர அச்சொன் றைக் குறித்து முக்கோணியின் சடத்துவத் திருப்பம் I_G எனின், சமாந்தர அச்சுத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$I_G + m\left(\tfrac{4}{9}p^2\right) = I_x,$$

அதாவது, $$I_G = \tfrac{1}{18}\,mp^2.$$

அதுபோலவே, $$I_{BC} = \tfrac{1}{6}\,mp^2.$$

Ay யைக் குறித்து முக்கோணியின் சடத்துவத் திருப்பத்தைக் காணும் பொருட்டு, அகலம் δy உடைய மூலகம் PQ வைக் கருதுக ; அதன் நீளம் w என்க, படம் 3·10 (b). இம்மூலகத்தின் மையம் D யும், A யைக் குறித்து அதன் ஆள்கூறுகள் $(x,\ y)$ யும் ஆயின், சமாந்தரவச்சுத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\delta I_y = (w\sigma\,dy)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{w}{2}\right)^2 + x^2\right].$$

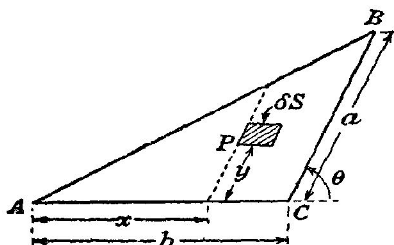
இனி,
$$\frac{y}{x}=\frac{p}{q+\frac{1}{2}a},\ w=\frac{a}{p}y.$$

$$\therefore\quad I_y=\int_0^p \sigma\frac{a}{p}y\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a}{p}\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{q+\frac{1}{2}a}{p}\cdot y\right)^2\right]dy$$
$$=\frac{\sigma a}{p}\left[\frac{1}{48}a^2p^2+(q+\tfrac{1}{2}a)^2\frac{p^2}{4}\right]$$
$$=2m\left[\frac{a^2}{12}+\frac{q^2+aq}{4}\right]$$
$$=m\left[\frac{a^2}{6}+\frac{aq+q^2}{2}\right].$$

எனவே, A ஊடாகவும் வரிப்படத்தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் செல்கின்ற அச்சொன்றைக் குறித்து முக்கோணியின் சடத்துவத் திருப்பம் I_a எனின்,
$$b^2=p^2+(a+q)^2,\ c^2=p^2+q^2$$
என்பவற்றைப் பயன்படுத்த,
$$I_a=I_x+I_y=m\left[\frac{p^2}{2}+\frac{a^2}{6}+\frac{aq+q^2}{2}\right]$$
$$=m\left[\frac{b^2+c^2}{4}-\frac{a^2}{12}\right].$$

முதன்மை வாய்ந்த இவ்விளைவை அடுத்த பந்தியில் காட்டியுள்ளவாறு இன்னும் விரைவாகப் பெற்றுக்கொள்ளலாம்.

A ஊடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து சீரான முக்கோணி அடர் ABC யின் சுழிப்பாரையைத் துணிதல்.—புள்ளி P என்பதில், படம் 3·11, அடரின் தளத்தில், δS ஒரு பரப்பளவு மூலகம் ஆகுக. அதன் பக்கங்கள் முறையே AC யும் CB யும் என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாயுள. A ஊடாகவுள்ள சரிவச்சுக்களைக் குறித்து



படம் 3.11. உச்சியொன்று ஊடாகவும் அடரின் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து சீரான முக்கோணி அடரின் சடத்துவத் திருப்பம்.

P யின் ஆள்கூறுகள் (x, y) ஆகுக ; அச்சுக்கள் ஒன்றேடொன்று சாய்ந் திருக்கும் கோணம் θ அல்லது $\pi - C$ ஆகும். முக்கோணியின் பரப்பள வலகொன்றின திணிவு σ வும், தேவைப்படும் சுழிப்பாரை κ யும் ஆயின்,

$$\tfrac{1}{2}(\sigma ab \text{ சைன் } C)\kappa^2 = \int_0^b \int_{y=0}^{y=\frac{a}{b}x} (x^2 + y^2 + 2xy \text{ கோசை } \theta)\,\sigma \text{ சைன் } \theta\, dx\, dy,$$

$$= \int_0^b \left[x^2 y + \tfrac{1}{3}y^3 + xy^2 \text{ கோசை } \theta\right]_{y=0}^{y=\frac{a}{b}x} \sigma \text{ சைன் } \theta\, dx$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{b^2} \text{ கோசை } \theta\right) \sigma \text{ சைன் } \theta \int_0^b x^3\, dx.$$

சைன் $C =$ சைன் θ உம், $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ கோசை θ உம ஆகையால், முன் கூறியதிலிருந்து, சற்றுச் சுருக்க,

$$\kappa^2 = \tfrac{1}{12}[3(b^2 + c^2) - a^2].$$

றூதின் (Routh's) விதி.—முதன்முதலாக றூத் என்பவரால் தரப்பட்ட கீழ்வரும் வசதியான விதியைப் பயன்படுத்திப் பல சுழிப்பாரைகளின் பெறுமானங்களை எளிதில் ஞாபகப்படுத்திக் கொள்ளலாம். அது,

(α) செவ்வக (கோல், அடர்)

(β) வட்ட அல்லது நீள்வளைய (தட்டு)

(γ) கோள, கோளவுரு அல்லது நீள்வளையவுரு

வடிவமுள்ள ஒருபடித்தான நேர்கோட்டு, தள, திண்மப் பொருள்களுக்குப் பயன்படும் ; பொருளின் திணிவுமையம் ஊடான சமச்சீரச்சொன்றைக் குறித்து அப்பொரு ளின் சுழிப்பாரையானது

$$\kappa^2 = \frac{\text{செங்குத்தான அரையச்சுக்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை}}{3,\ 4 \text{ அல்லது } 5}$$

என அவ்விதி கூறுகின்றது ; இங்கு, பொருள்கள் அடங்கும் பிரிவுகள், (α), (β), (γ) என்பவற்றிற்கேற்பப் பகுதியானது முறையே 3, 4, 5 என்னும் எண்களுள் ஒன்றைப் பெறும்.

லீசின் விதி.—ஒருபடித்தான சுற்றற்றிண்மமொன்றின் திணிவு m எனவும், சடத்துவத் திருப்பம் I என்பதைக் காணுமிடத்துப் பயன்படும் அச்சுக்குச் செங்குத்தான அரையச்சுக்கள் a, b எனவும், அரையச்சுக்கள் a, b ஒவ்வொன்றும் முடிவடைகின்ற இடத்திலுள்ள சுற்றற் பரப்பின் வளைவுவகையானது முறையே C_a, C_b எனவும் ஆயின், அப்பொழுது

$$I = m\left[\frac{a^2}{3 + C_a} + \frac{b^2}{3 + C_b}\right].$$

இங்கு வளைவுவகை தனியெனின் $C = 1$, அது இரட்டையெனின் $C = 2$.

இவ்வாறு, கோளமொன்றிற்கு, நீளம் $2a$ உடைய விட்டமொன்றைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பம்,

$$I = m\left[\frac{a^2}{3+2} + \frac{a^2}{3+2}\right] = \frac{2}{5}ma^2.$$

எடுத்துக்காட்டு.—செங்குத்தான அச்சுக்கள் Ox, Oy என்பவற்றைக் குறித்து மெல்லிய தட்டொன்று சமச்சீரானது. Ox, Oy என்பவற்றின் தளத்தில், Ox உடன் கோணம் θ ஆக்கும் வகையிலே, OA என்னும் அச்சொன்று வரையப்படுகிறது. Ox ஐயும் Oy ஐயும் குறித்து தட்டின் சடத்துவத் திருப்பங்கள் முறையே I_x, I_y ஆயின், OA யைக் குறித்து அத்தட்டின் சடத்துவத் திருப்பம்

$$I_x \text{ கோசை}^2\, \theta + I_y \text{ சைன்}^2\, \theta$$

என நிறுவுக.

OA யின் சமனபாடு $y = ax$ ஆகும் ; இங்கு, $a =$ தான் θ. $P(x_1, y_1)$ என்பதில தடடின் மூலகமொனறைக் கருதுக ; அதன் திணிவு δm ஆகுக. OA யிலிருநது P யின இழிவுததூரம் p எனின், அப்பொழுது, வழககமான குறியீட்டு முறைபபடி

$$\delta I = \delta m\,(p^2).$$

p யைக காணும பொருட்டு, P ஊடாகவும் OA யிறகுச் சமாநதரமாகவும் உள்ள நேர் கோடொனறின் சமன்பாடானது

$$y - y_1 = a\,(x - x_1)$$

என நோககப்படுகிறது ; எனவே, y அசசில இநநோகோட்டின் வெட்டுத்துணடு $(y_1 - ax_1)$ ஆகும்.

$$\therefore\ p = (y_1 - ax_1) \text{ கோசை } \theta = y_1 \text{ கோசை } \theta - x_1 \text{ சைன } \theta.$$

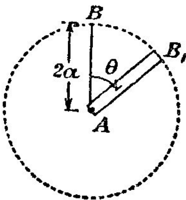
எனவே, $\sum \delta m\,(y_1)^2 = I_x$ முதலியவறறுளும், சமச்சீரையிட்டு

$$\sum [\delta m\,(x_1 y_1 \text{ சைன } \theta \text{ கோசை } \theta)] = 0$$

எனபதாலும்

$$I = \sum [\delta m\,(y_1 \text{ கோசை } \theta - x_1 \text{ சைன் } \theta)^2]$$
$$= I_x \text{ கோசை}^2\, \theta + I_y \text{ சைன}^2\, \theta.$$

எடுத்துக்காட்டு.—மெல்லிய கோலொன்றுக்குத் தன் முனையொன்றூடாகச் செல்கின்ற கிடையான அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழல முடியும். கோலானது தொடக்கத்தில் நிலைக்குத்தாக, உறுதியில் சமநிலையில் இருக்கிறது. இந்நிலையில் ஓய்வாயிருக்கும்பொழுது கோல் ஒரு சிறு பெயர்ச்சி பெற்று விழுமாயின், சக்தி மாற்றங்களைப் பயன்படுத்தி அது (a) கிடைநிலை (b) உறுதிச் சமநிலைத்தானம் ஊடாகச் செல்லும்பொழுது அதன் கோணவேகத்தைத் துணிக.



படம் 3·12. ஒரு கிடை அச்சைக் குறித்து ஒரு மெல்லிய கோலின் இயக்கம்.

படம் 3·12 இல், AB கோலின் தொடக்க நிலை ஆகுக. கோலின் நீளம் $2a$ எனின் அது ஒரு கோணம θ அளவு திரும்பியபோது அதன் புவியீர்பபுமையம நிலைக்குத்துத்தூரம் $a\,(1 - \text{கோசை } \theta)$ இறஙகியிருககும். எனவே, கோலின் திணிவு m எனின், நிலைச்சகதி நட்டம $mga\,(1 - \text{கோசை } \theta)$ ஆகும். இனி, கோலின் இயககச் சகதி $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ ஆகும். இஙகு, I ஆனது A ஊடாக வும வரிபபடததின தளத்துககுச் செஙகுத்தாகவும் செலகின்ற அச்சைக குறிதது கோலின சடத்துவத் திருபபம் ஆகும். எனவே, சக்திச சமன்பாடானது

$$mga\,(1 - \text{கோசை } \theta) = \tfrac{1}{2}m\,[a^2 + \tfrac{1}{3}a^2]\,\dot{\theta}^2 = \tfrac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2 \text{ ஆகும.}$$

கிடைநிலையில் $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. இந்நிலையில் கோணவேகம் ω_1 எனின்,

$$\tfrac{2}{3}ma^2\omega_1^2 = mga.$$

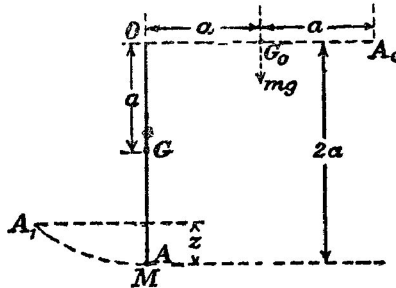
$$\therefore\ \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2a}}.$$

உறுதிச் சமநிலைத் தானத்தில் $\theta = \pi$. இந்நிலையில் கோணவேகம் ω_2 எனின்

$$\tfrac{2}{3}ma^2\omega^2_2 = 2mga.$$

$$\therefore \ \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{a}}.$$

எடுத்துக்காட்டு.—நீளம் $2a$ உம் திணிவு m உம் உடைய OA என்னும் சீரான கோலொன்று O ஊடாகச் செல்லுகின்ற கிடையச்சொன்றைக் குறித்துச் சுயாதீனமாகச் சுழலக் முடியும். தொடக்கத்தில், கோல் கிடைத்தளமொன்றில் ஓய்வாயிருக்கிறது. கோல் விடுவிக்கப் பட்டபின் அதன் முனை A திணிவு M உடைய துணிக்கையொன்றைப் பற்றுகிறது ; நிலைக் குத்துத் தானத்தைத் தாண்டும்பொழுது இது நிகழுமாயின், தொகுதி கணச் சமநிலையை முதன்முதல் அடையும் வரை துணிக்கை அசைந்த நிலைக்குத்துத் தூரத்தைத் துணிக.



படம் 3·13.

படம் 3·13 இல், நேர்கோடு OA_0, கோல விடுவிக்கப்பட்ட நிலையைக் குறிக்கிறது ; துணிக்கை M பற்றப்படும்பொழுது கோலின் நிலை OA ஆகுக. வீழ்ச்சியுற்று இந்நிலையை அடைந்த கோல mga அளவு நிலைச் சக்தி இழந்திருககிறது. OA ஊடாகச் செல்லும்பொழுது கோலின் இயககச் சக்திக்கு இது சமனாகும். எனவே, இந்நிலையில கோலின் கோணவேகம் ω_0 உம், சுழற்சியச்சைக்குறிதது அதன் சடத்துவத் திருப்பம I உம ஆயின்,

$$\begin{aligned} mga &= \tfrac{1}{2}I\,\omega_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot m\cdot 4a^2\cdot\omega_0^2 = \tfrac{2}{3}ma^2\,\omega_0^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \ \omega_0^2 = \tfrac{3}{2}\frac{g}{a}.$$

துணிககை பற்றபபட்டதும் தொகுதியின இயக்கக் கோண வேகம் ω உம், கணச் சமநிலைத் தானம் A_1 வரை A யின் நிலைகுத்தேற்றம z உம் ஆயின்,

$$\tfrac{1}{2}\{\tfrac{4}{3}ma^2 + M(2a)^2\}\omega^2 = Mgz + mg(\tfrac{1}{2}z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

எனச சக்தித் தத்துவம் தருகிறது.

துணிக்கையின் பற்றுதலின்போது கோண உநதம் பாதுகாககப்படுகிறதால்

$$\tfrac{4}{3}ma^2\cdot\omega_0 = \{M(2a)^2 + \tfrac{4}{3}ma^2\}\,\omega.$$

$$\therefore \ \omega^2 = \frac{m^2}{(3M+m)^2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\frac{g}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

எனவே, (1) இலும் (2) இலும் இருந்து ω^2 என்பதை நீக்கி, ஓரளவு சுருக்க.

$$z = \frac{2m^2a}{(3M+m)(2M+m)}.$$

பப்பசின் தேற்றங்கள்.—(*a*) **அதனை வெட்டாதவாறு, தளவளையியின் வில்லொன்று சுழலுமாயின் அதனால் பிறப்பிக்கப்படும் பரப்பளவானது, வில்லின் நீளம், வில்லின் மையப் போலியின் பாதை நீளம் என்பவற்றின் பெருக்கத்துக்குச் சமனாகும்.**

Ox சுழற்சியச்சும், y ஆனது வில்லிலுள்ள புள்ளியொன்றின் நிலைக்கூறும் ஆகுக. ஒரு முழுச்சுற்றில் பிறப்பிக்கப்படும் பரப்பளவு $2\pi\int y\,ds$ ஆகும். இங்கு, δs வில்லின் மூலகமொன்றும், தொகையீடு முழு வில் வழியேயும் ஆகும். ஆனால், $\bar{y}$ ஆனது வில்லின் திணிவுமையத்தைக் குறிக்குமாயின்

$$\bar{y} = \left\{\int y\,ds\right\} \div \int ds,$$

$$\therefore\ 2\pi\int y\,ds = 2\pi\bar{y}\int ds.$$

இது தேற்றத்தை நிறுவுகிறது.

(*b*) **தளப் பரப்பளவொன்று அதன் தளத்தில் கிடக்கின்ற அச்சொன்றைக் குறித்து அதனை வெட்டாதவாறு சுழலுமாயின், அதனால் பிறப்பிக்கப்படும் கனவளவானது தளப் பரப்பளவு, அதன் மையப்போலியின் பாதை என்பவற்றின் பெருக்கத்துக்குச் சமனாகும்.**

Ox சுழற்சியச்சும், y ஆனது Ox இலிருந்து பரப்பளவு மூலகம் δS என்பதின் செங்குத்துத் தூரமும் ஆகுக. Ox ஐக் குறித்து δS முழுச்சுற்றொன்றை ஆற்றுமாயின அதனால் பிறப்பிக்கபபடும் கனவளவு $2\pi\int y\,dS$ ஆகும்.

ஆனால், $$\bar{y} = \left\{\int y\,dS\right\} \div dS$$

எனவே, $$2\pi\int y\,dS = 2\pi\bar{y}\int dS.$$

இது தேற்றத்தை நிறுவுகிறது.

உந்தத் திருப்பம்.—மூன்று செவ்வக அச்சுக்களைக் குறித்து $(x,\ y,\ z)$ என்னும் புள்ளியிலுள்ள, திணிவு m உடைய துணிக்கையொன்றைக் கருதுக. துணிக்கையைத் தாக்குகின்ற புற விசைகளின் விளையுள் கூறுகள் $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ ஆயின்,

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X \\ m\ddot{y} &= Y \\ m\ddot{z} &= Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

என்பவை புள்ளியின் இயக்கச்சமன்பாடுகள் ஆகும்.

x அச்சைக் குறித்து துணிக்கையைத் தாக்குகின்ற விசைகளின திருப்பம்

$$yZ - zY = m(y\ddot{z} - z\ddot{y}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

இங்கு, விசை படம் 3·14 இல் காட்டியுள்ள திசையில் பொருளைச் சுழற்றத் தூண்டுமாயின், அப்பொழுது x அச்சைக் குறித்த திருப்பம் நேர் என எடுக்கப்படும்.

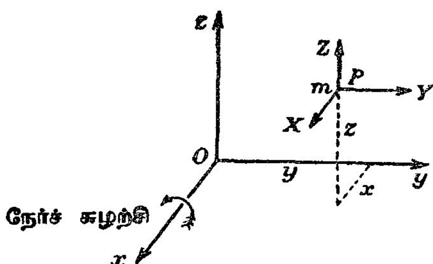
இனித் துணிக்கையின் வேகம் $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ஆகும் ; எனவே, x அச்சைக் குறித்து வேகத்தின் திருப்பம்

$$y\dot{z} - z\dot{y}.$$

அதே அச்சைக் குறித்த உந்தத் திருப்பம் வேகத் திருப்பத்தின் m மடங்கு ஆகும், அதாவது அது

$$m(y\dot{z} - z\dot{y})$$

ஆகும்.



படம் 3·14. உந்தத் திருப்பம்; கோணவுந்தம்.

எவ்வீதத்தில் இவ்வச்சைக் குறித்த உந்தத் திருப்பம் மாறுகின்றது என்பதைக் காணும்பொருட்டு, நேரம் t யைக் குறித்து மேற்படி கோவையை வகையிட்டு, (i) ஐப் பயன்படுத்த,

$$m(\dot{y}\dot{z} + y\ddot{z} - \dot{z}\dot{y} - z\ddot{y}) = m(y\ddot{z} - z\ddot{y}) = y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}).$$

எனவே, எந்த நிலைத்த அச்சையும் குறித்து துணிக்கையொன்றின் உந்தத் திருப்பம் மாறும் வீதமானது அதே அச்சைக் குறித்து அப்பொருள் மீது ஆற்றுகின்ற புற விசைகளின் திருப்பத்திற்குச் சமன்.

விறைப்பான பொருளொன்றின் இயக்கம் ; நிலைத்த அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழலல் ; தலம்பேரின் (*d'Alembert*) தத்துவம். நேரம் t யில், திணிவு m உடைய துணிக்கையொன்று புள்ளி (x, y, z) இல் இருக்குமாயின், அப்பொழுது $m\ddot{x}$ என்பதை விசையின் x கூற்றுக்குச் சமன்படுத்துவதால் விளையும் சமன்பாடு, மற்றைய இரு அச்சுக்களுக்கும் அதற்கொத்த சமன்பாடுகள் என்பவற்றால் துணிக்கையின் இயக்கம காணப்படுகிறது என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கிறது. $m\ddot{x}$ என்னும் கணியம் துணிக்கையைத தாக்குகின்ற பலித விசை என அழைக்கப்படுகிறது ; இது x அச்சுக்குச் சமாந்தரமான காவியொன்றாகும். நியூற்றன் என்பவரின் இரண்டாவது இயக்கவிதிப்படி, துணிக்கையொன்றைத்

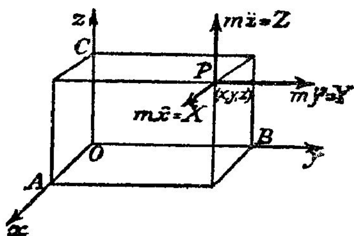
தாக்குகின்ற பலித விசையானது அத்துணிக்கையைத் தாக்குகின்ற, புற விசைகளின் விளையுளின் x கூறுக்குச் சர்வசமனுக இருத்தல் வேண்டும். விறைப்பான பொருளொன்றின் இயக்கத்தைக் கருதுமிடத்துப் புதிய தத்துவமொன்று தேவைப்படுகிறது ; அத்தத்துவமானது தலம்பேரென்ப வரால் 1743 இல் தரப்பட்டுள்ளது ; கருத்தை உணரும்பொருட்டுக் கீழ்வருமாறு சொல்லலாம்.

சடக்கூட்டமொன்றின் பகுதியாக அமைந்திருக்கும் துணிக்கையொனறி னிடத்து அதனைத் தாக்கும் விசைகளை இரு இனங்களாகப் பிரிக்கலாம் :—

(*a*) கூட்டத்திற்கு வெளியேயிருநது தாக்கும் 'புற (அல்லது பிரயோகித்த) விசைகள்',

(*b*) 'அக விசைகள்' அல்லது மீதித்துணிக்கைகளாலாகும் தாக்கஙகள்.

முழுக்கூட்டத்தையும் கருதுமிடத்துப் பலித விசைகளைப் பிரதியிடுகின்ற ஓரிடப்படுத்திய காவிகளின் தொகுதியானது புற, அக விசைகளின் சேர்மான விளைவுக்கு நிலையியல் முறைப் படிச் சமானமானது எனக் கூற லாம். தலம்பேரின எடுகோளா னது சமநிலையில் இருக்கின்ற ஒரு தொகுதியாக அக விசைகள் அமை கின்றன என்பதேயாம். இவ்வெடு கோள் அனுமதிக்கப்படுமாயின், பலித விசைகளின தொகுதியா னது மொத்தமாகப் புற விசை களின் தொகுதிக்குச் சமானம் என்பது உடனே தெளிவாகும். இச் செய்தியைப் பகுப்பு முறைப்படி எடுத்துரைக்கும் பொருட்டு நிலைத்த செவ்வக அச்சுக்களைக் குறித்துத் துணிக்கை P ஒன்றின் நிலையை (x, y, z) குறிக்கின்றதென்க, படம் 3·15. அப்பொழுது, இத்துணிக்கையின் திணிவு m உம், அதைத் தாக்கும் புற விசை (X, Y, Z) உம் ஆயின்,



படம் 3.15. விறைப்பான பொருளொன்றின் இயக்கம் ; நிலைத்தவச்சொன்றிற்கான குறிப்பீடு.

$$m\ddot{x} = \mathrm{X},\ m\ddot{y} = \mathrm{Y},\ m\ddot{z} = \mathrm{Z}.$$

இனி P யை விறைப்பான பொருளொன்றிலுள்ள ஒரு துணிக்கை எனக் கருதுவோமாயின்

$$\Sigma m\ddot{x} = \Sigma \mathrm{X},\ \Sigma m\ddot{y} = \Sigma \mathrm{Y},\ \Sigma m\ddot{z} = \Sigma \mathrm{Z}$$

எனவும், அச்சு Oz ஐக் குறித்து விசைகளின் திருப்பங்களைக் கணிப்போமாயின்

$$\Sigma (x \,.\, m\ddot{y} - y \,.\, m\ddot{x}) = \Sigma (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})$$

எனவும் பெறுவோம் ; இங்கு, கூட்டல்களில் விறைப்பான பொருளின் எல்லாத் துணிக்கைகளும் அடங்கும்.

$$\frac{d}{dt}\Sigma(m\dot{z}) = \Sigma m\ddot{z} = \Sigma Z \qquad \text{முதலியன ஆதலின்}$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma(x\,.\,m\dot{y} - y\,.\,m\dot{x}) = \Sigma(xY - yX)$$

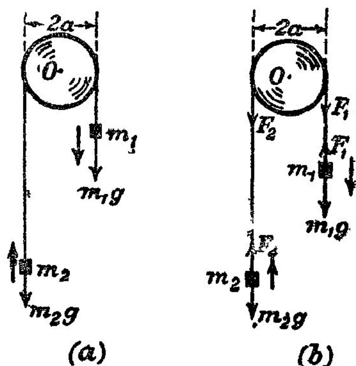
என்பதையும் அதேபோன்ற வேறு இரு சோடி சமன்பாடுகளேயும் எழுதலாம். z அச்சானது இடத்தில் எந்த நிலேத்த தானத்தையும் கொள்ள முடியுமாதலால் அவ்வச்சுத் தொடர்பாக எழுதியுள்ள சோடி சமன்பாடுகளும் உண்மையில் பின்வரும் விதிகளே உணர்த்துகின்றன.

(a) தரப்பட்ட எந்தத் திசையிலும் நீட்டலுந்தத்தின் மாறுகை வீதமானது அதே திசையில் ஆற்றுகின்ற புற விசைகளின் விளையுளுக்குச் சமன்.

(b) எந்த நிலேத்த அச்சையும் குறித்து விறைப்பான பொருளொன்றின் உந்தத் திருப்பம் மாறும் வீதமானது அதே அச்சைக் குறித்து எல்லாப் புற விசைகளின் மொத்தத் திருப்பத்திற்குச் சமன்.

எந்த நிலேத்த அச்சையும் குறித்து விறைப்பான பொருளொன்றைத் தாக்கும் புற விசைகளின திருப்பம பூச்சியம் ஆயின் அதே அச்சைக் குறித்து அப்பொருளின் உந்தத் திருப்பம் ஒரு மாறிலி ஆகும்.

அற்வூட் பொறி.—நிலேத்த அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழலும் விறைப்பான பொருள்கள் பற்றிய கொள்கையை விளக்கிவைக்கும் பொருட்டு புவியீர்ப்புச் செறிவு g ஐத் துணியுமிடத்துப் பயன்படுத்தப்படும் அற்வூட் பொறியின் எளிய மாதிரியொன்றைக் கருதுவோம். விட்டம் $2a$ உடைய கப்பியொன்றைப் படம் 3·16(a) காட்டுகிறது; கப்பியின் தவாளியுள் செல்லும் இலேசான இழையின் சுயாதீன நுனிகளில், திணிவுகள் m_1, m_2 எனபன இணேக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இழையின் தாஙகப்படாத பாகங்கள நிலேக்குத்தாயிருக்கின்றன எனவும், இழை யிறகும் கப்பிக்கும் இடையில் நழுவல் இலலே எனவும் கொள்ளப்படும். $m_1 > m_2$ எனவும், தொகுதியானது ஓய்வு நிலேயிலிருந்தே அசைகின்றது எனவும் கொள்க.



படம் 3.16. அற்வூட் பொறியொன்றில் இரு திணிவுகள், கப்பி என்பவற்றின் இயக்கம்.

(a) முதன்முதலாகத் தொகுதியை முழுதாகக் கருதுக; திணிவுகள் ஓய்வு நிலேயிலிருந்து அசைந்த தூரம் z என்க. அப்பொழுது, தொகுதியைத் தாக்கும் இணே $(m_1 - m_2)ga$ ஆகும்; தொகுதி ஒரு விறைப்பான பொருள் எனக் கருதுவது சரி எனின், இது தொகுதியின் கோணவுந்த மாறல் வீதத்துக்குச் சமன் ஆகும்.

அதன் சுழற்சி அச்சைக் குறித்து கப்பியின் சடத்துவத் திருப்பம் I எனின், தொகுதியின் கோணவுந்தமானது

$$[I + (m_1 + m_2)a^2]\dot{\theta}.$$

இங்கு, $\dot{\theta}$ கப்பியின் கோணவுந்தம் ஆகும்.

எனவே, $$(m_1 - m_2)ga = [I + (m_1 + m_2)a^2]\frac{\ddot{z}}{a}.$$

$$[\because \quad z = a\theta,\ \dot{z} = a\dot{\theta},\ \text{முதலியவை.}]$$

$$\therefore \quad \ddot{z} = \frac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{a^2}}.$$

(*b*) இத்தீர்வை நிறுவும்பொருட்டுச் சக்திக் காப்புத் தத்துவத்தைப் பயன் படுத்துவோம். தொகுதியின் நிலைச் சக்தி நட்டமானது

$$(m_1 - m_2)gz \text{ ஆகும்.}$$

இது இயக்கச் சக்தி நயம்

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

அல்லது $$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}\frac{I}{a^2}\,.\,\dot{z}^2$$

என்பதற்குச் சமன்.

இவ்விரு கோவைகளையும் சமன்படுத்தி, நேரம் தொடர்பாக வகையிட

$$(m_1 - m_2)g\dot{z} = (m_1 + m_2)\dot{z}\,\ddot{z} + \frac{I}{a^2}\dot{z}\,\ddot{z}.$$

இதிலிருந்து முன்போலவே $\ddot{z} = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{(m_1 + m_2) + \frac{I}{a^2}}.$

(*c*) அதன் குறி எதுவாகிலும், ஒவ்வொரு துணிக்கையின் ஆர்முடுகலும் $\ddot{z}$ ஆக இருக்கும்பொழுது, இழையிலுள்ள இழுவைகள் F_1, F_2 ஆகுக. அப்பொழுது, படம் 3·16 (*b*) யை ஒப்பிட,

$$m_1\ddot{z} = m_1 g - F_1 \text{ உம் } m_2\ddot{z} = F_2 - m_2 g \text{ உம் ஆகும்.}$$

கப்பிமீது ஆற்றி, அதற்கு $\ddot{\theta}$ கோண ஆர்முடுகலை அளிக்கும் இணை $(F_1 - F_2)a$ ஆகும்;

எனவே, $$(F_1 - F_2)\,a = I\ddot{\theta} = I\frac{\ddot{z}}{a};$$

இங்கு, $a\ddot{\theta} = \ddot{z}$.

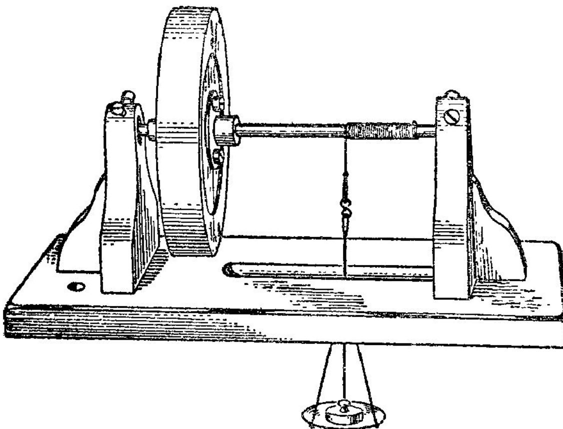
$(F_1 - F_2)$ என்பதை நீக்க,

$$m_1\ddot{z} + m_2\ddot{z} = (m_1 - m_2)g - (F_1 - F_2)$$
$$= (m_1 - m_2)g - \frac{I}{a^2}.\ddot{z}.$$

$$\therefore \ddot{z} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}}.$$

மூன்று வேறுபடுகின்ற முறைகளால் கிடைக்கபபெற்ற விளைவுகளின் ஒற்றுமை அடிப்படை எடுகோள்கள் சரியானவை எனக் காட்டுகிறது ; மேலும், தொகுதியை ஒரு விறைப்பான பொருளாகக் கருதலாம் என இது காட்டுகிறபடியால் இவ்வொற்றுமை சிறபபான திருப்தியை அளிக்கிறது ; எனினும், O ஊடாகச் செல்லுகின்ற நிலைக்குத்துக் கோட்டிலிருந்து m_1, m_2 என்பவற்றின் தூரஙகள் மாருதிருப்பதாலேயே இவ்வாருகிறது எனத் தெளிக. எளியவூசல்கள் போல் திணிவுகளும் அலையத் தொடங்குமாயின் தொகுதி ஒருபோதும் விறைப்பான பொருளாக மாட்டாது. (ஒப். பௌதிகத் தராசொன்றின் அலைவுகள், ப. 156.)

பரிசோதனை.—சுழற்சியச்சைக் குறித்து பறப்புச் சில்லொன்றின் சடத்துவத் திருப்பத்தைத் துணிதல். அதன் சுழறசியச்சைக் குறித்து நீண்ட அச்சாணியுடைய சில்லொனறின் சடத்துவத் திருப்பத்தைப் பின்வருமாறு காணலாம். சில்லானது கிடைநிலையில் ஏற்றப்படுகிறது. உராய்வைக் கூடிய அளவு குறைக்கும் பொருட்டு அச்சாணி குண்டுப்போதிகைகளால் தாங்கப் படுகிறது—படம் 3·17 ஐ ஒப். அச்சாணியுடன, ஒரு துளையோ ஊசியோ இருக்கும் புள்ளியில், அச்சாணியைப் பன்முறை சுற்றப்பட்டிருக்கும் நாணென்றுல் தெரிந்த திணிவொன்று இணைக்கப்பட்டிருககிறது. உராய்வு விசைகள் இல்லாதபோது இறங்கும் திணிவால் இழக்கப்படும் நிலைச் சக்தி சில்லுக்கும் திணிவுக்கும் இயக்கச் சக்தியாகச் செலுத்தப்படுகிறது.



படம் 3·17. பறப்புச் சில்லொன்று—அதன் சுழற்சியச்சைக் குறித்து அதன் சடத்துவத் திருப்பத்தைப் பரிசோதனை முறையால் துணிதல்.

அதாவது,

$$\begin{bmatrix}\text{இறங்கும் திணிவின்}\\ \text{நிலைச் சக்தி நட்டம்}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{பறப்புச் சில்லின்}\\ \text{இயக்கச் சக்தி நயம்}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{திணிவின் இயக்கச்}\\ \text{சக்தி நயம்}\end{bmatrix}.$$

இப்பரிசோதனையில், திணிவு அதன் இழிவான நிலை (தரை)யை அடையும் பொழுது நாணின் மறுநுனி அச்சாணியிலிருந்து விலகும் நிலையில் இருக்குமாறு நாணின் நீளம் சரிப்படுத்தப்படுகிறது.

நடத்தும் எந்தப் பரிசோதனையிலும் உராய்வுக்கு எதிராகச் செய்யப்படும் வேலையையிட்டுத் திருத்தமொன்று இன்றியமையாது செய்யவேண்டியிருக்கின்றது ; அதன் பொருட்டு, நாம் பின்வருமாறு ஆராய்வோம்.

(இறங்கும் தட்டினதும் உட்பட) திணிவு m உம், அது நிற்குமுன் திணிவின் இறக்கம் h உம் ஆகுக ; விழும் திணிவு m நீக்கப்படுமுன், ஓய்வு நிலையிலிருந்து சில்லு N_1 சுற்றுக்களை ஆற்றுக. சுற்றொன்றில உராய்வுக்கு எதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலையானது X ஆகுக ; அது ஒரு மாறிலி எனக. அப்பொழுது,

$$mgh=\tfrac{1}{2}I\omega^2+N_1X+\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}(I+ma^2)\omega^2+N_1X\,;$$

இங்கு, I அதன் சுழறசியச்சைக் குறித்து சில்லின் சடத்துவத் திருப்பமும், அச்சாணியிலிருந்து நாண் நழுவி விழும்பொழுது ω சில்லின் கோண வேகமும், a ஆனது அச்சாணியின் ஆரையும் ஆகும்.

ஓய்வு நிலையை அடையும் வரை சில்லு N_2 சுற்றுக்களை ஆற்றுமாயின்

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2=N_2X.$$

$$\therefore\ mgh=\tfrac{1}{2}\left(I+\frac{N_1}{N_2}\right)\omega^2+\tfrac{1}{2}ma^2\omega^2$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}\left(I+\frac{N_1}{N_2}\right)+\tfrac{1}{2}ma^2\right]\frac{4h^2}{a^2t^2}\qquad\left[\because\ \omega=\frac{2h}{at}.\right]$$

இச்சமன்பாடு

$$I=ma^2\left(\frac{N_2}{N_1+N_2}\right)\left(\frac{gt^2}{4\pi aN_1}-1\right)$$

எனத் தருகிறது.

அதே திணிவைப் பயன்படுத்திப் பரிசோதனையை இரு முறை அல்லது மும்முறை திரும்பச் செய்தல் வேண்டும் ; ω என்பதைப் பெறும் போது $\frac{N_1}{t}$ யின் சராசரிப் பெறுமானத்தைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும். வேறு திணிவுகளைப் பயன்படுத்தி இவ்வண்ணம் கிடைக்கப்பெற்ற I யின் பெறுமானத்தைச் சரிபிழை பார்த்தல் வேண்டும்.

N_1 ஐயும் N_2 ஐயும் காணுவதற்கு, விழும் திணிவு தடுக்கப்படும் பொழுது கட்புலனாகக் கூடிய சோக்குக் குறியொன்றைச் சில்லின் பரிதியில் இட்டு வைத்தல் வசதியாம்.

அச்சாணியின் விட்டத்தைக் காட்டிலும் பயன்படுத்தியுள்ள நாணின் விட்டம் சிறிதாயிருத்தல் வேண்டும் ; இல்லாவிடில் மேற்படிச் சமன்பாடு களிலுள்ள a யின் பெறுமானம் அச்சாணி, நாண் என்பனவற்றின் ஆரைகளின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

திணிவு தரையைத் தொடும்பொழுது இருக்கின்ற அதன் வேகத்தை (அதி லிருந்து ω வை) அறிவதறகுக் குறைவான திருத்தமுடைய முறையொன்று, திணிவின் இறங்கு நேரத்தைக் காண்பதேயாம். அது t_1 ஆகுக. சீரான ஆர்முடுகலுடன் திணிவு இறங்கினதாதலாலும், அதன் தொடக்க வேகம் பூச்சியமாதலாலும், அதன இறுதிவேகம் சராசரி வேகத்தின் இருமடங்கு ஆகும் ; அதாவது

$$v=2\left(\frac{h}{t_1}\right).$$

ஆனால், வழக்கமாக t_1 சிறிதே ; அதனைத் திருத்தமாய் அளத்தல் இயலாது ; இது ஒரு குறையாம்.

விறைப்பான பொருளொன்றின் திணிவுமையவியக்கமும் அம் மையத் தைக் குறித்து அதன் சார்பியக்கமும்.—செவ்வக ஆள்கூறுகளைக் குறித்துத் திணிவு M உடைய விறைப்பான பொருளொன்றின் திணிவுமையம் $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ஆகுக. அப்பொழுது, இயக்கத்தின் போது

$$M\bar{x}=\Sigma(mx),\ M\bar{y}=\Sigma(my),\ M\bar{z}=\Sigma(mz).$$

எனவே, ப. 92 இல் இருப்பதுபோலவே

$$M\ddot{\bar{x}}=\Sigma X,\quad M\ddot{\bar{y}}=\Sigma Y,\quad M\ddot{\bar{z}}=\Sigma Z.$$

இவை, உண்மையில் பொருளின் திணிவுமையத்தில் வைக்கப்பட்டதும், பொருளைத் தாக்கும் புற விசைகளுக்குச் சமாந்தரமானவையும் சமனான வையுமான விசைகளால் தாக்கப்படுவதும், திணிவு M உடையதுமான துணிக்கையொன்றின் இயக்கச் சமன்பாடுகளாகும்.

எனவே, விறைப்பான பொருளொன்றின் திணிவுமையத்தில் அப்பொருளின் முழுத் திணிவையும் சேர்த்து வைத்து, அதன்மீது எல்லாப் புற விசைகளையும் அவற்றின் தாக்கத் திசைகளுக்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்க விடுவதால் விளையும் அசைவுபோலவே திணிவுமையத் தின் அசைவும் அமைந்திருக்கும்.

அடுத்து, G யைக் குறித்துப் பொருளின் துணிக்கையொன்றின் ஆள் கூறுகள் (ξ, η, ζ) ஆகுக ; பழைய செவ்வக அச்சுக்களைக் குறித்து அதன் ஆள்கூறுகள் (x, y, z) என இருந்தன ; ஒத்த அச்சுக்கள் ஒன்றிற்கொன்று சமாந்தரமாம். அப்பொழுது, இயக்கத்தின்போது

$$x=\bar{x}+\xi,\quad y=\bar{y}+\eta,\quad z=\bar{z}+\zeta.$$

$$\therefore\ \ddot{x}=\ddot{\bar{x}}+\ddot{\xi},\quad \ddot{y}=\ddot{\bar{y}}+\ddot{\eta},\quad \ddot{z}=\ddot{\bar{z}}+\ddot{\zeta}.$$

எனவே, ப. 92 இல் தரப்பட்ட சமன்பாடு

$$\Sigma\, m(x\ddot{y}-y\ddot{x})=\Sigma(xY-yX)$$

என்பது

$$\Sigma m(\bar{x}\ddot{\bar{y}} - \bar{y}\ddot{\bar{x}}) + \Sigma m(\xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi}) + \Sigma m(\bar{x}\ddot{\eta} + \xi\ddot{\bar{y}} - \bar{y}\ddot{\eta} - \eta\ddot{\bar{x}})$$
$$= \Sigma(\bar{x} + \xi)\mathrm{Y} - (\bar{y} + \eta)\mathrm{X}$$

என ஆகின்றது.

இனி, $\dfrac{\Sigma(m\xi)}{\Sigma m}$ = திணிவு மையததை உற்பததியாகக் கொண்டு அதையே குறித்துத் திணிவு மையத்தின் ξ – ஆள்கூறு
$= 0.$

$$\therefore \quad \Sigma(m\xi) = 0, \quad \Sigma(m\ddot{\xi}) = 0.$$

அதுபோலவே,

$$\Sigma(m\eta) = 0, \quad \Sigma(m\ddot{\eta}) = 0.$$

$$\therefore \quad \mathrm{M}(\bar{x}\ddot{\bar{y}} - \bar{y}\ddot{\bar{x}}) + \Sigma m(\xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi}) = \Sigma(\bar{x}\mathrm{Y} - \bar{y}\mathrm{X} + \xi\mathrm{Y} - \eta\mathrm{X}).$$

ஆனல், இ.கை.ப. இலுள்ள முதல் இரு உறுப்புக்களும் வ.கை.ப. இலுள்ள முதல் இரு உறுப்புக்களுக்கும் சமன.

$$\therefore \Sigma m(\xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi}) = \Sigma(\xi\mathrm{Y} - \eta\mathrm{X}).$$

அதன் திணிவுமையத்தைக் குறித்துப் பொருளொன்றின் இயக்கமும், திணிவுமையம் நிலைத்திருக்க பொருள் மீது அதே விசைகள் தாக்கும் பொழுது விளையும் இயக்கமும், அதுவேயாம் என்பதையே இச்சமன்பாடு உணர்த்துகிறது.

விறைப்பான பொருளொன்றின் திணிவுமைய இடப்பெயர்ச்சி, அதனூடாகச் செல்லும் அச்சொன்றைக் குறித்துப் பொருளின் சுழற்சி என்பவற்றின் சாராமை.—விறைப்பான பொருளொன்றின் இயக்கம் எதுவாகிலும், அதன் திணிவுமைய இடப்பெயர்ச்சி, அதன் திணிவுமையம் ஊடாகச் செல்லும் அச்சொன்றைக் குறித்து அதன் சுழற்சி என்பவற்றின் சாராமையை முந்திய இரு பந்திகளில் நிறுவியிருக்கிறேம்.

எடுத்துக்காட்டொனருக, ஒரு சீரான ஈர்ப்புப் புலம் தாக்குகின்ற வெற்றிடமொன்றில் இயங்கும் வெடிகுண்டொன்றைக் கருதுவோம். குண்டு வெடித்துடைந்து சிதறுகிறது எனக்கொள்வோம். வெடித்தலால் தோற றுகின்ற அக விசைகள் ஒன்றையொன்று சமமாக்குகின்றன ; அவை எவ் வகையிலேனும் குண்டின் திணிவுமைய இயக்கத்தைப் பாதிக்கமாட்டா ; எனவே, இம் மையமானது வெடித்தலுக்கு முன் அசைந்து கொண்டிருந்த அதே பரவளைவுப பாதையிலேயே பின்னரும் தொடர்ந்து அசையும்.

இரு பரிமாணச் சுழற்சிச் சமன்பாடுகளின் இறுதி வடிவம்.—

$$\mathrm{M}\ddot{x} = \Sigma\mathrm{X}, \quad \mathrm{M}\ddot{y} = \Sigma\mathrm{Y}, \quad \mathrm{M}\ddot{z} = \Sigma\mathrm{Z}$$

என்னும் சமன்பாடுகள் நடைமுறைப் பிரச்சினைகளினிடத்தில் நேரடியான

பிரயோகத்துக்கு உகந்த குவடிவம் உடையதாயிருக்கிற போதிலும்,

$$\Sigma m(\xi\ddot{\eta}-\eta\ddot{\xi})=\Sigma(\xi Y-\eta X)$$

என்பதை ஒரு மாதிரியாகக் கொண்ட சமன்பாடுகள் உண்மையில் பயனுள்ளதாக வருமுன் அவை எளிய மாற்றமொன்றை அடைதல் வேண்டும். மேற்படிச் சமன்பாட்டால் உணர்த்தப்படுகின்ற இருபரிமாண வகையைக் கருதுக. இ.கை.ப.

$$\frac{d}{dt}\Sigma m(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})$$

என எழுதிக்கொள்ளமுடியும்.

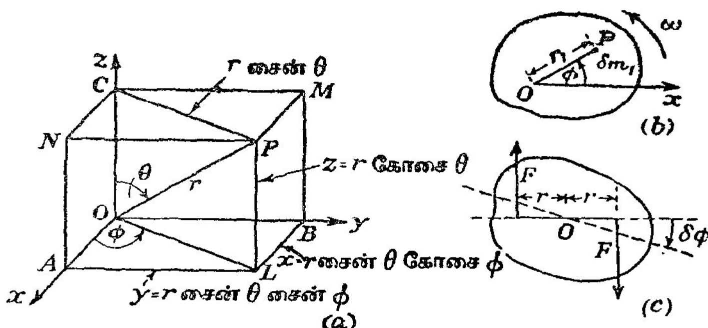
G யை உற்பத்தியாகக் குறித்து, திணிவு m உடைய துணிக்கையின் முனைவாள்கூறுகள் $(r,\ \theta)$ ஆகுக. அப்பொழுது, $\xi=r$ கோசை θ, $\eta=r$ சைன் θ ; இங்கு, r ஆனது நேரத்தைச் சாராது.

$$\therefore\ \xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}=r\text{ கோசை }\theta(r\text{ கோசை }\theta.\dot{\theta})-r\text{ சைன் }\theta(-r\text{ சைன }\theta.\dot{\theta})$$
$$=r^2\dot{\theta}.$$

இனி, தகட்டின் கோணவேகம் $\dot{\theta}$ ஆகும, ப. 56 ஒப்., அது ω என்க. எனவே

$$\Sigma m(\xi\ddot{\eta}-\eta\ddot{\xi})=\frac{d}{dt}\Sigma m(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})$$
$$=\frac{d}{dt}\Sigma m r^2\dot{\theta}$$
$$=\ddot{\theta}\Sigma m r^2$$
$$=I\ddot{\theta}\quad\text{அல்லது}\quad I\dot{\omega}.$$

இங்கு, I என்பது G ஊடாகவும், தகட்டின தளத்துக்குச் செங்குத்தாக வுமுள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து தகட்டின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும்.



படம் 3·18. தெக்காட்டின் ஆள்கூறுகளும் கோள முனைவாள்கூறுகளும் ; கோணவுந்தம்.

நிலைத்த அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழலும் விறைப்பான பொருளொன்றினிடத்து அக்கருத்தைப் பயன்படுத்துமுகமாக (x, y, z) இல் இருக்கின்ற திணிவு m உடைய துணிக்கையொன்றின் உந்தத் திருப்பத்தைக் கருதுவோம். குறிப்பிட்ட கணமொன்றில் துணிக்கையின் தானம் **P** யும், படம் 3·18 (a), **P** இல் அப்புள்ளியை வரையறுக்கும் கோளமுனைவாள் கூறுகள் (r, θ, ϕ) உம் ஆயின்,

$$\left.\begin{aligned} x &= r \text{ சைன } \theta \text{ கோசை } \phi \\ y &= r \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } \phi \\ z &= r \text{ கோசை } \theta \end{aligned}\right\}.$$

z–அச்சைக் குறித்துத் துணிக்கை சுழலுகிறபடியால் θ மாறுது ; r ஒரு மாறிலி ஆகும் ; மேலும், $\dot{\phi}=$ (கோணவேகம்) ω. எனவே,

$$m(x\dot{y}-y\dot{x}) = m[r \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi . r \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi . \dot{\phi} + r \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } \phi . r \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } \phi . \dot{\phi}] = m[r^2 \text{ சைன்}^2 \theta . \dot{\phi}].$$

எனவே, z அச்சைக குறித்துச் சுழலும் விறைப்பான பொருளொன்றின் உந்தத் திருப்பம் $\Sigma[mr^2(\text{சைன்}^2\theta)\dot{\phi}]$ ஆகும் ; இக்கூட்டலில் பொருளிலுள்ள எல்லாத் துணிக்கைகளும் அடங்கும். குறிப்பிட்ட துணிக்கைக்கும் அச்சுக்கும் r சைன் θ என்பது சுழிப்பாரை ஆதலின், மேற்படிக் கோவையை $\mathrm{I}\dot{\phi}$ என எழுதலாம் ; இங்கு, **I** கருதப்படும் அச்சைக் குறித்து முழுப் பொருளின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும்.

உந்தத் திருப்பமும் கோணவுந்தமும்.—உந்தத் திருப்பம் என்பதின் பொருளை விளக்கி வைக்குமுகமாக, புள்ளி **O** ஊடாகவும் வரிப்படத் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் செல்லுகின்ற நிலையான அச்சொன்றைக் குறித்துக் கோணவேகம் ω உடன் சுழலும் விறைப்பான பொருளொன்றைக் கருதுவோம், படம் 3·18 (b). பொருளிலுள்ள புள்ளி **P** யில் இருக்கின்ற சிறு துணிக்கையொன்றின் திணிவு δm_1 ஆகுக.

$\mathrm{OP}=r_1$ எனின், P யின் நேர்கோட்டு வேகம் $r_1\dot{\phi}$. அதன் உந்தம் $(\delta m_1)\, r_1\, \dot{\phi}$. சுழற்சியச்சைக் குறித்து இவ்வுந்தத்தின் திருப்பம் $(\delta m_1)\, r_1{}^2\, \dot{\phi}$ ஆகும் ; எனவே, சுழற்சியச்சைக் குறித்து முழுப் பொருளின் உந்தத் திருப்பம்

$$\Sigma[(\delta m)\, r^2]\, \dot{\phi} = \mathrm{I}\dot{\phi} \text{ அல்லது } \mathrm{I}\omega.$$

இங்கு, **I** சுழற்சியச்சைக் குறித்துப் பொருளின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும்.

அதுபோலவே, கோண ஆர்முடுகலுக்கும் பிரயோகிக்கப்படும் இணைக்குமிடையேயுள்ள தொடர்பைப் பின்வருமாறு பெறலாம். படம் 3·18 (c) இல் காட்டியுள்ளவாறு, விறைப்பான பொருளொன்றின்மீது இணையொன்று பிரயோகிக்கப்படட்டும் ; பொருள் ஒரு சிறு கோணம் $\delta\phi$ அளவால் சுழலுகின்றதென்க ; அதே நேரம் கோணவேகம் ω விலிருந்து $\omega+\delta\omega$ வரை

கூடுக. இணையாற் செய்யப்பட்ட வேலை சுழலும் பொருளின் இயக்கச் சக்தி நயத்துக்குச் சமனுதலால்

$$F(2r\delta\phi) = \tfrac{1}{2}I[(\omega+\delta\omega)^2 - \omega^2].$$

$$\therefore\ [\Gamma = 2Fr \text{ உம் } \delta\omega^2 \to 0 \text{ உம் எனின்}] \quad \Gamma\delta\phi = I\omega\,\delta\omega,$$

அதாவது $$\Gamma\frac{\delta\phi}{\delta t} = I\omega\frac{\delta\omega}{\delta t}.$$

$$\therefore\ \Gamma = I\ddot{\phi}.$$

சுழற்சி விதிகள்.—நிலைத்த அச்சொன்றைக் குறித்துப் புற விசைகளின் திருப்பம் Γ என்பது

$$\Gamma = \frac{d}{dt}(I\dot{\phi})$$

எனபதால் தரப்படுகிறது என ஏற்கெனவே நிறுவபபட்டிருக்கிறது ; இங்கு I தரப்பட்ட அச்சைக் குறித்து பொருளின் சடத்துவத் திருப்பமும், $\dot{\phi}$ அதே அச்சைக் குறித்துக் கோணவேகமும் ஆகும். I மாருதிருப்பின் மேற்படிக் கோவை $I\ddot{\phi}$ என ஆகிறது ; எனவே,

$$\Gamma = I\ddot{\phi}.$$

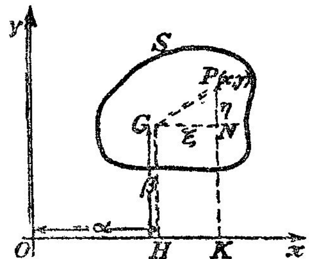
எனவே, பினவருகினற சுழற்சி விதிகளைப் பெறுகிறோம்.

(*a*) நிலைத்த அச்சொன்றைக் குறித்து விறைப்பான பொருளொன்றைத் தாக்கும் புற விசைகளின் திருப்பம் பூச்சியம் ஆயின், அதே நிலைத்த அச்சைக் குறித்து அப்பொருளின் கோணவேகம் மாருது.

(*b*) நிலைத்த அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழலும் விறைப்பான பொருளொன்றினிடத்து ஆக்கப்படும் கோண ஆர்முடுகல் அதே அச்சைக் குறித்து வரும் புற விசைகளின் திருப்பத்திற்கு நேர்விகிதசமமாம்.

சுழலும் பொருளொன்றின் இயக்கச் சக்தி ; கூனிக்கின் சூத்திரம்.—xOy என்னும் தளமொன்றில் இயங்கும் அடர் S என்பதைக் கருதுவோம், படம் 3·19 ; அடரில், P யிலுள்ளதும் திணிவு m உடையதுமான மாதிரித் துணிக்கையொன்றின் ஆள்கூறுகள் (x, y) ஆகுக. அடரின் திணிவு மையம் G ஐக் குறித்து இத்துணிக்கையின் ஆள்கூறுகள் (ξ, η) எனின், அடரின் இயக்கச் சக்தி அவ்வடரின் எல்லாத் துணிக்கைகளினதும் இயக்கச் சக்திகளின் கூட்டுத்தொகை என வரைவிலக்கணம் கூறுகிறபடியால், அது

$$W = \tfrac{1}{2}\Sigma m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma m[(\dot{\xi}+\dot{\alpha})^2 + (\dot{\eta}+\dot{\beta})^2]$$



படம் 3.19. சுழலும் பொருளொன்றின் இயக்கச் சக்தி ; கூனிக்கின் சூத்திரம்.

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு, நிலையான புள்ளி O வைக் குறித்து G யின் ஆள்கூறுகள் (α, β) ஆகும்.

இனி,

$$\Sigma m\xi = 0, \quad \Sigma m\eta = 0 \quad \text{ஆதலால்}$$

$$\Sigma m\dot{\xi} = 0 = \Sigma m\dot{\eta}.$$

எனவே, $M = \Sigma m$ எனின்

$$W = \tfrac{1}{2} M(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \tfrac{1}{2} \Sigma m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2).$$

அடர் விறைப்பானதாதலால் $\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = r^2\omega^2$; இங்கு, $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\omega = \dot{\theta}$; θ ஆனது அடரில் நிலேயான நேர்கோடொன்று வெளி இடத்தி லுள்ள நேர்கோடொன்றுடன் ஆக்கும் கோணம் ஆகும். [உண்மையில், $\dot{\xi} = -\eta\omega$; $\dot{\eta} = \xi\omega$.]

$$\therefore \quad W = \tfrac{1}{2} M(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2$$
$$= \tfrac{1}{2} Mu^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2 ;$$

இங்கு, u ஆனது G யின் வேகமும், I_G ஆனது G ஊடாகவும், அதன் தளதக்குச் செங்குத்தாகவும் செல்கின்ற அச்சொன்றைக் குறித்து அடரின் சடத்துவத் திருப்பமும் ஆகும். இது **கூனிக்கின்** (König's) **சூத்திரம்** எனப் படும் ; இது அடரின இயக்கச் சக்தியை இரு கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை யாக எடுத்துக்கூறுகிறது. அடரின் முழுத்திணிவும் G யிற் செறிந்து, G யின் அதே வேகத்துடன் அசையும் அத்திணிவின் இயக்கச் சக்திபோல் முதலாவது உறுப்பு அமைந்திருக்கிறது. இரண்டாவது உறுப்பு, G யில் நிலேத்ததும் அடரின் தளத்துக்குச் செங்குத்தானதுமான அச்சொன்றைக் குறித்துக் கோணவேகம் ω உடன் நிகழும் சுழற்சிக்கான இயக்கச் சக்தி யாகும்.

எந்த விறைப்பான பொருளின் இயக்கத்திலும் பயன்படக்கூடிய வகை யிலே மேற்படிச் சூத்திரத்தை விரிவாக்க முடியும் என்பதைக் காட்டலாம்.

நிலேயான அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழலும் விறைப்பான பொருளொன் றின் சக்திச் சமன்பாடு.—நிலேயான அச்சொன்றைக் குறித்து விறைப்பான பொருளொன்றின் சுழற்சிக்குக் காரணமாக இருக்கின்ற விசைகளின் திருப்பம் Γ ஆகுக. அப்பொழுது,

$$\Gamma = I\ddot{\theta} = I\dot{\omega} ;$$

இங்கு θ ஆனது ஓய்வுநிலேயிலிருந்து சுழன்ற கோணமும், ω ஆனது கருதப்படும் கணத்தில் பொருளின் கோணவேகமும் ஆகும்.

இனி, $$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\theta}.$$

எனவே, $$\Gamma = I\omega \cdot \frac{d\omega}{d\theta} = \tfrac{1}{2} I \frac{d}{d\theta}(\omega^2).$$

எனவே, $$\int \Gamma\, d\theta = \tfrac{1}{2} I\omega^2 + \lambda ;$$

இங்கு, λ ஒரு மாறிலி. தொடக்கக் கோணவேகம் ω_0 எனின், $\theta = 0$ ஆய் இருந்தபொழுது $\omega = \omega_0$ எனின்,

$$0 = \tfrac{1}{2}\,I\omega_0^2 + \lambda,$$

இதிலிருந்து
$$\int \Gamma d\theta = \tfrac{1}{2}\,I\omega^2 - \tfrac{1}{2}\,I\omega_0^2\,;$$

அதாவது, இணையாற் செய்யப்பட்ட வேலையானது பொருளின் சுழற்சிச் சக்திமாற்றத்துக்குச் சமனாகும்.

கணத்தாக்கு முறுக்கம்.—நேர்கோட்டு இயக்கவியலில்

$$F = m\ddot{x}$$

என்னும் சமன்பாட்டை t தொடர்பாகத் தொகையிட்டுக் **கணத்தாக்குச் சமன்பாட்டைப்** பெறுகிறோம் ;

அதாவது,
$$\int_0^t F\,dt = m\,[\dot{x} - (\dot{x})_0] = m(v-u)\,;$$

அதாவது, கணத்தாக்கானது நேர்கோட்டு உந்த மாற்றத்துக்குச் சமன என்றவாறு.

அதுபோலவே, சுழலும் பொருளொன்றின் சமன்பாடு

$$\Gamma = I\ddot{\theta} = I\dot{\omega}$$

என்பதிலிருந்து

$$\int_0^t \Gamma dt = I\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$
$$= I\,(\omega - \omega_0), \quad [\,(\omega)_{t=0} = \omega_0 \text{ எனின்}],$$

அல்லது, ω_0 பூச்சியத்தை அணுகுமிடத்து, $I\omega$.

பௌதிகவியலில், $\int_0^t \Gamma\,dt$ என்னும் கோவையின் அர்த்தத்தைக் காணும் பொருட்டு இடைத்தூரம் $2r$ உள்ள இரு விசைகள் F ஆல் Γ ஆகின்றது என்க. இவ்விணையானது δt அளவு காலம் பிரயோகிக்கப்படுமாயின், கணத்தாக்கு $2F\,\delta t$ ஆகும் ; மேலும், கணத்தாக்கின் திருப்பம்,

$$(2F\,\delta t)\,r = \Gamma\,\delta t = I\,\delta\omega.$$

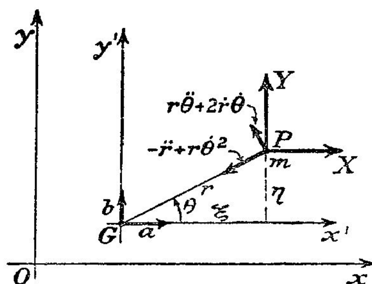
கணத்தாக்கு முடிவுள்ளதும் நிகழ்ச்சி நேரம் t உடையதுமாயின் அதன் திருப்பம்

$$I\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = I\,(\omega - \omega_0),$$

அதாவது, சுழற்சி அச்சைக் குறித்துக் கணத்தாக்கின் திருப்பம், சுழலும் பொருளின் கோண உந்த மாற்றத்திற்குச் சமன் என்றவாறு.

அச்சைக்குறித்து, கணத்தாக்கின் திருப்பம் **கணத்தாக்கு முறுக்கம்** எனப்படும்.

வெளி இடத்தில் நிலையல்லாது ஆனால் தனக்கே சமாந்தரமாக அசையும் அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழலும் விறைப்பான பொருளொன்றின் இயக்கச் சமன்பாடுகள்.—வெளி இடத்தில் நிலையாயுள்ள அச்சுக்கள் **Ox, Oy** என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமான திசைகளில் முறையே a, b ஆகிய



படம் 3.20. வெளி இடத்தில் நிலையல்லாது ஆனால் தனக்கே சமாந்தரமாக அசையும் விறைப்பான பொருளொன்றின் இயக்கம்.

ஆர்முடுகல்களுடன் அது அசைக. P யிலுள்ள திணிவு m உடைய சிறு துணிக்கையொன்றைத் தாக்கும் விசைகள் X, Y ஆகுக. G யைக் குறித்து P யின் ஆள்கூறுகள் ξ, η ஆயின், G யைக் குறித்து அதன் ஆர்முடுகல்கள் $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$ ஆகும்; எனவே, நிலையான அச்சுக்கள் **Ox, Oy** என்பவற்றைக் குறித்து, இயக்கச் சமன்பாடுகள்

$$\mathrm{X} = m\,(a + \ddot{\xi})\ ;\ \mathrm{Y} = m\,(b + \ddot{\eta}).$$

G யைக் குறித்து விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்தால்

$$(\mathrm{Y}\xi - \mathrm{X}\eta) = m\,[(b + \ddot{\eta})\xi - (a + \ddot{\xi})\eta].$$

ஒவ்வொரு துணிக்கையையும் தாக்கும் விசைகளைக் கருதுமிடத்து, உள் மறுதாக்கங்கள் ஒன்றையொன்று நடுநிலையாக்குகின்றன எனக் கொண்டால், G யைக் குறித்து அழுத்திய புற விசைகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகையே எஞ்சியிருக்கின்றது ; அது Γ என்க.

$$\therefore\quad \Gamma = \Sigma\, m[(b + \ddot{\eta})\,\xi - (a + \ddot{\xi})\eta]$$
$$= b\Sigma\, m\xi - a\Sigma\, m\eta + \Sigma\, m\,(\xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi}).$$

G யையே குறித்து G யின் ஆள்கூறுகள் (0, 0) ஆதலால், மேற்படிச் சமன்பாட்டிலுள்ள முதல் இரு உறுப்புகளும் மறைந்து

$$\Gamma = \Sigma\, m\,(\xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi}).$$

G யைக் குறித்து P யின் முனைவாள்கூறுகள் $(r,\ \theta)$ ஆகுக ; அப்பொழுது, r ஒரு மாறிலி ஆதலால் GP யிற்குச் செங்குத்தாக P யின்

ஆர்முடுகல் $r\ddot{\theta}$ உம், PG இன் வழியே அது $r\dot{\theta}^2$ உம் ஆகும். இவற்றை Gx' இற்கும் Gy' இற்கும் சமாந்தரமாகத் துணிக்க,

$$\ddot{\xi} = -r\dot{\theta}^2 \text{ கோசை } \theta - r\ddot{\theta} \text{ சைன் } \theta,$$
$$\ddot{\eta} = \quad r\ddot{\theta} \text{ கோசை } \theta - r\dot{\theta}^2 \text{ சைன் } \theta.$$
$$\therefore \quad \xi\ddot{\eta} - \eta\ddot{\xi} = r^2\ddot{\theta}.$$
$$\therefore \quad \Gamma = \ddot{\theta} \Sigma\, mr^2 = M\kappa^2\ddot{\theta} \;;$$

இங்கு, $M\kappa^2$ ஆனது G ஊடாகவும் வரிப்படத்தின் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள அச்சொன்றைக் குறித்து பொருளின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும்.

இச்சமன்பாடும், வெளி இடத்தில் நிலையானதும் G ஊடாகச் செல்கின்றதுமான அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழலும் பொருளொன்றிற்குக் கிடைக்கப்பெற்ற சமன்பாடும் ஒன்றேயாம்.

(a) ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தான இரு அச்சுக்களுக்குச் சமாந்தரமாக விசைகளைத் துணித்தும், பொருளின் முழுத் திணிவும் திணிவு மையத்தில் சேர்த்து வைக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொண்டு அவ்விசைகள் பொருளைத் தாக்குகின்றன எனக் கருதியும்,

(b) திணிவு மையத்தினூடாகச் செல்கின்ற அச்சொன்று வெளி இடத்தில் நிலைத்திருக்கிறது எனக் கருதி அதைக் குறித்துப் புற விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்தும்

தனக்கே சமாந்தரமாக அசையும அவ்வச்சைக் குறித்துச் சுழலும் பொருளொன்றிற்கான இயக்கச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

சுழற்சியின் கணநிலை அச்சொன்றைக் குறித்துத் திருப்பங்கள்.—நிலையான அச்சொன்றைக் குறித்துச் சுழலும் விறைப்பான பொருளொன்றிற்கான இயக்கச் சமன்பாடுகளுள் ஒன்று,

$I\omega$ = நிலையான சுழற்சியச்சைக் குறித்துப் பொருளைத் தாக்கும் புற விசைகளின் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை.

பொதுவாகச் சுழற்சியின் கணநிலை அச்சொன்றைக் குறித்துத் திருப்பங்களைக் கணிக்குமிடத்து இச்சமன்பாடு பொருந்தாது. ஏற்கெனவே பயன்படுத்தியுள்ள குறிப்பீட்டுக்கிணங்க,

$$W = \tfrac{1}{2} Mu^2 + \tfrac{1}{2} I_G\omega^2.$$

சுழற்சியின் கணநிலை அச்சைக் குறித்து எல்லாப் புற விசைகளினதும் திருப்பங்களின் கூட்டுத்தொகை Γ ஆகுக. காலம் δt யில் "சமான முறுக்கப் புயத்தின்" நிலைமாற்றம் $\delta\phi$ ஆகுக. அப்பொழுது,

$$\Gamma\delta\phi = \delta W.$$
$$\therefore \quad \Gamma\frac{d\phi}{dt} = \frac{dW}{dt}.$$
$$\therefore \quad \Gamma = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2} M(r\omega)^2 + \tfrac{1}{2} I_G\,\omega^2\right],$$

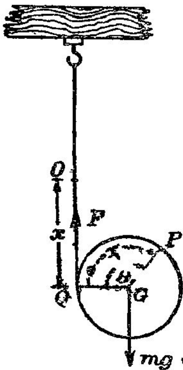
இங்கு, r ஆனது சுழற்சியின் கணநிலை அச்சிலிருந்து G யின் தூரம் ஆகும்; பொதுவாக, இது நேரத்துடன் மாறும்.

$$\therefore\quad \Gamma = \frac{1}{\omega}\left[\tfrac{1}{2}M(2r\omega)(r\dot{\omega}+\dot{r}\omega)+\tfrac{1}{2}I_G.2\omega.\dot{\omega}\right]$$

$$= M(r^2+\kappa^2)\dot{\omega}+Mr\dot{r}\,\omega.$$

சுழற்சியின் கணநிலையச்சிலிருந்து G யின் தூரம் மாறாது இருப்பின், மேலதிகமான உறுப்பு $Mr\dot{r}\,\omega$ மறையும்.

எடுத்துக்காட்டு.—பாரமற்ற நூலொன்று வட்ட உருளையொன்றிற சுற்றப்பட்டிருக்கிறது; நூலின் நுனி நிலையாகப பிடிக்கப்பட்டிருகக உருளை விழ விடப்படுகிறது. உருளையின் ஆர்முடுகலைக் காண்க.



படம் 3.21. ஒரு நிலைத்த தாங்கியுடன் இணைத்துள்ள ஒரு நூலால் தாங்கப்படும் ஓர் உருளையின் இயக்கம் (உருளை விழ நூலின் சுற்றவிழும்).

உருளையின திணிவு m உம், அதன் ஆரை a உம் ஆகுக. தொடக்கத்தில புள்ளி P யானது O வில் நூலைத் தொட்டிருந்தது எனக் கொளக. நூலின் புளளி Q விலிருந்தே நூல் உருளையை விட்டுப பிரியப்போகிறது எனக. உருளையின் திணிவுமையம் G ஆகுக; $\theta = \widehat{PGQ}$ என்க. விசைகளை நிலைகுத்தாகத் துணிக்க,

$$m\ddot{x} = mg - F;$$

இங்கு, நூலினுள்ள இழுவை F உம், புவியீர்ப்புச் செறிவு g உம ஆகும. G யைக குறித்து விசைகளின் திருப்பங்களை எடுகக,

$$Fa = \text{கறங்கல அச்சைக குறிததுப புற விசைகளின் திருப்பம்}$$
$$= \text{அதே அச்சைக குறித்துக் கோண உந்தம் மாறும் வீதம்}$$
$$= I\ddot{\theta} = \tfrac{1}{2}ma^2\ddot{\theta}.$$

ஆனால், $x = a\theta$. எனவே, $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$.

$$\therefore\ m\ddot{x} = mg - \tfrac{1}{2}ma\left(\frac{\ddot{x}}{a}\right),$$

அதாவது, $\ddot{x} = \tfrac{2}{3}g$.

[மாற்றாக, சுழற்சியின் கணநிலையச்சானது Q ஊடாகவும், வரிப் படத்தின் தளத்துககுச் செங்குத்தாகவும் செலகின்றதாதலின்,

$$mga = m(a^2+\kappa^2)\ddot{\theta};$$

இது $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$, $\kappa^2 = \tfrac{1}{2}a^2$ என்பவற்றுடன் சேர்த்து

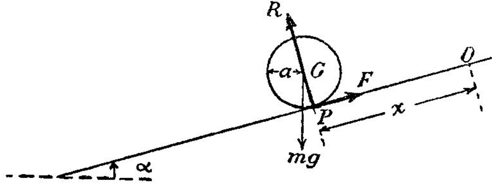
$$\ddot{x} = \tfrac{2}{3}g$$

எனத் தருகிறது.

சாய்தளமொன்றில் புவியீர்ப்பாலாகும் இயக்கம்.*—திணிவு m உடைய சுற்றற்றிண்மமொன்று புவியீர்ப்பின் தூண்டலால் தளத்தில் உருண்டு இறங்குகிறது எனக் கொள்வோம். சுழற்சியச்சு தளத்தின் உயர்சாய்வுக்

*இத்தகைய எல்லா எடுததுககாட்டுக்களிலும் தொடும் பொருள்கள் பூரண விறைப்பானவை எனக் கொள்ளப்படும்; உராய்வு இணையிலலை என்றவாறு. மேலும், இயககம் தனியுருளல மட்டுமே ஆதலால் உராய்வுக்கு எதிராக வேலைசெய்தல் இல்லை எனவும் கொள்வோம்.

கோட்டுக்குச் செவ்வனுக இருக்கிறது. R உம் F உம் முறையே பொருள் மீது தளம் ஆற்றும் மறுதாக்கத்தின் செவ்வன் கூறும் தொடலிக் கூறும் ஆகுக, படம் 3·22. (இம்மறுதாக்கத்தை ஒரு தனி விசையாக எடுக்கலாம் ; அதாவது உராய்விணையில்லை என்றவாறு.) தளத்துடன்



படம் 3·22. சாய்தளமொன்றில் புவியீர்ப்பாலாகும் இயக்கம்.

தொடுகைவைத்து உருள்கின்ற பொருளினது வட்ட வெட்டின் ஆரை a யும், ஓய்வுநிலையிலிருந்து பொருளின் திணிவுமையம் G அசைந்துள்ள தூரம் x உம் ஆயின்,

$$\dot{x} = a\dot{\theta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

இங்கு, $\dot{x}$ திணிவுமையத்தின வேகமும், $\dot{\theta}$ பொருளின் கோண வேகமும் ஆகும்.

தளத்துக்குச் சமாந்தரமாகவும் செங்குத்தாகவும் விசைகளைத் துணித்து, இப்பிரச்சினையில் இவ்வெல்லா விசைகளும் G மீதே தாக்குகின்றன எனக் கருத,

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \text{ சைன் } \alpha - \mathrm{F} \\ 0 &= mg \text{ கோசை } \alpha - \mathrm{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

இங்கு, α தளத்தின் சாய்வும், g புவியீர்ப்புச் செறிவும் ஆகும்.

இனி, G ஊடாகவும் வரிப்படத் தளத்துககுச் செவ்வனுகவும் உள்ள (கறங்கலச்சு எனப்படும்) அச்சொன்றைக குறித்து புற விசைகளின் திருப்பம் $\mathrm{F}a$ ஆகும் ; இது (மேற்படி அச்சைக் குறித்து) பொருளின் கோண உந்தம் மாறும் வீதம், அதாவது $m\kappa^2.\ddot{\theta}$ என்பதற்குச் சமன் ; இங்கு, κ அதே அச்சைக் குறித்துத் திண்மத்தின் சுழிப்பாரை ஆகும். எனவே,

$$\mathrm{F}a = m\kappa^2\ddot{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து F ஐயும் $\ddot{\theta}$ ஐயும் நீக்க,

$$m\ddot{x} = mg \text{ சைன் } \alpha - \frac{m\kappa^2\ddot{x}}{a^2},$$

அல்லது
$$\ddot{x} = \left(\frac{a^2}{a^2 + \kappa^2}\right) g \text{ சைன் } \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(iv)}$$

மேலும்,

$$0 = mg \text{ கோசை } \alpha\,; \quad \mathrm{F} = \left(\frac{\kappa^2}{a^2+\kappa^2}\right) mg \text{ சைன் } \alpha.$$

[ஓய்வுக் கணநிலை மையம் P என்பதைக் குறித்துப் புற விசைகளின திருப்பத்தை எடுக்க,

$$mga \text{ சைன் } \alpha = m\,(a^2+\kappa^2)\ddot{\theta}.$$

இது சமன்பாடு (iv) ஐ உடனே தருகிறது.]

F ஆனது μR ஐ மீற முடியாது என்னும் வழுக்குராய்வு விதியைக் கொள்வோமாயின், நழுவலின்மைக்கான நிபந்தனை

$$\mu mg \text{ கோசை } \alpha > \left(\frac{\kappa^2}{a^2+\kappa^2}\right) mg \text{ சைன் } \alpha, \text{ அதாவது } \mu\left(\frac{a^2+\kappa^2}{\kappa^2}\right) > \text{ தான் } \alpha$$

என்பது ஆகும்; இங்கு, μ உராய்வுக் குணகம்.

தளம் பூரண அழுத்தமுடையதாயின் $\mathrm{F}=0$; அப்பொழுது, திண்மத்தின் இயக்கம்

$$m\kappa^2\ddot{\theta} = 0, \quad m\ddot{x} = mg \text{ சைன } \alpha,$$

அதாவது
$$\ddot{x} = g \text{ சைன் } \alpha.$$

எனவே, உராய்வு இருக்கும் பொழுது திணிவுமையம் G யின் ஆர்முடுகலானது உராய்வில் வழுக்கல் உள்ளபோது இருக்கும் ஆர்முடுகலைக் காட்டிலும்

$$\left(\frac{a^2}{a^2+\kappa^2}\right) : 1$$

என்னும் விகிதத்திற் சிறிதாம்.

வேறுமுறை.—திண்மமானது தளத்தில் ஓய்வுநிலையிலிருந்து தூரம் x உருண்டு இறங்குக. அப்பொழுது, அதன் நிலைச் சக்தி mgx சைன் α அளவு குறைகிறது. திண்மத்தின் இயக்கச் சக்தி $\frac{1}{2}\,m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\,m\kappa^2\dot{\theta}^2$ அளவு கூடுகிறது ; இங்கு, குறியீடுகள் வழக்கமான கருத்துக்களைக் கொண்டிருக்கின்றன. இது, $\frac{1}{2}\,m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\,m\kappa^2\left(\frac{\dot{x}^2}{a^2}\right)$ ஆகும். பொருளொன்றின் நிலைச் சக்தி, அதன் இயக்கச் சக்தி என்பவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஒரு மாறிலி ஆதலின்,

$$\tfrac{1}{2}\,m\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}\,m\kappa^2\left(\frac{\dot{x}^2}{a^2}\right) = mgx \text{ சைன் } \alpha.$$

$$\therefore \quad \dot{x}^2 = 2xg \text{ சைன் } \alpha\left(\frac{a^2}{a^2+\kappa^2}\right).$$

இதை வகையிட, முன்போலவே

$$2\dot{x}\ddot{x} = 2\dot{x}g \text{ சைன் } \alpha\left(\frac{a^2}{a^2+\kappa^2}\right),$$

அல்லது
$$\ddot{x} = g \text{ சைன் } \alpha\left(\frac{a^2}{a^2+\kappa^2}\right).$$

பரிசோதனை.—மேலே கருதியுள்ள சுற்றற்றிண்மமானது சீரான கோளமோ ($\kappa^2 = \frac{2}{5} a^2$), உருளையோ அல்லது தட்டோ ($\kappa^2 = \frac{1}{2} a^2$), அல்லது வட்டவளையமோ ($\kappa^2 = a^2$) ஆயின், கீழ்வரும் பரிசோதனையை நடத்திப் புவியீர்ப்புச செறிவுககுப் பெறுமானமொன்றைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம்.

கிடைத் தளத்துடன் சிறு கோணமொனறை ஆக்கும வகையில் சாய்தளம் அமைககப்பட்டிருக் கிறது. (4 சமீ. விட்டமுடைய) உலோகததாலான கோளமொன்று தளத்தின் ஓரங்களை மீறுவண்ணம் அதனில உருணடு இயஙகும்பொருட்டுத் தளத்துடன் தொடுக்கப்பட்டிருககினற திருகுகளைப் பயன்படுத்தி அத்தளம செப்பஞ்செயயப்படுகிறது. தளத்தின சாயவுக்கோணததை அளககும் பொருட்டுத் தளம் மீது நீளமான மரததுணடொன்றை வைக்க; மரத்தில இருக்கின்ற நீண்ட நீர்மட்டமொனறு மரததின கிடையான நிலையைக காட்டும்வரை தெரிநத தடிப்புக்களுடைய இரு செவ்வகப் பித்தளைத் துணடுகளைப் பயன்படுத்தி மரத்தை உயர்த்துக. மரத்துணடானது தளததின் உயாசரிவுககோட்டுககுச சமாந்தரமென உறுதிபபடுத்தல் வேண்டும; பின்னா மரமும் பிததளைத் துண்டுகளும ஒன்றையொன்று தொடும் இடஙகளுக் கிடையேயுளள தூரததை அளகக. தேவைபபடும் கோணததை எளிதில மதிப்பிடலாம்.

தளத்தின் உச்சியிலிருந்து அதன் அடி வரை கோளத்தின் உருளலுக்கான காலத்தை நோககுக (தளத்தின் உசசிககு அணிததாயும் அதன் நீளததுககுச செங்குத்தாயும் பொருத்தப் பட்ட மரத்துணடொன்று கோளம் உருளத தொடஙகுவதற்கு மாட்டேற்றுககுறியொன் றுக உதவும்). மேற்படி தூரமானது (அதாவது, மாடடேற்றுககுறியிலிருநது தளத்தின் அடி வரையுள்ள உணமையான தூரம் சய கோளததின் ஆரை) x ஆகுக. அபபொழுது. ஆர்முடுகல் சீரானது எனக் கொண்டால

$$\ddot{x} = \frac{2x}{t^2}.$$

தளத்தின் ஒவவொரு சாயவுக்கும் இததகைய பல வாசிப்புகளின் சராசரியை எடுக்க; வெவவேறு சாய்வுகளுக்கான விளைவுத் தொடரொனறைப பெறுக; தளததின ஒரு முனையிலுள்ள ஒரே தனித் திருகைப பயன்படுத்திச சாயவை மாற்றுக.

$$\ddot{x} = \frac{a^2}{a^2 + \kappa^2} \cdot g \text{ சைன் } \alpha \text{ ஆதலின்}$$

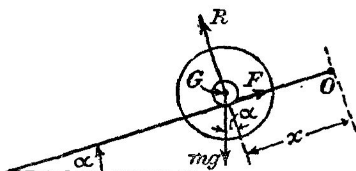
$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + \kappa^2} \cdot g \text{ சைன் } \alpha \cdot t^2 \text{ அலலது } x \text{ கோசீ } \alpha = \frac{1}{2} g \cdot \frac{a^2}{a^2 + \kappa^2} \cdot t^2.$$

எனவே, t^2 தொடர்பாகக கோசீα எனபதைக குறிததால $\frac{1}{2} g \cdot \frac{a^2}{a^2 + \kappa^2}$ என்னும் சரிவுடைய நேர்கோடொனறு கிடைககவேண்டும். இச்சரிவை அளந்து ஈர்ப்புச் செறிவு g இற்குப பெறுமானமொன்றைப் பெறுக.

தளம், கோளம் ஆகியவறறின் பரப்புககளில துணுககுகளும நெய்யும் இராவிட்டாற்றான் நம்பத்தகுநத விளைவுகளைப பெறமுடியும். தூயமையாககியொன்றைப் பயன்படுத்தி இவற்றை அபபுறப்படுத்துதல் வேணடும். துப்புரவாககலுக்குப் பின்னர் தூய பட்டுத்துண்டொன்றாலேயே கோளத்தைத் தொடுதல வேண்டும்.

சாய்தளமொன்றில் இறங்கும் சில்லுமச்சாணியுமொன்றின் இயக்கத்தைப் பற்றிய ஆராய்ச்சி.—கிடைத் தளத்துடன் கோணம் α விலிருக்கும் சாய் தளமொன்றில், திணிவு m உடைய சில்லுமச்சாணியும் அதனது ஓய்வு நிலையிலிருந்து உருண்டு இயங்கத் தொடங்குகிறதெனக் கொள்வோம். அச்சாணியானது எப்பொழுதும் சாய்தளத்தின் உயர் சரிவுக்கோட்டுக்குச் செவ்வனாக இருக்கிறது எனவும் கொள்வோம். இந்த எடுத்துக்காட்டிலே

சாய்தளம் நீண்ட மரப்பெட்டியொன்றுகும்; அதன் பக்க ஓரங்கள் செப்பமாக சீவுளி போடப்பட்டிருக்கின்றன. பெட்டியின் ஒவ்வோரோரத்திலும் ஒவ்வொரு புள்ளியாகத் தளத்தின் இரு புள்ளிகளில் அச்சாணி தொட்டுக்கொண்டிருக்கிறது; தொடும் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும், தளத்துக்குச் செவ்வனுகவும் சமாந்தரமாகவுமுள்ள திசைகளில், தாக்கத்தின் உறுப்புக்கள் முறையே R, F என்க, படம் 3·23. அப்பொழுது, சில்லைத் தாக்கும் விசைகள் அதன் நிறை mg, தாக்கத்தின் உறுப்புக்கள் 2R, 2F என்பன ஆகும். உராய்வில்லை இல்லாமல், சில்லானது நழுவலின்றி உருளுமாயின், இயக்கத்தைத் தீர்மானிக்கும் சமன்பாடுகள்



படம் 3·23. சாய்தளம் ஒன்றில் சில்லும் அச்சாணியும்.

$$mg \text{ சைன் } \alpha - 2\,\mathrm{F} = m\ddot{x}. \quad \ldots.(\mathrm{i})$$

$$2\,\mathrm{R} - mg \text{ கோசை } \alpha = 0. \quad \ldots.(\mathrm{ii})$$

மேலும், திணிவுமையம G ஐக் குறித்து விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்தால்

$$2\,\mathrm{F}a = \mathrm{I}\,\ddot{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{iii})$$

= கறங்கலச்சைக் குறித்துக் கோண உந்தம மாறும் வீதம்;

இங்கு, a அச்சாணியின் ஆரையும், x ஓய்வு நிலையிலிருந்து G அசைந்த தூரமும், θ ஓய்வு நிலையிலிருந்து சில்லின எந்த ஆரையும் திரும்பியுள்ள கோணமும் ஆகும். அப்பொழுது,

$$\mathrm{I} = \frac{2\,\mathrm{F}a}{\ddot{\theta}} = \frac{(mg \text{ சைன் } \alpha - m\ddot{x})}{\ddot{\theta}}\; a.$$

சில்லு, தளம் ஆகியவற்றின் தொடுகைப் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் ஓய்வுக் கணநிலை மையங்கள் ஆதலின் $\dot{x} = a\,\dot{\theta}$; எனவே, $\ddot{x} = a\,\ddot{\theta}$. எனவே,

$$\mathrm{I} = \frac{(mg \text{ சைன் } \alpha - m\ddot{x})}{\ddot{x}}\; a^2,$$

அல்லது,

$$\ddot{x} = \frac{mga^2 \text{ சைன் } \alpha}{(\mathrm{I} + ma^2)} = \frac{a^2}{a^2 + \kappa^2} \cdot g \text{ சைன் } \alpha \quad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{iv})$$

இங்கு வழக்கம்போல், $\mathrm{I} = m\kappa^2$.

பரிசோதனை.—தளம் வழியே ஆர்முடுகல் சீரானது என மேற்படி சமன்பாடுகளிலிருந்து தெரியவருகிறது. பரிசோதனைமுறைப்படி இதனை நிலைநிறுத்தும்பொருட்டுத் தளத்தில் சில்லு வெவ்வேறு தூரங்கள் உருண்டு இயங்குவதற்கான கால அளவுகளை நோக்குக; தளத்தின் உயர் சரிவுக்கோடு வழியே தூரங்கள் அளக்கப்படுகின்றன; வழக்கம்போல், குறிப்பிட்ட ஒவ்வோர் உருண்ட தூரத்துக்கான காலம் மும்முறை நோக்கப்படுகிறது. தூர–நேர வளையியை வரைக. வரைபானது நேர்கோட்டுக்குரியதல்லதாதலால் இயக்கத்தின் போது வேகம் சீரானதன்று என்பது தெளிவாம். வளையியின் வெவ்வேறு புள்ளிகளிலே

தொடலிகளை வரைந்து அவற்றின் சாய்வுகளை (அதாவது, தளத்தில் சில்லின் வெவ்வேறு நிலைகளுக்கொத்த x இன் பெறுமானங்களை)க் காண்க. அடுத்து, வரையப்படும் வேக–நேர வளையி நேர்கோடாயின் இயக்கம் சீராய வளர்ந்த வேகத்துடன் எனக் கொள்ளலாம்.

ஆர்முடுகல் சீரானது என நிறுவியுள்ளபின்

$$x = \tfrac{1}{2}\,\ddot{x}\,t^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(v)}$$

தேவைப்படும் சடத்துவத் திருப்பத்தை வரைபுமுறைப்படி பின்வருமாறு துணியலாம். சமன்பாடுகள் (iv) ஐயும் (v) ஐயும் பயன்படுத்த,

$$\text{கோசீ}\ \alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{mga^2}{x\,(\mathrm{I}+ma^2)}\cdot t^2.$$

எனவே, x இன் நிலையான பெறுமானமொன்றிற்கு t^2 இறகு எதிரே கோசீ α ஐக் குறித்தால் நேர்கோட்டின் சரிவு

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{mga^2}{x\,(\mathrm{I}+ma^2)}.$$

இதிலிருந்து I யைக் கணிக்கலாம்.

வேறுமுறை.—சில்லானது ஒரு நிலைக்குத்துத் தூரம் h இயங்கியதும் சில்லின் கோணவேகம் ω எனவும், திணிவுமையத்தின் நேர்வேகம் $\dot{x}$ எனவும் கொள்வோம். அப்பொழுது சகதிச் சமன்பாடு

$$mgh = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{I}\,\omega^2 + \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2$$

அல்லது, $$mgx\ \text{சைன்}\ \alpha = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{I}\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + m\,\dot{x}^2\right].\quad [\because\ a\,\omega = \dot{x}] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(vi)}$$

மேற்படி கோவையை நேரம் தொடர்பாக வகையிட,

$$mg\,\dot{x}\ \text{சைன்}\ \alpha = \left[\frac{\mathrm{I}}{a^2}+m\right]\dot{x}\,\ddot{x}.$$

இதிலிருந்து, முன்னர்போலவே $$\ddot{x} = \frac{mga^2\ \text{சைன்}\ \alpha}{\mathrm{I}+ma^2}.$$

தளத்தின் கோணத்தைக் காணும்பொருட்டு, இரு செவ்வக உலோகத்துண்டுகள் தளத்தின் உயர் சரிவுக்கோட்டுக்கு அவற்றின் ஓரங்கள் செங்குத்தாயிருக்க, அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இவற்றின்மீது, உயர் சரிவுக்கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாகப் பித்தளையாலான நீண்ட நேரான சட்டமொன்று ஏற்றப்படுகிறது. சட்டம் கிடையாக வரும்வரை உலோகத் துண்டுகளின் தானங்கள் செப்பஞ் செய்யப்படுகின்றன ; நீர்மட்டமொன்றைப பயன்படுத்தி இந்நிபந்தனையை நிறைவேற்றலாம். இனிக் கோணம் α வைக் காணமுடியும். [தளத்தின் ஒவ்வொரு நிலையினும் உலோகத்துண்டுகளை வெவ்வேறு இடங்களில் வைத்துப் பரிசோதனையின இப்பகுதியைக் குறைந்தது மும்முறை என்றுலும் மறுபடி செய்து α என்பதற்குச் சராசரிப் பெறுமானம கணிக்கப்படுகிறது.]

பயிற்சி III

3·01. எந்த ஒரு அச்சையும் குறித்து பொருளொன்றின் சடத்துவத் திருப்பத்திற்கு அப்பொருளின் திணிவுமையம் ஊடாகச் செல்கின்ற சமாந்தர அச்சைக் குறித்த சடத்துவத் திருப்பம், அச்சுக்களின் இடைத்தூரம் என்பவை கொண்ட கோவையொன்றைப் பெறுக.

ஒன்று திண்மமானதும், மற்றையது பொளளானதும், ஆனல் வெவ்வேறன திரவியங்களாலானவையுமான, இரு உலோகக் கோளங்கள் ஒரே திணிவும், புற விட்டமும், வெளித தோற்றமும் உடையனவாம். கோளங்களைத் தீண்டாமல் எது திண்மமானது, எது பொள்ளானது என அறிதற்கான எளிய முறையொன்றை விவரிததுக்கூறி விளக்குக. (G)

3·02. அச்சொன்றைக் குறித்து விறைப்பான பொருளொனறின் சடத்துவத் திருப்பத்திற்கு வரைவிலக்கணம் கூறுக. அடர்ப் பொருளொன்றின தளத்திலுள்ளதும் ஒனறிறகொனறு செங்குத்தானதுமான இரு நேர்கோடுகளைக் குறித்து அபபொருளின் சடததுவத் திருப்பங்கள் I_x, I_y எனின, கோடுகள ஒன்றையொனறு வெட்டும் புளளி ஊடாகச் செலகினற செஙகுத்தான அச்சைக குறித்த சடததுவத் திருப்பம

$$I_z = I_x + I_y$$

எனக் காட்டுக.

ஆரை a சமீ கொண்ட வட்டத்தட்டு ஒனறிற்கு அதன் ஆரையொனறை இருகூறிடுவதும் அதன் தளத்துக்குச் செஙகுததானதுமான அச்சொன்றைப் பறறிச சுழிப்பாரை

$$\kappa = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

எனக் காட்டுக.

3·03. சீரான உருளையொன்று மாறுத் திணிவு m உடையதாம். அதன் முழு நீளம் $2l$ உம், குறுக்குவெட்டு ஆரை a யும் ஆகும். உருளையின் மையம் ஊடாகவும் அதன் நீளததுக்குச் செஙகுத்தாகவும் உள்ள அசசொனறைக் குறித்து அவ்வுருளையின் சடத்துவத் திருப்பத்தின் இழிவுப் பெறுமானததிற்கான $\frac{l}{a}$ என்னும் விகிதத்தைக காணக. $[\sqrt{3} : 2\sqrt{2}]$

3·04. திணிவு m கொண்ட சீரான எந்த முக்கோணிவடிவமுளள தட்டு ABC என்பதற்கும் A ஊடாகவும் தட்டுக்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள அச்சொன்றைப் பறறிச் சடத்துவத் திருப்பம்

$$\frac{m}{12}[3b^2 + 3c^2 - a^2]$$

எனக் காட்டுக.

3·05. திணிவு M உம், ஆரை a யும் உடைய ஈயத்தாலான, சீரான பெரிய கோளமொன்று கிடையான தளமொன்றில ஓய்வாயிருக்கிறது. திணிவு m ஐயுடைய சிறு துப்பாக்கிக் குண்டொன்று வேகம் u உடன் கிடையாகக் கோளத்தினுள் சுடப்படுகிறது; குண்டின் இயக்கக்கோடு கோளததின் மையத்தை நோக்கி அமைந்திருக்கிறது. தளத்தில் கோளம் நழுவாது எனக கொண்டு, தளம் மீது u எனனும ஓரவேகத்துடன் கோளம் உருளத் தொடங்கும் எனக் காட்டுக; இங்கு, v ஆனது

$$v = \frac{5}{7}\frac{m}{M}u$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது.

3·06. திணிவு m கொண்ட, சீரான, திண்ம வட்டவுருளையொன்று கிடையாயிருக்கின்ற அதன் அச்சைக் குறித்துச் சுயாதீனமாகச் சுழலமுடியும். உருளையைச் சுற்றியிருக்கின்ற ஈயா இழையொன்றின் நுனியில் திணிவு m_0 உள்ள துணிக்கையொனறு தொங்குகிறது. தொகுதி அசையுமாறு விடுவிக்கப்பட்டதும் சீரான ஆர்முடுகல்

$$\frac{2m_0 g}{m + 2m_0}$$

என்பதுடன் துணிக்கை இயங்குகிறது எனக் காட்டுக.

3·07. *சீரான சதுரமுகியொன்று, கிடையாயிருக்கின்ற அதன் ஓரமொன்றைக் குறித்து ஊசலாடுகிறது; உயர்வான நிலைகளில் புவியீர்ப்பு மையமும சுழற்சியச்சும் ஒரே மட்டமாக இருக்கின்றன. அச்சின் மீதுள்ள உதைபபு எப்பொழுதும்* 0·25W *இற்கும்* 2·5W *இற்கும் இடையேயுள்ள பெறுமானமொன்றை உடையது என நிறுவுக; இங்கு,* W *சதுரமுகியின் திணிவு ஆகும்.*

3·08. *வீதிவழியாக வேகம்* u *உடன் செல்லும் நாலகு—சில்லு வண்டியொன்றின் இயக்கச் சக்தியானது*

$$\frac{1}{2}\left(M + 2\,m\,\frac{\kappa^2}{a^2}\right)u^2$$

எனபதற்குச் சமன் எனக காட்டுக. இங்கு M *ஆனது வண்டி, சில்லுகள் என்பவற்றின் மொத்தத் திணிவும்,* $m\kappa^2$ *அச்சாணியைக குறித்து ஒவ்வொரு சோடிச் சில்லின் சடத்துவத் திருப்பமும்,* a *ஒவவொரு சில்லின் ஆரையும் ஆகும்.*

F *என்னும் விசை, மட்டமான பாதையொன்றில் வண்டியைச் செலுத்துமாயின் ஆர்முடுகல்*

$$\frac{F}{\left(M + \dfrac{2m\kappa^2}{a^2}\right)}$$

எனக் காட்டுக.

3·09. *செஙகுத்தான அச்சுக்கள்* OA *யையும்* OB *யையும் பற்றித் தட்டொன்று சமச்சீரானதாகும்.* OA, OB *எனபவற்றின் தளத்தில்,* OA *யுடன கோணம்* θ *ஆக்கும் வண்ணம்* OC *என்னும் அச்சொனறு வரையப்படுகிறது.* OA *யையும* OB *யையும் குறித்த சடத்துவத் திருப்பங்கள முறையே* I_1 *உம்* I_2 *உம் ஆயின்* OC *யைக் குறித்த சடத்துவத் திருப்பம்*

$$(I_1\ \text{கோசை}^2\,\theta + I_2\ \text{சைன்}^2\,\theta)$$

எனக் காட்டுக.

கிடைத் தளத்துடன் α *சாய்வுடைய சமாந்தரத் தணடவாளங்கள் மீது, அச்சாணி தண்டவாளங்கள் மேலும் சிலலு அவற்றிற்கிடையிலும் என்றவாறு, ஒரு சிலலுமச்சாணியும் கீழ்முகமாக உருளும். கணிப்புக்குத தேவையான சூத்திரத்தைப் பெற்று, எவ்வாறு சில்லின் தளத்துக்குச் செங்குத்தான மையவச்சைக் குறித்து சில்லுமச்சாணியும் என்பதற்கான சடத்துவத் திருப்பத்தைத் துணியலாம் என்பதை விளக்குக.* (G)

3·10. *ஆரை* a *ஆன உருளையான மத்தளமொன்று கிடையாயிருக்கின்ற அதன் அசசைக் குறித்துச் சுயாதீனமாகச் சுழல முடியும். மத்தளத்தைச் சுற்றியிருக்கின்ற இலேசான கயிறொன்றின் ஒரு நுனி அதனுடன் பற்றப்பட்டிருக்கின்றது. மறுநுனி திணிவு* m *ஒன்றைக் காவுகிறது. சுழற்சியச்சைக் குறித்து மத்தளத்தின சடத்துவத் திருப்பம்* I *எனின் தொகுதி ஓய்வுநிலையிலிருந்து சுயாதீனமாக அசையும்பொழுது கயிறறிலுள்ள இழுவை*

$$\frac{I\,mg}{(I + ma^2)}$$

என நிறுவுக.

3·11. *புவியானது ஆரை* a *ஆயுள்ள கோளமொன்று எனவும், அதன் சுழற்சியச்சைப் பறறி அது சடத்துவத் திருப்பம* I *உடையது எனவும் கொள்க; அதன் பரப்பிலுள்ள பொருள்கள் யாவும் ஓய்வாயிருக்கும்பொழுது மட்டுமே அதன் கோணவேகம்* ω *ஒரு மாறிலி ஆகும். திணிவு* m *கொண்ட புகைவண்டியொன்று ஒரு முனைவில் தொடங்கி மாறுவேகம்* v *உடன் நள்வாறொன்று வழியே செல்லுகிறது. அது மறு முனைவை அடையும் நேரத்தில் கோளம் திரும்பியுள்ள கோணம்*

$$\frac{\pi\,\omega\,a}{v}\left(\frac{I}{I + m\,a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

என நிறுவுக.

3·12. சில்லுமச்சாணியுமொன்றில் திணிவுகள் m_1 உம் m_2 உம் சமநிலையில் இருக்கின்றன. உராய்வும் பொறியின் சடத்துவமும் புறக்கணிக்கத்தக்கனவாயின், திணிவுகளை ஒன்றை மற்றொன்றுடன் மாற்றினால் திணிவு m_1 ஆனது ஆர்முடுகல

$$\frac{m_1(m_1-m_2)g}{m_1^2-m_1m_2+m_2^2}$$

என்பதுடன் இறங்கும் என நிறுவுக.

3·13. பறப்புசில்லொன்று, திணிவு m இரு. உம் ஆரை a யும் உடைய சீரான வட்டத் தட்டொன்றும் அத்தட்டின் ஓரத்தில் மெல்லிய படையாகப் பரப்பியுள்ள திணிவு M இரு என்பதாலும் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. t செக். இல் கோணவேகம் N சுற். நிமி.$^{-1}$ பிறப்பிக்கும் பொருட்டுச் சில்லுமீது பிரயோகிக்கப்படவேண்டிய இணையானது $3\cdot27\times10^{-3}$ $Na^2(M+\frac{1}{2}m)t^{-1}$ இரு–நிறை–அடி என நிறுவுக. தட்டுக்குப்பதிலாகத் திணிவு m உம் ஆரை a யும் உடைய கோளமொன்றைப் பயன்படுத்தித் திணிவு M ஐச் சுழற்சியச்சுக்குச் செங்குத்தான விட்டத் தளமொன்றில் வைத்தால் எம்மாற்றத்தை மேற்படி கோவை அடையும் ?

3·14. உராய்வைப் புறக்கணிக்கத்தக்க வகையிலே கிடையான அச்சொன்றைப் பற்றி சில்லுமச்சாணியுமொன்று சுழல்கிறது. ஆரை a ஆன அச்சாணியைச் சுற்றியுள்ள நயா இழையொன்றின் நுனியில் தாங்கப்பட்டிருக்கிற திணிவு m என்பதின் இறக்கத்தாலேயே இயக்கம் உண்டாகின்றது. காலம் t யில் திணிவு ஓய்வு நிலையிலிருந்து ஒரு தூரம் z விழுமாயின், சுழற்சியச்சைக் குறித்து சில்லுமச்சாணியும் என்பதின் சடத்துவத் திருப்பம்

$$ma^2(gt^2-2z)(2z)^{-1}$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு, g புவியீர்ப்புச் செறிவு ஆகும்.

3·15. ஒவ்வொரு பக்கமும் நீளம் a யான, n பக்கங்கள் உடைய, ஒழுங்கான பல்கோணி யொன்றிற்கு அதன் மையம் ஊடாகவும் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள அச்சைப் பற்றி சுழிப்பாரை (K) யைக் காண்க. மேலும், n முடிவிலியை அணுகும்பொழுதுள்ள K யின் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

$$\left[K^2=\frac{1}{12}a^2\frac{2+\text{கோசை }2\pi/n}{1-\text{கோசை }2\pi/n}.\right]$$

3.16. எவ்வாறு அறவூட் பொறியைப் பயன்படுத்திக் குறிப்பிட்ட நிலையமொன்றிலுள்ள புவியீர்ப்புச் செறிவைத் துணியலாம் என்பதை விவரித்து விளக்கிக் கூறுக. எவ்வாறு கப்பியின் சடத்துவத்தாலான விளைவை (i) கணிப்பிலிருந்து நீக்கலாம் (ii) கணித்துத் திருத்தமொன்றைப் பிரயோகிக்கலாம் என்பதைக் காட்டுக.

அதிகாரம் IV

எளிய இசையியக்கம்

எளிய இசையியக்கம்.—துணிக்கையொன்று, இயக்கக் கோட்டிலுள்ள நிலை யான புள்ளியொன்றை நோக்குமுகமாகவும் அப் புள்ளியிலிருந்து அத்துணிக் கையின் தூரத்திற்கு நேர்விகிதசமமாகவும் உள்ள விசையொன்றின் தாக் கத்தால் அசையும் பொழுது, அவ்வசைவு எளிய இசையானது எனப்படும்.

நேரம் t யில், நிலையான புள்ளி O விலிருந்து துணிக்கையின் தூரம் x ஆகுக; x இன் நேர்த்திசையில், அதாவது x கூடுந் திசையில் அதன் ஆர்முடுகல் $\ddot{x}$ ஆகும்; எனவே அதே திசையிலே தாக்குகின்ற விசை $m\ddot{x}$ ஆகும். எனவே இயக்கத்தின் வகையீட்டுச் சமன்பாடு

$$m\ddot{x} = -\kappa x,$$

இங்கு κ என்பது துணிக்கையின இடப்பெயர்ச்சி அலகொன்றிற்கான விசை ஆகும்; x இன் போக்குககு விசை எப்பொழுதும் எதிராதலின், சயக்குறி வேண்டியதாம்; அதாவது, x நேர் எனின் விசை மறை எனவும், இதன் மறுதலை எனவும் உளது.

$\kappa = m\beta$ என எழுதினுல் மேற்படி சமன்பாடு $\ddot{x} = -\beta x$ ஆகினறது;

$$x = \text{A கோசை } (\beta^{\frac{1}{2}} t + \alpha)$$

எனபது அதன தீர்வொன்ருகும்; இங்கு A யும் α வும் எதேச்சை மாறிலிகள் ஆகும். [இவவிடத்தில் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி அல கொனறிற்குரிய ஆர்முடுகல் β என்பது குறித்தற்பாலது.]

எனவே இயக்கம் ஆவர்த்தனமானதாகும்; அதாவது எப்பொழுது **அவத்தை** $(\beta^{\frac{1}{2}} t + \alpha)$ என்பது 2π அளவு கூடுகிறதோ அப்பொழுது x, $\dot{x}$ என்பவற்றின் பெறுமானங்கள் மறுபடியும் தோன்றும். ஆவர்த்தன காலம் T ஆகுக. அப்பொழுது t_1 எனபதால் குறிபபிட்ட ஒரு கணத்தில் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி x_1 எனின்

$$x_1 = \text{A கோசை } (\beta^{\frac{1}{2}} t_1 + \alpha).$$

மேலும் $(t_1 + \text{T})$ என்னும் நேரத்தில் துணிக்கை அதே இயக்க நிலையில் திரும்பவும் இருக்கும். எனவே

$$\text{கோசை } (\beta^{\frac{1}{2}} t_1 + \alpha) = \text{கோசை } [\beta^{\frac{1}{2}} (t_1 + \text{T}) + \alpha],$$

$$\therefore \quad \beta^{\frac{1}{2}} t_1 + \alpha + 2\pi = \beta^{\frac{1}{2}} (t_1 + \text{T}) + \alpha$$

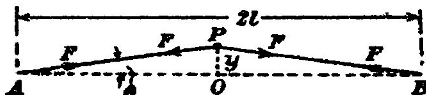
அத்துடன் $$\text{T} = \frac{2\pi}{\beta^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{இடப்பெயர்ச்சி அலகொன்றிற்கான ஆர்முடுகல்}}}.$$

ஆவர்த்தன காலமானது இயக்க வீச்சு A யைச் சாராதது குறித்தற்பாலது; இத்தகைய அதிர்வுகள் **சமகால அதிர்வுகள்** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு (i).—இரு நிலைத்த புள்ளிகளுக்கிடையே ஈர்க்கப்பட்டிருக்கின்ற கம்பியொன்றின் மையப்புள்ளியில் திணிவு m கொண்ட துணிக்கையொன்று இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. கம்பியிலுள்ள இழுவை F. பக்கத்திறகுரிய சிற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க.

அதன் ஓய்வு நிலையிலிருந்து குறிப்பிட்டவொரு கணத்தில், துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி y ஆகுக—படம் 4·01 ஐ ஒப. இடப்பெயர்ச்சி சிறிதாயின் கம்பியிலுள்ள இழுவை மாறாது இருக்கும். மேலும் கம்பியின் சடத்துவத்தைப் புறக்கணித்தால், துணிக்கையின் இயக்கம்

$$m\ddot{y} = -2\text{F} \text{ சைன் } \theta = -\frac{2\text{F}y}{l}.$$



படம் 4·01. ஈர்க்கப்பட்ட கம்பியொன்றின் மையத்திலுள்ள துணிக்கையின் அலைவுகள்.

இங்கு $2l$ நிலைத்த புள்ளிகளின் இடைத்தூரம். துணிக்கை மீது தாக்குகின்ற மீள்தரு விசையானது y யைக் குறைக்குமாறு அமைந்திருக்கிறபடியால் மறைக் குறி பயன்படுத்தப்படுகிறது. எனவே ஆவர்த்தன காலம்

$$2\pi\sqrt{\frac{ml}{2\text{F}}}.$$

எடுத்துக்காட்டு (ii).—நெருக்கமாகச் சுற்றியுள்ள சுரி வில்லொன்றுடன் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்ற பொருளொன்றின் நிலைக்குத்தலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க.

இவ்வெடுத்துக்காட்டில் நிலைத்த புள்ளியொன்றிலிருந்து, புறக்கணிக்கத்தக்க திணிவுடைய சுரி வில்லொன்றால், தொங்கும் பொருளின் இயக்கத்தைக் கருதல் வேண்டும். பொருளின் திணிவு M ஆகுக. வில் ஓய்வாயிருக்கும் பொழுது அதன் கீழ்முனை ஏதேனுமொரு வரையறுத்த தானத்தைப் பெற்றிருக்கும். M உடன் மேலதிகமான சிறு திணிவு m இணைக்கப்பட்டபொழுது வில்லின் கீழ்முனை இயங்கிய தூரம் h ஆகுக. வில் காவுகின்ற முழுச் சுமையிலிருந்து திணிவு m அப்புறப்படுத்தப்பட்டால் வில்லின் கீழ்முனையின் தானம் h அளவு உயர்த்தப்படும் எனப் பரிசோதனை காட்டுகிறது. மேலும் h ஆனது m இறகு நேர்விகிதசமம் எனவும் அது தெரிவிக்கிறது.

எனவே, சுமை M உம் வில் ஈர்க்கப்பட்ட அளவு y யும் ஆயின், சுமையை அதன் தொடக்க நிலையை மீளச்செய்யுமாறு முயல்கின்ற விசையானது, நிலைக்குத்தாகவும் கீழ் முகமாகவும் தாக்குகின்ற நிறை $\text{M}g$, மேல்முகமான இழுப்பு $\left[\text{M}+\frac{m}{h}\cdot y\right]g$ என்பவற்றின் விளையுள், அதாவது அது $\frac{mgy}{h}$ ஆகும். எனவே இயக்கம்

$$\text{M}\ddot{y} = -\frac{mgy}{h}.$$

அதன் ஆவர்த்தன காலம் $$\text{T}=2\pi\sqrt{\frac{\text{M}h}{mg}}.$$

இனி $\frac{\text{M}h}{m}$ என்பது வில்லினிடத்துச் சுமை M ஆல் ஆன நிலையியல் நீட்சியாகும். அதை λ எனக. அப்பொழுது,

$$\text{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}};$$

எனவே, ஆவர்த்தன காலமானது λ நீளம் உடைய எளியவூசலொன்றின் ஆவர்த்தன காலத்திற்குச் சமனாகும் [பக. 118 ஐ ஒப].

சுமையேற்றிய வில்லொன்றிற்கு அலைவு நேரத்தைக் கண்டு புவியீர்ப்புச் செறிவுக்குப் பெறுமானமொன்றைக் காணலாம் என மேற்கூறியவற்றிலிருந்து தெளிவாம். எனினும், நடைமுறையில் வில்லின் சொந்தச் சடத்துவ விளைவுக்கான திருத்தமொன்றைப் பிரயோகித்தல் வேண்டும். இவ்விளைவு, காவப்படும் சுமையில் ΔM அளவு கூடியதாலானது; இது சுமையாலான நீட்சியில் ஒரு $\Delta\lambda$ ஏற்றத்திற்கு ஒத்ததாகும்.

வில்லுடன் தொடுக்கப்பட்ட திணிவுகள் முறையே M_1, M_2 ஆக இருக்கும் பொழுது ஆவர்த்தன காலங்கள் T_1, T_2 ஆகுக. அப்பொழுது,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_1+\Delta\lambda}{g}}; \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_2+\Delta\lambda}{g}}.$$

இங்கு $\Delta\lambda$ ஐ நீக்க,

$$g(T_1^2 - T_2^2) = 4\pi^2(\lambda_1 - \lambda_2).$$

வேறு முறையாக, $\Delta\lambda$ ஐ நீக்கும்பொருட்டு வரைபு முறையொன்றைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு (iii).—கப்பலொன்றால் பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் சடத்துவத்தைப் புறக்கணித்து அக்கப்பலின் நிலைக்குத்தியக்கத்தின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க.

இடப்பெயர்ச்சியுற்ற நீரின் கனவளவு V யும், நீரின் அடர்த்தி ρ வும், நீர்க்கோட்டில் கப்பலின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு S உம் ஆகுக. குறிப்பிட்ட கணத்திலுள்ள சிறு நிலைக்குத்துப் பெயர்ச்சியை x எனக் கொள்க. அப்பொழுது இயக்கச் சமன்பாடு

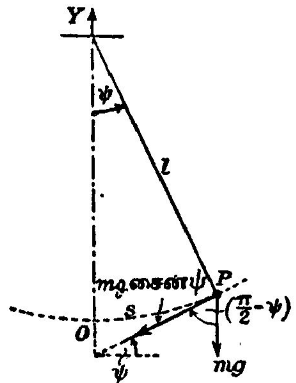
$$\rho V\ddot{x} = -g\rho Sx.$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{V}{Sg}} = 2\pi\sqrt{\frac{z}{g}}.$$

இங்கு, z சராசரி அமிழ்ப்பு ஆழம் ஆகும்.

எளியவூசல் பற்றிய கொள்கை.—எளிய ஊசல் என்பது உண்மையில் கணிதத்திற்குரிய கருத்தொன்றாகும்; அது புவியீர்ப்பின் தாக்கத்தால் நிலைக்குத்தான வட்டமொன்றில் அசையுமாறு, புறக்கணிக்கத்தக்க திணிவுடைய கயிறு அல்லது நாணினால் நிலைத்த புள்ளியொன்றிலிருந்து தொங்கும் ஊசற்குண்டெனக் கொள்ளப்படுகிறது; ஊசற்குண்டை ஒரு துணிக்கை எனக் கருதலாம்.

ஊசற்குண்டு அசைந்த தூரம் s ஆகுக; இத்தூரமானது ஆடலின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி O விலிருந்து வட்டத்தின் வில் வழியே அளக்கப்படுகிறது, படம் 4·02. O ஊடாகச் செல்கின்ற நிலைக்குத்துக் கோடு OY யுடன் கயிறானது கோணம் ψ ஆக்குமாயின் $s = l\psi$; இங்கு l என்பது கயிற்றின் நீளம். ஊசற்குண்டின் திணிவு m எனின்,



படம் 4·02. ஓர் எளிய ஊசல்.

அதை s கூடுந் திசையில் தாக்குகின்ற விசை $-mg$ சைன் ψ ஆகும் ; எனவே, அதே திசையில் அதன் ஆர்முடுகல் $-g$ சைன் ψ ஆகும். இயக்கத்தை எடுத்துரைக்குஞ் சமன்பாடு

$$\ddot{s} = -g \text{ சைன் } \psi \text{ அல்லது } \ddot{\psi} = -\frac{g}{l} \text{ சைன் } \psi \quad \ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

ψ சிறிதாயின் இது

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l} \cdot \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

எனவே, இயக்கம் எளிய இசையானது ; அதன் ஆவர்த்தன காலம் $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ஆகும்.

முடிவுள்ள ஆடல் வில்லுக்குரிய திருத்தம்.—முடிவுள்ள ஆடல் வில்லுடைய எளிய ஊசலொன்றின் ஆவர்த்தன காலமானது அவ்வில் நுண்ணளவாயிருக்கும்பொழுதுள்ள ஆவர்த்தன காலத்தைக் காட்டிலும் $(1+\frac{1}{16}\psi_0^2)$ மடங்கு பெரிது எனப் **பேணுயீ** என்பவர் 1749 இல் காட்டியுள்ளார் ; இங்கு, ψ_0 என்பது ஊசலின் உயர்வுக் கோணப் பெயர்ச்சி ; அது பெரிதாயிருத்தலாகாது. எளிய ஊசலொன்றைப் பயன்படுத்தி g யைத் துணியும்போது ஊசலாடலின் வீச்சம் குறைகின்றது ; எனவே இன்னுமொரு திருத்தம் தேவைப்படுகிறது.

ψ ஆனது ψ_0 ஆகிறபொழுது $\dot{\psi}=0$ என்பதற்கிணங்க, நிலைக்குத்துக் கோட்டின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும், முடிவுள்ள கோணம் ψ_0 அளவூடாக ஊசலானது ஆடும். அப்பொழுது சமன்பாடு (i) இன் இரு பக்கங்களையும் $\dot{\psi}$ ஆல் பெருக்கித் தொகையிட,

$$\tfrac{1}{2}\dot{\psi}^2 = \frac{g}{l} \text{ கோசை } \psi + \kappa.$$

இங்கு κ ஒரு மாறிலி. ஆனல் $\psi=\psi_0$ என்னுமிடத்து $\dot{\psi}=0$; எனவே

$$\kappa = -\frac{g}{l} \text{ கோசை } \psi_0.$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}\dot{\psi}^2 = \frac{g}{l}(\text{கோசை } \psi - \text{கோசை } \psi_0) \quad \ldots\ldots \text{(iii)}$$

சமன்பாடு (iii) ஐ

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \int_{\psi=0}^{\psi=\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\text{சைன்}^2\frac{\psi_0}{2} - \text{சைன்}^2\frac{\psi}{2}}}$$

என எழுதலாம் ; இங்கு t அதன் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்தை ஊசல் கடந்து செல்லும் கணத்திலிருந்து அளக்கப்படுகிறது ; தொகையீடானது ஆவர்த்தன காலத்தின் நாலிலொன்றுக்குரியது.

$$\text{சைன்}\ \phi = \frac{\text{சைன்}\ \frac{1}{2}\psi}{\text{சைன}\ \frac{1}{2}\psi_0}$$

என்னும் தொடர்பால் வரையறை செய்த ஒரு புது மாறி ϕ யைப் புகுத்தி ஞல் $\psi_0 > \psi$ ஆதலின, சைன் ϕ எப்பொழுதும் ஒன்றிலும் சிறிது எனத் தெளிவாம்; அதாவது ϕ மெய்யானதாம். ψ இன் பெறுமானங்க ளான 0, ψ_0 என்பவற்றிற்கு ஒத்த ϕ யின் எல்லேகள் முறையே 0 வும் $\frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.

எனவே,

$$2\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{T}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{சைன்}\ \frac{1}{2}\psi_0\ \text{கோசை}\ \phi\ d\phi}{\frac{1}{2}\sqrt{1-\text{சைன்}^2\phi\ \text{சைன்}^2\frac{\psi_0}{2}}\cdot\sqrt{\text{சைன்}^2\frac{\psi_0}{2}-\text{சைன்}^2\phi\ \text{சைன்}^2\frac{\psi_0}{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\phi}{\sqrt{1-\text{சைன்}^2\phi\ \text{சைன்}^2\frac{\psi_0}{2}}}.$$

$\therefore$ ψ_0 பெரிதாயிராதுவிடில்,

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2 \text{சைன்}^2\phi}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+(-\tfrac{1}{2})\left\{-\left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2\text{சைன்}^2\phi\right\}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2}\cdot\frac{\psi_0^4}{16}\text{சைன்}^4\phi+\ldots\right]$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\psi_0^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\psi_0^4}{16}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\ \ldots\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{சைன்}^{2n}\phi\,.\,d\phi = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\ \text{ஆதலின்.}$$

$$\therefore\ T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}[1+\tfrac{1}{16}\psi_0^2],\qquad \psi_0^4\to 0\ \text{எனின்.}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ \text{எனின்,}\quad T = T_1[1+\tfrac{1}{16}\psi_0^2];$$

$$\therefore\ T_1 = T[1-\tfrac{1}{16}\psi_0^2].$$

$\frac{1}{16}\psi_0^2 = 0{\cdot}0001$ எனின்,

$$\psi_0^2 = \tfrac{16}{10{,}000}\ \text{அல்லது}\ \psi_0 = 0{\cdot}040\ \text{ஆரையன்} = 2^\circ 18'.$$

எடுத்துக்காட்டு.— $g = 980$ சமீ. செக.$^{-2}$ என்னுமிடத்து செக்கனூசலின் நீளம 99·33 சமீ. (a) நீளத்தை 100 சமீ. இற்குக் கூடச் செய்தால், (b) புவியீர்ப்புச் செறிவை 981 சமீ. செக்.$^{-2}$ இற்குக் கூடச்செய்தால், (c) இரு மாற்றங்களையும் உடனிகழச் செய்தால், அலைவுகளின் எண்ணிக்கையில் நாளொன்றிற்கான மாற்றத்தைக் காண்க.

ஆவர்த்தன காலம T எனின்,

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}.$$

மடக்கை வகையீட்டால்

$$2\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta l}{l} - \frac{\delta g}{g}.$$

ஆவர்த்தன காலம T கொண்ட எளிய ஊசல நாளொன்றில N அலைவுகளை ஆற்றுமாயின்,

$$NT = \text{ஒரு மாறிலி.}$$

$$\therefore \frac{\delta N}{N} + \frac{\delta T}{T} = 0.$$

$$\therefore \frac{\delta N}{N} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta g}{g} - \frac{\delta l}{l}\right).$$

(a) g மாறாது இருந்தால், அண்ணளவாக

$$\frac{\Delta N}{N} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0\cdot67}{99\cdot3} \doteqdot -\frac{0\cdot335}{100}.$$

இனிச் செக்கனூசலொன்றிற்கு $N = \frac{1}{2} \times 24 \times 60 \times 60 = 43{,}200.$

$$\therefore \Delta N = -\frac{(24\times60\times60)}{2}\cdot\frac{0\cdot335}{100} = -144\cdot8.$$

(b) l மாறாது இருந்தால்

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{980}.$$

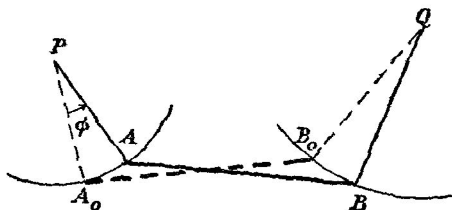
$$\therefore \Delta N = 43{,}200 \div (2\times980) \doteqdot 22.$$

(c) இரு மாற்றங்களும உடனிகழுமானால்

$$\Delta N = -144\cdot8 + 22 = -122\cdot8.$$

எனவே, செக்கன் கடிகாரத்தைக் காட்டிலும் ஊசல் நாளொன்றிற்கு 123 முழு அலைவுகளைக் குறைவாக ஆற்றுகிறது; அதாவது, நாளொன்றில் அது 246 செக்கன்களை இழந்துவிடுகிறது.

ஒரு சுயாதீனப்படிகொண்ட தொகுதிகள்.—எப்பொழுதாகிலும் **ஆள்கூறு** எனப்படும் தனியானவோர் அமிசம் தெரியப்பட்டதும், தொகுதியொன்றின்

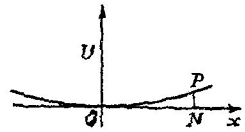


படம் 4·03. ஒரு சுயாதீனப் படிகொண்ட தொகுதியொன்று.

உருவமைப்புத் தெரியவரின், அத்தொகுதியானது ஒரு சுயாதீனப் படியை உடையது எனப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக முறையே P,Q என்னும் நிலைத்த புள்ளிகளிலிருநது இரு நீட்டமுடியாத இழைகளால் தொங்கும் விறைப்பான கோல் AB ஐக் கருதுவோம், படம் 4·03. வரிப்படத்தில் A_0B_0 எனபது கோலின் நிலையியற் சமநிலைத் தானம் ஆகும்; இரு இழைகளும் நிலைத்த புள்ளிகள் P, Q விற்கூடாகச் செல்கின்ற நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கட்டப்பட்டு இருக்கின்றன எனக் கொள்வோம். இனித் தொகுதியானது நிலையியற் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து தானம் AB யிற்குப் பெயர்க்கப் படுக; கோலின் இரு முனைகள் முறையே P யையும் Q வையும் மையங்களாகக் கொண்ட வட்டவிறகள் மீது அசையும்; ϕ, அதாவது கோணம் A_0PA அறிந்ததும் தொகுதியின் உருவமைப்பை முற்றிலும் அறியலாம்; ஆள்கூறு ϕ யே கூறப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கிணங்குமுகமாகத தொகுதி கொண்டிருக்கிற தனிச் சுயாதீனப் படியை ஒத்திருக்கிறது.

நிலைச் சக்தியும் இயக்கச் சக்தியும்.—ஒரு சுயாதீனப் படியுடைய தொகுதி யொன்று உறுதிச் சமநிலைத் தானம் ஒன்றிலிருந்து பெயர்க்கப்பட்டுப் பின்னர் விடுவிக்கப்படின் அத்தானத்தைக் குறித்து அது அதிரும். தனிச் சுயாதீனப் படியை வரையறுக்கும் ஆள்கூறு x ஆகுக; அதன் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்தில் தொகுதி இருக்கும்பொழுது x பூச்சியமாகுமாறு உற்பத்தி தெரிந்தெடுக்கப்படுக.

மேற்படிச் சமநிலைத் தானததில தொகுதியின் நிலைச்சக்தி பூச்சியம் எனக் கொள்க; பெயர்க்கப்பட்ட தானத்தில் அது U ஆகுக. $x=0$ ஆகுமிடத்து U இழிவுப் பெறுமானம் உடையதாதலால், x உடன் U மாறும் வகையைக் காட்டும் வளையி, U–அச்சிலுள்ள புள்ளியொன்றைக் குறித்துக் குழிவானது என்பது தெளிவாம. இத்தகைய வளையியொனறு படம் 4·04 இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது; பெயர்ச்சி எதுவாகிலும் அது சிறிதாயிருக்கும் வரை வளையி வட்டவடிவமான தொன்றிலிருந்து உணரத்தக்க வகையில் வேறுபடாது. P யானது புள்ளி (x, U) எனின், PN ஆனது ON^2 இற்கு விகிதசமமாக இருக்கிறபடியால்



படம் 4·04. சமநிலைத் தானத்தில் நிலைச் சக்தி இழிவானது.

$$U = \alpha x^2.$$

இங்கு x ஐச் சிறிதாய் வைத்துக்கொண்டால் α ஒரு மாறிலி ஆகும்.

நேரத்துடன் x கூடும் வீதம் v எனின், தொகுதியிலுள்ள துணிக்கை ஒவ்வொன்றின் வேகமும் v இற்கு விகிதசமமாக இருக்கும்; எனவே தொகுதியின் இயக்கச் சக்தி

$$W = \beta v^2.$$

இங்கு β ஆனது v யைச் சாராதபோதிலும் அது x ஐச் சாரலாம். இனி வழக்கமாக ஆராயப்படுகின்ற எல்லா அதிருந் தொகுதிகளுக்கும் துணிக்கைகள் ஒவ்வொன்றின் வேகமும் முடிவுள்ளதே ; எனவே x இன் பெறுமானங்கள் சிறிதாயிருக்குமாறு கட்டுப்படுத்தியிருப்பின் $x=0$ என்னும் இடத்தில் இருந்ததை, அதாவது நிலையியற் சமநிலைத் தானததுக்குரியதை இயக்கச் சக்தி என எடுத்துக்கொள்ளலாம். எனவே x சிறிதாயிருக்கும்பொழுது β வை ஒரு மாறிலி எனக் கருதலாம்.

ஒரு சுயாதீனப் படியுடைய தொகுதியொன்றின் ஆவர்த்தன காலம்.— அதிருந் தொகுதியொன்றின் முழுச் சகதியும் ஒரு மாறிலி ஆதலின் (இங்கு, தணித்தல் புறக்கணிக்கத்தக்கது எனக் கொள்ளப்படுகின்றது),

$$U + W = \text{ஒரு மாறிலி.}$$

$$\therefore \frac{dU}{dt} + \frac{dW}{dt} = 0, \text{ அல்லது } \alpha x \dot{x} + \beta v \dot{v} = 0.$$

$\dot{v} = \ddot{x}$ ஆதலின இச்சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{\alpha}{\beta} x = 0$. எனவே ஆவர்த்தன காலம்

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\text{அலகுவேகமொன்றிற்கான இயக்கச் சக்தி}}{\text{அலகுப்பெயர்ச்சிக்கான நிலைச் சக்தி}}}$$

என இது அடிக்கடி சொற்களாற் கூறப்படுகிறது.

பரிமாணக் கொள்கையின்படி இக்கூற்று சரியன்று ; சரியான கூற்றுனது

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(\text{இயக்கச் சக்தி})}{(\text{வேகம்})^2} \div \frac{(\text{நிலைச் சக்தி})}{(\text{பெயர்ச்சி})^2}}.$$

இதன் பரிமாணங்கள் நேரததினவையாகுமென்பது வெளிப்படை. இக் கோவையில் பெயர்ச்சி என்னும் சொல் ஆளகூற்றை அதாவது x ஐக் குறிப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படுகிறது ; வேகம் என்னும் சொல் நேரமாற்றத்தின் வீதத்தை உணர்த்துகிறது ; இங்கு பயன்படுத்தியுள்ளவாறு, இச்சொற்கள் முறையே மெய்யான பெயர்ச்சியொன்றையோ மெய்யான வேகமொன்றையோ கட்டாயமாகக் குறிக்கமாட்டா.

எடுத்துக்காட்டாக, எளியவூசலொன்றினிடத்து, நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் கயிறு கோணம் ψ யை ஆக்கும் பொழுது ஊசற்குண்டின் இயக்கச்சக்தி $\frac{1}{2}m(l\dot{\psi})^2$ ஆகும் ; அதே நேரத்தில் அதன் நிலைச் சக்தி

$$mgl(1 - \text{கோசை } \psi) = mgl \cdot 2 \text{ சைன}^2 \tfrac{1}{2}\psi$$
$$= mgl \cdot \tfrac{1}{2}\psi^2 \ (\psi \text{ சிறிதாயின்}).$$

எனவே, மேலே நிறுவியுள்ள சூத்திரத்தின்படி

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}ml^2\dot{\psi}^2}{(\dot{\psi})^2} \div \frac{mgl(\frac{1}{2}\psi)^2}{(\psi)^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

இது $2\pi\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. இம்முறைக்கு வேறோர் எடுதததுக்காட்டாகக் கீழ்வருவதைக் கருதுவோம்.

சுமையேற்றிய இலேசான சுரிவில்லொன்றினிடத்துப் புவியீர்ப்பாலான அலைவுகள்.—படம் 4·05 (*a*) சுமையேற்றுத வில்லொன்றைக் காட்டுகிறது. திணிவு M ஐச் சுமையாக வில் காவும் பொழுது அதன நீட்சி ξ_0 ஆகுக (படம 4·05 (*b*) யை ஒப்). வில்லை ஓா அலகுநீளம் ஈர்க்கும் பொருட்டுத தேவையான விசை *f* எனின், அப்பொழுது சமநிலையையிட்டு,

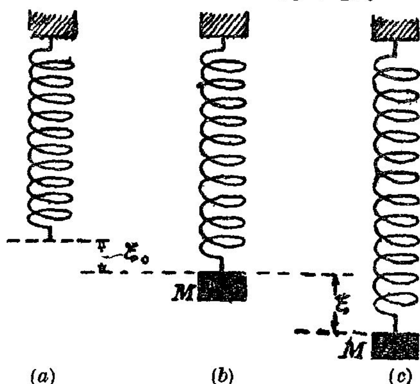
$$f\xi_0 = Mg.$$

இங்கு *g* புவியீர்ப்புச் செறிவு. இந்நிலையில் வில்லின்கண் சேமிக்கப்பட்டிருக்கும் நிலைச்சக்தி (இது தொகுதியின் நிலைச்சக்தியின் ஒரு பகுதி எனக் கருதப்படுகிறது) அவ்வில்மீது செயயப்பட்ட வேலைக்குச் சமன், அதாவது

$$\int_0^{\xi_0} (f\xi)\, d\xi = \tfrac{1}{2}f\xi_0^2.$$

இனி, வில்லை ஈர்த்து நிலைக்குத்துத் தளத்தில் குற்றதிாவுகள் ஆற்று மாறு விடுக. திணிவு M சுமையேற்றிய வில்லின நிலையியற் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து அளக்கபபட்ட பெயர்ச்சி ξ எனின், படம் 4·05 (*c*) யை ஒப்., அக்கணத்தில் அதிகப்படியாகச் சேமிக்கப்பட்டிருக்கின்ற சக்தி

$$\tfrac{1}{2}f[(\xi_0+\xi)^2 - \xi_0^2] = f\xi_0\xi + \tfrac{1}{2}f\xi^2$$
$$= Mg\xi + \tfrac{1}{2}f\xi^2.$$



படம் 4.05. சுமையேற்றிய இலேசான சுரி வில்லொன்றினிடத்துப் புவியீர்ப்பாலான அலைவுகள்.

நிலையியற் சமநிலைத் தானத்தில் புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சியாலான நிலைச்சக்தி பூச்சியம் எனக் கருதப்படின், நிலை ξ இற்கு ஒத்த நிலைச்சக்தி $-Mg\xi$. எனவே முழு நிலைச்சக்தி

$$-Mg\xi + Mg\xi + \tfrac{1}{2}f\xi^2 = \tfrac{1}{2}f\xi^2.$$

இயக்கச் சக்தி $\frac{1}{2}M\dot{\xi}^2$. எனவே

$$\tfrac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \tfrac{1}{2}f\xi^2 = \text{ ஒரு மாறிலி.}$$

$$\therefore \quad \ddot{\xi} + \frac{f}{M}\xi = 0,$$

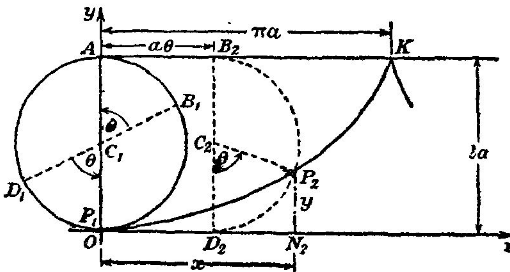
அதாவது
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{g}};$$

இது

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(\text{இயக்கச் சக்தி})}{(\text{வேகம்})^2} \div \frac{(\text{நிலைச் சக்தி})}{(\text{பெயர்ச்சி})^2}}$$

என்னும் சமன்பாட்டுடன் இசைகிறது.

சக்கரப்போலியொன்றிற்கான சமன்பாடு.—சக்கரப்போலியானது நேர் கோடொன்றின் வழியே உருளும் வட்டமொன்றின் பரிதியிலுள்ள புள்ளி யொன்றால் வரையப்படும் வளையியாகும். அதன் சமன்பாட்டைக் காணும் பொருட்டு $y = 2a$ எனனும் நேர்கோட்டின வழியே உருளும் ஆரை a கொண்ட வட்டத்தைக் கருதுவோம், படம் 4·06 ஐ ஒப். வடடத்தின தொடக்க நிலையில் அதன மையமானது, அச்சு Oy யிலுள்ள புளளி C_1 இல் இருக்க. தேவைப் படும் வளையியை வரையும் புள்ளி வட்டததின் பரிதியிலுளள புள்ளி P என்க. P யின் தொடகக நிலையமானது ஆள்கூற்று உறபததியிலுள்ள P_1 ஆகுக.



படம் 4·06. சக்கரப்போலி.

இனி, வட்டத்தின் மையம் C_2 இற்கும், வட்டத்தின் பரிதியில் $A\hat{C_1}B_1 = \theta$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளி B_1 ஆனது வட்டம் உருளும் நேர்கோட்டிலுள்ள புள்ளி B_2 இற்கும் வரும் வரை, அவ்வட்டமானது $y = 2a$ என்னும் நேர்கோடு

வழியே உருளும். அப்பொழுது $C_1C_2 = a\theta$; அன்றியும் B_1 இற்கு விட்டவெதிரான புள்ளி D_1 எனபது Ox இலுள்ள புள்ளி D_2 என்பதுடன் ஒன்று படும். வரையும் புள்ளியின தானம் P_2 இன ஆள்கூறுகள் (x, y) ஆகுக. அப்பொழுது

$$x = ON_2 \text{ [இங்கு } N_2 \text{ என்பது } Ox \text{ இல் } P_2 \text{ இன எறியம்]}$$
$$= C_1C_2 + C_2P_2 \text{ சைன் } \theta$$
$$= a\theta + a \text{ சைன் } \theta = a(\theta + \text{சைன } \theta).$$

மேலும,
$$y = P_2N_2 = C_2D_2 - C_2P_2 \text{ கோசை } \theta$$
$$= a(1 - \text{கோசை } \theta).$$

$\theta = \pi$ ஆகுமிடத்து வரையும் புள்ளியானது $(\pi a, 2a)$ என்னும் புள்ளி K யில் இருக்கும். அதறகுப் பினனர் வரையும் புள்ளியானது K ஊடாகவும் y அச்சுக்குச் சமாநதரமாகவும் உள்ள நேர்கோட்டில் OP_2K தரும் விம்ப வளையிப் பகுதி வழியே அசையும். K ஒரு கூர் ஆகும்.

சக்கரப்போலி ஊசல்.—அதன வீச்சம் போதியவளவில சிறிதாயிருந்தாற்றுன எளியவூசல் ஒன்றின இயக்கம் எளிய இசையாகும். ஆயினும், வீச்சமானது குறிப்பிட்டவொரு முடிவுள்ள எல்லையை மீறலாகாது என்னும் நிபந்தனையின் பேரில், புவியீர்ப்பால் அசையும் துணிக்கையொன்றின் இயக்கம் திட்டமாக எளிய இசையாக அமையுமாறு அத்துணிக்கையைக் கட்டுப்படுத்த முடியும். ψ யின் எல்லாப் பெறுமானங்களும் இணங்க வேண்டிய வகையீட்டுச் சமன்பாடானது

$$\ddot{s} = -g \text{ சைன் } \psi.$$

வளையி வழியே உள்ள, தூரம் s இல் இருக்கும் புள்ளிக்குரிய தொடலியானது கிடைக்கோட்டுடன் ஆக்கும் கோணம் ψ ஆயின், இச்சமன்பாடே உராய்வின்றி எந்த வளையியிலும் இயங்குமாறு கட்டுப்படுத்தியுள்ள துணிக்கையின் இயககத்தைத் தருகின்றது. இச்சமன்பாடானது எளிய இசையியக்கத்தை உணர்த்தவேண்டுமாயின் ஆர்முடுகல் $-\mu s$ ஆக வேண்டும்; இங்கு μ ஒரு மாறிலி ஆகும். எனவே

$$s = \frac{g}{\mu} \text{ சைன் } \psi.$$

இவ்வளையியின் இயல்பை அறியும் பொருட்டு கீழ்வருமாறு செய்யலாம். $s = c$ சைன் ψ ஆகுக. அப்பொழுது $ds = c$ கோசை $\psi\, d\psi$.

ஆனுல்

$$\frac{dy}{dx} = \text{தான் } \psi ; \quad \frac{dy}{ds} = \text{சைன் } \psi ; \quad \frac{dx}{ds} = \text{கோசை } \psi.$$

$$\therefore \frac{dy}{d\psi} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\psi} = c \text{ கோசை } \psi \text{ சைன் } \psi.$$

$$\therefore y = \tfrac{1}{2} c \text{ சைன}^2 \psi + A; \quad \text{இஙகு A ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி}$$
$$= \tfrac{1}{4} c\,[1 - \text{கோசை } 2\psi], \; y = 0, \;\; \psi = 0 \text{ என்று எடுக்க.}$$

மேலும், $\dfrac{dx}{d\psi}=\dfrac{dx}{ds}\cdot\dfrac{ds}{d\psi}=c$ கோசை$^2\,\psi=\frac{1}{2}c\,(1+$ கோசை $2\psi)$.

$\therefore\ x=c\left[\dfrac{\psi}{2}+\dfrac{\text{சைன் }2\psi}{4}\right]+\mathrm{B}$; இங்கு, B ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி.

$=\frac{1}{4}c\,[2\psi+$ சைன் $2\psi]$, $\quad\psi=0$ ஆகுமிடத்து $x=0$ எனின்.

எனவே, $s=c$ சைன் ψ எனபதால் எடுத்துரைக்கப்பெற்ற வளையி சக்கரப் போலியொன்ருகும்; அதனைப் பிறப்பிக்கும் வட்டத்தின் விட்டம் $\dfrac{c}{2}$.

சக்கரப்போலியொன்றின் முதன்மையான ஓர் இயல்பு.—சக்கரப்போலி யொன்றின் சமன்பாடு

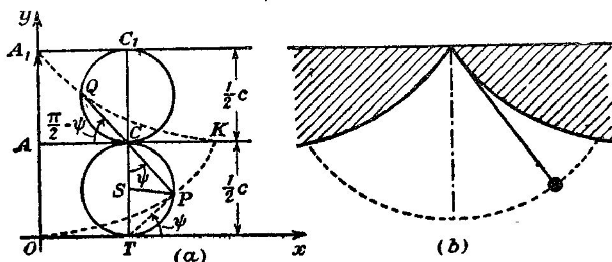
$$\left.\begin{aligned} x&=\tfrac{1}{4}c\,(2\psi+\text{சைன் }2\psi)\\ y&=\tfrac{1}{4}c\,(1-\text{கோசை }2\psi)\end{aligned}\right\}$$

எனின், அதன் வில்லின் நீளம் s ஆனது உறபத்தியிலிருந்து அளக்கப் பட்டால் அது

$$s=c\ \text{சைன் }\psi$$

என ஏற்கெனவே கண்டுகொண்டோம். மேறபடி வளையியில், P ஒரு புள்ளி ஆகுக, படம் 4·07 (a); வளையியின் உச்சியானது, ஆள்கூற்று உறபத்தி O வில் இருக்க; K அதன் முதலாவது கூர் ஆகும். அப்பொழுது P யிலுள்ள வளைவாரை

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}=c\ \text{கோசை }\psi.$$



படம் 4·07. சக்கரப்போலி ஊசல்.

உருளும் வட்டத்தின் விட்டம் $\frac{1}{2}c$ ஆதலின், $\rho=2.\dfrac{c}{2}$ கோசை $\psi=2\,\mathrm{CP}$ என்பது தெளிவாம்; இங்கு C என்பது வட்டம் உருளுகிற நேர்கோட்டில் அதன் தொடுபுள்ளி. PC = CQ என்றவாறு PC யைக் Q விற்கு நீட்டிஞல், P யிற்குரிய வளைவு மையம் Q ஆகும். எனவே புள்ளி Q வின் ஆள்கூறுகள்

$$x=\tfrac{1}{4}c\,(2\psi+\text{சைன் }2\psi)-c\ \text{கோசை }\psi\ \text{சைன் }\psi=\tfrac{1}{4}c\,(2\psi-\text{சைன் }2\psi),$$

$$y=\tfrac{1}{4}c\,(1-\text{கோசை }2\psi)+c\ \text{கோசை }\psi\ \text{கோசை }\psi=\tfrac{1}{4}c\,(2+2\ \text{கோசை}^2\,\psi).$$

அடுத்து, ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தியை $(-\frac{1}{4}\pi c, \frac{1}{2}c)$ என்னும் புள்ளியில் அதாவது முதற் சக்கரப்போலியின் மறையான பக்கத்திலுள்ள முதற் கூறில நிலைமாற்றி வைக்க. புது உற்பத்தி ஊடாகவும், அச்சுக்கள் Ox இற்கும் Oy இற்கும் சமாந்தரமாகவும் உள்ள செவ்வகவச்சுக்களைக் குறித்துக் Q வின் ஆள்கூறுகள் X, Y ஆகுக. அப்பொழுது

$$X = \tfrac{1}{4}c\,(2\psi - \text{சைன்}\,2\psi) + \tfrac{1}{4}\pi c$$

$$= \tfrac{1}{4}c\left[2\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) + \text{சைன்}\,2\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

அத்துடன்

$$Y = \tfrac{1}{4}c\,[2 + 2\,\text{கோசை}^2\,\psi - 2] = \tfrac{1}{4}c\,[1 + \text{கோசை}\,2\,\psi]$$

$$= \tfrac{1}{4}c\left[1 - \text{கோசை}\,2\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

எனவே Q வின் ஒழுக்கு, பருமனில் முதற் சக்கரப்போலிக்குச் சமனான சக்கரப்போலியொன்றாகும்.

QC ஆனது கிடையுடன் $\widehat{QCA} = \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ என்னும் கோணமொன்றை ஆக்குகின்றது என்பது வரிப்படத்திலிருந்து தெளிவாம். எனவே,

$$KQ = c\,\text{சைன்}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = QP.$$

நடைமுறையில் சக்கரப்போலியூசல்.—உண்மையில், சக்கரப்போலியானது மேற்படி இயல்பாலேயே எளிய இசையியக்க ஆராய்ச்சியில் முதன்மை பெறுகிறது. அதன வீச்சம் சிறிதாயிருக்கும் பொழுது மட்டுமே எளிய ஊசலொன்றின இயக்கம எளிய இசையாகும் என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கிறது. வீச்சம் முடிவுள்ளதாக இருக்கும் பொழுதுள்ள ஆவர்த்தன காலமானது அதே நீளம் ஆனால் குறுகிய வீச்சம் உடைய ஊசலின் ஆவர்த்தன காலத்தினின்றும் வேறுபடுகிறது. எனவே, ஒரு வரையறுத்த ஆடற் கோணத்தினூடாக இரு செக்கன்கள் ஆவர்த்தன காலமுடைய கடிகாரமொன்றின் வீச்சத்தை மாறச் செய்தால் அதன் ஆவர்த்தன காலமும் மாறும்; அதாவது, கடிகாரம் ஒன்றில் முந்தும் அல்லது பிந்தும். அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்கிற சக்கரப்போலியொன்றில் துணிக்கையொன்றை புவியீர்ப்பின் ஆற்றலால் அசையுமாறு கட்டுப்படுத்தின் அதன ஆவர்த்தன காலம் வீச்சத்தைச் சாராது என்னும் செய்தியே சக்கரப்போலி இயக்கத்தின் முதன்மைக்குக காரணமாகும்; அதாவது, சக்கரப்போலியில் உராய்வின்றி அசையும் துணிக்கையொன்றின் நேரங்குறிக்கும் ஆற்றலானது குற்றமற்றதாம்.

நடைமுறையில், துணிக்கையொன்றை மேற்படி விதத்தில் அசையுமாறு கட்டுப்படுத்தும் மிக எளிய முறையானது முதன்முதல் **ஹைகன்ஸ்** (1629–1695) என்பவரால் பிரேரிக்கப்பட்டதே. நிலைத்த புள்ளியொன்றிலிருந்து, உலோகத்தாலான இரு தாடைகளைப் போர்க்கக்கூடிய வகையிலே அமைந்திருக்கின்ற நுண்ணுணொன்றால் துணிக்கை தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது; நாணின் நீளம் $A_1P = 2c$; தாடைகளின் வடிவம் $s = c$ சைன் ψ என்னும் சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது, படம் 4·07 (b) யை ஒப்.

நிலைத்த வெப்பநிலையொன்றில், மாறு ஆவர்த்தன காலமுடைய ஊசலொன்றைப் பெறும முயற்சிகளில் ஈடுபட்ட காலத்தில் அமைப்பாளர்களின் கருத்துக்கள் வேறு வழியில் செல்லலாயின. அவர்கள ஊசல் மீது தக்க ஆள்விசையொன்றைப் பிரயோகித்து வீச்சததை ஒரு மாறிலியாக நிலை நிறுத்த முயன்றுள்ளனர்; இங்கு உராய்வு, வளித தணிப்பு எனபவற்றால் ஆகும் சக்தி நட்டம் ஆளவிசை ஊட்டும் சக்தியாற சரியாக ஈடுசெய்யப்படுகிறது.

குழிவாடியொன்றின் மீது கோளமொன்றின் அலைவுகள்.—குழிவுள்ள கோளவாடியொன்றின் பரபபில் இருக்கினற உருக்குக் கோளமொனறு அதன் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து பெயர்க்கபபட்டுப் பின் விடுவிக்கப்பட்டால் அது முன்னும் பின்னுமாக உருளும்; ஏனெனில் அலைவுகள போதிய அளவு சிறிதாயிருக்கும் பொழுது, தொட்டுக்கொண்டிருக்கினற பரப்புக்களிடையேயுள்ள உராய்வானது **வழுக்கல்** நிகழாதவாறு உறுதிப் படுத்துவதற்கான ஆற்றலுடையதேயாம். வளைந்த ஆடி மீது கோளம் ஆற்றுகின்ற குற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தை நோக்கி g இற்குப் பெறுமானமொனறைக் காணலாம். இம்முறையின விளக்கம் பினவரு மாறு :—

ஆரை r கொணட ஆடியின் வளைவு மையம் O வும், ஆரை a கொணட கோளத்தின் மையம C யும், ஆடியில O விறகு நிலைக்குத்தாகக் கீழேயுள்ள புள்ளி A_0 உம், கோளத்துக்கும் ஆடிககும் இடையேயுளள தொடுகணநிலைப் புள்ளி P யும் ஆகுக. $\psi = A_0OP$ ஆகுக. அப்பொழுது அதன் மிகத்தாழ்நத தானத்தில் கோளம் இருக்கும்பொழுது, A என்பது A_0 ஐத தொடும் கோளப்புள்ளியின் நிலை ஆயின், இயக்கம் தூய உருளுதல் ஆதலின், வில PA ஆனது வில் A_0P யிற்குச் சமன். எனவே, ϕ என்பது சுட்டபபட்ட கோணம் எனின்

$$a\phi = r\psi.$$

நீட்டிய CA ஆனது OA_0 ஐ B யில் வெட்டின், அன்றியும $\theta = \widehat{OBC}$ எனின், CA எனபது கோளத்தில் ஒரு நிலைத்த நேர்கோடு ஆதலால், கோளத்தின மிகத் தாழ்ந்த நிலையிலிருந்து அது பிரிந்தபின், அதாவது நேரம் t யிறகுப் பின், அதன் எந்த ஆரையும் திரும்பியுள்ள கோணம் ϕ ஆகும்.

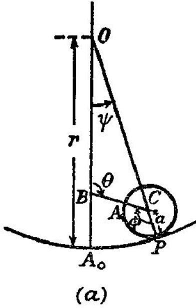
இனி $\phi = \psi + \theta$; அதாவது $\theta = \dfrac{r\psi}{a} - \psi = \left(\dfrac{r-a}{a}\right)\psi.$

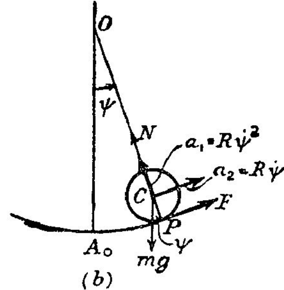
ஆவர்த்தன காலத்தைக் காணும்பொருட்டுத் தொகுதியின் சக்தியைக் காண்போம். கோளத்தின் மிகத் தாழ்ந்த தானத்தில் நிலைச் சக்தியானது பூச்சியம் எனக் கருதப்படுமாயின், கோளத்தின் திணிவு m ஆதலால்,

$$\text{நி.ச.} = mg(r-a)(1 - \text{கோசை}\,\psi)$$
$$= \tfrac{1}{2}mg(r-a)\psi^2, \qquad \psi \to 0 \text{ எனின்.}$$

θ தொடர்பாக எடுத்துரைத்தால் இது $\dfrac{1}{2}\dfrac{mga^2}{r-a}\cdot\theta^2.$

P யானது ஓய்வின் கண நிலை மையமொனருதலின், கருதப்படும் கணத்தில் P ஊடாகவும் தளம A_0OP யிற்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள அச்சொன்றைப் பற்றிக் கோளம் சுழலுகின்றது என்னும் செய்தியைப் பயன்படுத்தி இயக்கச் சக்தி கணிக்கப்படுகின்றது. C ஊடாகவுள்ள கிடையச்சொன்றைப்





படம் 4·08. குழிவாடியொன்றின் மீது புவியீர்ப்பால் கோளமொன்று ஆற்றும் அலைவுகள்.

பற்றி கோளத்தின் சடத்துவத் திருப்பம் I எனின், P ஊடாகவுள்ள சமாந்தரவச்சொன்றைப் பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பம் $(I+ma^2)$ ஆகும். வெளியிடத்தில் நிலைத்தவொரு நேர்கோடு OA_0 உடன் கோளத்தில் நிலைத்த ஒரு நேர்கோடு CA ஆக்கும் கோணம் θ, அதாவது $\omega = \dot{\theta}$ ஆதலின்,

$$\text{இ.ச.} = \tfrac{1}{2}(I + ma^2)\dot{\theta}^2.$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{இ.ச.}}{(\dot{\theta})^2} \div \frac{\text{நி.ச.}}{\theta^2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\tfrac{1}{2}(I + ma^2) \div \frac{1}{2}\frac{mga^2}{r-a}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\left(\frac{r-a}{g}\right)}, \quad [\because I = \tfrac{2}{5}ma^2].$$

எனவே எளிய சமவலுவூசலின் நீளம் $\frac{7}{5}(r-a)$ ஆகும்.

ந.க. சாய்தளமொன்றில் கோளத்தின் இயக்கத்தைக் கருதியும் மேற்படி கோவையைப் பெற்றுக்கொள்ளலாம். அத்தகைய இயக்கத்திற்கு (ப. 107),

$$\ddot{x} = \frac{a^2}{a^2 + \kappa^2} g \,\text{சைன்}\, \alpha$$

என நிறுவியிருக்கிறோம்.

ஆடியின்மீது ψ என்பதால் வரையறுத்த நிலையில் கோளம் இருக்கும் பொழுது அது, $\alpha = \psi$ எனச் சுட்டும் சாய்தளத்தில் ஒரு கணநேரம் இருக்கிறது எனக் கற்பனை செய்யலாம்; எனவே,

$$-(r-a)\ddot{\psi} = \frac{a^2}{a^2+\kappa^2}\cdot g\psi = \tfrac{5}{7}g\psi.$$

[இயக்கச் சமன்பாட்டைப் பெறும்பொழுது இயக்கம் தளத்தில் கீழ்முகமாக இருந்தபடியால் சயக்குறி தோற்றுகிறது; ψ கூடுங்காலே P யிலுள்ள தொடலித் தளத்தில இயக்கம் மேல்முகமாகும்.]

$$\therefore \text{ முன்போலவே } T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\cdot\frac{(r-a)}{g}}.$$

மேலும், P ஓய்வின் கணநிலைமையம் ஆதலாலும், $\dot{\theta}$ கோளத்தின் கோணவேகம் ஆதலாலும், சக்திக் காப்புத் தததுவத்தின்படி

$$mg(r-a)(1-\text{கோசை}\,\psi) + \tfrac{1}{2}m(\kappa^2+a^2)\dot{\theta}^2 = \text{ ஒரு மாறிலி.}$$

ப. 129 ஒப். இனி, முன்போலவே $a\phi = r\psi$ உம், $\phi = \theta + \psi$ உமாம்; எனவே $a\theta = (r-a)\psi$. நேரம் தொடர்பாகச் சக்திச் சமனபாட்டை வகையிட,

$$g(r-a)\,\text{சைன்}\,\psi\cdot\dot{\psi} + (\kappa^2+a^2)\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = 0.$$

$a\theta = (r-a)\psi$ என்பதைப் பயன்படுத்தி, இச்சமன்பாட்டிலிருந்து ψ யையும் $\dot{\psi}$ ஐயும் நீக்க, $\psi \to 0$ ஆகுமிடத்து

$$(\kappa^2+a^2)\ddot{\theta} + \left(\frac{a^2}{r-a}\right)g\,\theta = 0.$$

$\kappa^2 = \frac{2}{5}a^2$ என்பதைப் பயன்படுத்திஞல் இது முன்போலவே

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\cdot\frac{(r-a)}{g}}.$$

கடைசியாக இயக்கச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி அலைவுக்காலத்தைத் துணியமுடியும் என்பது குறித்தற்பாலது. கோளத்தை எந்த உராய்வு இணையுந் தாக்காதவாறு P யிலுள்ள மறுதாக்கம தனி விசையொன்று மட்டுமே எனக் கொண்டு P யைக் குறித்துத் திருப்பங்களை எடுத்தால்

$$m(a^2+\kappa^2)\ddot{\theta} + mga\,\text{சைன்}\,\psi = 0.$$

$\psi \to 0$ ஆகுமிடத்து

$$(a^2+\kappa^2)\frac{R}{a}\ddot{\psi} + ag\psi = 0 \quad [\because\ a\theta = R\psi].$$

$\kappa^2 = \frac{2}{5}a^2$ என்பதைப் பயன்படுத்திஞல்,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\cdot\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\cdot\frac{(r-a)}{g}}.$$

குழிவுள்ள கோளமொன்றின் பரப்பில் உருளும் கோளமொன்றிற்கும் அப்பரப்பிற்குமிடையேயுள்ள தாக்கம்.—குழிவுள்ள கோளப் பரப்பொன்றின் மீது கோளம் இயங்கும் பொழுது அது வழுக்கமாட்டாது என்பதை உறுதிப் படுத்துவதற்கு வேண்டிய உராய்வுக் குணகத்தின் இழிவுப் பெறுமானத் தைத துணியும பொருட்டு, α என்பது ψ யின் உயர்வுப் பெறுமானமும், பரப்பு மீது உருளும் கோளமும் அப்பரப்பும் ஒன்றையொன்று தொடும் புள்ளி P யிலுள்ள மறுதாக்கத்தின் செவ்வன் கூறு N உம், அதன் தொடலிக் கூறு F உம் ஆகுக, படம 4·08 (*b*). அப்பொழுது சக்தித் தததுவத்தினபடி கோளத்தின கோணப் பெயர்ச்சி α ஆகுமிடத்து அது ஒரு கண நேரம் ஒய்வாயிருததலால்,

$$mg\mathrm{R}\,(1 - \text{கோசை}\,\psi) + \tfrac{1}{2}\,m\,(\kappa^2 + a^2)\,\dot{\theta}^2 = mg\,\mathrm{R}\,(1 - \text{கோசை}\,\alpha) + 0\;.\;.\;.\;.\;\text{(i)}$$

இங்கு $(r - a) = \mathrm{R}$.

மேலும் C யின் முகமான ஆர்முடுகலின் கூறும் அதற்குச் செங்குத்தான தும், பக். 68 ஐ ஒப்., முறையே

$$a_1 = -(\ddot{\mathrm{R}} - \mathrm{R}\,\dot{\psi}^2) = \mathrm{R}\dot{\psi}^2, \qquad [\because\ \mathrm{R}\ \text{ஒரு மாறிலி}]$$

$$a_2 = \mathrm{R}\ddot{\psi} + 2\dot{\mathrm{R}}\dot{\psi}$$

ஆதலாலும், எல்லாப் புற விசைகளும் கோளத்தின் மையத்தைத் தாக்கு கின்றன போல் அப் புள்ளியின் நேர்கோட்டு ஆர்முடுகல் அமைந்திருக்கின்ற தாதலாலும்

$$m\mathrm{R}\,(\dot{\psi})^2 = \mathrm{N} - mg\,\text{கோசை}\,\psi, \quad .\quad .\quad .\quad \text{(ii)}$$

$$m\mathrm{R}\ddot{\psi} = \mathrm{F} - mg\,\text{சைன்}\,\psi. \quad .\quad .\quad .\quad .\quad \text{(iii)}$$

சமன்பாடு (i) இல் $a\theta = \mathrm{R}\psi$ அல்லது $a\dot{\theta} = \mathrm{R}\dot{\psi}$ ஐப் பயன்படுத்தினல், நேரம் தொடர்பாக வகையிட்டபின்

$$g\mathrm{R}\,\text{சைன்}\,\psi.\dot{\psi} + (\kappa^2 + a^2)\left(\frac{\mathrm{R}}{a}\right)^2\dot{\psi}\ddot{\psi} = 0,$$

அல்லது

$$\text{சைன்}\,\psi = -\frac{\kappa^2 + a^2}{ga^2}\mathrm{R}\ddot{\psi} \quad .\quad .\quad .\quad \text{(iv)}$$

சமன்பாடு (iii) இலும் (iv) இலும் இருந்து $\ddot{\psi}$ ஐ நீக்கினல்,

$$\mathrm{F} = mg\left(1 - \frac{a^2}{\kappa^2 + a^2}\right)\text{சைன்}\,\psi = \tfrac{2}{7}\,mg\,\text{சைன்}\,\psi.$$

(i) இலும் (ii) இலுமிருந்து, சற்றுச் சுருக்கியபின்

$$\mathrm{N} = \tfrac{1}{7}\,mg\,(17\,\text{கோசை}\,\psi - 10\,\text{கோசை}\,\alpha).$$

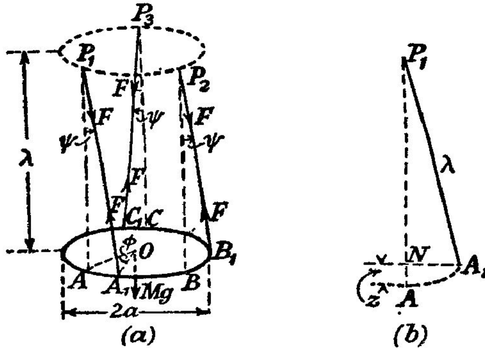
F இன் உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{2}{7}\,mg$ சைன் α ; $\psi = \alpha$ என்னு மிடத்து N இன் இழிவுப் பெறுமானம் கிடைக்கும்: அந்நிலேயில் $\mathrm{N} = mg$ கோசை α. எனவே $\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{N}}$ என்பதின் உயர்வுப் பெறுமானம் $\frac{2}{7}$ தான் α

எனவே, உராய்வுக்குணகம் μ ஆனது $\frac{2}{7}$ தான் α என்பதை மீறுமாயின், கோளம் ஒருபோதும் வழுக்காமல் எப்பொழுதும் உருளும்.

பரிசோதனை.—குழிவாடியொன்றின் மீது உருளும் கோளமொன்றின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் கண்டு, புவியீர்ப்புச் செறிவுக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறலாம். முதல், ஒளியியல் முறையொன்றால் ஆடியின் முகத்தின் வளைவாரையைத் துணிக. அடுத்து வழக்கம் போல ஆவர்த்தன காலத்தைத் துணிக; மாட்டேற்றுக்குறியொன்றைப் பயன்படுத்தி அதைக் கோளம் கடந்து போகும் நேரங்களையே துணிதல் வேண்டும் என்பதை மறத்தலாகாது. கோளம் ஓய்வாயிருக்கும் பொழுது, அதன் மையத்துக்கு மேலே கிடையாக ஈர்க்கப்பட்டிருக்கின்ற கறுப்பு நூலொன்று வசதியான குறியொன்றாகும். நூலும், ஆடியில் தெறிப்பால் உண்டாகும் அதன் விம்பமும் கிடக்கின்ற அதே தளத்தில் நோக்குநரின் கண் அமைந்திருக்குமாயின் வரையறுத்த நிகழ்ச்சியொன்றிற்கும் அதன் மறுதடவைகளுக்கும் நேரம் காண்பது உறுதிப்படுத்தப்படுகிறது.

கோளம் நழுவலின்றி உருளும்பொருட்டு கோளம், ஆடி என்பவற்றின் பரப்புக்கள் நெய்க்கறையின்றி இருத்தல் வேண்டும்; பரிசோதனையில் வெற்றிகாணும் பொருட்டு இது இன்றியமையாதது. துப்புரவாக்கியொன்றைப் பயன்படுத்தி இவற்றைத் துப்புரவாக்கல் வேண்டும். அதன்பின்னர் அவற்றைக் கையால் தொடலாகாது; கோளத்தை அரக்கிவைக்க நேரிடின் அப்பொழுது துப்புரவான வடிதாள் ஒன்றால் அதைப் பிடித்துக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு.—மூன்று நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து, ஒவ்வொன்றும் நீளம் λ கொண்ட மூன்று கயிறுகளால், சீரான வட்டத் தட்டமொன்று தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. கயிறுகள் நிலைக்குத்தாகவும் தட்டத்தின் தளம் கிடையாகவும் இருக்கின்றன. தட்டத்தின் மையம் ஊடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக்கோடு பற்றி சிறு சுழற்சியலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க.



படம் 4·09. **சமநீளங்களுடைய மூன்று நிலைக்குத்தான கயிறுகளால் தொங்கும் வட்டத் தட்டமொன்றின் குற்றலைவுகள். [(a) யில் தட்டத்தின் சிறு ஏற்றம் காட்டப்படவில்லை.]**

[படம் 4.09 (a)] ஒவ்வொரு கயிற்றிலுமுள்ள இழுவை F உம், தட்டத்தின் திணிவு M உம் எனின்,

$$3F \text{ கோசை } \psi = Mg.$$

இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவும், ψ நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் ஒவ்வொரு கயிறும் ஆக்கும் கோணமுமாம். ψ சிறிதாதலால்,

$$3F = Mg.$$

ஏதேனுமொரு கணத்தில் தட்டத்தின் ஒவ்வோர் ஆரையும் கோணம் ϕ யால் பெயர்க்கப்படுகிறது எனக் கொள்க. அப்பொழுது, ψ சிறிதாயிருக்குங்காலே ϕ உம் சிறிதாயிருப்பதால்

$$\lambda\psi = a\phi;$$

இங்கு a ஆனது தட்டத்தின் ஆரை சுழற்சியச்சைப் பற்றி ϕ யைக் கூட்டச்செய்கின்ற விசைகளின் திருப்பம்

$$-3\,(\mathrm{F}\ \text{சைன்}\ \psi)\, a \doteq -\mathrm{M}g\frac{a^2\phi}{\lambda}.$$

ஆனால் இது $\mathrm{I}\ddot{\phi} = \mathrm{M}\kappa^2\ddot{\phi}$; இங்கு I யும் κ யும் முறையே சுழற்சியச்சைப் பற்றித் தட்டத்தின் சடத்துவத் திருப்பமும் சுழிப்பாரையும் ஆகும். எனவே, தட்டம் மெல்லியதாயின் $\kappa \doteq a$ ஆதலால்

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\lambda}\phi = 0.$$

எனவே இயக்கம் எளிய இசையானது ; அதன் ஆவர்த்தன காலம் $2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ ஆகும்.

வேறுமுறை.—நிலைக்குத்துக் கோட்டிலிருந்து ஒவ்வொரு தாங்குகயிற்றினதும் பெயர்ச்சி ψ ஆனபொழுது மையம் O ஆனது ஒரு தூரம் z எழுந்தது எனக்கொள்வோம். ψ சிறிதாதலின், வில் $\mathrm{AA_1}$ ஐச் செங்கோண $\Delta \mathrm{P_1A_1N}$ என்பதின் பக்கம் $\mathrm{NA_1}$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம். அப்பொழுது

$$\lambda^2 = a^2\phi^2 + (\lambda - z)^2$$

அல்லது ஒன்றைக் காட்டிலும் $\frac{z}{2\lambda}$ சிறிதாயின

$$2\lambda z = a^2\phi^2.$$

சக்தித் தத்துவமானது உடனடியாக

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\dot{\phi}^2 + \mathrm{M}gz = \text{ மாறிலி}$$

அல்லது

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{M}a^2\dot{\phi}^2 + \mathrm{M}g\frac{a^2\phi^2}{2\lambda} = \text{ மாறிலி}.$$

t தொடர்பாக வகையிட,

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\lambda}\phi = 0.$$

எனவே முன்போல,

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}.$$

T ஆனது a யைச் சாராது என இங்கு குறிக்கப்படும் ; மேலும் தாங்கு கயிறுகளின் தொகை 2 இற்குக் கூடுதலாயிருப்பின் அத்தொகையையும், கயிறுகள் தட்டத்தின் சுற்றில் அமைந்திருக்கிற முறையையும் அது சாராது ; பின்னையதில் கயிறுகளிலுள்ள இழுவைகள் $\mathrm{F_1}, \mathrm{F_2}, \mathrm{F_3}, \ldots$ என்றவாறு வேறுபடும் ; இங்கு,

$$\mathrm{F_1} + \mathrm{F_2} + \mathrm{F_3} + \ldots = \mathrm{M}g.$$

எடுத்துக்காட்டு.—திணிவு M உம் ஆரை a யும் கொண்ட சீரான வட்டத் தட்டு, தன் தளம் கிடையாக இருக்குமாறு, அதன் ஓரத்தில் சமச்சீராகப் பற்றப்பட்டிருக்கிற ஒவ்வொன்றும் λ நீளமுள்ள மூன்று நிலைக்குத்தான இழைகளால் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. இழைகள் மீள்தன்மையற்றவை எனவும், புறக்கணிக்கத்தக்க அளவில் திணிவும் விறைப்பும் உடையவை

எனவும் கொள்ளப்படுகிறது. தட்டானது திணிவு m கொண்ட வேறொரு தட்டைக் காவுகின றது; இதன முகமொன்று பெரிய தட்டுடன் ஒட்டியிருக்கிறது. பெரிய தட்டின மையமூடாக வுள்ள நிலைக்குத்தச்சைப பறறி புவியீர்பபால் மேற்படி தொகுதி ஆறறும் குற்றலைவுகளின ஆவாததன காலம் யாது? மேற்படி ஒழுஙகுமுறையைப் பயன்படுததி எவ்வாறு சமாந்தர வச்சுத தேற்றத்தைப் பரிசோதிக்கலாம் என்பதை விவரித்து விளககுக. *

தொகுதியானது, படம் 4·10 (a) இல் வரிபபடமுறையில காட்டப்பட்டிருக்கிறது. தொகுதியின நிலைக்குததான சுழற்சியசசிலிருநது தூரம் r இல, தட்டு m இன புவியீர்ப்பு மையம் இருககும பொழுது இழைகளினுள்ள இழுவைகள் முறையே F_1, F_2, F_3 ஆகுக. பெரிய தட்டின் ஒவவோர் ஆரையும் கோணம் ϕ அசைநதிருககும்பொழுது நிலைகுத்துக் கோட்டுடன ஒவ்வோர் இழையும் கோணம ψ ஆககுமாயின, அப்பொழுது

$$(F_1 + F_2 + F_3) \text{ கோசை } \psi = (M + m)\, g.$$

ϕ யைக கூடுமாறு தூணடும இணையானது

$$-(F_1 + F_2 + F_3) \text{ சைன் } \psi . a = (M + m)\, ga \text{ தான் } \psi$$

$$\doteqdot (M + m)\, ga^2 . \frac{\phi}{\lambda} \qquad (\because\ a\phi = \lambda\psi).$$

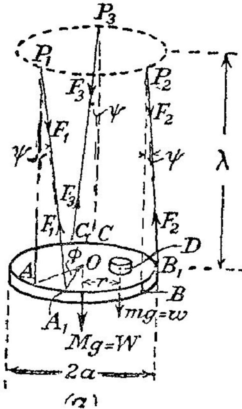
எனவே இயககச் சமனபாடானது

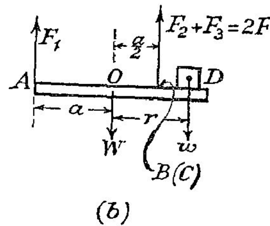
$$I\ddot{\phi} + (M + m)\, ga^2 . \frac{\phi}{\lambda} = 0.$$

இஙகு I அதன் சுழற்சியசசுப பற்றி முழுத தொகுதியின சடத்துவத திருப்பம். இததிருபபம்

$$\tfrac{1}{2} Ma^2 + m\,(\kappa^2 + r^2)$$

எனபதறகுச் சமன.





படம் 4·10. சமாந்தரவச்சுத் தேற்றத்தைப் பரிசோதனை முறைப்படி மெய்ப்பித்தல்.

இங்கு, κ என்பது அதன் திணிவு மையம் ஊடாகவுள்ள நிலைக்குத்தச்சுப் பற்றி சிறிய தட்டின் சுழிப்பாரை ஆகும்.

*இம்முறையை Dr. இ. ஜே. அயேண்ஸ் (E. J. Irons) ஏற்படுத்தினர்.

எனவே $\frac{\ddot{\phi}}{\phi}$ ஒரு மாறிலி அதாவது, இயக்கம் எளிய இசையானது; அதன் ஆவர்த்தன காலம் T,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 [\frac{1}{2} Ma^2 + m(\kappa^2 + r^2)] \lambda}{(M + m) ga^2}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

இச்சமன்பாட்டை

$$\frac{(M + m) ga^2}{4\pi^2 \lambda m} \cdot T^2 = (\kappa^2 + r^2) + \frac{1}{2}\frac{M}{m} \cdot a^2$$

என எழுதலாம்.

எனவே, பொருத்தமான நோக்கல் தொடரொன்றைப் பெற்றபின் $y = \frac{(M+m)ga^2}{4\pi^2\lambda m} \cdot T^2$ என்பதை $x = r^2$ என்பது தொடர்பாகக் குறித்தால், வரைபானது சரிவு 1 உம் y அச்சில் $\frac{1}{2}\frac{M}{m}(a^2+\kappa^2)$ என்பதற்குச் சமனான வெட்டுத்துண்டும் கொண்ட நேர்கோடொன்றாகும். தட்டு m இற்குப் பதிலாகத் திணிவு M ஆய் இருக்குமாறு வெட்டப்பட்ட உருளையொன்று, அதன் அச்சு நிலைகுத்தாக அமையுமாறு வைக்கப்பட்டால் கணிப்பானது அத்துணைத் தொல்லையாயிராது.

மேற்படி உயத்தறிதல்கள் மெய்ப்பிக்கப்பட்டால், ஆவர்த்தன காலத்தைப் பெறும் பொருட்டுப் பயன்படுத்தியுள்ள சமாந்தரவச்சுத்தேற்றம் (ப. 78 ஐ ஒப) உம் உறுதிப்படுத்தப்பட்டுள்ளதாகும்.

சில சூழல்களில் பெரிய தட்டானது கிடையாக அமையாது என்பது குறித்தற்பாலது; எடுத்துக்காட்டாகப் படம் 4·10 (b) யில், அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் பெரிய தட்டின் விட்டம் AO வினுள்ள புள்ளியொன்று ஊடாகச் செல்லவும் கூடியதாக, சிறிய தட்டு அல்லது உருளையை ஒழுங்குபடுத்துக. அப்பொழுது சமச்சீரையிட்டு B, C என்பவற்றினூடாகச் செல்கின்ற கயிறுகளிலுள்ள இழுவைகள் சமனாக இருந்தபோதிலும், கீழே காட்டியுள்ளவாறு இச்செய்தியை நாம் பயன்படுத்துவதில்லை. அச்சு BC யைப் பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்தால், இவ்வச்சு O விலிருந்து தூரம் $\frac{1}{2}a$ யில் இருப்பதால்

$$F_1 (a + \tfrac{1}{2}a) + w (r - \tfrac{1}{2}a) = W (\tfrac{1}{2}a).$$

$$\therefore \quad F_1 = \frac{2}{3a}[\tfrac{1}{2} Wa + w (\tfrac{1}{2}a - r)].$$

இனி F_1 பூச்சியமாயின தட்டின சமநிலை உறுதியற்றதாகின்றது. இது

$$r = \frac{W + w}{w} \cdot \frac{a}{2} = \frac{M + m}{m} \cdot \frac{a}{2}$$

என்னுமிடத்து நிகழும்.

O ஊடாகவுள்ள விட்டத்தில், O வின் எதிர்ப் பக்கங்களிற சமச்சீராக ஒழுங்குபடுத்தியுள்ள இரு சிறு சமனான உருளைகளைப் பயன்படுத்தி மேற்படி உறுதியின்மையைப் பிறப்பிக்கக்கூடிய ஏதுக்களை நடைமுறையில் தவிர்க்கமுடியும்.

[தட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு தூரம் z ஏறின், சக்திச் சமன்பாடானது

$$\tfrac{1}{2} I\dot{\phi}^2 + (M + m)gz = \text{ஒரு மாறிலி}$$

என எளிதில் காட்ட முடியும்;

இங்கு, $$z = \frac{a^2\phi^2}{2\lambda}$$ (பக். 133 ஐ ஒப்.).

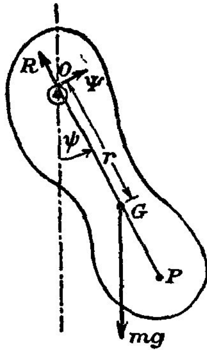
அதாவது இயக்கச் சமன்பாடு

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2} Ma^2 + m(\kappa^2 + r^2)] 2\dot{\phi}.\ddot{\phi} + \frac{(M + m) g.a^2.2\phi.\dot{\phi}}{2\lambda} = 0$$

இது முன்போலவே. இதிலிருந்து பிறவுமாம்.]

கூட்டுசல்.—நிலைதத கிடையான அச்சொன்றைப் பற்றிச் சுழலக்கூடிய, எந்த வடிவமும் உள்ளமைப்பும் உடைய விறைப்பான எப்பொருளும் கூட்டுசலொன்றை அமைக்கும் ; இங்கு புவியீர்ப்பு, பொருளின் மீது அச்சின் தாக்கம் என்பவறறுல் மட்டுமே புற விசைகள் ஆகும்.

ஊசலின் திணிவு m எனவும், அது O ஊடாகவுள்ள கிடை அச்சொன்று பற்றி அலைகிறது எனவும் கொள்க, படம் 4·11. திணிவு மையம் G யும், O விலிருந்து G யின் தூரம் r உம் ஆகுக. அதன் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து ஊசல் பெயர்க்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது OG ஆனது நிலைக்குததுக் கோட்டுடன் கோணம் ψ ஆக்குக. அப்பொழுது O வைப் பற்றி ψ யைக் கூடுமாறு தூண்டுகின்ற புற விசைகளின் திருப்பம் $-mgr$ சைன் ψ ஆகும். ஆனுல் இது ஊசலின் கோண உந்தம் மாறும் வீதம், அதாவது $(\mathrm{I}+mr^2)\ddot{\psi}$ அல்லது $m(\kappa^2+r^2)\ddot{\psi}$ என்பதற்குச் சமன். இங்கு I ஆனது G ஊடாகவும் சுழற்சியச்சுககுச் சமாந்தரமாகவுமுள்ள அச்சொன்றைப் பற்றி பொருளின் சடத்துவத் திருப்பமும், κ அதறகு ஒதத சுழிப்பாரையுமாம் [அச்சானது G யிலிருந்து தூரம் r இல் இருக்கிறதாதலின் $(\mathrm{I}+mr^2)$ எனபது தொங்கலச்சுப் பற்றி பொருளின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும்–ப. 78 ஐ ஒப்.]



படம் 4·11. ஒரு கூட்டுசல்

எனவே ஊசலின் இயக்கம்,

$$(\mathrm{I}+mr^2)\ddot{\psi}+mgr\,\text{சைன்}\,\psi=0.$$

அல்லது
$$(\kappa^2+r^2)\ddot{\psi}+gr\,\text{சைன்}\,\psi=0 \quad\text{(i)}$$

சைன் ψ இற்குப் பதிலாக ψ யை இடக்கூடிய வகையிலே ψ யின் பெறுமானம் சிறிதாயின், அப்பொழுது,

$$(\kappa^2+r^2)\ddot{\psi}+gr\,\psi=0 \quad\text{(ii)}$$

எனவே இயக்கம் எளிய இசையானது ; ஆவர்த்தன காலம்

$$\mathrm{T}=2\pi\sqrt{\frac{\kappa^2+r^2}{rg}} \quad\text{(iii)}$$

எனவே இவ்வாவர்த்தன காலம் நீளம் $\left(r+\frac{\kappa^2}{r}\right)$ கொண்ட எளிய ஊசலொனறின் ஆவர்ததன காலத்திற்குச் சமன். OP = **எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம்** l ஆகுமாறு OG யைப் P வரை நீட்டிஞல், P **அலைவுமையம்** எனவும் O **தொங்கன் மையம்** எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. அப்பொழுது

$$OP = l = \frac{\kappa^2 + OG^2}{OG},$$

அதாவது $$OP.OG = \kappa^2 + OG^2,$$

அல்லது $$OG\,(OP - OG) = \kappa^2\,;$$

இது $$OG.GP = \kappa^2.$$

P யிற்கு ஊடாகவும் O ஊடாகவுள்ள அச்சுக்குச் சமாந்தரமாகவுமுள்ள அச்சொன்றிலிருந்து பொருளைத் தொங்கவிட்டால், அப்பொழுது O வே அலைவுமையம் ஆகும் என்ற வகையிலேயே P யும் O வும் அமைந்திருக் கின்றன என இக்கோவை உணர்த்துகிறது. அலைவுமையமும் தொங்கன மையமும் ஒன்று மற்றொன்றுடன இடமாறி அமையக்கூடும் என்க. கூட்டுசேலொன்றின் இவ்வியல்பானது **ஹைகன்ஸ்** என்பவரால் கண்டுபிடிக் கப்பட்டது.

இனி, ஆவர்த்தன காலத்திற்கான கோவையை

$$r^2 - r\,.\frac{T^2 g}{4\pi^2} + \kappa^2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iv)$$

என எழுதிக்கொள்ளலாம்.

r இற்கான இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை, பெருக்கம் ஆகிய ஒவ்வொன்றும் நேர் ஆதலின், இரு மூலங்களும் நேர் ஆகும் ; அதாவது T யின் தரப்பட்ட பெறுமானமொனறிற்கு, r_1 உம் r_2 உம் எனறவாறு, இச்சமன்பாடானது r இற்குப் பொதுவாக இரு **நேர்ப்** பெறுமா னங்களைத் தருகிறது ; அதாவது, T யின் குறிப்பிட்ட எந்தப் பெறுமானத் திற்கும் G **யின் அதே பக்கத்தில் O விற்கு இரு தானங்கள்** உள. இதிலிருந்து $\kappa^2 = r_1 r_2$ என்பது உடனே தெளிவாம்.

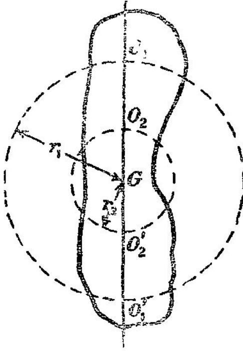
இதுபோலவே, G யின் மறுபக்கத்திலுள்ள அசசொன்றிலிருந்து ஊசல் தொங்குமாயின், இவ்வச்சானது OG இற்குச் செஙகுததாகவும் நீட்டிய OG யை வெட்டுமாறும் இருப்பதால், T யின் தரப்பட்ட பெறுமானததிற் குச் சரியாக அதே இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கும். எனவே, G ஊடாகச் செல்கின்ற எந்தத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட நேர்கோடொன்றிலும், ஊசலுக்கு அதே ஆவர்த்தன காலம் தரும் தொங்கற் புள்ளிகள் நான்கு உள ; இங்கு, தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டுக்குச் சுழற்சியச்சு எப்பொழுதும் செங்குத்தாயிருத்தல் வேண்டும்.

இவற்றுள், G யின் எதிர்ப் பக்கங்களிலும், அதிலிருந்து சமனல்லாத தூரங்களிலும் உள்ள இரண்டின் இடைத்தூரம் h ஆகுக. இவ்விடைத் தூரம் (iv) இன் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன் ; அதாவது

$$h = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

h ஆனது ஆவர்த்தன காலம் T கொண்ட எளிய ஊசலொன்றின் நீளம் எனக் குறிக்கப்படும் ; இதுவே **எளிய சமவலுவூசல்** என்பதாகும்.

படம் 4·12 இல் இக்குறிப்புக்களை எடுத்துக்காட்டலாம். புவியீர்ப்புமையம் G இலிருந்து தொங்கலச்சின் தூரம் மட்டுமே ஆவர்த்தன காலத்தை வரையறுக்கிறதாதலின், G யைப் பொது மையமாகவும் r_1, r_2 களை ஆரைகளாகவும் கொண்ட வட்டங்கள் இரண்டில் ஏதேனுமொன்றின் மீது தொங்கற் புள்ளி இருக்குமாயின் ஊசல் அதே ஆவர்த்தன காலம் உடையதாம். G ஊடாகச் செல்கிறதும் வரிப்படத் தளத்தில் கிடக்கிறதுமான நேர்கோடொன்றில் இத்தகைய இரு புள்ளிகள் O_1 உம் O_2 உம் என்க.



படம் 4·12

நீட்டிய O_1O_2G யும மேற்படி வட்டங களும் ஒன்றையொன்று வெட்டுவதால் கிடைக்கப்பெறுகின்ற இன்னுமொரு சோடிப் புள்ளிகள் O_1', O_2' என்பன அதே நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுகிறபடியால், G ஊடாகத் தரப்பட்ட நேர்கோடொன்றில் பொதுவாக இருக்கவேண்டிய நான்கு புள்ளிகளுக்கும ஊசல அதே ஆவர்த்தன காலத்தை உடையதாயிருத்தல் வேண்டும். இனி,

$$GO_1 + GO_2' = r_1 + r_2$$

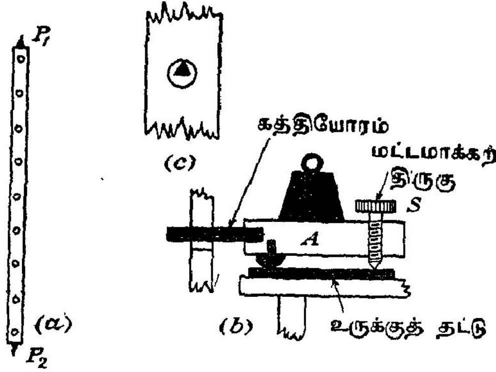
ஆதலின், O_1O_2' (அல்லது O_2O_1') எளிய சமவலுவூசலின் நீளம் ஆகும் எனபது தெளிவாம்.

பரிசோதனை.—கூட்டுசலொன்றைப் பயன்படுத்திப் புவியீர்ப்புச் செறிவுக்குப் பெறுமானமொன்றைத் துணிதல். இப்பரிசோதனையில மேலே நிறுவபபட்ட அமிசஙகள பயன்படுததப்படுகின்றன. அதன நீளம் வழியே வெவ்வேறு புளளிகளில் கத்தியோரமொனறால் தொஙக விடக்கூடியதும் கிட்டததட்ட 1 மீறறர் நீளம் உடையதுமான பிததளைச் செவ்வகச் சட்டமாக ஊசல் அமைநதிருக்கிறது. விவரிககும் பொழுது, சட்டத்தை அடர் எனக் கூறுவோம். அவற்றின மையஙகள் சடடததின் புவியீர்ப்பு மையமூடாகச செலகினற நேர்கோடொனறிற கிடக்குமாறு துளைததொடரொனறு ஆக்கபபட்டிருககுமாயின, மேறபடித் திட்டத்திற்கு ஏற்ப சட்டததின தொஙகன்முறை எளிதாகின்றது, படம் 4.13 (*a*) யை ஒப்.

கததியோரம் கடடாயமாக மட்டமாயிருத்தல வேண்டும். அது வழக்கமாக, அதன் ஓரம் கூராக வரும்வரை தேய்ததுள்ள வலலுருககுத் துணடொனறாகும்; மரப்பலகை A யில் அது நிலையாககபபட்டிருககிறது, படம 4.13 (*b*). பலகையின் கீழ முகத்தில் இரு உருண்டைத் தலைத் திருகுகள் நிறுவப்பட்டிருக்கின்றன; அவறறிற்குப் பினனால மட்டமாக்கும் திருகு S இருககிறது. கததியோரம் மீது சடடம வைககப்பட்டு அது ஆடும் பொழுது அங்குமிங்குமான அசைவொன்று வழக்கமாகத தோற்றககூடும். சட்டம் ஆடும் பொழுது நிலைக்குததுத் தளத்தில மட்டுமே அது அசையுமாறு மடடமாககும் திருகு பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு துளையிலும் மீண்டும் இச்செப்பஞ்செய்கை நேரிடக்கூடும்.

ஒன்றைவிட்டொரு துளையிலிருந்து, ஒன்றன்பின்னொன்றாகச் சட்டம் தொங்கியிருக்கும் பொழுது நேரமானியொன்றால் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க; இஙகு, திருத்தமிக்க நேரங்காண்முறையொன்றைப் பயன்படுத்

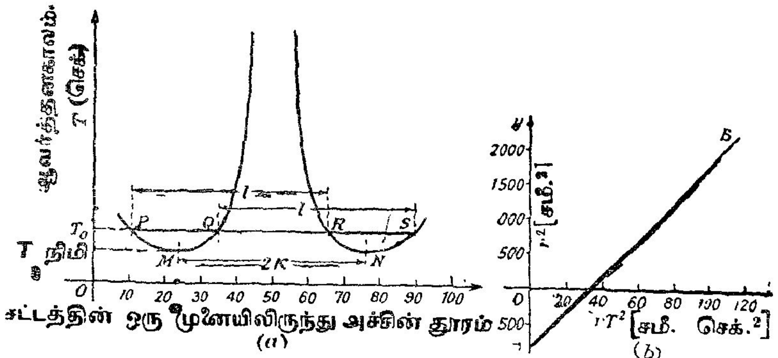
துதல் வேண்டும். ஊசலுடன் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்ற ஊசிகள் P_1, P_2 ஐயும் மாட்டேற்றுக் குறியொன்றையும் பயன்படுத்திக் குறிப்பிட்டவொரு



படம் 4·13. g யைக் காண்பதற்கான கூட்டுசல்.

காலவிடையில் ஊசல் ஆற்றியுள்ள முழு அலைவுகளின் தொகையைத துணியலாம். அடுத்துச் சட்டததின் முனையொனறிலிருந்து பயன்படுத்திய தொங்கற் புள்ளியொவ்வொன்றினதுந் தூரததையும் அளத்தல் வேண்டும்.

இவ்வாறு பெற்ற பேறுகளைப் பயன்படுத்தி, ஆவர்த்தன காலங்களை நிலைக் கூறுகளாகவும் சட்டத்தின் முனையொன்றிலிருந்து தொஙகற் புள்ளிகளின் தூரங்களைக் கிடைக்கூறுகளாகவும் கொண்ட வளையியொன்றைக் குறித்தல் வேண்டும். இவ்வளையியானது படம் 4·14 (a) யில் காட்டியுள்ளதைப் போன்றதொன்றுகும். காட்டியுள்ள இழிவுகளை ஆவர்த்தன காலங்கள்



படம் 4·14. கூட்டுசலின் ஆவர்த்தன கால நோக்கல்களைப் பயன்படுத்தும் வரைபு முறைகள்.

அணுகும்பொழுது அவற்றிற்கு ஒத்த இடங்களிலுள்ள சட்டத்துளை ஒவ்வொன்றையும் பயன்படுத்தி ஆவர்த்தன காலங்களின் பெறுமானங்களை நுணுக்கமாக ஆராய்தல் வேண்டும்.

காட்டியுள்ள புள்ளிகளில் வளையியை வெட்டுமாறு x – அச்சுக்குச் சமாந்தரமாக வரைந்துள்ள நேர்கோடு PQRS ஆகுக. புவியீர்ப்பு மையத்தின் எதிர்ப்புறங்களில் இருக்கின்றனவும், புவியீர்ப்பு மையத்தைக் குறித்துச் சமச்சீரல்லாத வகையில் அமைந்தவையும், அவ்வொவ்வொன்றிலுமிருந்து சட்டத்தை ஒன்றன்பின்னொன்றாகத் தொங்கவிட்டபொழுது அதே ஆவர்த்தன காலத்தைத் தருகின்றனவுமான இரு புள்ளிகளை விறைப்பான பொருளொன்றில் இடங்காணமுடியுமாயின், அப்பொழுது அப் புள்ளிகளின் இடைத்தூரம் அவ்வாறு தொங்கியவூசலின் அதே ஆவர்த்தன காலத்தை உடைய எளியவூசலின் நீளத்திற்குச் சமன் ஆகும் என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கிறது. எனவே, P, R உம் Q, S உம் அத்தகைய இரு சோடிப் புள்ளிகளாகும். எனவே, PR, QS ஆகிய ஒவ்வொன்றும் Oy யில் SP தரும் வெட்டுத்துண்டால் குறிககப்படும் ஆவர்த்தன காலமுடைய எளியவூசலின் நீளம் l இற்குச் சமன் ஆகும். அந்த ஆவர்த்தன காலம் T_0 என்க.

எனவே, புவியீர்ப்புச் செறிவு $g = 4\pi^2 \dfrac{l}{T_0^2}$.

ஆவர்த்தன காலத்தின் பல வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு ஒத்த எளிய சமவலு ஊசல்களின் நீளங்களை அளந்து இவ்வண்ணம் புவியீர்ப்புச் செறிவுக்குச் சராசரிப் பெறுமானமொன்றைப் பெறுக.

சமன்பாடு (iv) ஆனது சம மூலங்கள் உடையது எனபதற்கான நிபந்தனை [ப. 137 ஐ ஒப்.]

$$\left(\frac{T^2 g}{4\pi^2}\right)^2 - 4\kappa^2 = 0.$$

அம்மூலங்கள் α என்க.

அப்பொழுது, r இன் குறிப்பிட்ட பெறுமானம் $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{T^2 g}{4\pi^2}\right)$ ஆகும்;

எனவே, $\alpha = \kappa$. கருதப்படும் வளையியின் பொதுத் தொடலி MN எனின், அப்பொழுது $\frac{1}{2}$MN $= \kappa$; இங்கு κ ஆனது திணிவுமையம் G ஊடாகச் செல்கின்றதும் சட்டத்தின் தளத்துக்குச் செங்குத்தானதுமான அச்சைப் பற்றி சட்டத்தின் சுழிப்பாரை ஆகும். அப்பொழுது, ஆவர்த்தன காலம் ஓர் இழிவு ஆகும்.

அவதானிப்புகளை இவ்வண்ணம் பயன்படுத்திப் புவியீர்ப்புச் செறிவுக்கோ, தேவைப்படும் சுழிப்பாரைக்கோ திருத்தமான பெறுமானமொன்றை ஒருபோதும் பெற முடியாது; ஏனெனில், மேற்படி முடிவுகளைப் பெறுமிடதது கருவிகளின்றிக் கையால் வரையப்படும் வளையி ஒருபோதும் நேர்கோடொன்றுபோல் பயனளிக்கமாட்டாது; அன்றியும், இழிவுப் பகுதிகள் ஓரளவு தட்டையாக இருப்பதால் M ஐயும் N ஐயும் நுட்பமாக இடங்காணமுடியாது.

இப்பரிசோதனையால் கிடைக்கப்பெறும் அவதானிப்புகளிலிருந்து g இற்குப் பெறுமானங்காணும் வரைபு முறையொன்று ஃபகசன்† என்பவரால் தரப்பட்டுள்ளது ; ஆனால், இங்கு r இன் பெறுமானங்களைப் பெறும் பொருட்டு எளிய சமநிலை முறையைப் பயன்படுத்தித திணிவுமையத்தின் தானத்தை இடங்காண வேண்டியதாகின்றது. இனிச் சமன்பாடு (iv) ஐ (ப. 137 ஐ ஒப்.)

$$\frac{rT^2}{4\pi^2}\cdot g=r^2+\kappa^2$$

என்று எழுதலாம் ; எனவே, r^2 ஐ y ஆகவும், rT^2 ஐ x ஆகவும் குறித்தால் சரிவு $\frac{g}{4\pi^2}$ உம் y அச்சில் வெட்டுத்துண்டு $-\kappa^2$ உம உடைய நேர்கோடொன்றைப் பெறுவோம். எனவே, g, κ ஆகிய இரண்டையும் காணலாம் – படம் 4·14 (b) ஐ ஒப்.

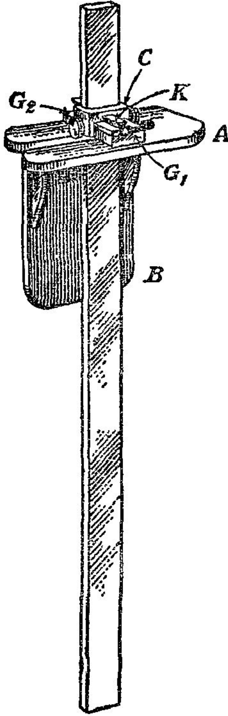
ஓயேனின் சட்டவூசல்.—சட்டவூசலொன்றைப் பயனபடுத்தியுள்ள பரிசோதனையொன்றை **ஓயேன்‡** என்பவர் விவரித்துக் கூறியிருக்கிறார் ; இதில் மேற்படி பரிசோதனையில் பயன்படுத்தியுள்ள ஆய்கருவியின குற்றங்கள் நீககப்பட்டிருககின்றன. வழக்கமான சட்டவூசல் வகையில் உள்ள தொல்லைகள் சட்டத்தின் நீளம் வழியே துளைத்திருக்கின்ற துளைகளாலானவை. இத்துளைகள் தொங்கற் புள்ளிகளாகப் பயன்படுகிறபடியால், குறுந்தறியின் சிறு நீளம், அதனால் விளையும் இங்குமங்குமான ஆடல் என்னும் காரணங்களால் அலைவுகளை நேரங்காணுமிடத்துப் பருமட்டான திருத்த வரிசையை மட்டுமே எதிர்பார்கக முடிகிறது ; அல்லாமலும், துளைகளின் அச்சுக்கள் சட்டத்தின் தளத்துக்குச் செங்குத்தாயிருக்கின்றன என்பதை எப்பொழுதும் உறுதிப்படுத்த முடியாது.

ஓடி C என்பதை, படம 4.15, பயன்படுத்தி மேற்படி குறைகளை நீக்கலாம் ; சட்டம் வழியே அசையக்கூடிய இவ்வோடியை எந்தப் புள்ளியிலும் நிலையாக்கலாம். ஒரு கத்தியோரம் K ஓடியால் விறைப்பாகத் தாங்கப்பட்டிருக்கிறது. கத்தியோரம் ஓடியின் இரு பக்கங்களிலும் நீட்டப்பட்டிருக்கிறது. ஆனால் ஓடியினுள் அது அரத்தால் உராயப்பட்டிருக்கிறது. சுவர்த்தாங்கி B யின் மேடை A யின் இரு பக்கங்களிலும் ஏற்றியிருக்கின்ற ஒரு சோடி கண்ணாடித் தகடுகள் G_1, G_2 என்பவற்றால் கத்தியோரங்கள் தாங்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஊசல், ஓடி ஆகியவற்றின் சுயாதீன அசைவையிட்டு, தகடுகளுக்கிடையேயுள்ள மேடையின் பகுதி வெட்டி அப்புறப்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது. தாங்குங் கண்ணாடிகளின பரப்புக்கள் அதே கிடைத் தளமொன்றில் இருக்கும் பொருட்டுக் கட்டாயமாகக் குண்டுநூலொன்றைப் பயனபடுத்திச் சுவர்த்தாங்கியைச் செப்பஞ்செய்தல் வேண்டும்.

† *Science Progress*, 22, 461, 1928.

‡ *Proc. Physics. Soc.*, 51, 456, 1939.

ஓடியின் சேர்மானத்தால் ஊசல் இப்பொழுது சிக்கலாகிறது எனத தோற்றும். இங்கு ஓடி (a) ஈர்ப்பு இணையொன்றைப் புகுத்தலாம். அத்துடன் (b) தொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பத்துடன் உறுப்பொன்றைக் கட்டாயம் சேர்க்கும். அதன புவியீர்ப்புமையத்தை கத்தியோர நேர்கோட்டுடன் பொருந்துமாறு ஓடியைச் செப்பஞ்செய்து புறக்கணிக்கத்தகக அளவில் (a) யின விளைவு குறைக்கப்படுகிறது. ஓடி எந்த நிலையில் இருக்கும்பொழுதும் சுழற்சியச்சுப் பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப் பத்தைச் சட்டத்துச் சடததுவத் திருப்பத்தின் 10,000 இல் 1 ஐக் காட்டிலும் சிறிதாக்கி (b) யின விளைவு புறககணிக்கத்தக்கதாகச் செய்யப்படுகிறது ; என்றாலும், போதிய பல மும் விறைப்பும் ஓடிக்கு அளிக்கப்படுகிறது.



படம் 4·15. ஒயேனின் சட்டவூசல்.

g, κ என்பவற்றின் பெறுமானங்களை வழக்க மான பரிசோதனை முறையால் அல்லது இன் னும் சிறப்பாகப் பின்னிணைப்பில் கொடுத் திருக்கிற முறையால் கண்டுகொள்ளலாம்.

பரிசோதனை.—குறிப்பிட்ட அச்சொன்றைப் பற்றி ஒழுங் கற்ற திண்மமொன்றின் சடத்துவத் திருப்பத்தைத் துணி தல்.— நாறபக்கல் வடிவத்தில் ஈயம் அலலது பித்தளையா லான, சீரான தடிப்புடைய துணடொன்று இப்பரிசோதனைக் கெனத் தரப்பட்டிருககிறது. மேலும், அதன திணிவு மையமூடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும உளள அச்சைப் பறறி அதன சடத்துவத் திருப்பமே தேவைப்படுகிறது. உலோகத் தகட்டின மூலைகளுககு அணித்தாக நான்கு துளைகள துளைக்கப்பட்டுத தகட்டின தளம் செஙகுத்தாயிருககுமாறும் புவியீர்ப்பின் ஆற்றலால் தகடு சுயாதீனமாக ஊசலாடுமாறும், அது ஒன்றனபின ஒன்றாக இத்துளைகளிலிருந்து கிடையான கத்தியோரமீது தொங்கவிடப்படுகிறது. ஊசலாடலின் ஆவர்த்தன காலம் T எனின்

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}\,;$$

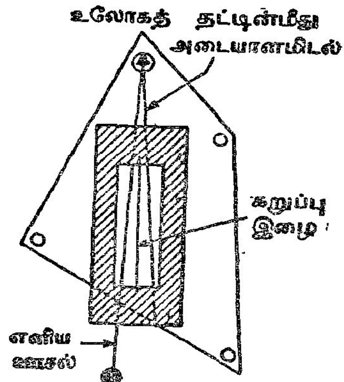
இங்கு I என்பது தொங்கற் புள்ளி ஊடாகவுள்ள கிடையான அச்சுப் பற்றித் தகட்டின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும். உலோகத்தின் திணிவு m உம், திணிவுமையத்திலிருந்து தொங்கற் புளளியின் தூரம் r உம், திணிவுமையம் ஊடாகவுள்ள கிடையான அச்சுப் பற்றி சுழிப்பாரை κ உம் எனின், அப்பொழுது

$$I=m(\kappa^2+r^2) \quad \text{ஆதலால்} \quad T=2\pi\sqrt{\frac{\kappa^2+r^2}{gr}}.$$

எனவே, κ யையும் அதிலிருந்து தேவைப்படும் சடத்துவத் திருப்பத்தையும் துணியலாம்.

வெவ்வேருன ஊசலாடு நேரங்களைத் திருத்தமாக அளக்கும் பொருட்டு உடனிகழ்ச்சி முறையைப் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம். அந்நான்கு துளைகளிலிருந்து ஒன்றன்பின்ஒன்ருக அடர் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும்பொழுது, 50 முழு ஊசலாடல்களுக்கான நேரங்களின் அண்ணளவான பெறுமானங்கள் முதன்முதலாகத் துணியப்படுகின்றன. இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற மேற்படி நான்கு ஆவர்த்தன காலங்களின் சராசரிக்குக் கிட்டத்தட்டச் சமனுன ஆவர்த்தன காலமுடைய எளியவூசலொன்று ஆக்கப்படுகிறது. இவ்வூசலின் ஆவர்த்தன காலம் திருத்தமாகத் துணியப்படுகிறது ; இவ்வண்ணம் அது நியமநேரத்தைச் செக்கன்களில் தரும் கருவியாகின்றது.

அடுத்து, உலோகத் தகட்டின்முன் எளிய ஊசல் நிறுத்தப்படுகிறது ; படம் 4·16 இல் காட்டியுள்ளவாறு, அதன் மேல் முனையும் கத்தியோரமும் அதே மட்டத்தில் இருக்கும்படி செப்பஞ் செய்யப்படுகிறது. இவ்விரு ஊசல்கள் முன், பிளவுள்ள அட்டைத்துண்டொன்று நிறுத்தப்படுகிறது ; பிளவின் குறுக்கே கறுத்த இழைத்துண்டொன்று ஈர்க்கப்பட்டிருக்கிறது; இவ்விழையும், எளிய ஊசல் ஓய்வாயிருக்கும் பொழுது அதன் கயிறும், உலோகத்தில் தொங்கற்ருங்கி ஊடாகச் செல்லுமாறு வரைந்துள்ள நிலைக்குத்தான நேர்கோடொன்றும், ஒருதளமாக இருக்கும்படி ஒழுங்கு செய்யப்படுகின்றது. பரவயன்மை வழுக்களைத் தவிர்க்கும் பொருட்டுத் தொகுதியை இரண்டு மீற்றர் தூரத்திலிருந்து, அல்லது தொலைகாட்டியொன்றைப் பயன்படுத்தி நோக்குதல் வேண்டும்.



படம் 4·16. ஒழுங்கற்ற அடரொன்றின் சுடத்துவத் திருப்பம்—பரிசோதனை முறையாகத் துணிதல்.

இரு ஊசல்களும் கூடி ஊசலாடுமாறு செய்யப்படுகின்றன ; அப்பொழுது அவற்றின் வீச்சங்களை அண்ணளவாகச் சமனுக்குதல் வசதியாம். இரு ஊசல்களும் ஒரே ஆவர்த்தன காலமும் ஒரே தொடங்குநேரமும் உடையனவாயின், அவற்றை முன்னர் கூறியுள்ளவாறு நோக்கினுல் அவை ஒன்ருக இயங்குவதுபோல் தோற்றும். ஆவர்த்தன காலங்கள் வேறுபடின் ஊசல்களின் இயக்கவிணக்கம் விரைவிற் குலையும். இவ்வியக்கத்தைக் கவனமாக நோக்கினுல் ஏதேனுமொரு கணத்தில் உலோகத்திலுள்ள கோடும், எளியவூசலின் கயிறும், நிலைக்குத்தான மாட்டேற்றுக்கோடும் ஒருதளமாக அமைவதையும் இரு பொருள்களும் ஒரே திசையில் அசைவதையும் காணலாம். ஓர் ஊசல் மற்றதைக் குறித்து ஒரு முழு ஆடலால் நயம் அல்லது நட்டம் அடையும் வரை இந்நிகழ்ச்சி மீண்டும் தோன்ருது.

T_1 ஆவர்த்தன காலமுடைய எளியவூசலானது உலோகத்தகட்டின் $(n_1 \pm 1)$ முழு ஊசலாடல்களுக்கான நேரவிடையில் n_1 முழு ஊசலாடல்களை ஆற்றுகின்றது எனக் கொள்க. உலோகத் தகட்டின் ஆவர்த்தன காலம் T எனின்

$$n_1 T_1 = (n_1 \pm 1) T.$$

எனவே, T யைக் கணித்துக் கொள்ளலாம். எந்த ஊசல் மற்றதைக் குறித்து நயம் உறுகிறது என்பதை நோக்கி எந்தக் குறியைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும் என்பது பற்றி முடிவு செய்யப்படுகிறது.

மேற்படி செயன்முறையை ஒவ்வொரு துளையிலும் திரும்பத்திரும்பப் பயன்படுத்தி உலோகத் தகட்டின் திணிவுமையம் ஊடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செவ்வனுகவும் உள்ள கிடையச்சைப் பற்றி அதன் சுழிப்பாரை கணிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு.—கூட்டுசெலொன்றின ஆவர்த்தன காலம் எப்பொழுது ஓர் இழிவு ஆகின்றது என்பதைத துணிக.

திணிவு M கொணட கூட்டுசெலொன்றின் ஆவர்ததன காலம் அதன இழிவுப் பெறுமானம் T_0 ஐ அடையுமாறு சுழறசியச்சுத்தானம் செயபபடு செயயப்படுகிறது. புறககணிககத்தக்க பருமன உடைய, திணிவு m கொண்ட உலோகததுணடொனறு ஊசலின புவியீர்ப்பு மையத்தில இணைககபபடுகிறது. (a) அசசின அதே தானததுககுரிய புது ஆவாதததன காலம், (b) ஆவர்த்தன காலத்தின் புது இழிவுப் பெறுமானம் எனபவறறிறகுரிய கோவைகளைப பெறுக.

வழக்கமான குறிப்பீட்டில், சுமை எற்றப்படுமுன்

$$\frac{g}{4\pi^2} r T^2 = r^2 + K^2.$$

r குறித்து வகையிட

$$\frac{g}{4\pi^2}\left[T^2 + 2rT\frac{dT}{dr}\right] = 2r.$$

$$\therefore\ 2rT\frac{dT}{dr} = \frac{8\pi^2}{g} r - T^2 = \frac{8\pi^2}{g} r - 4\pi^2\left(\frac{r^2 + K^2}{rg}\right).$$

எனவே, $2r^2 - (r^2 + K^2) = 0$; அதாவது $r = K$ ஆகுமிடத்து

$$\frac{dT}{dr} = 0.$$

அப்பொழுது ஆவர்த்தன காலம் ஓர் இழிவு ஆகும் எனக் காட்டும்பொருட்டு

$$\frac{dT}{dr} = \frac{4\pi^2}{g}\frac{1}{T} - \frac{T}{2r}.$$

$$\therefore\ \frac{d^2T}{dr^2} = \frac{4\pi^2}{g}\left(-\frac{1}{T^2}\right)\frac{dT}{dr} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} - \frac{T}{r^2}\right].$$

மேலும், $\frac{dT}{dr} = 0$ ஆகுமிடத்து இக்கோவையானது $\frac{1}{2}\frac{T}{r^2}$ ஆகிறது ; இது உணமையாக ஒரு நேர் எண் ஆகும். எனவே, ஆவாத்தன காலம் ஓா இழிவு ஆகும். அத்துடன்

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2K}{g}}.$$

G ஊடாகவுள்ள கிடையச்சுப் பறறிச சடததுவத திருபபம் I_G என்பதைச் சேர்மானத் திணிவு பாதிக்கமாட்டாது.

$$\therefore\ I_G = MK^2 = (M + m)K_1^2;$$

இங்கு K_1 ஆனது புதுச் சுழிப்பாரை.

(a) $\therefore$ அதே அச்சைப் பறறிப புதிய ஆவாத்தன காலம் $= 2\pi\sqrt{\frac{K_1^2 + K^2}{Kg}}$

$[\because\ r = K]$

$$= T_0\sqrt{\frac{2M + m}{2(M + m)}}.$$

(b) புது இழிவு ஆவாத்தன காலம் $= 2\pi\sqrt{\frac{2K_1}{g}} = T_0\left(\frac{M}{M + m}\right)^{\frac{1}{4}}.$

கூட்டுசேல் ; நிலைத்த அச்சொன்றின் மீது தாக்கம்.— படம் 4·11 [ப. 136 ஐ ஒப்.] இல் காட்டியுள்ளவாறு, O ஊடாகச் செல்கின்ற நிலைத்த கிடையச்சொன்று பற்றித தளமொன்றில், கூட்டுசேலொன்று அலைக ; OG ஆனது நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் கோணம ψ ஆக்குக ; இங்கு G புவியீர்ப்புமையம். G ஆனது O விலிருந்து ஒரு நிலையான தூரம் r இல் இருக்கின்றதெனக. GO வழியேயும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள திசைகளில ஊசல மீது அசசாணி ஆற்றும் தாக்கத்தின் கூறுகள் முறையே R உம் Ψ உம் ஆகுக ; இங்கு உராய்வு இணை இல்லை எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

இனி, ஊசலின் முழுத் திணிவும் G யில் செறிந்திருக்கிறது; எல்லாப் புற விசைகளும G யிலே தாக்குகின்றன என்ற வகையிலேயே G இயங்கு கின்றது ; இங்கு விசைகளின தாக்ககோடுகள், அவை உண்மையிலே தாக்குகின்ற கோடுகளுக்குச சமாந்தரமாகும்.

பொதுவாக, G யின் ஆர்முடுகலின ஆரைக்கூறும் குறுக்குக்கூறும் முறையே $\ddot{r}-r\dot{\psi}^2$ உம் $r\ddot{\psi}+2\dot{r}\dot{\psi}$ உம் ஆகும். இங்கு, r ஒரு மாறிலி ஆதலால், இவை $-r\dot{\psi}^2$ உம் $r\ddot{\psi}$ உம் ஆகின்றன. எனவே, OG வழியே யும அதற்குச் செஙகுததாகவும விசைகளைத் துணிக்க,

$$m(-r\dot{\psi}^2) = mg \text{ கோசை } \psi - R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$m(r\ddot{\psi}) = \Psi - mg \text{ சைன் } \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

மேலும் [ப. 136 ஐ ஒப்.] $$\ddot{\psi} = -\frac{gr}{\kappa^2+r^2} \text{ சைன் } \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

இங்கு κ என்பது G ஊடாகவும் தொங்கலச்சுக்குச் சமாந்தரமாகவும் உள்ள அசசுப் பற்றிச் சுழிப்பாரை ஆகும.

(ii), (iii) களிலிருந்து

$$\Psi = mg\left[1-\frac{r^2}{\kappa^2+r^2}\right] \text{ சைன் } \psi = mg.\frac{\kappa^2}{\kappa^2+r^2}. \text{ சைன் } \psi. \quad (iv)$$

R ஐத் துணிதற்பொருட்டு ψ தெரிந்தாகவேண்டும். இதைச் சக்திச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறமுடியும் ; அது, இஙகு

$$\tfrac{1}{2}m(r^2+\kappa^2)\dot{\psi}^2 + mgr(1-\text{கோசை } \psi) = A,$$

A ஒரு மாறிலி. A என்பதைத் துணியும் பொருட்டு, ஊசலின் வீச்சம் ψ_0 எனின, அப்பொழுது, $\psi=\psi_0$ ஆகுமிடத்து $\dot{\psi}=0$ ஆகும் என்பதைப் பயன்படுத்த,

$$A = mgr(1-\text{கோசை } \psi_0).$$

இங்கு கருதியுள்ள சூழலில் r ஒரு மாறிலி.

$$\therefore\ \dot{\psi}^2 = \frac{2gr(\text{கோசை } \psi - \text{கோசை } \psi_0)}{r^2+\kappa^2}.$$

$$\therefore\ R = mg\left[\text{கோசை } \psi + \frac{2r^2}{(r^2+\kappa^2)}(\text{கோசை } \psi - \text{கோசை } \psi_0)\right].$$

கொட்டல் மையம்.—நிலைத்த அச்சொன்று பற்றிச் சுழலக்கூடிய விறைப்பான பொருளொன்றின் மீது ஒரேயொரு கணத்தாக்கைப் பிரயோகிக்குமிடத்து அவ்வச்சு மீது கணத்தாக்கு மறுதாக்கம் விளையாதுவிடின், கணத்தாக்கின் கோடு **கொட்டற் கோடு** எனவும், அககோடும் புவியீர்ப்பு மையம், சுழற்சியச்சு என்பவற்றைக் கொள்ளும் தளமும் ஒன்றையொன்று சந்திக்கும் புள்ளி **கொட்டல் மையம்** எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

எளிய எடுத்துக்காட்டாக, தன் முனையொன்றிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்பட்டதும் ஒரு புள்ளி Q வில் கிடையாக அடிபட்டதுமான மெல்லிய சீரான கோல் OA ஐக் கருதுக, படம் 4·17. அடியாலாகும் கணத்தாக்கை P எனக; OQ $= x$ என்க. $2a =$ OA உம் கோல் அடைந்துள்ள கணநிலைக் கோணவேகம் ω_0 உம் ஆகுக. கோல் மீது அதன் சுழற்சியச்சாலான கணத்தாக்கு மறுதாக்கம் X ஆகுக.

படம் 4·17.
கொட்டல் மையம்.

இனி, G ஆனது ஏகபரிமாண வேகம் $a\omega_0$ உடன் அசையத் தொடங்குகிறது; மேலும், தொகுதியின் உந்தமும் G இல் சேர்க்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கருதப்படும் முழுத்திணிவான m இன உந்தமும் சமன.

$\therefore$ விளையுட் கணத்தாக்கு $=$ P $-$ X
$=$ ஏகபரிமாண உந்த மாற்றம்
$= ma\omega_0$.

மேலும், கோலானது அடியைப் பெறறவுடனே O பறறி அதன் உந்தத் திருப்பம

$$\mathrm{P}x = (m\kappa^2)\,\omega_0.$$

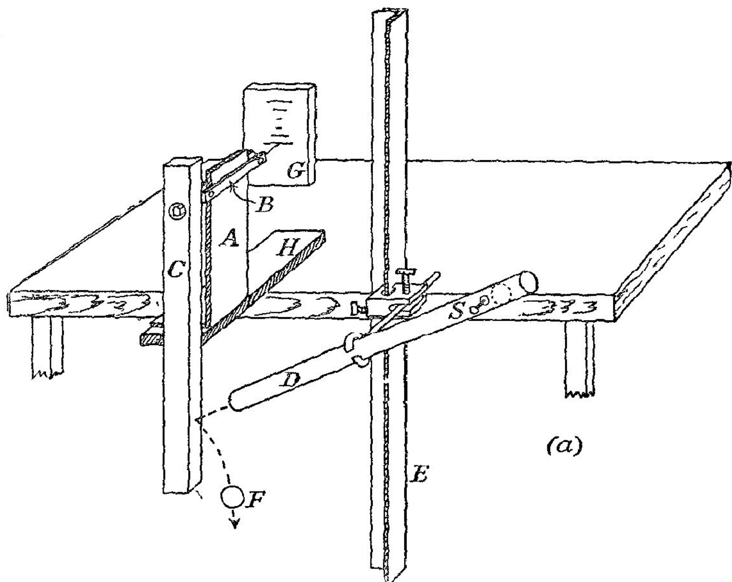
இங்கு,
$$\kappa^2 = \tfrac{4}{3}a^2.$$

$$\therefore\ \mathrm{X} = \mathrm{P} - ma\omega_0 = \mathrm{P}\left(1 - \frac{a}{\kappa^2}x\right).$$

எனவே $x = \dfrac{\kappa^2}{a} = \dfrac{4}{3}a$ ஆயின், $\mathrm{X} = 0$ அதாவது O வில் கணத்தாக்கு மறுதாக்கம் பூச்சியமாகும்; அப்பொழுது OQ ஆனது எளிய சமவலுவூசலின் நீளம் ஆகும்; அதாவது, அலைவுமையத்தில் அடி பட்டால் O வில் கணத்தாக்கு பூச்சியமாகும்; அதாவது, நிலைதத சுழற்சியச்சைக் குறித்து கொட்டல் மையம் அவ்வச்சுக்கு ஒத்த அலைவுமையததுடன பொருந்துகிறது. [கிறிக்கற்று மட்டையில் பந்து படும்பொழுது சிலவேளைகளில் அதன் கைபிடியில் உண்டாகின்ற அதிர்ச்சியானது பந்து மட்டையை கொட்டல் மையத்திற் படுமாயின் தோனறமாட்டாது.]

பரிசோதனை முறைப்படி சட்டவூசலொன்றின் கொட்டல் மையத்தைத் துணிதல்.—சட்டவூசலொன்று தக்கவாறு தொங்கவிடபபட்டிருககும் பொழுது கொட்டல் மையத்தைப் பரிசோதனை முறைப்படி காணமுடியுமாயின் அப்பொழுது எளிய சமவலுவூசலின்

நீளத்தையும் காணலாம் என முந்திய பந்தியில் கூறியுள்ளதிலிருந்து தெளிவு. இதற்கென சீ.எ. ஹேய்வூட் என்பவர் திட்டமிட்ட பரிசோதனைக்குரிய ஒழுங்கொன்று படம் 4·18 (*a*) இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. அதே கணத்தாக்கைக் கூட்டேசலொன்றின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள வெவ்வேறு புள்ளிகளில் பிரயோகிக்கவும், தாங்கியில் தாக்கத்தை அளக்கவும் அது பயன்படுகிறது. மறுதாக்கமின்மைக்கான நிபந்தனை இடைச்செருகல் முறையாற் காணப்படுகிறது. தாங்கி A யானது 0·13 சமீ. தடிப்பு, 9 சமீ. அகலம், 32 சமீ. உயரம் உடைய வல் அலுமினியத்தாலானது ; தாங்கியை மரத்துண்டு H உடன் திருகால் நிலைப்படுத்திவைக்கும் பொருட்டு மேலதிகமாக விடப்பட்ட நீளம் செங்குத்தாக வளைக்கப்பட்டிருக்கிறது. மரத்துண்டு H மேசை மீது பிடிகருவியால் நிறுவப்பட்டிருந்தால் தேவையான நீட்டல் கிடைக்கும். ஊசலா-



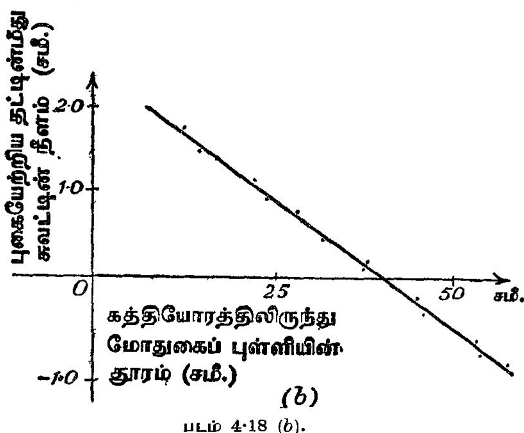
படம் 4·18 (*a*). சட்டவூசலொன்றின் கொட்டல் மையத்தைப் பரிசோதனை முறையாய்த் துணிதல்.

லுக்கான கத்தியோரம் B, ஒனறேடொன்று இணைக்கப்பட்ட இரு மென்னுருக்குத் துண்டுகளாலானது ; இவற்றுள் ஒரு துண்டு A யின் ஒரு பக்கத்திலும் மற்றைத் துண்டு அதன் மறு பக்கத்திலும் அமைந்திருக்கின்றன ; அன்றியும் ஒன்று கூராக்கப்படடும் மற்றையதைக் காட்டிலும் நீட்டப்பட்டும் இருக்கிறது ; இதுவே ஊசலின் ஆடலுக்குக் கத்தியோரமாகப் பயன்படுகிறது. நியாயமான விறைப்புடையதும் மிக நீளமாய் இல்லாததுமான தும்பொன்று ஊசலுக்குச் செய்மையான B யின் முனையுடன் மெழுகால் பற்றப்பட்டு, வாலைப்பிடியொன்றால் பிடிக்கப்பட்டிருக்கும் கண்ணாடித் தட்டு G யின் புகையேற்றிய பரப்பு மீது இலேசாகப் படுகிறது.

ஊசல் C ஆனது, 4 சமீ.[2] சதுரக் குறுக்குவெட்டுடைய அலுமினியச் சட்டத்தாலானது ; அதன் நீளம் 60 சமீ. ஆகும் ; அதன் மேல் முனையிலிருந்து 2·5 சமீ. தூரத்தில் கத்தியோரத்திற்கெனத் துளையொன்று துளைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இயல்பான ஆவர்த்தன காலத்தின் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு இப்பரிசோதனையைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்யும் பொருட்டு இதுபோன்ற பல துளைகள் ஆக்கப்பட்டிருக்கலாம். கத்தியோரத்தைக் கிட்டத்தட்ட A யின்

அடிவளை தாழ்த்தி, அந்நிலையில இயலபான ஆவாததன காலம் துணியப்படுகிறது ; எனினும் புவியீர்ப்பபிறகுப பெறுமானமொனறு தேவைபபட்டாறருன் இதைச செயதல வேணடும.

2·2–2·3 சமீ. உளவிட்டமும 45–50 சமீ. நீளமும உடைய பிததளைக் குழாய D வழியாக 2 சமீ. விட்டம் உடைய உருககுருணடை F ஐ உருளச் செயது கணததாககு பிரயோ கிககபபடுகிறது. பெட்டிவகைக குமிழக குடுமியொனறிலுளள வாலைபபிடியினுல இககுழாய கௌவபபட்டிருக்கிறது. குமிழ்க குடுமியானது 2·5 சமீ. வலையை உடைய கோணவிருமபுத் துணடு E யுடன பிடிககப்பட்டிருககிறது. எனவே குழாய D யின அச்சு, கிடைககோட்டுடன இன்னும அதே கோணம் 35° இல இருகக, அதனை உயாததவோ, தாழததவோ முடியும. இவவாறு, ஊசலின் பக்கமொனறின வழியே உளள வெவவேறு புளளிகளில மாறுக கணததாககு ஒன்றைப் பிரயோகிககலாம. C யின 'மோதுகை-முகம' வழியே வெளளைக் கடதாசித துணடொனறு ஒட்டபபட்டிருககிறது. அக்கடதாசித துணடுமீது காபன கடதாசித் துணடொனறு பற்றபபட்டிருககிறது. பரிசோதனை முடிவடைநததும காபன கடதாசி அபபுறப் படுத்தபபடுகினறது. வெளளைக கடதாசி மீதுளள குறறுததொடர் மோதுகை நிகழநத இடஙகளைக் காட்டும. அதன மீது குறுகிய கீறறகுறித் தொடரொனறைப் பெறும பொருட்டு மோதுகைகளுககிடையில தட்டு G உம் இயக்கப்படுகிறது.



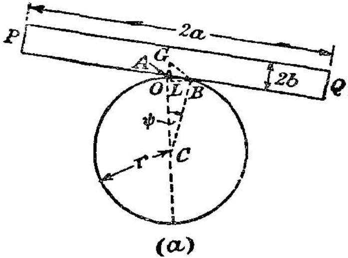
படம் 4·18 (b).

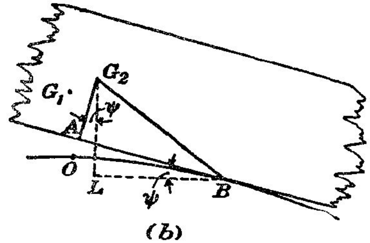
தொடக்கத தாககத்தைக் கததியோரததிலிருந்து மோதுகை மையததின தூரம் தொடர் பாக அட்சரகணித முறைப்படி குறிததறபொருட்டு அத்தாக்கததின தொடககத திசையை நோககுதல வேணடும. வரைபும x – அச்சும ஒன்றையொனறு வெட்டும் புளளியால கொட்டல மையம தரப்படுகிறது, படம் 4·18 (b) ஐ ஒப். தாஙகி மீது ஆற்றும தொடககத தாககததிறகுத தணிததல ஒரு மாறிலி ஆதலின, G மீது வரைந்துள்ள கோடுகளின நீளஙகள இததாக்கத் துககு விகிதசமம.

கடைசியாக, கததியோரத்தின் அலைவு மீடிறன் ஊசலின அலைவு மீடிறனைக் காட்டிலும் மிகப் பெரிதாயிருககிறது எனவும ஆனுல கொட்டல் மையத்தை அணுகுமபொழுது மோதுகை யின விளைவாக ஊசலின வீச்சம வளாசசியடைகிறது எனவும் சுட்டிக காட்டவேணடியதாகிறது. ஈற்றில இது கததியோரத்துடன இணைககபபட்டுப பெரிய வீசசததையுடைய மநதமான ஆடல் ஒன்றை விளைவிக்கிறது, இவவீச்சமானது தொடககத் தாககததின அதிர்சசியாலானதைக் காட்டிலும மிகக நீணடதாம. ஆகையால இநநிலையிலும, இயலுமானுல பரிசோதனை முறறி லும் மநதவலைவுகள் தொடங்குமுன் தும்புடன் தொடுகையிலிருநது தகடு G யை ஒதுககி வைத்தல் வேணடும்.

[தும்பொனறிறகுப் பதிலாகக குழிவாடி போனற ஒன்றைத் தகடு A யுடன் இணைத்து வழககம் போல ஒழுஙகுபடுததியுளள அளவிடையொனறில ஒளிபபுளளியொனறின் முத லாவது திருமபலால தாககததை அளககலாம, ப. 431 ஐ ஒப.]

கிடையான உருளையொன்றின் மீது உருளும் சீரான ஒரு சட்டத்தின் அலைவுகள்.—படம 4·19 (a) இல், மையம C கொணட உருளையொனறின் மீது தாஙகப்பட்டிருககும் சீரான ஒரு செவவகச் சட்டத்தின மையக குறுக்கு வெட்டு PQ ஆகுக. சடடம் அலையாமல இருககிறபொழுது உருளையை O வில் அதன புளளி A தொடுகிறது எனககொளக. சடடத்தின் புவியீர்பபுமையம் G ஆகுக ; அதன் நீளமும் ஆழமும் முறையே $2a$ உம் $2b$ உம் ஆகுக. மேலும, சடடததின் அச்சு உருளையின் அச்சுக்குச் செஙகுததான நிலைக்குத்துத் தளத்தில அமைநதிருக் கிறது எனவும கொளவோம. சட்டம் பெயர்க்கப்பட்டதும் உருளைக்கும் சட்டத்துக்கும் இடையேயுள்ள தொடுபுள்ளி B எனின, $\widehat{OCB} = \psi$ எனக. B ஊடாகச் செல்லும் கிடைக்கோடடை L இற் சநதிக்குமாறு G ஊடாக நிலைக்குததுக் கோடொன்றை வரைக ; இது படம் 4·19 (b) இல் மிக விவரமாகக் காட்டப்பட்டிருககிறது ; இங்கு G யின் 'ஓய்வுத்தானம்' G_1 உம் அதன் 'பெயாக்கப்பட்ட தானம்' G_2 உம் ஆகும்.





படம் 4.19. கிடையான உருளைப் பரப்பின் மீது சீரான ஒரு சட்டத்தின் அலைவுகள்.

அப்பொழுது சட்டம் மீது தாக்கி, அதை அதன் சமநிலைத் தானத்திற்கு மீளுமாறு தூண்டுகின்ற புற விசைகளின் திருபபம

$$mg.\mathrm{LB} = mg\,[\mathrm{AB}\text{ கோசை }\psi - \mathrm{AG}\text{ சைன் }\psi]$$
$$= mg\,[r\psi\text{ கோசை }\psi - b\text{ சைன }\psi]\,;$$

இங்கு ψ சிறியது. எனவே, ψ^2 உம் அதறகுக் கூடிய ψ இன் வலுக் களும ψ ஐக குறித்துப் புறக்கணிக்கததக்கவை எனக கொள்ளப்பட

$$= mg\,(r-b)\,\psi.$$

சட்டத்தின இயக்கமானது

$$\mathrm{I}\ddot{\psi} + mg\,(r-b)\,\psi = 0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் எடுத்துரைக்கப்படுகிறது ; இங்கு, I என்பது B ஊடாகவும் உருளையின அச்சுக்குச் சமாநதரமாகவும் செல்கின்ற அச்சுப்

பற்றி சட்டத்தின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும். ஆனால் $I = m(\kappa^2 + GB^2)$, இங்கு κ என்பது G ஊடாகவும் வரிப்படத்தின் தளத்துக்குச் செங்குத்தாக வும் உள்ள கிடையச்சுப் பற்றி சட்டத்தின் சுழிப்பாரை ஆகும். மேலும்,

$$GB^2 = GA^2 + AB^2$$
$$= b^2 + r^2\psi^2.$$

b^2 ஒடு ஒப்பிடுமிடத்து $r^2\psi^2$ புறக்கணிக்கத்தக்கதாயின், இயக்கச் சமன்பாடு

$$\ddot{\psi} + g\left(\frac{r-b}{\kappa^2+b^2}\right)\psi = 0$$

என ஆகின்றது.

எனவே, இயக்கம் எளிய இசையானது; அதன் ஆவர்த்தன காலம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\kappa^2+b^2}{g(r-b)}}.$$

ஆனால், $\kappa^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2)$.

எனவே $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+4b^2}{3g(r-b)}}$.

பரிசோதனை.—மேலே ஆராய்ந்துள்ளவாறு, உருளையொன்றின் மீது சட்டமொன்றின் அலைவு களைப் பயன்படுத்தி, புவியீர்ப்புச் செறிவுக்குப் பெறுமானமொன்றைக் காணலாம். இதன் பொருட்டுச் சட்டமானது 1 மீற்றர் நீளமும், 2 சமீ. அகலமும், 1 சமீ. ஆழமும் உடைய தாக இருத்தல் வேண்டும். உருளையானது 20 சமீ. விட்டமுடைய சில்லொன்றைக் கொண்டிருக்க லாம். திருத்தமான விளைவைப் பெறும்பொருட்டு சில்லும் சட்டமும் ஒன்றையொன்று தொடும் இடங்களில் அவற்றின் பரப்புக்கள் பெரிதும் துப்புரவாயிருத்தல் வேண்டும். ஏதேனு மொரு வரையறுத்த நிகழ்ச்சியின் போது அவதானிப்புகளை எடுக்கும்பொருட்டுச் சட்ட முனையில் வெள்ளைக்கோடொன்று வரையப்படுகிறது. இக்கோடு, கிடையாயும் சட்டத்திற்கு அணித்தாயும் நிறுவியுள்ள கறுப்பு இழைத் துண்டொன்றைக் குறிப்பிட்ட திசையொன்றில், ஒரு முழு எண் தரம் தாண்டிச் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் அளக்கப்படுகிறது.

ஆவர்த்தன காலத்திற்கான சமன்பாட்டை உற்றுநோக்கினால் சட்டத்தின் கீழ்முகத்தி லிருந்து அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் தேவைப்படுகிறது எனத் தெரிய வரும். இதை எளிதில் அளத்தல் இயலாது. எனினும், முதலில் சட்டத்தின் ஒரு முகமும் பின்னர் அதன் எதிர்முகமும் உருளை மீது தாங்கப்பட்டிருக்கும் பொழுது ஆவர்த்தன காலத்தைத் துணிதலுக்கான அவதானிப்புகள் எடுக்கப்படுகின்றன எனக் கொள்க. இவ்விரு முகங்களி லிருந்து G யின் தூரம் b_1, b_2 உம், அவற்றுக்கொத்த ஆவர்த்தன காலங்கள் T_1, T_2 உம் ஆயின்

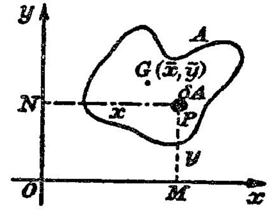
$$r - b_1 = \frac{4\pi^2}{3gT_1^2}(a^2 + 4b_1^2)$$

$$= \frac{4\pi^2}{3gT_1^2}\cdot a^2, \qquad \frac{2b_1}{a} \text{ சிறிது எனின்,}$$

அது போலவே, $r - b_2 = \frac{4\pi^2}{3gT_2^2}\cdot a^2$.

$$\therefore\ g = \frac{2\pi^2 a^2}{3(r-b)}\left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}\right).$$

பொருளொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தைத் துணிதலுக்கான ஒரு முறை.—பொருளானது சீரான ஓர் ஈர்ப்புப் புலத்தில் இருக்கிறது எனக் கொள்க. அதாவது, அதன் எல்லாத் துணிக்கைகளினதும் நிறைகளின தாக்கக் கோடுகள சமாந்தரம என்க. நடைமுறையில் இதன் கருத்து யாதெனில், இவ்வாராய்ச்சியானது மிகப் பெரிதல்லாத பொருள்களுக்கு மட்டுமே சரி என்பதேயாம். A என்பது படம் 4·20 இலே தளம் xOy யிலுள்ள ஒழுங்கற்ற தள அடரொன்றாகும். ஈர்ப்புப் புலம கீழ்முகமாகத் தாக்குகிறது எனக் கொள்க. (x, y) என்னும் புள்ளி P யைச் சுற்றியுள்ள சிறு பரப்பளவு மூலகம் δA யைக் கருதுக. அடரின் பரப்பளவலகொன்றின் திணிவு σ எனின, Oy பற்றி மேற்படி மூலகத்தினது நிறையின் திருப்பம் $\sigma g\,.\,\delta A.\,x$ ஆகும்; இங்கு, g புவியீர்ப்புச் செறிவாகும். இததகைய மூலகங்களை எல்லாவற்றிறகும் Oy பற்றி அவற்றின் நிறைகளின் மொத்தத் திருப்பம் $\Sigma\,\sigma gx.\,\delta A$ ஆகும். அடரின் முழு நிறையும் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G யில் தாக்குகிறது போலே அப் புவியீர்ப்பு மையம் G, $(\bar{x}, \bar{y})$ அமைந்திருக்கிறபடியால் Oy பற்றி இந்நிறையின் திருப்பம் $\Sigma\,\sigma g\bar{x}.\,\delta A$ ஆகும். எனவே,



படம் 4·20. சீரான ஈர்ப்புப் புலத்தில் பொருளொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம்.

$$(\Sigma\,\sigma g.\delta A)\bar{x} = \Sigma\,\sigma gx.\,\delta A$$

அல்லது,
$$\bar{x} = \frac{\Sigma x.\delta A}{\Sigma \delta A} = \frac{\Sigma x.\delta A}{A}\,.$$

அதுபோலவே,
$$\bar{y} = \frac{\Sigma y.\delta A}{\Sigma \delta A} = \frac{\Sigma y.\delta A}{A}\,.$$

திண்மப் பொருட்களுக்கு இம்முறையை உடனடியாக விரிக்கலாம்.

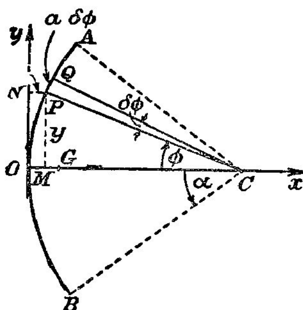
பொருளொன்றினிடத்துச் சடத்தின் பரம்பல் தொடர்ந்ததாய் அமைந்திருக்குமாயின் நுண்கணிதக் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்த,

$$\bar{x} = \frac{\iint x.dx.dy}{\iint dx.dy} = \frac{\iint x.dx.dy}{A},$$

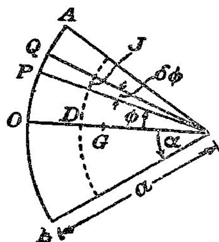
$$\bar{y} = \frac{\iint y.dx.dy}{\iint dx.dy} = \frac{\iint y.dx.dy}{A};$$

இங்கு, $\delta x\,.\,\delta y$ ஆனது P யிலுள்ள சிறு மூலகத்தின் பரப்பளவு ஆகும்.

பௌதிகவியலில் தோன்றும் எடுத்துக்காட்டுகளில் பொதுவாகச் சமச்சீரச்சொன்று உளது எனத் தெரியவரும்; எனவே, மேற்படித் தொகையீடுகளின் கணிப்பு பெரிதும் எளிதாகின்றது. கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளால் இம்முறை விளக்கம் பெறுகின்றது.



படம் 4·21. சீரான வட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம்.



படம் 4·22. சீரான வட்ட ஆரைச் சிறையின் புவியீர்ப்பு மையம்.

சீரான வட்டவில்லொன்றினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் தானத்தைத் துணிதல்.—AOB ஆனது, படம் 4·21, ஆரை a யையும், நீளவலகொன்றிற்குத் திணிவு μ வையுமுடைய வில் ஆகுக; அதன் வளைவு மையம் C யில் இது கோணம் 2α வை எதிரமைக்க. Ox ஐயும் Oy யையும் காட்டியுள்ளவாறு அச்சுக்களாகப் பயன்படுத்துக; திணிவு μ PQ கொண்ட சிறு மூலகம் PQ வைக் கருதுக; அதன் தானம் (x, y) ஆகுக. $\widehat{OCP} = \phi$ ஆகுக. அப்பொழுது, $\widehat{PCQ} = \delta\phi$; $PQ = a\,\delta\phi$.

இனி, $$x = NP = OC - MC\,;$$
இங்கு, M உம் N உம் ஆள்கூறச்சுக்கள் மீது P யின் எறியங்களாகும். எனவே,
$$x = a\,(1 - \text{கோசை}\,\phi).$$

∴ Oy பற்றி இம்மூலகத்தினது நிறையின் திருப்பம்
$$(\mu ga\,.\,\delta\phi)\,a\,(1 - \text{கோசை}\,\phi).$$
$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \mu g a^2\,(1 - \text{கோசை}\,\phi)\,d\phi}{\mu g\int_{-\alpha}^{\alpha} a\,d\phi}$$
$$= \left[2a\int_0^{\alpha}(1 - \text{கோசை}\,\phi)\,d\phi\right] \div 2\int_0^{\alpha} d\phi$$
$$= a\left[\frac{\alpha - \text{சைன்}\ \alpha}{\alpha}\right];$$
மேலும் வில்லானது Ox ஐக் குறித்துச் சமச்சீரானதாதலின் $\bar{y} = 0$.

[ந.கு. C யைக் குறித்து வில்லொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தானத்தைக் காண்பதே வழக்கு; ஆனால், அடுத்துவரும் எடுத்துக்காட்டுக்களில் O வைக் குறித்தே புவியீர்ப்பு மையத்தின் தானம் தேவைப்படுகிறது; மேற்படிக் கணிப்பால் அது நேராகத் துணியப்பட்டுள்ளது.]

சீரான வட்ட ஆரைச்சிறையொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தானத்தைத் துணிதல்.—AOBC ஆனது, படம் 4·22, ஆரை a யும், பரப்பளவலகொன்றிற்குத் திணிவு σ உம் உடைய இத்தகைய ஆரைச்சிறையொன்றாகுக; அதன் வளைவு மையம் C யில் அது கோணம் 2α வை எதிரமைக்கின்றதென்க. வில்லின் பரிதியில், $O\widehat{C}P = \phi$, $P\widehat{C}Q = \delta\phi$ ஆகுமாறு P யும் Q வும் அடுத்துள்ள இரு புள்ளிகளாகுக. அப்பொழுது, இம்முக்கோணமூலகத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}PQ.\,QC = \frac{1}{2}a^2\delta\phi$. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் J யில் இருக்கும். இங்கு, $CJ = \frac{2}{3}a$ எனக் கருதப்படும். ஆரைச்சிறைக்குப் பதிலாக ஒவ்வொன்றும் திணிவு $\frac{1}{2}a^2\sigma.\delta\phi$ கொண்டதும், அவை எல்லாம் ஆரை $\frac{2}{3}a$ கொண்ட வில்லொன்றின் வழியே சீராகப் பரப்பப்பட்டுள்ளனவுமான துணிக்கைத் தொடரொன்றைப் பயன்படுத்தலாம். இவ்வில்லானது OC யை D யில் வெட்டுமாயின்,

$$DG = \frac{2}{3}a\left[\frac{\alpha - \text{சைன}\,\alpha}{\alpha}\right] = \frac{2}{3}a\left[1 - \frac{\text{சைன்}\,\alpha}{\alpha}\right].$$

$$\therefore\quad OG = OD + DG = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}a.\frac{\text{சைன்}\,\alpha}{\alpha}$$

$$= a\left[1 - \frac{2}{3}.\frac{\text{சைன்}\,\alpha}{\alpha}\right].$$

சீரான வட்டத் துண்டமொன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தானத்தைத் துணிதல்.—AOB ஆனது, படம் 4·23, நாண் AB என்பதால் வெட்டப்பட்ட வட்டத் தட்டொன்றின் வட்டத் துண்டமாகுக. காட்டியுள்ளவாறு அச்சுக்கள் Ox, Oy எடுக்கப்படுக; AOB யை வில்லாகவுடைய வட்டத்தின் மையம் C ஆகுக. $O\widehat{C}P = \phi$, $P\widehat{C}Q = \delta\phi$ ஆகுமாறு வட்டத் துண்டத்தின் சுற்றயலில் புள்ளிகள் P யும் Q வும் இருக்க. P, Q களுக்கூடாகவும், Ox இற்குச் செங்குத்தாகவும், இவ்வச்சை M இலும் N இலும், வில் OB யை P_1 இலும் Q_1 இலும் முறையே வெட்டுமாறு நேர்கோடுகளை வரைக. $A\widehat{C}B = 2\alpha$ ஆகுக. மூலகம் PQQ_1P_1 ஐக் கருதுக. P யின் ஆள்கூறுகள் (x, y) எனின்,

படம் 4.23. சீரான வட்டத் துண்டமொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம்..

இம்மூலகத்தின் உயரம் $2y$; அதன் அகலம்,

$$MN = PQ \text{ கோசை} \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$
$$= a \text{ சைன் } \phi .\ \delta\phi.$$

இனி, $y = a$ சைன் ϕ ; மேலும், y அச்சிலிருந்து துண்டு PQQ_1P_1 இன் ஒவ்வொரு புள்ளியின் மிகக் குறுகிய தூரமும் $OM = a$ (1 – கோசை ϕ) என்பதற்குச் சமன். வரிப்படத்தின் தளத்துக்குச் செங்குத்தாக ஆற்றும் புவியீர்ப்புச் செறிவு g எனின், OY பற்றி இத்துண்டின் நிறையின் திருப்பம்,

$$2a \text{ சைன் } \phi .\ a \text{ சைன } \phi .\ \delta\phi . \sigma g a\ (1 - \text{கோசை } \phi)$$
$$= 2\sigma g a^3 \text{ சைன்}^2 \phi\ (1 - \text{கோசை } \phi)\delta\phi\ ;$$

[இங்கு, σ = பரப்பளவலகொன்றின் திணிவு.]

வட்டத் துண்டத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{2}a^2 (2\alpha -$ சைன $2\alpha)$ ஆகும். எனவே, புவியீர்ப்பு மையத்தின் தானம்,

$$\bar{x} = \frac{2\int_0^{\alpha} a^3(\text{சைன்}^2\phi - \text{சைன்}^2\phi \text{ கோசை } \phi)d\phi}{\frac{1}{2}a^2 (2\alpha - \text{சைன் } 2\alpha)}$$

$$= \frac{4a\left[\int_0^{\alpha} \text{சைன்}^2\phi\ d\phi - \int_0^{\text{சைன் } \alpha} \text{சைன்}^2\phi\ d(\text{சைன் } \phi)\right]}{2\alpha - \text{சைன் } 2\alpha}$$

$$= \frac{2a}{\alpha - \text{சைன்}\alpha \text{ கோசை}\alpha}\left[\frac{\alpha - \frac{1}{2}\text{ சைன் } 2\alpha}{2} - \frac{\text{சைன்}^3\alpha}{3}\right]$$

$$= a - \frac{2}{3}a\left[\frac{\text{சைன்}^3\alpha}{\alpha - \text{சைன் } \alpha \text{ கோசை } \alpha}\right]$$

என்பதாலும், வட்டத் துண்டமானது Ox பற்றி சமச்சீரானதாதலின் $\bar{y} = 0$ என்பதாலும் தரப்படுகிறது.

இனி, சில கூட்டுச்சேல்களின் ஆவர்த்தன காலங்களைத் தொடர்ந்து ஆராய முடிகின்றது.

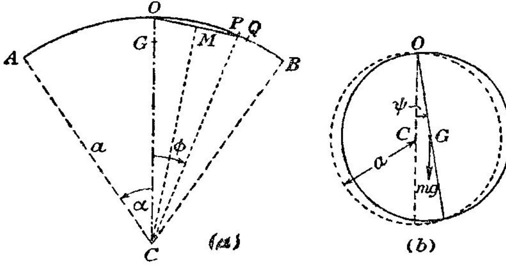
உச்சி ஊடாகச் செல்லும் கிடையச்சொன்று பற்றி சீரான வட்டவில்லொன்றின் குற்றலைவுகள்.—படம் 4·24 (a) யில், AOB என்பது நீளவலகொன்றிற்குத் திணிவு μ கொண்டதும், அதன் வளைவு மையம் C யில் கோணம் 2α வை எதிரமைக்கின்றதும், புவியீர்ப்பால் தூண்டப்பட்டு அதன் உச்சி O ஊடாகச் செல்கின்ற கிடையச்சுப் பற்றி அலைவுகளை ஆற்றுகின்றதுமான சீரான வட்ட வில்லொன்றுருகுக. தொங்கலச்சைப் பற்றி இவ்வில்லின் சடத்துவத் திருப்பம் I தேவைப்படுகிறது. நீளம் $a.\delta\phi$ கொண்ட ஒரு சிறு மூலகம் PQ வைக் கருதுக ; இங்கு $\delta\phi$ என்பது $\widehat{PCQ}$ வும் ϕ என்பது $\widehat{OCP}$ யும் ஆகும்.

இம்மூலகத்தின் திணிவு $\mu a.\delta\phi$; தொங்கலச்சுப் பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பம் $(\mu a.\delta\phi)\,OP^2 = \mu a.\delta\phi(2OM)^2$; இங்கு M ஆனது OP யின் நடுப்புள்ளி ஆகும். ஆனால், $OM = a$ சைன் $\frac{1}{2}\phi$. எனவே, தொங்கலச்சுப் பற்றி முழு வில்லின் சடத்துவத் திருப்பம்

$$I = 2\int_0^\alpha \mu a\, OP^2\, d\phi = 8\mu a^3 \int_0^\alpha \text{சைன்}^2 \frac{\phi}{2}\, d\phi$$

$$= 4\mu a^3 \int_0^\alpha (1 - \text{கோசை}\,\phi) d\phi$$

$$= 4\mu a^3[\alpha - \text{சைன்}\,\alpha].$$



படம் 4·24. புவியீர்ப்பால் தூண்டப்பட்டு, உச்சியூடாகச் செல்கின்ற கிடையச்சொன்று பற்றி (*a*) சீரான வட்ட வில் (*b*) சீரான வட்டத் தடம் என்பன ஆற்றும் குற்றலைவுகள்.

எனவே, சிறு கோணப்பெயர்ச்சிகளுக்கு ஊசலின் இயக்கம்,

$$I\,\ddot{\psi} + mgh\,\psi = 0.$$

இங்கு குறிப்பிட்டவொரு கணத்தில் ஊசலின் கோணப் பெயர்ச்சி ψ உம், O விலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் h உம், ஊசலின் திணிவு $m = 2\mu a\,\alpha$ வுமாகும். இதை

$$4\mu a^3[\alpha - \text{சைன்}\,\alpha]\,\ddot{\psi} + 2\mu g a\alpha\left[a\left(\frac{\alpha - \text{சைன்}\,\alpha}{\alpha}\right)\right]\psi = 0$$

என்று எழுதலாம்.

$$\therefore\quad \ddot{\psi} + \frac{g}{2a}\psi = 0.$$

எனவே இயக்கம் எளிய இசையானது; மேலும் அதன் ஆவர்த்தன காலமும் இவ்வில்லை ஒரு பகுதியாகக் கொண்ட வட்டத்தின் விட்டத்துக்குச் சமனான நீளமுடைய எளியவூசலொன்றின் ஆவர்த்தன காலமும் ஒன்றே யாம்; அதாவது,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

இக்காலமானது வில்லின நீளத்தைச் சாராது என்பது குறித்தற்பாலது ; எனவே, அதன பரிதியிலுள்ள புள்ளியொனறினூடாகச் செலலும் கிடையச்சுப் பற்றி நிலைகுத்ததுத் தளமொனறில் அலைவுகளை ஆற்றுகின்ற முழு வட்டத் தடமொனறின அலைவுக் காலமும் இதே சமனபாட்டால் தரப்படுகிறது. இவ்வுணமையைப் பின்வருமாறு மெய்ப்பிககலாம்.

O ஆனது, படம 4·24 (b), ஆரை a யையும நீளவலகொன்றிறகுத் திணிவு μ ஐயும் உடைய வட்டமொனறின தொஙகற புள்ளி ஆகுக. எனவே, அதன் முழுத்திணிவு $2\pi a\mu$; அதன மையமூடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செங்குததாகவும செல்லும் அச்சொனறு பற்றி அதன் சடததுவத் திருப்பம் $(2\pi a.\mu)a^2 = 2\pi\mu a^3$. அபபொழுது தொங்கலச் சுக்கும் சடத்துவத் திருப்பத்தைக் கணிப்பதறகுப் பயன்படுததிய C ஊடாகச் செல்லும் அச்சு C யிற்கும் இடையேயுள்ள தூரம a ஆதலின், தொங் கலச்சுப் பற்றி அதன் சடததுவத திருபபம $I = 2\pi a\mu(a^2 + a^2)$ ஆகும். குறிப்பிட்டவொரு கணததில் ஊசலின் சிறு கோணப் பெயர்சசி ψ எனின், அதன் இயக்கம்,

$$I\ddot{\psi} + mga\psi = 0,$$

அதாவது
$$4\pi\mu a^3\ddot{\psi} + 2\pi\mu g a^2\psi = 0.$$

∴ முன்போலவே,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

பௌதிகத் தராசொன்றின் அலைவுகள்.— எளிமையையிட்டுத் தரா சானது நீளம் a கொண்ட சமப் புயஙகளை உடையது எனவும அதன் மூன்று கத்தியோரங்களும் ஒரே தளமானவை எனவும் கொள்ளப்படும்.

படம் 4·25. சுமையேற்றிய பௌதிகத் தராசொன்றின் அலைவுகள்.

தராசின் வளையினதும் அதைப் பற்றியிருக்கின்ற உறுப்புக்களினதும் திணிவு M ஆகுக. இத்தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது, படம் 4·25 (a) ஐ ஒப்., பொறுதி O விற்குக் கீழ், தூரம் r இல் இருக் கிறது எனக் கொள்க. தராசுத் தட்டுக்களின் புவியீர்ப்பு மையஙகள் G_1 உம் G_2 உம் ஆகுக. தராசானது நிலையியற் சமநிலையிலிருக்கும்பொழுது இப் புள்ளிகள், O விற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே தூரம் b யில் இருக் கின்றன. வளை சுயாதீனமாக ஊசலாடும்பொழுது அதன் சமநிலைத்

தானத்திலிருந்து வளையின் சிறு கணநிலைக் கோணப் பெயர்ச்சி ψ என்க, படம் 4·25 (b) யை ஒப. வளையும தட்டுககளும் விறைப்பான தொகுதி யொன்ருக அமையாதபடியால் ஆவர்த்தன காலத்திற்குப் பெறுமான மொன்றைப் பெறும்பொருட்டுக கோண உநதம் மாறும் வீததததை மீளதரு இணைககுச் சமனபடுதத முடியாது ; ஆனால், தொகுதியின் முழுச் சக்தியையுங கருதிப் பினவருமாறு முயலவோம்.

G ஊடாகவும் வரிப்படத் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் செல்கின்ற கிடையச்சுப் பற்றி வளையின் சுழிப்பாரை κ எனின், வளையின இயக்கச் சக்தி $\frac{1}{2}M(r^2+\kappa^2)\dot{\psi}^2$ ஆகும். இனி, ஒவ்வொரு தட்டினதும புவியீர்ப்பு மையத் தின இடப்பெயர்ச்சி $a\psi$ ஆகும்; இது b யைச் சாராது. இவவிடப்பெயர்ச்சி மாறும்பொழுது ஒவவொரு தட்டினதும் வேகம் $a\dot{\psi}$ ஆகும்; அதாவது அவ்வொவ்வொன்றினதும இயககச் சக்தி $\frac{1}{2}\mu a^2\dot{\psi}^2$ ஆகும்; இங்கு, μ தட்டின் திணிவு ஆகும். வளையின நிலையியற சமநிலைத் தானத்தைப் பூச்சிய நிலைச் சகதித் தானம் எனக் கொள்வோமாயின, வளையின் ஒருச்சரிவு ψ ஆகும் பொழுது அதன் நிலைச சக்தி $Mgr\,(1-\text{கோசை}\,\psi) \simeq \frac{1}{2}Mgr\,\psi^2$ ஆகும். தட்டொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம இறஙகும் அதே அளவிற்கு மறறையதின் புவியீர்ப்பு மையம் ஏறுகிறபடியால், தட்டுக்களுடன தொடர்புற்ற நிலைச் சக்தி யின் மொதத மாறறம பூசசியமாகும். எனவே, தொகுதியின் முழுச சக்தியும்

$$\tfrac{1}{2}M(r^2+\kappa^2)\dot{\psi}^2+\tfrac{1}{2}Mgr\psi^2+2\left\{\tfrac{1}{2}\mu a^2\dot{\psi}^2\right\}$$

ஆகும். இது ஒரு மாறிலி. நேரததைக் குறித்து இதனை வகையிட,

$$\left\{M(r^2+\kappa^2)+2\mu a^2\right\}\ddot{\psi}+Mgr\psi=0.$$

எனவே, இயக்கம எளிய இசையானது; அதன ஆவர்த்தன காலம்

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{M(r^2+\kappa^2)+2\mu a^2}{Mgr}}.$$

இனி, தட்டு ஒவ்வொனறும் செறிசுமை m ஐக காவுமாயின் தட்டு, அதன் சுமை என்பவறறின் புவியீர்ப்பு மையத் தானமும் மாறும்; ஆனால், ஆவர்த்தன காலததிற்கான கோவையில் b தோன்ருதபடியால், தட்டுக் களில் சமமான சுமை ஏறறப்பட்டிருக்குமிடத்து அது

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M(r^2+\kappa^2)+2(\mu+m)a^2}{Mgr}}$$

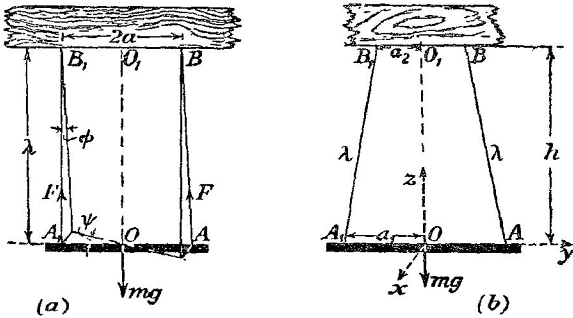
எனபதால் தரப்படுகிறது.

இம்முடிவுகளை மெய்ப்பிக்கும்பொருட்டுத் தராசொன்றின் ஆவர்த்தன காலம் அளக்கப்பட்டது. அடுத்த தட்டுககளின் தாங்கிகளிலிருந்து சிறு நூல் துண்டுகளால் இரு சமனான 100 கி. திணிவுகள் தொங்கவிடப்பட்டன; திணிவுகளின் மையங்கள் கத்தியோரங்களுக்குக்கீழ் தூரம் b_1 இல் இருந்தன. கடைசியாக கத்தியோரங்களுக்குக்கீழ் தூரம் b_2 இலே தராசுத் தட்டுக்களில், திணிவுகளும் நூல் துண்டுகளும் வைக்கப்பட்டன. T_1, T_2 என்பன இங்கு கிடைக்கப்பெற்ற ஆவர்த்தன காலங்கள் ஆகுக.

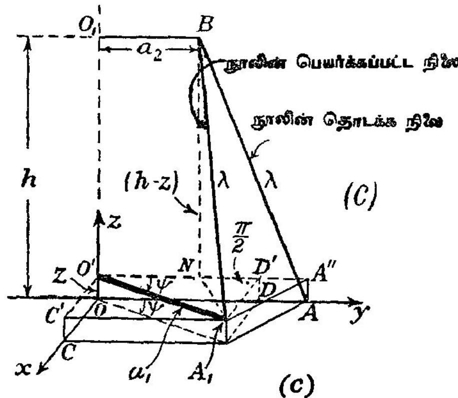
$2a = (13{\cdot}1 \pm 0{\cdot}1)$ சமீ. என்னுமிடத்து $T_0 = (9{\cdot}50 + 0{\cdot}06)$ செக்.
$b_1 = (12{\cdot}5 \pm 0{\cdot}2)$ சமீ. என்னுமிடத்து $T_1 = (13{\cdot}15 + 0{\cdot}06)$ செக்.
$b_2 = (24{\cdot}2 \pm 0{\cdot}2)$ சமீ. என்னுமிடத்து $T_2 = (13{\cdot}08 + 0{\cdot}06)$ செக்.

T_1, T_2 என்பவற்றின் பெறுமானங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்குமிடத்து ஆவர்த்தன காலமானது b என அழைக்கப்பட்ட கணியத்தைச் சாராது எனத் தெரிகிறது.

இருநூல் தொங்கல்.—இருநூற்றொங்கலானது, புவியீர்ப்பால் கிடைத்தளமொன்றில் குற்றலேவுகளை ஆற்றுமாறு சமநீளமுள்ள, சமச்சீராகச்



படம் 4·26. இருநூற்றொங்கல்கள் (a) சமாந்தர நாண்கள் (b) சமாந்தரமல்லாத நாண்கள்.



படம் 4·26 (c).

செப்பஞ் செய்யப்பட்ட, இரு நாண்கள் அல்லது இரு நூல்களால் தொங்க விடப்பட்ட, பாரமான ஒரு சீரான கோல் அல்லது **சட்டம்** ஆகும். நிகழ் தகவுடைய இரு எடுத்துக்காட்டுகளைக் கருதுவோம்.

(*a*) **சமாந்தர நாண்கள்.**—ஒவ்வொரு நாணினதும் நீளம் λ எனவும், நாண்களின் இடைத் தூரம் $2a$ எனவும் கொள்வோம். பித்தளையாலான, சீரான குறுக்கு வெட்டும் அடர்த்தியும் உடைய உருளை அல்லது கோல் AA_1 ஐ அவை தாங்குகின்றன என்க, படம் 4·26 (*a*). அவற்றின் மேல் முனைகள் B, B_1 களில் கிடையான வளையொன்றுடன் நாண்கள் இணைக்கப் பட்டிருக்குமாயின், சட்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையமூடாகச் செல்கின்ற ஒரு நிலைக்குத்தச்சு OO_1 பற்றி கிடைத்தளமொன்றில், (நாண்கள் நீண்டவையாகவும் கோணப்பெயர்ச்சி சிறிதாயும் இருக்குமாயின்) புவியீர்ப்பின்கீழ் குற்றலைவுகளை ஆற்றுமாறு சட்டத்தைத் தூண்டலாம்.

மேற்படி அச்சுப் பற்றி ஒரு சிறு கோணம் ψ அளவாற் சட்டம் சுழல்கிறது எனக் கொள்க. அப்பொழுது, ஒவ்வொரு நாணினதும கீழ் முனையுறும் பெயர்ச்சி $a\psi$ ஆகும் ; மேலும், நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன நாண் ஒவ்வொன்றினதும சாய்வுக் கோணம் ϕ எனின்,

$$\lambda\phi = a\psi.$$

ϕ யினுல் வரையறுத்த தானத்தில் சட்டம் இருக்கும் பொழுது ஒவ்வொரு நாணிலுமுள்ள இழுவை F ஆகுக ; சட்டத்தின் திணிவு m உம் புவியீர்ப் பின் செறிவு g உம் எனின

$$mg = 2F \text{ கோசை } \phi\,;$$

நாண்கள் அண்ணளவில் எப்பொழுதும நிலைக்குத்தாக இருக்குமாயின் இது

$$\doteqdot 2F.$$

நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன நாண்கள் கோணம் ϕ யை ஆக்குமாயின், நாணுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற ஒவ்வோர் உருளை முனையிலும் உள்ள விசை F சைன் ϕ ஆகும். இவ்விசைகள் உருளையின் அச்சுககுச் செங்குத்தாகத் தாக்கிக் கோலை அதனது சமநிலைத் தானத்திற்கு மீளுமாறு தூண்டுகின்றன. சுழறசியச்சுப் பற்றி இவ்விசைகளின் திருப்பம் (2F சைன் ϕ)a, அல்லது ϕ சிறிதாயின் $2F\phi a$ ஆகும். $\frac{mga^2}{\lambda}.\ \psi$ என்று எழுதக்கூடிய இவ்விணையானது ψ யின் குறைதலுக்கு ஏதுவாக இருக்கிறபடியால், உருளையின் இயக்கம்

$$I\ddot{\psi} + \frac{mga^2\psi}{\lambda} = 0$$

என்பதால் எடுத்துரைக்கப்படுகிறது ; இங்கு I, புவியீர்ப்பு மையமூடாகச் செல்கின்ற நிலைக்குத்தச்சுப் பற்றி கோலின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும். அதே அச்சுப் பற்றிக் கோலின் சுழிப்பாரை κ எனின், $I = m\kappa^2$; அப்பொழுது மேற்படிச் சமன்பாடு

$$\ddot{\psi} + \frac{ga^2}{\kappa^2\lambda}.\psi = 0$$

எனின், ஆவர்த்தன காலம்

$$T = 2\pi\frac{\kappa}{a}\sqrt{\frac{\lambda}{g}}.$$

(b) சமாந்தரமல்லாத நாண்கள்.—சமனான நீளங்களையுடைய ஆனால் சமாந்தரமல்லாத நாண்களுக்கு, அவை கோலுடன் சமச்சீராய் இணைக்கப்பட்டிருக்கிற இடத்தில் அவற்றின் இடைத்தூரம் $2a_1$ உம், தொகுதியைத் தாங்கும் கிடையான வளையுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிற இடத்தில் அவற்றின் இடைத்தூரம் $2a_2$ உம் ஆகுக. படம் 4·26(b) யில் காட்டியுள்ள அச்சுக்கள் பற்றி A யின் தொடக்க ஆள்கூறுகள் $(0, a_1, 0)$ ஆகுக. AA_1, BB_1 என்பவற்றின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடாகிய நிலைக்குத்தச்சு OO_1 பற்றித் தொகுதி ஒரு சிறு கோணம் ψ இனூடு சுழலுமாயின் இவ்வாள்கூறுகள்

$$a_1 \text{ சைன் } \psi, \quad a_1 \text{ கோசை } \psi, \quad z$$

ஆகின்றன ; z ஆனது சட்டத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் எறும் தூரம் ஆகும். ஒவ்வொரு கயிற்றின் நீளம் λ உம் மாறாமல் இருக்கிறபடியால் $h = OO_1$ எனக் கொண்டும், படம் 4·26 (c) யைப் பயன்படுத்தியும்

$$h^2 + (a_1 - a_2)^2 = \lambda^2 = BN^2 + [(A_1D')^2 + A_1N^2]$$
$$= (h - z)^2 + a_1^2 \text{ சைன்}^2 \psi + (a_1 \text{ கோசை } \psi - a_2)^2.$$

z^2 சிறிது எனக் கருதப்பட்டுப் புறக்கணிக்கப்படுமாயின் மேற்படிச் சமன்பாடு

$$hz = a_1 a_2 (1 - \text{கோசை } \psi)$$

எனச் சுருங்கும் ; ψ சிறிதாயின்

$$hz = \tfrac{1}{2} a_1 a_2 \psi^2.$$

எனவே, கோலின் நிலைச் சக்தியின் அதிகரிப்பு

$$mgz = \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2}{h} g . \psi^2.$$

எனவே, சக்திச் சமன்பாடு

$$\tfrac{1}{2} m\kappa^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2}{h} g \psi^2 = \text{மாறிலி}.$$

நேரம் தொடர்பாக வகையிட,

$$m\kappa^2 \ddot{\psi} + \frac{a_1 a_2}{h} g \psi = 0.$$

எனவே இயக்கம் எளிய இசையானது ; அதன் ஆவர்த்தன காலம்

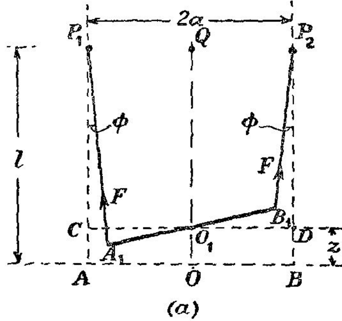
$$T = 2\pi \frac{\kappa}{\sqrt{a_1 a_2}} . \sqrt{\frac{h}{g}} .$$

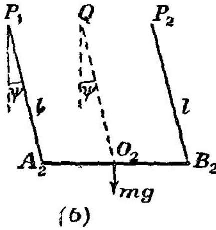
எடுத்துக்காட்டு.—நீளம் $2a$ உம், திணிவு m உம் கொண்ட சீரான கோலொன்று, ஒவ்வொன்றும் நீளம் l ஐ உடைய இலேசான நிலைக்குத்தான இரு கயிறுகளால் தாங்கப்பட்டுக் கிடையான நிலையில் தொங்குகிறது. ஒவ்வொரு கயிற்றினதும் கீழ்முனை கோலின் முனையொன்றோடு இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது ; அதன் மேன்முனை தக்க தாங்கியொன்றிலுள்ள நிலையான புள்ளியொன்றுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதன் மையமூடாகச் செல்கின்ற நிலைக்குத்தச்சுப் பற்றிக் கோலுக்குக் கோண வேகம் ω வழங்கப்படுகிறது. g புவியீர்ப்புச் செறிவு எனின், கோல் தூரம் $\frac{a^2\omega^2}{6g}$ எறும் எனக் காட்டுக; மேலும், நிலையியற் சமநிலைத் தானம்பற்றி குற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க; தொகுதியின் வேறிரு இயலுமான அலைவு முறைகளை ஆராய்க.

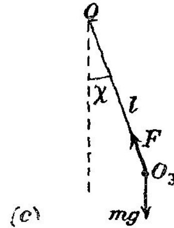
AB ஆனது, படம் 4·27 (a), கோலின தொடக்கநிலை ஆகுக ; அபபொழுது, கயிறுகள் AP_1, BP_2 எனபன நிலைகுத்தாக இருக்கும். கோலானது நிலைகுத்தாகத் தூரம் z ஏற அதன அச்சானது கோணம θ இனூடு சுழன்றதும, அதன நிலை A_1B_1 ஆகுக. அதே கணத்தில நிலைகுத்துக் கோட்டுடன கயிறுகளின சாயவு ϕ ஆகுக ; A_1B_1 ஊடான கிடைத் தளத்தில P_1, P_2 எனபவற்றின எறியங்கள முறையே C, D ஆகுக. சக்திச சமனபாடு

$$\tfrac{1}{2}m\dot{z}^2 + \tfrac{1}{2}mK^2\dot{\theta}^2 + mgz = mg(0) + \tfrac{1}{2}mK^2\omega^2$$

ஆகும் ; இங்கு பயனபடுத்தியுள்ள குறியீடுகள அவற்றின் வழக்கமான கருத்துக்களை உடையன.







படம் 4·27. சமனான, நிலைக்குத்தான இரு கயிறுகளால் கிடையாகத் தாங்கப்பட்ட சீரான கோலொன்றின் இயலுமான மூன்று அதிர்வு முறைகள்.

இனி, $z = l(1 - \text{கோசை}\,\phi)$; $A_1C = 2a$ சைன $\tfrac{1}{2}\theta = l$ சைன் ϕ.

$$\therefore \quad \dot{z} = l\,\text{சைன}\,\phi.\dot{\phi} = \text{தான}\,\phi.a\,\text{கோசை}\,\tfrac{1}{2}\theta.\dot{\theta}$$

$$= \frac{a^2\,\text{சைன}\,\theta.\dot{\theta}}{[l^2 - 4a^2\,\text{சைன}^2\,\tfrac{1}{2}\theta]^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}a^2\dot{\theta}^2\left[\frac{a^2\,\text{சைன}^2\,\theta}{l^2 - 4a^2\,\text{சைன}^2\,\tfrac{1}{2}\theta} + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}\frac{a^2}{3}\cdot\omega^2 - gz.$$

இது கோலின எந்த நிலையிலுமுள்ள கோண வேகத்தைத் தருகிறது. $\dot{\theta} = 0$ ஆகுமிடத்துக் கோல ஒருகண நேரம் ஓயவிலிருக்கும் ; அதாவது, கோலானது

$$[z]_{\dot{\theta}=0} = \frac{1}{6}\cdot\frac{a^2\omega^2}{g}$$

என்பதால தரப்படும் நிலைக்குத்துத் தூரத்தினூடாக ஏறியிருக்கிறது.

கோல AB யின் மையம் O வினூடாகச் செலலுகினற நிலைக்குத்தச்சுப் பற்றி குற்றலைவு ஒனறினிடத்து, ஒவ்வொரு கயிறறினுமுள்ள இழுவை F எனின

$$2F \text{ கோசை } \phi = mg.$$

இயக்கச் சமன்பாடு

$$m \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \ddot{\theta} + 2F \text{ சைன் } \phi \cdot a = 0.$$

θ சிறிது எனின், ϕ உம் சிறிது ஆகும் ; அப்பொழுது $l\phi = a\theta$; மேலும் $2F = mg$.

$$\therefore \quad m \cdot \frac{a^2}{3}\ddot{\theta} + mg \cdot \frac{a^2}{l} \cdot \theta = 0.$$

எனவே, ஆவர்த்தன காலம

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

இது, ப. 159 இல் தரப்பட்டுளள பொதுவான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கிடைத்த விடை வுடன் ஒத்திருககிறது.

கோலைத் தாங்கும் புள்ளிகள P_1P_2 ஊடான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலும் அக்கோல அசையக் கூடும். அதன் நிலையியற் சமநிலைத தானத்திலிருந்து இவவணணம் கோணம் ψ யினூற பெயாககப்பட்டிருககினற கோலைப் படம் 4·27 (b) காட்டுகிறது. P_1P_2 எனபதின் நடுப்புள்ளி Q வினூடாகச செல்லும இடையச்சொன்று பற்றிக் கோலின் சடததுவத் திருப்பம் சமாந்தரவசசுத் தேற்றததால $m(\frac{1}{3}a^2 + l^2)$ ஆதலின, இயக்கச சமன்பாடு

$$I\ddot{\psi} + mgl \text{ சைன } \psi = 0$$

ஆகும். எனவே, இவ்வியக்க வகைககுரிய குற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலம்

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2 + l^2}{gl}}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது என வழக்கமான முறையாகக் காண்கிறோம்.

குறிப்பிட்ட எந்தக் கணத்திலும் P_1P_2 ஊடாகச் செல்கினற நிலைக்குத்துத் தளத்திலிருந்து கோலின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரே தூரத்திலிருககுமாறு கோல அசையும் பொழுதும் அது அலைவுகளை ஆற்றலாம். நிலைக்குததுக் கோட்டுடன ஒவ்வொரு கயிற்றினதுஞ் சாய்வு χ எனின, தொகுதியின் முனைப்பார்வை தரும், படம 4·27 (c) யை ஒப்., கயிறொன்றிலுள்ள இழுவை F,

$$2F \text{ கோசை } \chi = mg$$

என்பதாலும், இயக்கச் சமன்பாடு

$$I\ddot{\chi} + 2F \text{ சைன } \chi = 0$$

என்பதாலும் தரப்படுகின்றன ; இங்கு, I ஆனது Q ஊடாகவும் கோலின் அச்சுக்குச் சமாந்தரமாகவும் செல்கின்ற அச்சொன்று பறறிக் கோலின் சடத்துவத் திருப்பமாகும் ; அதாவது $I = ml^2$. இஙகு χ சிறிதாயின் உடனடியாகவே

$$\ddot{\chi} + \frac{g}{l}\chi = 0,$$

அதாவது

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

இங்கு T_3, இவ்வெடுத்துக்காட்டுக்குரிய ஆவர்த்தன காலமாகும் ; தொகுதியானது நீளம் l கொண்ட எளிய ஊசலொன்றைப் போல் ஆற்றுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு.—(*a*) நீளம் $2a$ ஐயும் திணிவு m ஐயும் உடைய சீரான கோலொன்று அதன் முனை A யில் நிலைத்த தாங்கியொன்றுடன் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அது A ஊடாகச் செல்கின்ற நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் கூட்டுசெல்போல் அலைகிறது. அதன் குற்றலைவுகளின் மீடிறனைக் காண்க.

(*b*) திணிவு βm கொண்ட துணிக்கையொன்று B யில் கோலுடன் இணைக்கப்பட்டிருப்பின், கோலின் அலைவுகளின் மீடிறனானது

$$\sqrt{\frac{1+2\beta}{1+3\beta}}:1$$

எனனும விகிதததில் குறைககப்படுகிறது என நிறுவுக.

(*c*) கோலானது காலநதவறுத கடிகாரமொன்றின ஊசலாகவும், துணிக்கை இணைக்க அது நாளொனறிற்கு மூனறில் ஒரு நிமிடம பிநதுகிறதாகவும் இருப்பின,

$$3\beta(3N^2-6N+1)=6N-1$$

என நிறுவுக ; இங்கு N, நாளொனறிலுள்ள நிமிடங்களைத தரும்.

(*a*) இவ்வெடுத்துககாட்டில் ஊசலின ஆவர்த்தன காலம

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r^2+K^2}{rg}}=2\pi\sqrt{\frac{a^2+\frac{1}{3}a^2}{ag}}=2\pi\sqrt{\frac{4}{3}\frac{a}{g}}=4\pi\sqrt{\frac{a}{3g}}.$$

[தேர்வின்போது அடிப்படைத் தத்துவங்களிலிருநதே இசசூததிரத்தைப் பெறல் வேணடும். இம்முறையைப பல எடுததுககாட்டுககளிலும் விவரமாக விளக்கியிருக்கிறபடியால் இச்சூத்திரமானது கூட்டுசெலொனறின ஆவாத்தன காலததிறகான சூத்திரத்திலிருந்து பெறப் பட்டது.]

(*b*) படம் 4.28 இல் இத்தொகுதியானது காட்டப்பட்டிருக்கிறது. குறிப்பிட்ட கணமொன் றில கோலின் கோணப் பெயாச்சி ψ எனின, இயககச் சமன்பாடு

$$I\ddot{\psi}+\Gamma=0.$$

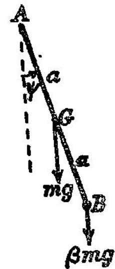
இங்கு, I ஆனது A ஊடாகச் செலலும் கிடையச்சொனறு பற்றிக் கோலின் சடத்துவத் திருப்பமும், Γ ஆனது கோலைத் தாக்குகின்ற புற விசைகளாலான மீள்தரு இணையும் ஆகும. ψ சிறிது என்னும் நிபந்தனை யின் பேரில்

$$\left[m\left(\frac{a^2}{3}+a^2\right)+\beta m\cdot 4a^2\right]\ddot{\psi}+(mga+\beta mg\cdot 2a)\psi=0.$$

எனவே ஆவர்ததன காலம்

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}a^2+4\beta a^2}{(a+2a\beta)g}}=2\pi\sqrt{\frac{4(1+3\beta)}{3(1+2\beta)}\cdot\frac{a}{g}}.$$

$\therefore$ மீடிறனானது $\sqrt{\dfrac{1+2\beta}{1+3\beta}}:1$ என்னும விகிதததில் குறைககப்படுகிறது.



படம் 4·28.

(*c*) ஊசல காலந்தவறுது ஆற்றும்பொழுது ஆவர்த்தன காலம் செக் கன்களில் t ஆகுக, அதாவது $t=2$. அப்பொழுது, அதன் ஆவாத்தன காலம் நிமிடங்களில்

$$\frac{t}{60}=2\pi\sqrt{\frac{4a}{3g}}\times\frac{1}{60}.$$

நாளொன்றில் N நிமிடங்கள் உள எனவும், அதே காலத்தில் கடிகாரம் நிமிடம் ஒன்றின் மூன்றில் ஒன்று பிந்துகிறது எனவும் ஆயின் மீடிறன் களின் விகிதம்

$$\frac{\frac{N}{2}-\frac{1}{6}}{\frac{N}{2}}=\sqrt{\frac{1+2\beta}{1+3\beta}}.$$

$$\therefore \left(\frac{3N-1}{3N}\right)^2=\frac{1+2\beta}{1+3\beta}.$$

$$\therefore \quad 3\beta(3N^2-6N+1)=6N-1.$$

பயிற்சி IV

4·01. *சீரான வட்ட வில்லொன்றின் திணிவு மையத் தானத்தைக் காண்க.*

நிறை **W** *கொண்ட சீரான சங்கிலியொன்று நிலையான அழுத்தமான கோளமொன்றின் மிகவுயர்ந்த புள்ளி* A *யில் இணைக்கப்பட்டு அக்கோளத்தின் பரப்பில் ஓய்வாயிருக்கிறது ; சங்கிலியின் சுயாதீன முனை மையத்தின் அதே மட்டத்தில் இருக்கிறது.* A *யிலுள்ள கிடையான இழுவை* $\frac{2W}{\pi}$ *என நிறுவுக.*

4·02. *நேர்கோடுகள்* $x=a$, $y=mx$, $y=0$ *என்பவற்றால் வரையறுத்த முக்கோணி அடரொன்றிற்கு, ஒவ்வொரு புள்ளிக்குமுரிய பரப்படர்த்தியானது உற்பத்தியிலிருந்து அளந்த தூரத்தின் வர்க்கத்துடன் நேராய் மாறுகிறது. முக்கோணியின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும்* $x=0$ *என்னும் நேர்கோடு பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பத்தையும் காண்க.*

$$\left[\bar{x}=\tfrac{4}{5}a,\ \bar{y}=\tfrac{3}{5}ma\,\frac{m^2+2}{m^2+3}\ ;\ \tfrac{2}{3}Ma^2.\right]$$

4·03. *கோலொன்றின் நேர்கோட்டடர்த்தி அதன் முனையொன்றிலிருந்து அளந்த தூரத்துடன் நேராய் மாறுகிறது. அதன் திணிவு மையத்தைக் காண்க. கோலின் மையம் பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பம்* $\frac{1}{12}ma^2$ *என நிறுவுக ; இங்கு, கோலின் நீளம்* a ; *அதன் திணிவு* m.

4·04. *வட்டம்* $x^2+y^2=a^2$ *இன் முதலாவது காற்பகுதியில், ஒவ்வொரு புள்ளிக்குமுரிய பரப்படர்த்தியானது* xy *யுடன் நேராய் மாறுகின்றது. இக்காற்பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம்*

$$\bar{x}=\bar{y}=\tfrac{8}{15}a$$

என்பவற்றால் தரப்படுகிறது எனவும், இரண்டில் ஏதேனுமொரு ஆள்கூற்றச்சுப் பற்றி சடத்துவத் திருப்பம் $\frac{1}{3}ma^2$ *எனவும் நிறுவுக ; இங்கு* m, *காற் பகுதியின் திணிவு ஆகும்.*

4·05. *தன் முனைப் புள்ளிகளை இணைக்கும் விட்டம் பற்றி ஆரை* a *யை உடைய அரைவட்டமொன்று சுழலும்பொழுது செவ்வகவச்சுக்களை குறித்து அதன் திணிவு மையம்*

$$\bar{x}=0,\ \bar{y}=\frac{2a}{\pi}$$

ஆகும் என பப்பசின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக ; இங்கு, Ox *அச்சானது மேற்படி விட்டத்துடன் பொருந்தியிருக்கிறது ;* O, *அவ்விட்டத்தின் நடுப்புள்ளி ஆகும்.*

மேலும், ஆரை a *கொண்ட, அரைவட்டப் பரப்பளவுடைய சீரான தகட்டுக்கு* $\bar{x}=0, \bar{y}=\frac{4a}{3\pi}$ *எனவும் நிறுவுக.*

4.06. *சமபக்க முக்கோணி வடிவமுள்ளதும் திணிவு* m *கொண்டதுமான சீரான அடரொன்று மூன்று சமனான, நிலைக்குத்தான, இலேசான கயிறுகளால் கிடையான நிலையில் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது ; இங்கு, ஒவ்வொரு கயிறும் கோணப் புள்ளியொன்றூடாகச் செல்லுகிறது. ஒவ்வொரு கயிற்றின் நீளமும்* $2a$; *இங்கு,* $2a$ *என்பது சுற்றுவட்டத்தின்*

விட்டமும் ஆகும். அதன் தொடக்க நிலைக்கு மேலாக அடரை உயரம் $2(1-n)a$ யினால் நிறுத்தி வைக்கும் பொருட்டுத் தேவையான இணை $mga\sqrt{1-n^2}$ ஆகும் என நிறுவுக; இங்கு $0<n<1$.

4.07. எளிய இசையான முறையில் ஏதேனுமொரு கணியம் மாறுகிறது என்பதின் பொருள் யாது? **வீச்சம், மீடிறன், அவத்தை** என்பவற்றிற்கு வரைவிலக்கணம் கூறுக.

எ.இ.இ. முறைப்படி நோகோடொன்றில் துணிக்கையொன்று அலைவுகளை ஆற்றுகிறது. அதன் உயர்வு ஆர்முடுகல் $5\pi^2$ சமீ. செக.$^{-2}$ ஆகும்; பூச்சியத் தானத்திலிருந்து 4 சமீ. தூரத்தில் இருக்கும்பொழுது அதன் வேகம் 3π சமீ. செக.$^{-1}$ ஆகும். துணிக்கையின் ஆவர்த்தன காலத்தையும் அதன் வீச்சத்தையும் கணிக்க. [2 செக., 5 சமீ.]

4.08. ஒவ்வொன்றும் 25 சமீ. நீளமுடைய இரு நுண்ணிழைகளால் 10 சமீ. விட்டமும், 0·5 சமீ. தடிப்பும் உடைய அலுமினியத் தகடொன்று சமச்சீராகவும் அதன் தளம் கிடையாகவும் இருக்குமாறு தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது; அவற்றின் மேல்முனைகளுக்கு இடையே தூரம் 4 சமீ. உம் கீழ்முனைகளுக்கு இடையே தூரம் 3 சமீ. உம் இருக்குமாறு இழைகள் அமைந்திருக்கின்றன. நிலைக்குத்தச்சு பற்றித் தகட்டின் சிறு கோணப் பெயர்ச்சிகளுக்கான ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க. [அலுமினியத்தின் அடர்த்தி 2·72 கி. சமீ$^{-3}$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.]

ஒவ்வொன்றும் 25 சமீ. நீளமுடையதும், ஓரம் வழியே சமச்சீராக ஒழுங்குபடுத்தியதுமான சமாந்தரமான மூன்று கயிறுகளால் தகடு கிடைத்தளமொன்றில் தொங்கவிடப்பட்டிருக்குமாயின் அதன் ஆவர்த்தன காலம் என்ன? [2·05 செக., 0·71 செக்.]

4.09. ஈயச் சன்னங்களால் சுமையேற்றிய பரிசோதனைக் குழாயொன்று, அதன் நீளத்தில் 15 சமீ. அமிழ்ந்திருக்குமாறு நீரில் மிதக்கிறது. அதன் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து நிலைக்குத்தாகப் பெயர்க்கப்பட்டபொழுது அதன் அலைவுக் காலம் 0·89 செக. எனக் காணப்பட்டது. இவ்வலைவுக் காலத்துக்கான பெறுமானமொன்றை எவ்வாறு முன்னரே கூறியிருக்கமுடியும் என்றும், எக்காரணங்களால் நோக்கிய ஆவர்த்தன காலமானது கணித்த ஆவர்த்தன காலத்தினின்றும் வேறுபடுகின்றது என்றும் காட்டுக. [0·78 செக்.]

4·10. இலேசான சுரி வில்லொன்றின் முனையில் இருக்கின்ற பொருளொன்று புவியீர்ப்பின் தாக்கத்தால் நிலைக்குத்தான அலைவுகளை ஆற்றுகிறது. பொருள் உருளை வடிவமாகவும் அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கின்றன; ஓரச்சு உருளையொன்றால் அப்பொருள் சூழப்பட்டிருக்கிறது; இரு உருளைப் பரப்புகளுக்குமிடையில் சிறு அகற்சி உளது. வேகத்துடன் நேராய் மாறக்கூடிய தடையொன்று உருளையின் இயக்கத்தைப் பதிக்குமாறு இவ்விடைவெளி மெல்லிய எண்ணெயால் நிரப்பப்பட்டிருக்கிறது. நேரம் t செக. இல், சமநிலைத் தானத்திற்குக் கீழே பொருளின் தூரம் x எனின், இயக்கச் சமன்பாடு $\ddot{x}+0\cdot1\dot{x}+4x=0$ ஆகும். இயக்கத்தின் ஆவர்த்தன காலத்தைப் பெறுக; வீச்சமானது அதன் தொடக்கப் பெறுமானத்தின் மூன்றில் ஒன்று வரை குறைக்கப்பட்ட காலத்தில் எத்தனை முழு அலைவுகள் ஆற்றப்பட்டுள்ளன என்பதைக் காண்க. [3·14 செக., 70.]

4·11. தராசுச் சட்டியொன்றின் அடுத்தடுத்த 'திரும்பற் புள்ளிகளை' நோக்கி எவ்வாறு அதன் ஓய்வு நிலையை உய்த்தறியமுடியும் என்பதைக் காட்டுக. அளவிடையின் குறுக்கே ஊசலாடும் தராசுச் சட்டியொன்றின் நுனி தன் பூச்சியத்தை முனையொன்றில் கொண்டிருக்கின்றது. அடுத்தடுத்த திரும்பற் புள்ளிகள் 11, 3, 8 என்னும் பிரிப்புக்களில் நிகழ்கின்றன. ஓய்வு நிலையை உய்த்தறிக. [6·08.]

4·12. ஆரை a கொண்ட இலேசான, பரும்படியான, வட்டவுருளையொன்று கிடையான தளமொன்றில் ஓய்வாயிருக்கின்றது; அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் திணிவு M கொண்ட துணிக்கையொன்று இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது; திணிவு m கொண்ட துணிக்கையொன்றைக் காவுகின்ற நீளம் l உடைய கயிறொன்று உருளையின் மிக உயர்ந்த புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. $M>m$ எனின், தொகுதி உறுதியானது என நிறுவுக. தொகுதியின் குற்றலைவுகளுக்கான ஆவர்த்தன காலம்

$$2\pi\left[\frac{l}{g}\left\{1+\frac{4a}{l}\cdot\frac{m}{M-m}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

எனக் காட்டுக ; உருளை, ஊசற்குண்டு என்பவற்றின் வீச்ச விகிதத்தைக் காண்க ; தொகுதிக்கு இரு சுயாதீனப் படிகள் இருக்கிறபோதிலும் அது ஒரேயொரு சுயாதீனக் காலத்தையே உடையது என்னும் உண்மை பற்றி விவாதிக்க.

4.13. கூட்டுசெலொன்றின் ஆவர்த்தன காலம் இழிவு ஆவதற்கான நிபந்தனையை ஆராய்க.

அதன் ஆவர்த்தன காலத்தை இழிவுப் பெறுமானம் T_0 ஐப் பெறும்பொருட்டு திணிவு M கொண்ட கூட்டுசெலொன்றின் சுழற்சியச்சின் நிலை செப்பஞ்செய்யப்படுகிறது. அடுத்துத் திணிவு m, ஆனால் புறக்கணிக்கத்தக்க பருமன், கொண்ட உலோகத் துணடொன்று ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையத்தில் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. (a) அச்சின் அதே நிலைக்குரிய புது ஆவர்த்தன காலம், (b) ஆவர்த்தன காலத்தின் புதிய இழிவுப் பெறுமானம் என்பவற்றிற்கான கோவைகளைப் பெறுக.

$$\left[r=K \text{ ஆகுமிடத்து இழிவு ; } (a)\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{M}{M+m}\right)}\cdot T_0;\ (b)\left(\frac{M}{M+m}\right)^{\frac{1}{4}} T_0.\right]$$

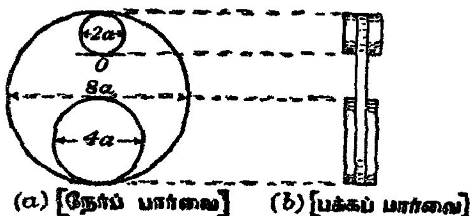
4·14. சீரான தடிப்புள்ள வட்ட வளையமொன்று திணிவு m ஐ உடையது ; அதன் உள்ளாரையும் வெளியாரையும் முறையே a, b ஆகும். அதன் மையமூடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள அச்சுப் பற்றி வளையத்தின் சடத்துவத் திருப்பம் $0{\cdot}5\ m(a^2+b^2)$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

நிலைக்குத்தாக இருக்கிற வளையத்தின் சொந்தத் தளத்தில், அதன் வெளியோரத்திலுள்ள புள்ளியொன்றூடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள அச்சொன்று பற்றி அலைவுகளை ஆற்றுமாறு வளையம் விடப்படுகிறது. சிறு வீச்சங்களுக்கு அலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்திற்கான கோவையொன்றைப் பெறுக.

(i) $a\to 0$, (ii) $a\to b$ ஆகும் பொழுது எளிய சமவலுவூசலின் நீளத்தைக் காண்க.

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{a^2+3b^2}{2bg}};\quad \text{(i) } \tfrac{3}{2}b,\ \text{(ii) } 2b.\right]$$

4.15. ஒரே தடிப்பும் அடர்த்தியும் உடைய ஐந்து வட்டத் தட்டுக்கள் படம் **4·29** இல் காட்டியுள்ளவாறு ஒன்றுடன் சேர்த்து இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன.



படம் 4·29.

ஆகச் சிறிதான வெளித் தட்டுக்கள் இரு கிடையான, சமாந்தரமான, நழுவலைத் தவிர்ப்பதற்குப் போதிய அளவு பரும்படியான தண்டவாளங்கள் மீது தாங்கப்பட்டிருக்கின்றன. தட்டுக்களின் ஆரைகள், காட்டியுள்ளவாறு, a, $2a$, $4a$ எனின், புவியீர்ப்பின் தாக்கத்தால் ஆற்றப்படும் குற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலம் $\dfrac{\pi}{4}\sqrt{339\dfrac{a}{g}}$ ஆகும் என நிறுவுக ; இங்கு, g என்பது புவியீர்ப்புச் செறிவு ஆகும்.

அதிகாரம் V

புவியீர்ப்புச் செறிவு

புவியீர்ப்புச் செறிவு.†—புவியீர்ப்புச செறிவைத் திருத்தமாகத் துணிவதற்குப் பயன்படுத்திய முறைகளும், புவியின் பரப்பில் அது மாறும் வகையும் இவ்வதிகாரத்தில் ஆராயப்படும. முந்திய அதிகாரமொன்றிலும் வேறு இடங்களிலும் இச்செறிவைத் துணிதலுக்கான வழக்கமான ஆய்கூட முறைகள் விவரித்துக் கூறபபட்டுளளன‡; இங்கு அவற்றைப்பற்றி மீண்டும் எடுத்துக் கூறப்படமாட்டாது. ஆயினும், புவியீர்ப்புச் செறிவின் அளக்கப்பட்ட பெறுமானமொன்றினமீது புவிச் சுழற்சியின விளைவு ஆராயற்பாலது.

புவியீர்ப்புச் செறிவின் அளக்கப்பட்ட பெறுமானமொன்றின் மீது புவிச் சுழற்சியாலாகும் விளைவு.—புவிப் பரப்பிலே, அகலாங்கு ϕ யில், புள்ளி A யிலே இருக்கிற திணிவு m கொண்ட பொருளொன்றைக் கருதுக, படம் $5{\cdot}01(a)$ ஐ ஒப். புவிச்சுழற்சி அச்சிலிருந்து A யின இழிவுத்தூரம் r ஆகுக; அதாவது, $r = AN = a$ கோசை ϕ; இங்கு N அச்சுமீது A யின் எறியமும, a புவியின் ஆரையும் ஆகும். புவிச்சுழறசியாற் பொருள் அடையும் ஆர்முடுகல் $\omega^2 r = \omega^2 a$ கோசை ϕ ஆகும்; அது AN வழியே உளது. இனி, A யில் இருக்கிற பொருள் மீது ஆற்றும் புவிக்கவர்ச்சி புவிச்சுழறசியைச் சாராது; அதாவது, அது எப்பொழுதும் AC வழியே அமைந்திருக்கும்; இங்கு C புவியின் மையம். இவ்விசை mg; இங்கு g புவியீர்பபுச் செறிவாகும்; பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, அது நேராக அளக்கக கூடிய கணியமொன்றன்று. A யில், அளக்கப்பட்ட புவியீர்ப்புச் செறிவுப் பெறுமானம் g_ϕ ஆகுக; அதாவது, பொருளின நிறை mg_ϕ ஆகும், படம் $5{\cdot}01$ (b) யைக் கருதுக; இங்கு ஊசற்குண்டு A யில் இருக்குமாறு அமைந்துள்ள எளியவூசலொன்று பெரிதும் மிகைப்பட்ட அளவிடையில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. புவியைக் குறித்து ஊசல் ஓய்வாயிருக்கும் பொழுது A மீது ஆற்றும் விசைகள C முகமாக ஈர்ப்புக் கவர்ச்சி mg உம் கயிற்றிலுள்ள இழுவை $F = mg_\phi$ உம் ஆகும். AN வழியே $\omega^2 a$ கோசை ϕ என்னும் ஆர்முடுகலைப் பொருளுக்கு அளிக்கும் விளையுளேயே இவ்விரு விசைகளும் தரவேண்டும். விசை முக்கோணியொனறுல்

$$(g_\phi)^2 = g^2 + (\omega^2 a \text{ கோசை } \phi)^2 - 2g \,.\, \omega^2 a \text{ கோசை } \phi \,.\, \text{கோசை } \phi.$$

மேலும் g யைக் காட்டிலும் $\omega^2 a$ மிகச் சிறிதாதலால் ω^4 ஐக் கொண்ட உறுப்பைப் புறக்கணிக்கலாம்; அன்றியும், $x \to 0$ ஆகுமிடத்து $(1+x)^{0{\cdot}5} = 1 + \frac{1}{2}x$ எனக் கிடைக்கும் செய்தியைப் பயன்படுத்த,

† முனனர் புவியீாப்பு ஆாமுடுகல எனறு அழைககப்பட்டது; I.P., ப. 27 ஐ ஒப்.

‡ I.P. ப. 30 ஐயும் ப. 45 ஐயும் ஒப.

$$g_\phi = g\left[1 - 2\frac{\omega^2 a}{g}\text{ கோசை}^2\,\phi\right]^{0\cdot5} = g - \omega^2 a\text{ கோசை}^2\,\phi$$
$$= g - \mu\text{ கோசை}^2\,\phi\,;$$

இங்கு $\mu = \omega^2 a$; இது புவியீர்ப்புச் செறிவின அளந்த பெறுமானத்தின் குறைவுக்குரிய உயர்வுப் பெறுமானம் ஆகும். $\phi = 90°$ ஆகுமிடத்து குறைவு பூச்சியமாகும் ; அதாவது $g_{90} = g$. எனவே,

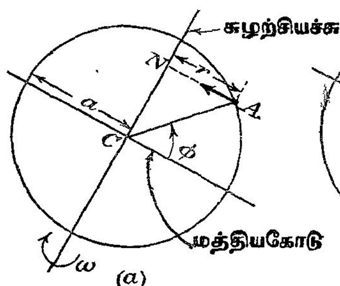
$$g_\phi = g_{90} - \mu\text{ கோசை}^2\,\phi.$$

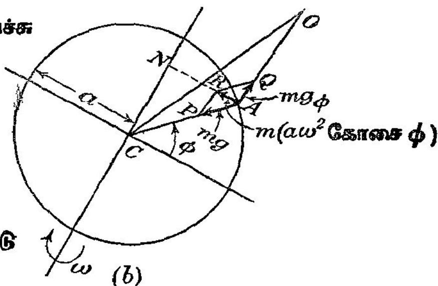
இனி $a = 6{\cdot}37 \times 10^8$ சமீ. ;

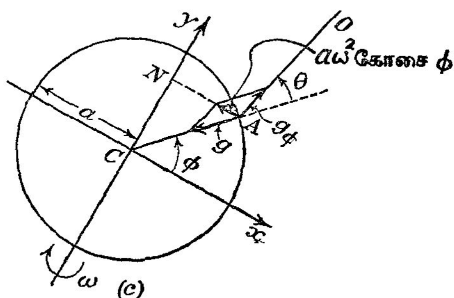
மேலும் $\omega = 2\pi \div (24 \times 3600)$

$= 7{\cdot}27 \times 10^{-5}$ ஆரையன். செக்$^{-1}$.

$\therefore\ \mu = 3{\cdot}37$ சமீ. செக்$^{-2}$.







படம் 5·01. g மீது புவிச்சுழற்சி விளைவு.

எனவே, அகலாங்கு ϕ யில், சுயாதீன முறையில் விழும் பொருளொன்றின் ஆர்முடுகலானது முனைவுகளில் விழும் பொருளொன்றின ஆர்முடுகலைக் காட்டிலும் $3{\cdot}37$ கோசை$^2\,\phi$ சமீ. செக்.$^{-2}$ சிறிதாகும்.

மேற்படி சூத்திரத்தின் திருத்தத்தைச் சோதிக்கும் பொருட்டு, g_{45} இன் பெறுமானம், அதாவது 980·62 சமீ. செக்.$^{-2}$ என்பதைப் பயனபடுத்தி, g_{90} ஐயும் g_0 ஐயும் கணிதது அவவழி கிடைக்கினற பெறுமானங்களை ஏற்றுக்கொணட பெறுமானத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்போம்.

அப்பொழுது $$g_{45} = 980 \cdot 62 \text{ சமீ. செக்.}^{-2} = g_{90} - 3 \cdot 37 \text{ கோசை}^2\, 45^\circ$$
$$= g_{90} - 1 \cdot 69$$
எனப் பெறுகிறேம்.

$$\therefore\ g_{90} = 982 \cdot 31 \text{ சமீ. செக்.}^{-2}.$$

எனவே, $$g_0 = 982 \cdot 31 - 3 \cdot 37 = 978 \cdot 94 \text{ சமீ. செக்.}^{-2}$$

இவற்றிற்கு ஒத்ததாக ஏற்றுக்கொணட பெறுமானஙகள முறையே 983·21 சமீ. செக.$^{-2}$ உம் 978·04 சமீ. செக.$^{-2}$ உம் ஆகும். அகலாஙகைக் குறித்துப் புவியீர்பபுச் செறிவின மாறலை எடுத்துரைக்கும் திருத்தங்கூடிய சூததிரம்

$$g_\phi = (983 \cdot 21 - 5 \cdot 17 \text{ கோசை}^2\, \phi) \text{ சமீ. செக்.}^{-2}$$

ஆகும் என்பதை இது உடனடியாய்த் தெரிவிக்கிறது.

மேலே தரப்பட்ட எளிய முறையிலே புவி ஒரு கோளம் எனக் கருதப் பட்டது ; இஙகு, விததியாசததின் ஒரு பங்குக்கேனும் இது காரணமா கலாம் ; அன்றியும் புவியானது உண்மையில் ஒரேதன்மையானதனறு.

அதன் ஊசறகுண்டு ஊடே செல்லும் ஆரையுடன் புவியைக் குறித்து ஓய்வாயிருக்கினற ஊசலொன்று ஆக்கும் கோணத்தைத் துணிதறபொருடடு படம் 5·01(c) யைப் பயன்படுததுதல வசதியாம் ; இது படம 5·01(b) யிறகு ஒப்பானது ; ஆனல் இஙகு விசைகளுக்குப் பதிலாக ஆர்முடுகல்கள் காட்டபபட்டிருக்கினறன. அப்பொழுது AN வழியே இருககினற ஆர்முடு கல் (a கோசை ϕ) ω^2 ஆனது g, g_ϕ எனபவற்றின் விளையுள் ஆகும். முறையே Ox, Oy எனடவற்றிற்குச் சமாந்தரமான ஆர்முடுகற் கூறு களைக் கருத,

$$g \text{ கோசை } \phi - g_\phi \text{ கோசை } (\phi + \theta) = a\omega^2 \text{ கோசை } \phi \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$
$$g \text{ சைன் } \phi = g_\phi \text{ சைன் } (\phi + \theta)\,; \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

இங்கு, θ தேவைப்படும் சாய்வு ஆகும். g_ϕ யை நீக்க,

$$\frac{\text{கோசை } \phi \left(1 - \dfrac{a\omega^2}{g}\right)}{\text{சைன் } \phi} = \frac{\text{கோசை } (\phi + \theta)}{\text{சைன் } (\phi + \theta)}.$$

($\phi + \theta$) வைக் கொண்ட உறுப்புக்களை விரித்து, பின்னர் குறுக்குப் பெருக்கஞ் செய்ய,

$$\text{சைன் } \theta \left(1 - \frac{a\omega^2}{g} \text{ கோசை}^2\, \phi\right) = \frac{a\omega^2}{2g} \,.\, \text{சைன் } 2\phi \,.\, \text{கோசை } \theta.$$

1 ஐக் காட்டிலும் $\frac{a\omega^2}{g}$ சிறிதாதலால

$$\theta \simeq \text{தான்}^{-1}\left(\frac{a\omega^2}{2g}\ \text{சைன்}\ 2\phi\right);$$

இங்கு $\phi=\frac{1}{4}\pi$ ஆகுமிடத்து, θ உயர்வுப் பெறுமானங் கொள்ளும்.

சமன்பாடுகள் (i), (ii) இலிருந்து $(\phi+\theta)$ வை நீக்க,

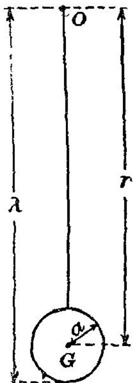
$$g_\phi^2[\text{சைன்}^2(\phi+\theta)+\text{கோசை}^2(\phi+\theta)]$$
$$=g^2(\text{கோசை}^2\phi+\text{சைன்}^2\phi)-2ga\omega^2\ \text{கோசை}^2\phi+a^2\omega^4\ \text{கோசை}^2\phi.$$

ω^4 ஐக் கொண்ட உறுப்பைப் புறக்கணித்து

$$g_\phi=g\left(1-2\frac{a\omega^2}{g}\cos^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\simeq g\left(1-\frac{a\omega^2}{g}\cos^2\phi\right)$$

என முன்னர்போலே பெறுகிறோம்.

போடா, கசினி பரிசோதனைகள்.—பரிஸ் நகரில் புவியீர்ப்புச் செறிவைத் துணியும் பொருட்டு போடா (Borda), கசினி (Cassini) ஆகியோர் 1792 இல் எளியவூசலொன்றைப் பயன்படுத்திப் பரிசோதனைத் தொடரொன்றை நடத்தினர். ஆனால் அவர்களின் முயற்சியைப் பற்றிய விவாதத்தில் இறங்குமுன்னர் முடிவுள்ள பருமனுடைய ஊசற்குண்டால் ஆக்கப்பட்ட ஊசல் இலட்சிய எளியவூசலினின்று எவ்வாறு வேறுபடுகிறது என்பதும் ஆவர்த்தன காலத்தின் மீது எளியவூசலின் தலை எனப்படும் கத்தியோரம், அதன் இணைப்புக்கள் ஆகியவற்றின் விளைவும் ஆராயற்பாலன.



படம் 5·02. முடிவுள்ள பருமனுடைய ஊசற்குண்டால் ஆக்கப்பட்ட எளியவூசல்.

ஓர் எளியவூசல் : ஊசற்குண்டின் முடிவுள்ள பருமனுக்கான திருத்தம்.—நிலைத்தவொரு புள்ளி O விலிருந்து ஆரை a யுடைய ஏகவினமான கோளமொன்று தொங்க விடப்பட்டிருக்கின்றதென்க, படம் 5·02. ஊசற்குண்டின் மையம் O ஆகுக ; OG$=r$ என்க ; ஊசற்குண்டு ஓயவுநிலையில் இருக்கும் பொழுது O விலிருந்து அதன் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளிவரையுள்ள தூரம் λ ஆகுக. அப்பொழுது, எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம் l,

$$l=r+\frac{\kappa^2}{r}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது. இங்கு, κ ஆனது G ஊடான கிடை அச்சொன்று பற்றி ஊசற்குண்டின் சுழிப்பாரை ஆகும். $\kappa^2=\frac{2}{5}a^2$ ஆதலால்,

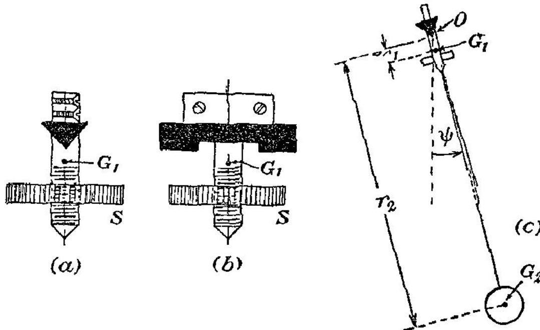
$$l = r + \frac{2}{5}\cdot\frac{a^2}{r} = (\lambda - a) + \frac{2}{5}\cdot\frac{a^2}{(\lambda - a)}.$$

வீச்சமானது முடிவுள்ளது ஆனுல் ஆவர்த்தன காலத்தைப் பெறுவதற்குப் பயன்படுத்திய நேரவிடையில் அவ்வீச்சம் ψ_1 இலிருநது ψ_2 இற்குக் குறைகிறது என்பதற்கான திருத்தத்தைப் புகுத்திஞல், ஆவர்த்தன காலம்

$$T = 2\pi\left(1 + \frac{\psi_1\psi_2}{16}\right)\sqrt{\frac{(\lambda - a) + \frac{2}{5}\cdot\frac{a^2}{(\lambda - a)}}{g}}.$$

இங்கு, காலவிடை ψ_0 ஆனது ψ_1, ψ_2 என்பவற்றின் பெருக்கலிடை ஆகும், ப. 119 ஒப்.

ஊசற்குண்டின் முடிவுள்ள பருமனுலாகும் விளைவை ஆராயும்பொருட்டு (i) $\lambda = 105$ சமீ., (ii) $\lambda = 405$ சமீ. என்னும் எடுத்துக்காட்டுககளைக் கருதுவோம ; அவ்வொவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் $a = 5$ சமீ. எனக் கொள்க. அப்பொழுது $\frac{2}{5}\cdot\frac{a^2}{\lambda - a}$ ஆனது (i) இல 0·1 சமீ. உம் (ii) இல் 0·025உம் ஆகும் எனவே பயன்படு நீளமானது முறையே 10^3 இல் 1, 10^4 இல் 1·6 என்னும் அளவில் கூடுகிறது ; அதாவது, புவியீர்ப்புச் செறிவைத் திட்டமாகத் துணியுமிடத்து இததிருத்தங்கள் ஒருபோதும் புறக்கணிக்கத் தக்கவையன்று.



படம் 5·03. கத்தியோரத்தின் ஆவர்த்தன காலமும் எளிய ஊசலின் ஆவர்த்தன காலத்தின்மீது அதனுல் ஆகும் விளைவும்.

கத்தியோரத்தின் ஆவர்த்தன காலமும் எளிய ஊசலின் ஆவர்த்தன காலத்தின்மீது அதனுல் ஆகும் விளைவும்.—கத்தியோரத்துடன் கம்பியை இறுக்கும் முறையொன்றைப் படங்கள் 5·03 (*a*) உம் (*b*) உம் உணர்த்துகின்றன. திருகுக் குடுமி S இன் நிலையை மாற்றி ஊசற்றலையின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலை G_1 ஐச் செப்பஞ் செயயலாம். தொங்கலச் சுக்குக் கீழேயிருந்து G_1 அணுகும்பொழுது ஆவர்த்தன காலம் கூடுகிறது.

திணிவு m_2 கொண்ட ஊசற்குண்டின் புவியீர்ப்பு மையம் G_2 ஆகுக, படம 5·03 (c) ; அது தொங்கலச்சுக்குக் கீழே தூரம் r_2 இலே இருக்கின்ற தென்க. $r_1 = OG_1$ ஆகுக. தலைமட்டும அலைவுக்காலம் T_1 ஐ உடையதாயின்,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1\kappa_1^2}{m_1 r_1 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\kappa_1^2}{r_1 g}}\ ;$$

இங்கு தலையின் திணிவு m_1, O ஊடான கிடையச்சொன்று பற்றி அதன் சுழிப்பாரை κ_1.

இனி, முழுவூசலின் ஆவர்த்தன காலம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1\kappa_1^2 + m_2\kappa_2^2}{(m_1+m_2)rg}}.$$

இங்கு, r எனபது O விற்கும் முழுவூசலின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் ஆகும.

$T = T_1$ ஆகுமாறு திருகு S இன் நிலை செப்பஞ் செய்யப்பட்டிருக்கு மாயின,

$$\frac{\kappa_1^2}{r_1} = \frac{m_1\kappa_1^2 + m_2\kappa_2^2}{(m_1+m_2)r}$$

$$= \frac{m_1\kappa_1^2 + m_2\kappa_2^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2}, \qquad [\because\ (m_1+m_2)r = m_1 r_1 + m_2 r_2].$$

எனவே $$r_1\kappa_2^2 = r_2\kappa_1^2.$$

ஆனால், எற்கெனவே நிலைநிறுததியுள்ள நிபந்தனைக்கேற்பத் தலையில் லாதபோது ஊசலின் ஆவர்த்தன காலம் T_2,

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\kappa_2^2}{r_2 g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\kappa_1^2}{r_1 g}}$$

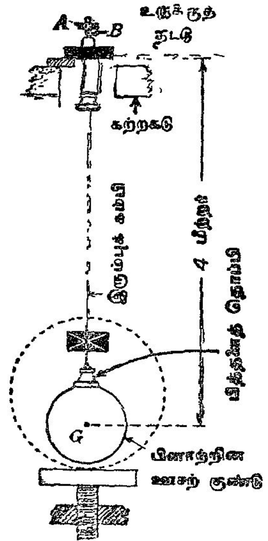
என்பதால் தரப்படுகிறது. எனவே

$$T_2 = T = T_1\ ;$$

அதாவது, அதன் ஆவர்த்தன காலம முழுவூசலின் ஆவர்த்தன காலத்திற் குச் சமனாகுமாறு செப்பஞ் செய்யப்பட்டிருக்குமாயின் பிறதியது ஊசற்றலை யாற் பாதிக்கப்படமாட்டாது.

செக்கனூசலொன்றின் நீளம் பற்றிய போடா, கசினி ஆராய்ச்சி.—செக்க னூசலொன்றின் நீளத்தைப் பரிஸ் நகரில துணிதறபொருட்டு போடா, கசினி ஆகியோர் (1792) பயன்படுத்திய ஆய்கருவியானது படம 5·04 இல் வரிப்பட முறைப்படி காட்டப்பட்டிருக்கிறது. ஊசற்குண்டு 3·48 சமீ. விட்டமுடைய பிளாற்றினக் கோளமொன்றால அமைக்கப்பட்டிருநதது. கோளததின் அதே வளைவாரையையுடைய குழிவான அடியுள்ள பித்தளைத் தொப்பியொன்று மெல்லிய உருக்குக கம்பியொன்றுடன் இணைக்கப்பட்டிருந்தது ; கம்பியின் மேலமுனை கத்தியோரமொன்றுடன் காட்டியுள்ளவாறு நிலையாக்கப்பட்டிருந்

தது. பருத்த சுவரொன்றிலிருந்து நீட்டிக் கொண்டிருக்கின்ற கற்றகடொன்றுடன் உறுதியாக இணைக்கப்பட்ட உருக்குத் தட்டொன்றால் கத்தியோரம் தாங்கப்பட்டிருந்தது. உருகிய மெழுகுப் படலத்தால் தொப்பியுடன் ஊசற் குண்டு இணைக்கப்பட்டது ; இது, கோளத்தைச் சுழற்றிப் பின்பு ஊசலின் ஆவர்த்தன காலத்தை நோக்குவதற்கு வசதியாயிருந்தது. இவ்வண்ணம் கிடைக்கப்பெற்ற ஆவர்த்தன காலத்தின் சராசரிப் பெறுமானமானது, கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் கேத்திரகணித மையம் ஆகியவற்றின் பொருந்தாமையைச் சாரவில்லை. பட்டினால் அல்லது தாவரப்பொருளாலான தொங்கலுக்குப் பதிலாக போடா, கசினி ஆகியோர் உலோகக் கம்பியாலானதொன்றைப் பயன்படுத்தியுள்ளனர் ; ஏனெனில் அதே வலிவுடைய உலோகக் கம்பிகளைக் காட்டிலும் பட்டு அல்லது தாவரப்பொருட்களாலான நூல்களே ஊடகத்திற்குக் கூடுதலாகப் பரப்பளவு காட்டுகின்றன என அவர்கள் கண்டுகொண்டனர். கடைசியாக, இரும்புக் கம்பியொன்றே தெரிந்தெடுக்கப்பட்டது ; மெல்லியதாய் இருந்தபோதிலும் பிளாற்றினம் ஊசற்குண்டால் அது ஈர்க்கப்படவில்லை. அது எளிதில் ஏகவினமாகப் பெறமுடிந்தபடியால் பிளாற்றினமே ஊசற்குண்டிற்கான திரவியமெனத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டது.



படம் 5·04. போடா, கசினி ஊசல்
[கத்தியோரத்திற்கான ஏற்றுகையையும் மாட்டேற்றுக் குறியையும் காட்டும் பொருட்டு வரிப்படத்தின் கீழ் அரையும் மேல் அரையும் ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தான திசைகளிலிருந்து வரையப்பட்டுள்ளன.]

ஊசலின் பயன்படு நீளம், அதாவது கத்தியோரத்திற்கும் ஊசற்குண்டின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் இடையேயுள்ள தூரம், கிட்டத்தட்ட 4 மீ. ஆக இருந்தது. நீளத்தை அளக்குமிடத்துத் தொடர்புவழு மிகக் குறைந்ததாக இருந்தபடியால் 1 மீ. நீளமுடைய ஊசலைக் காட்டிலும் இதுவே சிறந்ததென இவ்வாராய்ச்சியாளர் முடிவுசெய்தனர். மேலும், அதன் ஆவர்த்தன காலம் கிட்டத்தட்ட 4 செக. ஆதலால், இவ்வாவர்த்தன காலத்தைச் செக்கன்கள் அடிக்கும் நியமக் கடிகாரமொன்றைப் பயன்படுத்தி உடனிகழ்ச்சி முறையால் எளிதாகவும் திருத்தமாகவும் துணியமுடியும். திருகு B யிலுள்ள சுரை A யின் நிலையை மாற்றி, முதலில், முழு ஊசலின் ஆவர்த்தன காலத்திற்கு ஊசற்றுலையின் ஆவர்த்தன காலம் சமமாக இருக்குமாறு செப்பஞ் செய்யப்படுகிறது. பயன்படுத்தியுள்ள கடிகாரத்தின்

ஊசல் இரும்பு-நெய்யரி வகையைச் சேர்ந்தது ; எனவே, அதன் ஆவர்த்தன காலமானது சிறு வெப்பநிலை மாற்றங்களால் பாதிக்கப்படவில்லை.

ஊசலொன்றின் ஆவர்த்தன காலத்தைத் துணியும்பொருட்டு அதன் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்தை அது கடக்கும் தடவைகளுள் இரண்டின் காலவிடையை அளத்தல் வேண்டும்; இந்நிலையைச் சரியாகக் குறித்திருத்தல் வேண்டும் ; ஏனெனில், புவிவரலாற்றில் இரு வரையறுத்த நிகழ்ச்சிகளுக் கிடையேயுள்ள காலவிடையை மட்டுமே துணியமுடியும். எனவே t செக்கன் களில் n முழு ஆடல்கள் ஆற்றப்பட்டிருக்குமாயின், $T=\frac{t}{n}$. ஒரு செக் கனுக்குத் திருத்தத்துடன் t தெரிந்திருந்தால் ஆவர்த்தன காலத் திருத்தம் n^{-1} செககனிறகு உடன் தெரியப்படும். [ஊசலானது நிலையியற் சமநிலைத தானத்தை உயர்வு வேகத்துடன் கடக்கிறபடியால் ஊசலாடலின எல்லை யைக் காட்டிலும் சமநிலைத் தானமே ஊசலின் கடப்பை நோக்குவதறகுப் பெரிதும் உகந்தது ; இவ்வுண்மையானது, குறித்த நிகழ்ச்சியொன்று அதாவது அம்புக்குறியைக் கடந்து ஊசல் செல்லும கணத்தை மிகத் திட்டமாக மதிப்பிடுதற்கு உதவுகின்றது.]

ஆவர்த்தன காலத்தை மிகு திருத்தத்துடன் அளக்கும்பொருட்டு போடா என்பவர் உடனிகழ்ச்சிமுறை எனப்படுவதைச் செம்மையாக்கினர்; ஏற்கெ னவே, 1737 இல், அனடிஸ் மலைத்தொடரில், ஈர்ப்பு மாறிலி பற்றிய அவர்தம் பரிசோதனைகளில் போகர் (**Bouguer**) எனபவர் இம்முறையின் ஒரு வகையைப் பயன்படுததியுள்ளார், [ப. 256 ஒப்.]. இம்முறையிலே, ஆவர்த் தன காலம் தேவைப்படும் ஊசலுடன் நியமக் கடிகாரமொன்றின் ஊசல் பயன்படுத்தப்படுகின்றது ; அது செக்கன்கள் அடிக்கும் ஒன்றாகும் ; எனவே அதன் ஆவர்த்தன காலம் கிட்டத்தட்ட இரு செக்கன்கள் ஆகும் ; நோக்கு நிலையத்து நள்வானைச் சூரியன் அடுத்தடுத்துக் கடக்கும் நேரங்களை நோக்கி இவ்வாவர்த்தன காலததைத் திருத்ததுடன் துணியலாம். எளிய ஊசலை நியமக் கடிகாரமொன்றின ஊசலுக்கு நோமுன்னால் நெருஙகிய தூரத்தில் நிலைநிறுத்தி, இரண்டையும் தொலைகாட்டி ஊடே போடா நோக்கினா. கடிகாரவூசலின ஊசற்குண்டானது கறுத்த பின்னணிமீது வெள்ளைக் குரு சொன்றால் குறியிடப்பட்டிருந்தது. பரிசோதனை ஊசற்கம்பியின் விம்பம் வெள்ளைக்குருசின் விம்ப மையத்துடன் பொருந்தும் கணம் குறிக்கப்பட்டது ; அது போலே, அடுத்த பொருந்தும் கணமும் குறிக்கப்பட்டது. இவ்விரு நிகழ்ச்சிகளுக்கிடையேயுள்ள காலவிடை t செக்கன்களாக இருந்தால் நியமக் கடிகாரம் $\frac{t}{2}$ முழு அலைவுகள் ஆற்றியிருக்கிறது ; அதே நேரத்தில் எளிய ஊசல் ஆற்றியுள்ள அலைவுகள் $\left(\frac{t}{2}\pm 1\right)$ ஆகும். எனவே

$$T=\frac{t}{\frac{1}{2}t\pm 1}=\frac{2t}{t\pm 2}\simeq 2\left[1\mp\frac{2}{t}+\frac{4}{t^2}\right].$$

எந்த ஊசல் மற்றையதைக் குறித்து முந்துகிறது என்பதை அறிந்தால் பயன்படுத்தவேண்டிய சரியான குறி தெளிவாகும்.

இம்முறையில் t பெரிதாயிருப்பின், எப்பொழுது திட்டமான உடனிகழ்ச்சி நிறைவேறுகிறது என்பது பற்றி உறுதியாகக் கூறமுடியாது. உடனிகழ்ச்சி தோற்றுவதற்கும் அதன் அத்தோற்றம் மறைவதற்குமிடையேயுள்ள கால விடை Δt ஆகுக. அப்பொழுது,

$$T=\frac{t+\Delta t}{\left(\frac{t+\Delta t}{2}\pm 1\right)}=\frac{2(t+\Delta t)}{(t+\Delta t)\pm 2}=2\left[\frac{1}{1\pm\frac{2}{(t+\Delta t)}}\right]$$

$$=2\left[1\mp\frac{2}{t+\Delta t}+\frac{4}{(t+\Delta t)^2}\right],$$

[உயர் அடுக்கு உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்து]

$$=2\left[1\mp\frac{2}{t}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta t}{t}\right)}+\frac{4}{t^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta t}{t}\right)^2}\right]$$

$$=2\left[1\mp\frac{2}{t}\left(1-\frac{\Delta t}{t}+\frac{(\Delta t)^2}{t^2}\right)+\frac{4}{t^2}\left(1-\frac{2\Delta t}{t}\right)\right]$$

$$=2\left[1\mp\frac{2}{t}\pm\frac{2\Delta t}{t^2}+\frac{4}{t^2}\right].$$

$\therefore$ பினனவழு $\pm\frac{2\Delta t}{t^2}$ ஆகும்.

எனவே, $\Delta t=5$ செக். உம் $t=1000$ செக். உம் ஆயின், வழு 10^5 இல் 1 ஆகும்.

பரிசோதனை ஊசலின் ஆவர்த்தன காலம் 2 செக். அல்லது $2n$ செக். ஆக அமைந்திருக்கும்பொழுதே உடனிகழ்ச்சி முறை மிகத் திருத்தமானது ; இங்கு, n ஒரு நேர் முழுவெண் ஆகும். இதன்பொருட்டே போடா என்பவர் $(\lambda-r)=400$ சமீ. உடைய ஊசலொன்றைப் பயன்படுத்தியுள்ளார். நடைமுறையில் இவர் கத்தியோரத்துக்கும் கோளத்தின் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளிக்குமிடையேயுள்ள தூரத்தை அளந்து அதினின்று கோளத்தின் ஆரையைக் கழித்தார்.

ஊசலை போடா 2° பெயர்த்தார் ; ஐந்து மணித்தியாலம் கழிந்த பின்னரும் திருத்தமான நோக்கலுக்குப் போதிய அளவில் வீச்சம் இருக்கக் கண்டார். அடுத்தடுத்துள்ள உடனிகழ்ச்சிகளின் காலவிடை 73 நிமிட வரிசையில் இருந்தது ; உடனிகழ்ச்சியைத் திட்டமாக மதிப்பிடுதலில் இடர்ப்பட்டபடியால் 30 செக்கன்கள் அளவில் வழு இருந்திருக்கலாம். ஆனால், ஒன்றன்பின்னொன்றாக, இத்தகைய ஐந்து ஆவர்த்தன காலங்கள் நோக்கப்பட்டபடியால் இவ்வழிவந்த வழு பெரிதும் சுருங்கிற்று. பரிஸ் நகரில் g யின் பெறுமானம் 980·882 சமீ. செக்.$^{-2}$ என போடா முடிவு செய்

துள்ளார் ; எனவே இங்கு, செக்கனூசலின் நீளம் 99·353 சமீ. ஆகும். ஊசற்குண்டும் நூலும் ஒன்றுசேர்ந்து விறைப்பான பொருளொன்றாக அசைந்துள்ளன என போடாவும் கசினியும் கருதினர் என்பது குறித்தற் பாலது, ப. 177 ஒப். ஆனால், இது சரியன்று; எனவே, இம்முறையால் g இற்குக் கிடைக்கப்பெற்ற பெறுமானத்தின் திருத்தமானது ஏற்கெனவே கூறியுள்ள திருத்தவெல்லைகளுள் அடங்கமாட்டாது.

புவியீர்ப்புச் செறிவைத் துணிதலுக்கான மற்றை எளிய ஊசல் முறைகள். $g=4\pi^2 l T^{-2}$ ஆதலால், T தெரிந்தவிடத்து, புவியீர்ப்புச் செறிவுக்கு நம்பத்தகுந்த பெறுமானமொன்றைப் பெறும்பொருட்டு l ஐத் திருத்தமாக அளத்தல் மட்டுமே எஞ்சியிருக்கிறது என்பது தெளிவாம். நடைமுறையில் இது சற்றுக் கடினமாம் ; எனவே, வைற்ஹேஸ்ற் (Whitehurst) (1787), பெசல் (Bessel) (1826) என்போர் நீளங்கள் l_1, l_2 கொண்ட ஊசல்களைப் பயன்படுத்தி அவற்றின் ஆவர்த்தன காலங்கள் T_1, T_2 ஐத் துணிந்துள்ளனர். இங்கு, சுருக்கிக் கூறப்படும் பெசலின் பரிசோதனைகளில் ஊசற்குண்டொன்று கம்பியால் முதல் ஒரு புள்ளியிலிருந்தும் பின்னர் பிறிதொரு புள்ளியிலிருந்தும் தொங்கவிடப்பட்டது ; இத்தொங்கற் புள்ளிகளின் இடைத்தூரம் திருத்தமாகத் தெரிந்திருந்தது. ஒவ்வோர் எடுத்துக்காட்டிலும் நிலையியற் சமநிலைத் தானம் அதுவேயாம். அப்பொழுது

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}},\ \ T_2=2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}};$$

எனவே,

$$\frac{T_1^2-T_2^2}{4\pi^2}\cdot g=(l_1-l_2).$$

இவ்வாறாக, ஊசலை இலட்சிய எளியவூசலொன்று எனக் கருதமுடியுமாயின், ஆவர்த்தன காலங்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசமும் நீளம் (l_1-l_2) கொண்ட இலட்சிய எளிய ஊசலொன்றின் ஆவர்த்தன காலத்தின் வர்க்கமும் ஒன்றேயாம். ஆனால்,

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l_1^2+\frac{2}{5}a^2}{l_1 g}},\ \ T_2=2\pi\sqrt{\frac{l_2^2+\frac{2}{5}a^2}{l_2 g}}$$

என்பன திருத்தமிக்கவை என முன்னரே கண்டுள்ளோம் (ப. 171).

$$\therefore\ \ \frac{T_1^2-T_2^2}{4\pi^2}\cdot g=(l_1-l_2)+\frac{2}{5}a^2\left[\frac{1}{l_1}-\frac{1}{l_2}\right].$$

எனவே, l_1 உம் l_2 உம் தேவைப்படுகின்றன ; $\frac{2}{5}a^2$ சிறிதாதலால் அவை (l_1-l_2) இற்குரிய அதே திருத்தத்துடன் தெரிந்திருக்க வேண்டியதில்லை.

ஒரு கத்தியோரம் அல்லது ஒரு சோடித் தாடைக்குப் பதிலாகக் கிடையான உருளையொன்றிலிருந்து பெசல் கம்பியைத் தொங்கவிட்டார் ; கம்பிக்கு உருளையில் சுற்றவோ அதினின்று பிரியவோ முடியும் ; இதன் காரணமாக சிறு அலைவுகளினிடத்து இத்தகைய தொங்கல் ஆவர்த்தன காலத்தைப் பாதிக்கமாட்டாது என அவர் முன்பே அறிமுறைப்படி காட்டி

யுள்ளார். கம்பியின் விறைப்பு, கம்பிக்கும் ஊசற்குண்டிற்கும் இடையே விறைப்புக் குறைவு என்பவற்றிற்கான திருத்தங்களையும் பெசல் கணித்துள் ளார். கம்பியும் ஊசற்குண்டும் ஒரே பொருள்போல் அசையமாட்டா என முதன்முதல் லாப்பிளாஸ் என்பவரே சுட்டிக்காட்டினார்—உண்மையில், கம்பியைக் காட்டிலும் குண்டு சற்றுக் கூடுதலாகத் திரும்புகிறது ; ஆனால் ஊசற் குண்டின் ஆரை கம்பியின் நீளத்தைக் காட்டிலும் சிறிதாயிருக்கு மானால் இதற்கான திருத்தம் சிறிதாம்.

எளிய ஊசலின் கொள்கையிலும் அதைப் பயன்படுத்தும் முறையிலும் புகுத்தியுள்ள மேற்படிச் சீர்திருத்தங்களுடன் திருப்தியடையாது ஊசல் அலையும் ஊடகத்தால் ஆகும் விளைவைப் பற்றியும் பெசல் மீண்டும் ஆராய்ந்துள்ளார் ; இங்கு, ஊடகம் வளி ஆகும். இவ்விளைவின் இயல்பு மூவகைத்து ; அவை

(*a*) வளியின் மீயுந்தல்,

(*b*) ஊசல் ஓரளவு வளியைக் கொண்டு செல்லுகிறபடியால் அதன் திணிவு பயன்படும் வகையில் கூடுகிறது,

(*c*) வளியானது சிறு பிசுபிசுப்புடைய ஊடகமொன்றாகும் ; இது, ஊசலின் இயக்கத்திற காணப்படும சிறு தணித்தலின் ஒரு பகுதிக்கேனும் ஏது ஆகும்.

முதன்முதலாக (*a*), (*b*) களால் ஆகும் விளைவுகளைக் கருதுவோம். ஊசலின் திணிவு m உம், தொங்கற் புள்ளியிலிருந்து ஊசற் குண்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் r உம், ஊசலால் பெயர்க்கப்பெற்ற வளியின் திணிவு m_1 உம், ஊசல் கொண்டு செல்லும் வளியின் திணிவு m_2 உம் ஆகுக. அதன் சுழற்சியச்சுப் பற்றித் தொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பம் $m\kappa^2+m_2d^2$ ஆகும் ; இங்கு தொங்கற் புள்ளி ஊடே செல்லும் கிடையச்சொன்று பற்றி ஊசலின் சுழிப்பாரை κ உம், ஊசலுடன் செல்லும் வளியால், மேற்படி அச்சுப் பற்றி ஊசலின் சடத்து வத் திருப்பம் கூடுதலை உணர்த்தும் உறுப்பு m_2d^2 உம் ஆகும். எனவே, இயக்கச் சமன்பாடானது

$$(m\kappa^2+m_2d^2)\ddot{\theta}+(m-m_1)rg\theta=0.$$

இச்சமன்பாட்டின் கடைசி உறுப்பில் m_2 தோன்றாது இருப்பது குறித்தற்பாலது ; ஊசலால் காவப்படும் வளியானது வளிமண்டலத்தால் ஆகும் மீயுந்தலால் தாங்கப்பட்டிருக்கிறபடியால் அதன் நிறை மீள்தரு இணையைப் பாதிக்கமாட்டாது என்பதே இதற்குக் காரணம். எனவே, எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம்

$$\frac{m\kappa^2+m_2d^2}{r(m-m_1)}=\frac{\kappa^2+\frac{m_2}{m}\cdot d^2}{r\left(1-\frac{m_1}{m}\right)}.$$

ஊசற்குண்டின் தெரிந்த கனவளவு, பரிசோதனையின்போதுள்ள வளியடர்த்தி என்பவற்றிலிருந்து m_1 இன் பெறுமானம் துணியப்படுகிறது. அதே பருமன் உடைய ஆனால் வெவ்வேறு திரவியங்களாலான ஊசற் குண்டுகளைப் பயன்படுத்தி m_2d^2 என்பதின் பெறுமானம் துணியப்படு கிறது ; ஒவ்வோர் எடுத்துக்காட்டிலும் ஆவர்த்தன காலம் அளக்கப் படுகிறது.

மேற்படி கொள்கையானது நியூற்றன் என்பவராலும் டுபுவாற் (Du Buat) என்பவராலும் முன்பே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது ; டுபுவாற்றும் பெசலும் வளியாலாகும் இரண்டாவது விளைவின் பருமனை அதே முறைப்படி மதிப்பிட்டுள்ளனர் ; எனினும் டுபுவாற்றின் ஆராய்ச்சியைப் பற்றி அவ ருக்குப்பின் வந்த பெசல் அறிந்திலர். மேற்படி கணிப்பு முற்றிலும் சரியன்று எனப் பெசல் காட்டியுள்ளார் ; ஆனால் அவரது கணிப்பு இங்கு எடுத்துக்கூறுவதற்குப் பெரிதும் கடினமாகும்.

ஊசலின் இயக்கத்தில் வளியின் பிசுபிசுப்பாலாகும் விளைவு பெசலால் ஆராயப்பட்டுள்ளது ; ஆனால், ஸ்ரோக்ஸ் என்பவர் அக்கொள்கையை விரிவாக்கிவைக்கும் வரை அது உண்மையில் குறைபாடுடையதாகவே இருந்தது. ஊசலின் வேகத்திற்கு விகிதசமமான உறுப்பொன்றை இயக்கச் சமன்பாட்டிற் புகுத்தி விளைவைக் கணிப்பில் சேர்த்துக் கொள்ளலாம் என அவர் காட்டியுள்ளார் ; அதாவது, சமன்பாடா னது

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \beta\theta = 0 \qquad [ப. 37 ஒப்.]$$

என்னும் வடிவத்தை எடுக்கிறது.

தீர்வு

$$\theta = C \text{ அடுக்கு } (-\tfrac{1}{2}\alpha t) \text{ கோசை } (\tfrac{1}{2}\sqrt{4\beta - \alpha^2}\,t + \phi)\,;$$

இங்கு, C யும் ϕ உம் மாறிலிகள் ஆகும். தீர்வில $\alpha^2 < 4\beta$ எனக் கொள்ளப்படுகிறது ; ஆனால் இயக்கமானது சிறிதளவாற்றான் தணிக்கப் பட்டிருக்கிறது என்னுஞ் செய்தி இவ்வெடுகோள் நியாயமானது எனக் காட்டுகிறது. ஆவர்த்தன காலம்

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{\beta^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\alpha^2}{4\beta}}} \doteqdot \frac{2\pi}{\beta^{\frac{1}{2}}}\left[1 + \frac{\alpha^2}{8\beta}\right].$$

பிசுபிசுபபில்லாதபொழுது ஆவர்த்தன காலம் T_0 ஆகுக. இங்கு $T_0 = 2\pi\beta^{-\frac{1}{2}}$. எனவே ஆவர்த்தன காலம் $\left[1 + \dfrac{\alpha^2}{8\beta}\right]$ மடங்கு பெருக்கப் பட்டிருக்கிறது.

$$\frac{1}{\beta} = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \text{ ஆதலால்} \qquad T = T_0\left(1 + \frac{\alpha^2 T_0^2}{32\pi^2}\right).$$

இவ்விளைவின் பருமனை ஆராயும்பொருட்டுப் போடாவின் பரிசோதனைகளுள் ஒன்றைக் கவனிப்போம் ; அங்கு $T_0=4$ செக். கிட்டத்தட்ட 4000 செக். கழிந்தபின் வீச்சம அரையாக்கப்பட்டது. அப்பொழுது

$$2=\frac{\text{அடுக்கு}\left(-\frac{1}{2}\alpha t\right)}{\text{அடுக்கு}\left\{-\frac{1}{2}\alpha(t+4000)\right\}}=\text{அடுக்கு}\ (2000\ \alpha).$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{\text{இ.ம.}\ 2}{2000}.$$

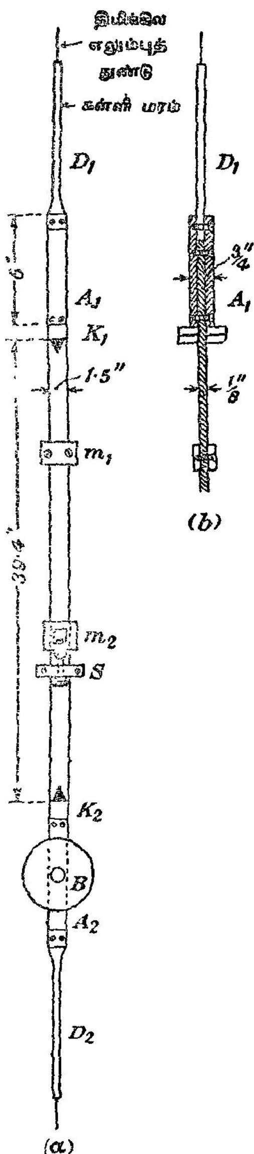
$$\therefore \frac{\alpha^2 T_0^2}{32\pi^2}=\frac{0\cdot5\times16}{4\times10^6\times320}$$

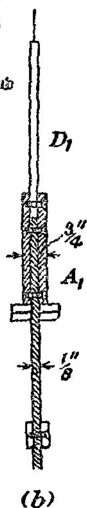
$$=6\times10^{-9}.$$

எனவே தணித்தலின் விளைவு புறக்கணிக்கத்தக்கதே.

கேற்றரின் புறமாற்றத்தக்க ஊசல்.—எளிய ஊசலொன்றுடன், பத்து லட்சத்தில ஒரு பங்கு அலலது இரு பங்குகள் என்னும் திருத்த வரிசையில் g ஐத் துணிதல் மிகக் கடினமாகும் ; அது முடியாது எனறும் சொல்லலாம் ; ஏனெனில், அது வடிவத்தைப் பொறுத்த மட்டில் சரியாக ஆக்கப்பட்டிருந்தாலும ஊசற்குண்டின் திரவியத்தில் சிறு அடர்த்தி மாறல்கள் காரணமாக வேண்டிய திட்டத்துடன் துணிய முடியாத அளவிறகு ஊசற்குண்டின் புவியீாப்பு மையம் பெயர்க்கப்பட்டிருக்கிறது. 1790 இல் புரோனி (Prony) என்பவர் மூன்று கத்தியோரங்கள் கொண்ட கூட்டுசேலொன்றைப் பயன்படுத்தலாம் எனத் தெரிவித்தார் ; மேலும் ஊசலாடற் காலம, ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் குறித்துக் கத்தி யோரங்களின் நிலைகள் என்பவற்றிலிருந்து தரப்பட்டவோா ஆவர்த்தன காலமுடைய எளிய சமவலுவூசலின் நீளததின் கணிப்புக்கான கொள்கை யொன்றையும் விவரித்துள்ளாா. இனி, கூட்டுசேலொன்றின் தொங்கன் மையம், அலைவுமையம் என்பவற்றின நிகா மாற்றியலபு பற்றிய ஹைகனின் தேற்றத்தைப் புரோனி அறிந்திருநதபோதிலும் அதைப பயன்படுத்திச் செக்கனுசலொன்றின் நீளத்தைத துணிய முடியும் என்னும் அதன் முதன்மையை அவர் உணர்நதார் எனக கூறமுடியாது. போனென் பேகர் (Bohnenberger) எனபவர் இமமுதன்மைவாய்ந்த முடிவைச் சுட்டிக் காட்டினூர் (1811) ; கூட்டுசேலொன்றின் இம்முதன்மையான இயல்பை உணாநது அதை நடைமுறையில பயன்படுத்தியுள்ளவர் கேற்றர் (Kater)† என்பவரே. அவரால் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள ஊசல வரிப்பட முறைப்படிப் படம் 5·05 (a) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. அது, நீளம் ஒரு மீற்றருக்குச் சற்றுக கூடுதலாகவும், அகலம் 1·5 அங். உம், தடிப்பு $\frac{1}{8}$ அங். உம் உடைய பித்தளைச் சட்டத்தாலானது. முழுவூ சலின் புவியீர்பபு மையத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களில், ஒன்றையொன்று நோக்கு முகமாக, இரு கததியோரங்கள் K_1, K_2 என்பன உள.

†கேற்றர், *Phil Trans*, ப. 33 (1818).





படம் 5·05. கேற்றரின் புற மாற்றத்தக்க ஊசல்.

கத்தியோரம் K_2 இற்கு அணித்தாகப் பித்தளையாலான உருளைநிறை B விறைப்பாக இறுக்கப்பட்டுள்ளது; அதன் திணிவு 2 இரு. 7 அவு. உம், விட்டம் 3·5 அங். உம், தடிப்பு 1·25 அங். உம் ஆகும். கத்தியோரங்கள் "வூற்ஸ்" என்னும் தனிப்பட்ட உருக்கு வகையொன்றால் இந்தியாவில் ஆக்கப்பட்டது. அவை கூடியமட்டில் வலுவாக்கப்பட்டும் கொதிநீரில் அமிழ்த்தப்பட்டும் பதன் பெற்றுள்ளன. கத்தியோரங்களைத் தட்டையான பரப்பொன்றுடன் பிடித்து அவற்றின் நேரிமை சோதிக்கப்பட்டது; ஓரத்திற்கும் தட்டைப் பரப்பிற்கும் இடையே சற்றேனும் ஒளி தோன்றுதுவிடின் ஓரங்கள் நேரானவை எனக் கருதப்பட்டன.

ஊசலின் முனைகளில் 6 அங். நீளமும் 0·75 அங். தடிப்புமுள்ள பித்தளைத் தட்டுக்கள் உள. ஊசலின் மேற்பகுதியின் பக்கப்பார்வை படம் 5·05 (b) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. அவை பித்தளைச் சட்டத்துடன் திருகுகளால் இறுக்கப்பட்டு அதற்கப்பாலும் நீட்டியிருக்கின்றன. இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற பிளவுகளில் கள்ளி மரத்துண்டுகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன; ஒவ்வொரு துண்டின் முனையிலும் திமிங்கில எலும்புத் துண்டொன்று இருந்தது; ஊசலின் வீச்சத்தை மதிப்பிடுதலில் இது பயன்பட்டது; எனவே, முடிவுள்ள ஆடல்வில் காரணமாக ஆவர்த்தன காலத்திற்குரிய திருத்தமொன்றைப் பிரயோகித்துக் கொள்ளலாம். கற்சுவரொன்றினின்றும் நீட்டியிருக்கின்ற மேடையொன்றில், கிடையாக அமைக்கப்பட்ட அகேற்றுத் தட்டுகளால் ஊசல் தாங்கப்பட்டிருந்தது.

இனித் தொங்கன் மையமும் அலைவு மையமும் நிகர்மாற்றியல்பு உடையன அதாவது, அதன் அலைவுமையம் ஊடே செல்கின்ற கிடையான அச்சு மீது பொருளைத் தொங்கவிட்டால் அதன் முந்திய தொங்கற் புள்ளி இப்பொழுது அதன் புது அலைவுமையம் ஆகின்றது; அன்றியும் ஒவவொரு நிலையிலும் அதிர்வுக்காலம் அதுவேயாம். ஒவ்வொரு நிலைக்குரிய அதிர்வுக்காலமும் சமமாக இரா

விட்டால், ஊசலின் சட்டத்துடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றதும் அரக்கி வைக்கக் கூடியதுமான திணிவொன்றைப் பெயர்த்து அவற்றைச் சமமாக்க லாம். கேற்றரினூசலில் m_1 கிட்டத்தட்ட 4 அவு. திணிவுடையவொன்ரு கும் ; அதனினும் சிறிதான m_2 இன் நிலையைத் திருகு S என்பதால் நுணுக்கமாகச் செப்பஞ்செய்யக் கூடியது.

உடனிகழ்ச்சி முறையைப் பயன்படுத்தியே கேற்றர் அதிர்வுக்காலத்தைத் துணிந்துள்ளார். புறமாற்றத்தக்க ஊசல் நியமக் கடிகாரமொன்றிறகு முன்னுலே தொங்கவிடப்பட்டது ; பிந்தியதின் ஊசற்குண்டில் வெள்ளை வட்டமொன்று வரைந்த கறுப்புக் கடதாசி இணைக்கப்பட்டிருந்தது. இரு ஊசல்களும் ஓய்வாய் இருக்கும்பொழுது பரிசோதனை ஊசலின் வால வெள்ளை வட்டத்தைச் சரியாக மறைத்தது ; ஒருசில அடி தொலைவிலுள்ள தொலைகாட்டி ஊடாக இரண்டும் நோக்கப்பட்டுளன. தொலைகாட்டிப் பார்வைத்துண்டின குவியத்தளத்தில் பிளவொன்று வைக்கப்பட்டிருந்தது; பிளவின் அகலமானது வால் அல்லது வெள்ளை வட்டததின் விம்பத்தினது அகலத்திற்குச் சமனுய் இருந்தது. இரு ஊசல்களும் அவற்றின் ஓய்வு நிலைகளைக் கடக்கும்பொழுது வெள்ளை வட்டத்தின் எந்தப் பாகததின் விம்பமும் தோன்ருதுவிடின் உடனிகழ்ச்சியொன்று நிகழ்ந்துள்ளது எனக் கொள்ளப்பட்டது.

ஏற்கெனவே கூறியுள்ள இடைத்தூரம் 39·4 அங். ஆக அமையுமாறு கேற்றர் கத்தியோரங்களைப் பயன்படுத்தியுள்ளார் ; நாளொன்றில் ஆற்றி யுள்ள அதிர்வுகளின் தொகை பயன்படுத்தியுள்ள கத்தியோரத்தைச் சாராதவாறு திணிவுகள் m_1, m_2 என்பவற்றின் நிலைகள் செப்பஞ் செய்யப் பட்டுள்ளன. வீச்சத்தையிட்டு ஊசலாடலின் சராசரிக்காலம் திருத்தஞ் செய்யப்பட்டது ; மேலும், வெற்றிடத்தில் ஊசலின் திணிவு : வளியில் அதன் திணிவு என்னும் விகிதத்தில் புவியீாப்பு குறைக்கப்படுகிறது எனக் கருதிப் பெயர்க்கப்பட்ட வளிக்கும் திருத்தஞ் செய்யப்பட்டது. இனி, புவியீர்ப்புச் செறிவு g யைத் துணிதற்பொருட்டு இரு கத்தியோரங்க ளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தை அளத்தல் மட்டுமே எஞ்சியுள்ளது. ஊச லானது ஏதேனுமொரு தனிப்பட்ட வடிவத்தைக் கொண்டிருக்கவில்லை ; ஆகவே, ஊசற்றிரவியத்து அடர்த்தியில் ஒழுங்கின்மை அல்லது ஏதேனு மொரு எளிய கேத்திரகணித வடிவத்தினின்று ஊசலின் வடிவ விலகல் என்பதால் இவ்வண்ணம் பெற்றுள்ள பெறுமானம் பாதிக்கப்படவேயில்லை.

இரு கத்தியோரங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தை அளத்தற்பொருட்டுக் கேற்றர் விறைப்பான கருங்காலித் துண்டொன்றின்மீது ஊசலைக் கிடையாக வளர்த்தி, அதன் நிறையிலும் சற்றுக் கூடுதலான விசையொன்ருல் அதை ஈர்த்தார் ; ஈர்க்கும் விசையானது பொதுவான விற்றுலாக் கோலொன்ருல் பிரயோகிக்கப்பட்டது. எனவே நிலைக்குத்து நிலையில் ஊசலைப் பயன்படுத்தி அதைக் கிடைநிலையில் வைத்து ஓரங்களின் இடைத்தூரம் அளக்கப்பட்ட போதிலும் வழுவின் தோற்றத்துக்கு இடமேயில்லை.

கடல்மட்டத்திலே, லண்டன் அகலாங்கிலே, செக்கனுசலின் நீளத்தின் முடிவான பெறுமானம் 39·13929 அங். என இப்பரிசோதனைகள் தந்துள்ளன.

சமச்சீருசலுக்கான பெசலின் கொள்கை.—இவ்வாராய்ச்சித் துறையில், சமச்சீரான புறவடிவமுடைய புறமாற்றத்தக்க ஊசலொன்றிற்குப் பெசல் அளித்த கொள்கையே அவரது முதன்மையான செயலாகும். இத்தகைய ஊசல் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையம் இறங்குமுகமாக அதன் முனையொன்றில் சுமையேற்றி, ஒரு கத்தியோரத்தின் அலைவு மையத்துக்கு அணித்தாக மற்றையது அமைந்திருக்குமாறு, கேற்றரினுசலில் இருக்கிறதுபோல இரு கத்தியோரங்கள் அளிக்கப்பட்டால, வளியின் விளைவைப் பொருட்படுத்தாது செக்கனுசலின் நீளத்தைப் பெறமுடியும் என அவர் நிலைநிறுத்தியுள்ளார்.

கத்தியோரங்கள் உருளைவடிவமானவை எனக் கருத வேண்டும் என்று லப்பிளாஸ் ஏற்கெனவே காட்டியுள்ளார்; மேலும், கத்தியோரங்கள் ஒரே மாதிரியானவை எனின ஊசலைத் தலைகீழாக்கினால் இவ்வளைவாலாகும் விளைவு நீக்கப்படுகிறது எனப் பெசல் நிலைநிறுத்தியுள்ளார்; அன்றியும், கத்தியோரங்கள் வேறுபடின், ஒன்றின் இடத்தில் மற்றென்றை மாற்றி வைத்து, அவ்வொவ்வொன்றிலுமிருந்து ஊசல் ஆடும்பொழுது அலைவுக் காலத்தை மீண்டும் நோக்கி அவ்விளைவு நீக்கப்படுகிறது. இத்தகைய ஊசலொன்றைப் பெறும்பொருட்டு ஊசலின் சட்டத்துடன் இரு உருளைகளை இணைத்தல் வேண்டும் எனவும், அவ்வுருளைகளின் அச்சுக்கள் சட்டவச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும் ஒன்றிற்கொன்று சமாந்தரமாகவும் இருத்தல் வேண்டும் எனவும் பெசல் தெரிவித்துள்ளார். சட்டத்தின் மையத்தைக் குறித்து உருளைகளைச் சமச்சீராக அமைத்தல் வேண்டும்; ஆனால் ஓர் உருளை திண்மமாகவும் மற்றையது பொள்ளாகவும் அமைந்திருத்தல் வேண்டும். இவ்வூசலின் கொள்கை பின்வருமாறு.

அதன் புவியீர்ப்பு மையமூடாகச் செல்கின்றதும் கத்தியோரங்களுக்குச் சமாந்தரமானதுமான அச்சொன்று பற்றி ஊசலின் சுழிப்பாரை κ ஆகுக. கத்தியோரங்களிலிருந்து ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையம் G யின் தூரங்கள் r_1, r_2 எனவும் அக்கத்தியோரங்களுக்குரிய ஆவர்த்தன காலங்கள் T_1, T_2 எனவும் இருப்பின்,

$$\frac{g}{4\pi^2}\cdot T_1^2=\frac{r_1^2+\kappa^2}{r_1} \quad \text{உம்} \quad \frac{g}{4\pi^2}\cdot\ T_2^2=\frac{r_2^2+\kappa^2}{r_2} \quad \text{உம் ஆகும்.}$$

$$\therefore\ \frac{g}{4\pi^2}(r_1T_1^2-r_2T_2^2)=r_1^2-r_2^2,$$

அல்லது

$$\frac{4\pi^2}{g}=\frac{r_1T_1^2-r_2T_2^2}{r_1^2-r_2^2} \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

$$\frac{r_1T_1^2-r_2T_2^2}{r_1^2-r_2^2}=\frac{A}{r_1+r_2}+\frac{B}{r_1-r_2}$$

ஆகுக; இங்கு, A, B என்பவை, r_1 ஐயும் r_2 ஐயும் சாரா.

அப்பொழுது, $A = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2}$, $B = \frac{T_1^2 - T_2^2}{2}$.

$$\therefore \quad \frac{4\pi^2}{g} = \frac{r_1T_1^2 - r_2T_2^2}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1^2 + T_2^2}{r_1 + r_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1^2 - T_2^2}{r_1 - r_2}.$$

இனி, கத்தியோரங்களிடையேயுள்ள தூரம் $(r_1 + r_2)$ ஆகும் ; எனவே, மேற்படிக் கோவையின் முதலாவது உறுப்பை அவதானிப்புகளிலிருந்து கணித்துக் கொள்ளலாம். மேலும், ஆவர்த்தன காலங்கள் அண்ணளவிற் சமமாக இருக்குமாறு கத்தியோரங்கள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறபடியால் $(T_1^2 - T_2^2) \to 0$; எனவே, மேற்படி கோவையில், முதலாவது உறுப்பைக் காட்டிலும் இரண்டாவது சிறிதாகும் ; ஆகவே, $(r_1 - r_2)$ என்னும் கணியத்தை மிகு திருத்தத்துடன் அறியவேண்டிய தேவையில்லை. கத்தியோரமொன்றில் ஊசலைச் சமமாக்கிப் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தானத்தைக் கண்டு, r_1 ஐயும் r_2 ஐயும் வழக்கம்போல் துணிதல் போதியதாகும். கேற்றர் நடாத்தியுள்ள பரீட்சைத் தொடரில் ஆவர்த்தன காலங்கள் சரிசமமாக வரும்வரை ஒன்றன் பின்னொன்றாக ஒவ்வொரு கத்தியோரத்திலிருந்தும் ஊசல் ஆட்டப்பட்டது ; அச்செயல்முறை இங்கு தவிர்க்கப்படுகிறது.

நீளம் $(r_1 + r_2)$ கொண்ட எளிய ஊசலொன்றின் ஆவர்த்தன காலம் T ஆகுக. அப்பொழுது,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}(r_1 + r_2) = \tfrac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1^2 - T_2^2}{r_1 - r_2}(r_1 + r_2)$$

$$= \frac{r_1T_1^2 - r_2T_2^2}{r_1 - r_2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

T யைக் கணித்த நேரம் என்போம். r_1 உம் r_2 உம் திருத்தத்துடன் தெரிந்திருக்கின்றன என இத்தொடர் கொள்கின்றபடியால் அவதானிப்புகளிலிருந்து T யின் கணித்தலுக்கு அது பயன்படாது ; இருந்தாலும், கீழ்வரும் பந்திகளில் தரப்பட்ட கொள்கையின் விருத்திக்கு அது தேவைப்படுகிறது.

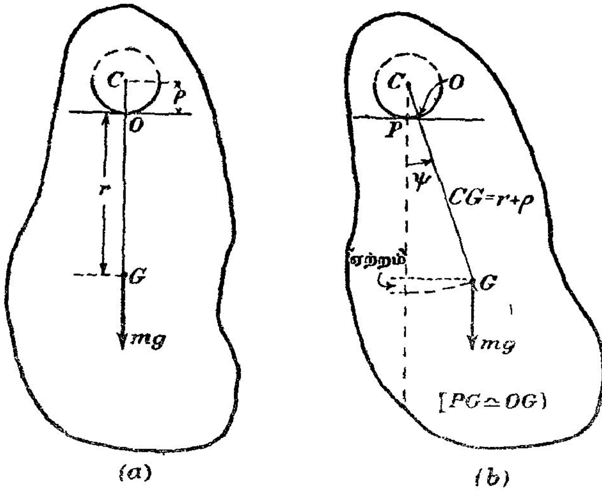
கத்தியோர வளைவாலாகும் விளைவை ஆராயும் பொருட்டுக் கத்தியோரமானது சிறிய ஆரை மாறா வளைவாரை ρ உடையது எனக் கொள்வோம். அதன் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்தில் இருக்கின்ற அத்தகைய ஊசலொன்றைப் படம் 5·06 (a) காட்டுகிறது. எனவே, ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையம் G எனின், கத்தியோரமும் அக்கத்தியோரத்தைத் தாங்கும் கிடைத்தட்டும் ஒன்றையொன்று தொடும் புள்ளி O விற்குக் கீழேயே அது இருத்தல் வேண்டும். ஊசலானது ஒரு சிறு கோணப் பெயர்ச்சி ψ உற்றால், சுழற்சியின் கணநிலையச்சானது புள்ளி P ஊடே செல்லும், படம் 5·06 (b). இங்கு, P யானது C யின் புதுநிலைக்கு நேராய்க் கீழே இருக்கிறது. $OG = r$ எனின், இப்பெயர்ச்சியின்போது புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது, தூரம்

$$\mathrm{CG}\,(1-\text{கோசை }\psi)=(r+\rho)\,(1-\text{கோசை }\psi)$$

எழுந்துவிடும். எனவே, ஊசலின் திணிவு m உம் புவியீர்ப்புச் செறிவு g உம் ஆயின், ஊசலின் பெயர்க்கப்பட்ட நிலையில் அதன் நிலைச் சக்தி

$$mg\,(r+\rho)\ \ (1-\text{கோசை }\psi)$$

ஆகும்; இங்கு, ஊசலின் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்தில் இச்சக்தி பூச்சியம் எனக் கொள்ளப்படுகிறது.



படம் 5·06. ஊசலொன்றின் ஆவர்த்தன காலத்தில் கத்தியோரமொன்றின் வளைவால் ஆகும் விளைவு.

P யும் O வும் அணித்தாயிருக்கின்றன ; எனவே, $\mathrm{PG}=r$ என்பது சரி எனக் கொள்ளமுடியும்வரை, கருதப்படும் கணத்தில் ஊசலின் இயக்கச் சக்தி $\frac{1}{2}m\,(r^2+\kappa^2)\,\dot{\psi}^2$ ஆகும்; இங்கு κ என்பது G ஊடான கிடையச்சொன்று பற்றி ஊசலின் சுழிப்பாரை ஆகும். ஊசலின் முழுச் சக்தி ஒரு மாறிலி ஆதலால்

$$\tfrac{1}{2}\,(r^2+\kappa^2)\,\dot{\psi}^2+g\,(r+\rho)\,(1-\text{கோசை }\psi)\ =\ \text{ஒரு மாறிலி.}$$

நேரத்தைக் குறித்து வகையிட,

$$(r^2+\kappa^2)\ddot{\psi}+g\,(r+\rho)\ \text{சைன் }\psi=0.$$

ψ சிறிதாயிருக்கும்பொழுது, இது ஆவர்த்தன காலம் T கொண்ட எளிய இசையியக்கமொன்றை ஒத்திருக்கும் ; இங்கு

$$\mathrm{T}=2\pi\sqrt{\frac{r^2+\kappa^2}{g(r+\rho)}}.$$

இனி புறமாற்றத்தக்க கூட்டுசேலொன்றைப் பயன்படுத்துமிடத்து O_1 உம் O_2 உம் முறையே அதன் தொங்கன்மையமும் அலைவுமையமும் ஆகுக ; அப்பொழுது $O_1G = r_1$, $O_2G = r_2$, ρ_1 உம் ρ_2 உம் கத்தியோரங்களின் வளைவாரைகள் எனவும் கொள்க. முதற் கத்தியோரத்தில் ஊசல் தாங்கப்பட்டிருக்கும்பொழுது அதன் ஆவர்த்தன காலம் T_1 ஆகுக ; இதை வசதியாக " நிமிர்ந்த நேரம் " எனலாம். அப்பொழுது

$$\frac{g}{4\pi^2}T_1^2 = \frac{\kappa^2 + r_1^2}{r_1 + \rho_1}$$

$$= \frac{\kappa^2 + r_1^2}{r_1}\left[1 - \frac{\rho_1}{r_1}\right]. \qquad \left[\because \frac{\rho_1}{r_1} \to 0\right].$$

அதேபோலவே, மற்றைக் கத்தியோரத்தினிடத்து, " தலைகீழ் நேரம் " எனப்படும் T_2 ஆனது

$$\frac{g}{4\pi^2}T_2^2 = \frac{\kappa^2 + r_2^2}{r_2}\left[1 - \frac{\rho_2}{r_2}\right]$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

" கணித்த " நேரம் T இற்குரிய கோவையில் அது T_1, T_2 முதலிய வற்றின் தொடர்பில், எனவே κ, r_1, r_2, ρ_1, ρ_2 எனபவற்றின் தொடர்பில் எடுததுரைக்கப்பட்டிருக்குமாயின், ஏனையவற்றைக் காட்டிலும் சிறிதாயிருக் கிற உறுப்புக்களில் r_1r_2 இற்கு κ^2 சமமெனப் புகுத்தலாம், ப. 183 ஒப். எனவே,

$$\frac{g}{4\pi^2}T^2 = \frac{g}{4\pi^2}\left[\frac{r_1T_1^2 - r_2T_2^2}{r_1 - r_2}\right]$$

$$= \frac{(\kappa^2 + r_1^2)\left[1 - \frac{\rho_1}{r_1}\right] - (\kappa^2 + r_2^2)\left[1 - \frac{\rho_2}{r_2}\right]}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{(r_1^2 - r_2^2) - (\rho_1 - \rho_2)(r_1 + r_2)}{r_1 - r_2} \qquad [\because \kappa^2 = r_1 r_2]$$

$$= (r_1 + r_2) - \frac{\rho_1 - \rho_2}{r_1 - r_2}(r_1 + r_2).$$

வேறொரு மாற்றமுமின்றி, ஒன்றின் இடத்தில் மற்றொன்றாகக் கத்தி யோரங்கள் மாற்றிவைக்கப்படுகின்றன எனக்கொள்க. இப்பொழுது கணித்த நேரம் T′ எனின்,

$$\frac{g}{4\pi^2}\cdot\ T'^2 = (r_1 + r_2) - \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_1 - r_2}(r_1 + r_2).$$

எனவே,

$$\frac{g}{4\pi^2}\cdot\frac{(T^2 + T'^2)}{2}\ (r_1 + r_2).$$

ஆகவே, கத்தியோரங்களின் வளைவாரைகளைக் கொண்ட உறுப்புக்கள் மறைந் துள்ளன.

ஊசலுக்குத் தட்டையான போதிகைகளை அளித்தும் நிலைத்த கத்தியோர மொன்றைப் பயன்படுத்தியும் கத்தியோர வளைவாரையாலாகும் விளைவை நீக்கலாம். அப்பொழுது $\rho_1 = \rho_2$; எனவே திருத்தத்திற்கான உறுப்பு மறைகிறது. இங்கு ஒரேயொரு குறைதான் உளது; அதாவது, எப் பொழுதும் தட்டைத்தகட்டின் ஒரே பாகம் பயன்படுத்தப்படுகிறது என்பது பற்றிய ஐயமேயாம்; இருந்தாலும், இதற்குமாறாக, கத்தியோரங்களை ஒன்றை மற்றொன்றுடன் மாற்றுதல் வேண்டியதில்லை; தட்டுக்களின் இடைத்தூரம் $(r_1 + r_2)$ என்பதை மிகு திருத்தமாக அளக்க முடியும் என்னும உண்மைகளை நிறுவவேண்டும். மேலும், கத்தியோரங்கள் பழுது பட்டால் ஊசலைப் பாதிக்காவண்ணம் அவற்றைத் திருத்திக் கொள்ள லாம்; வழக்கமாகப் பயன்படுத்தப்படும் ஊசல் வகையில் கத்தியோரங் கள் மீண்டும் தேய்க்கப்பட நேரிடின் ஊசல் வேறொன்றாகிறது.

கடைசியாக ஊசல் வெற்றிடமொன்றில் தொங்கவிடப்பட்டிராதபோது, அதனால் செலுத்தப்படும் வளியின் விளைவை எவ்வாறு நீக்கலாம் என்பதை ஆராய்தல் வேண்டும். ஊசலை அதன் நிமிர்ந்த நிலையிற் கருதுக. ஊசலால் பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் திணிவு μ ஆகுக. அப்பொழுது, பெயர்க்கப்பட்ட ஊசலை அதன் சமநிலைத் தானத்திற்கு மீளச் செய்யும் விசைகளின் திருப்பமானது, பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் புவியீர்ப்பு மையத்தி னூடாக மேன்முகமாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் ஆற்றுகின்றதும் பருமன் μg உடையதுமான விசையின் திருப்பத்தினது அளவால குறைக்கப்படுகிறது. சுழற்சியச்சிலிருந்து இப்புள்ளியின் தூரம s_1 ஆகுக. ஊசலுடன் செல்லு கின்ற வளியின் திணிவானது அதன் சுழற்சி அச்சுப் பற்றி ஊசற் சடததுவத் திருப்பத்தைக் கூடச்செய்கிறது. அது ΔI_1 என்னும் உறுப்பால் குறிக்கப்படுக. அதைச் சூழும் வளியின மீயுநதல் காரணமாக உடன்செல் லும் வளிக்கு பயித நிறை இல்லை; எனவே அதன் திணிவானது மீள்தரு விசைகளின திருப்பத்தைப் பாதிக்கமாட்டாது. கோணப்பெயர்ச்சி ψ சிறிது எனின், ஊசலின் இயக்கம்

$$[m(r_1^2 + \kappa^2) + \Delta I_1]\ddot{\psi} + (mr_1 - \mu s_1)g\psi = 0.$$

எனவே, ஆவர்த்தன காலம் T_1 ஆனது

$$\frac{g}{4\pi^2}T_1^2 = \frac{m(r_1^2 + \kappa^2) + \Delta I_1}{mr_1 - \mu s_1}$$

$$= \frac{m(r_1^2 + \kappa^2) + \Delta I_1}{mr_1}\left[1 + \frac{\mu s_1}{mr_1}\right]$$

$$= \frac{r_1^2 + \kappa^2}{r_1} + \frac{\Delta I_1}{mr_1} + \frac{r_1^2 + \kappa^2}{r_1}\left(\frac{\mu s_1}{mr_1}\right)$$

என்பவற்றிற்கு இணங்கும் வண்ணம் அமையும்; இங்கு, நடைமுறையில் மிகச் சிறிதாயிருக்கிற உறுப்பு $\frac{\Delta I_1}{mr_1} \cdot \frac{\mu s_1}{mr_1}$ புறக்கணிக்கப்படுகிறது.

ஊசல் தலைகீழாக இருக்கும்பொழுது சுழற்சியச்சுப் பற்றிய சடத்துவத் திருப்பத்தின்மீது இயக்கி வைக்கப்படும் வளியின் விளைவு வேறாக இருக்கக் கூடும்; அது δI_2 எனபதால் குறிக்கப்படுக. ஊசலால் பெயர்க்கப்பட்ட வளியின் திணிவு இப்பொழுதும் μ ஆகும். சுழற்சி அச்சிலிருந்து அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் s_2 ஆகுக. அப்பொழுது, ஆவர்த்தன காலம் T_2 முன் போலவே அதே திருத்த வரிசையில்

$$\frac{g}{4\pi^2}\cdot T_2^2=\frac{r_2^2+\kappa^2}{r_2}+\frac{\Delta I_2}{mr_2}+\frac{r_2^2+\kappa^2}{r_2}\left(\frac{\mu s_2}{mr_2}\right).$$

எனவே, முன்னர் போல் சிறிதாயிருக்கின்ற உறுப்புக்களில் $\kappa^2=r_1r_2$ எனப் புகுத்தினால் கணித்த காலம் T ஆனது

$$\frac{g}{4\pi^2}T^2=\frac{g}{4\pi^2}\left[\frac{r_1T_1^2-r_2T_2^2}{r_1-r_2}\right]$$

$$=r_1+r_2+\frac{r_1+r_2}{r_1-r_2}\cdot\frac{\mu(s_1-s_2)}{m}+\frac{\Delta I_1-\Delta I_2}{m(r_1-r_2)}$$

என்பதால் எடுத்துரைக்கப்படுகிறது.

அதன் கேத்திரகணித மையமூடே செல்லும் கிடையச்சொன்று பற்றி ஊசலின் புறவடிவம் சமச்சீராக அமைந்திருக்குமானால் $s_1=s_2$ உம் $\Delta I_1=\Delta I_2$ உம் ஆகும். எனவே,

$$\frac{g}{4\pi^2}T^2=(r_1+r_2).$$

எனவே, பரிசோதனையின்போது வளியின் வெப்பநிலையும் அமுக்கமும் மாறாமல் இருக்குமாயின் வளி விளைவு நீக்கப்படுகிறது. இன்று வெறறிடத் திலேயே ஊசல்கள் ஆடுமாறு வைக்கப்படுகின்றன ; எனவே, மிகு திட்டமான பரிசோதனைகள் ஒழிந்த மற்றையவற்றில் வளியின் விளைவுக் கான திருத்தம் புறக்கணிக்கத் தக்கதாகும்.

றெப்சோல்டின் (Repsold) ஊசல்.—புறவடிவத்தில் சமச்சீரானதும் புறமாற்றத்தக்கதுமான ஊசலொன்றின் கொள்கையை பெசல் என்பவர் நிலைநிறுத்தியிருந்த போதிலும் அவர் அத்தகைய ஒன்றை ஆக்கவே யில்லை. 1860 இல், அதாவது பெசலின் மறைவுக்குச் சில ஆண்டுகளின் பின்னர், ஆய்கருவி தயாரிப்பவரான றெப்சோல்ட் என்பவர் அத்தகைய முதல் ஊசலொன்றை ஆக்கினார் எனத் தெரியவருகிறது. இந்திய நாடிக் கணித்தலில் பயன்படுத்தியுள்ளதைப் போன்ற அத்தகைய ஒன்று படம் 5·07 இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. அது கத்தியோரங்கள் K_1, K_2 எனபன இணைக்கப்பட்ட சமச்சீரான பித்தளைச்சட்டம் AB யாலானது. சட்டத்தில் இணைக்கப்பட்ட திணிவுகள் திண்மமான உருளையொன்றும் குழிவான உருளையொன்றும் ஆகும்; அவை திருகால் சட்டத்துடன் இறுக்கப்பட்டுள்ளன. இதனால், முழுவூசலின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆனது K_2 ஐக் காட்டி

லும் K_1 இற்கே அணித்தாயிருக்குமாறு திட்டமிடப்பட்டது. ஹெல்மேற் (Helmert) என்பவருக்காக றெப்சோல்டால் ஆக்கப்பட்ட புறமாற்றத்தக்க ஊசலில் கத்தியோரங்கள் இடைமாற்றஞ் செய்யப்படவில்லை ;† ஆனால், அதன் கேத்திரகணித மையமூடாகச் செலலும் இடையான அச்சொன்று பற்றிச் சட்டமானது சரி சமச்சீராக ஆக்கப்பட்டிருந்தால் C, D எனபவற்றின் நிலைகளின் இடைமாற்றத்தினல் வரும் விளைவும், இடைமாற்றஞ் செய்யப்படும கத்தியோரங்களுக்கு நேரிடும் விளைவும் ஒரேமாதிரியானது எனக் ஹெல்மேற் கணடாா. இதனுல், கததியோரங்களிடையேயுள்ள தூரம மாருது இருந்தது ; அன்றியும், ஊசலைத் தாஙகி நிற்கின்ற தட்டைத் தகட்டுடன கததியோரங்களின அதே புளளிகள் எப்பொழுதும தொடுகை வைத்திருந்தன. இந்திய நாடிக் கணித்தலிற பயன்படுத்தியுள்ள ஊசல் அரைச் செக்கனுசலொன்றுகும் ; செக்கனுசலொன்றின முழுப்பரிமாணஙகளைக் காடடிலும் அதன் பரிமாணங்கள் கட்டாயமாகச் சிறிதாயிருக்கிற படியால் அதை வசதியாக எடுத்துச் செல்ல முடிகின்றது.



படம் 5·07. றெப்சோல்டின் ஊசல்.

முதனமுதலாக ஆக்கப்பட்ட இவ்வூசல் வகைகளில், தாங்கி போதியளவு விறைப்பாக இராததனுல, நம்பிக்கையான விளைவுகளைப் பெறமுடியவில்லை. அவ்வாறு இருந்ததும் ஒரு வழியில் நன்றெனக் கருதுதல் வேண்டும் ; ஏனெனில் அது தாங்கியின் இளகுதலுக்குத் திருத்தங்கள் இன்றியமையாதது என்பதைச் சுட்டிக்காட்டிற்று.

ஊசற் றுங்கியின் இளகுதல்.—திணிவு m கொண்ட கூட்டுசேலொன்றின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆகுக, படம் 5·08 (a); அதன் தொங்கற் புள்ளி O ஆகுக. ஊசல்மீது தாங்கி பிரயோகிக்கும் விசையின் கிடைக்கூறும் நிலைக்குத்துக்கூறும் முறையே X, Y ஆகுக. ஊசலைத் தாக்குகின்ற புறவிசைகள் திசைமாருது ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையத்தில் செறிந்திருக்கின்றன எனக் கருதி அதன் இயக்கச் சமன்பாட்டைப் பெறலாம், படம் 5·08(b) யை ஒப். $OG = r_1$ என்க.

இனி, GO வழியேயும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் G யின் ஆர்முடுகலுறுப்புக்கள் முறையே $r_1\dot{\psi}^2$ உம் $r_1\ddot{\psi}$ உம் ஆகும்.

∴ G யின் கிடை ஆர்முடுகல் $= r_1\ddot{\psi}$ கோசை $\psi - r_1\dot{\psi}^2$ சைன் ψ
$= r_1\ddot{\psi}$, $\psi \to 0$ எனின்.

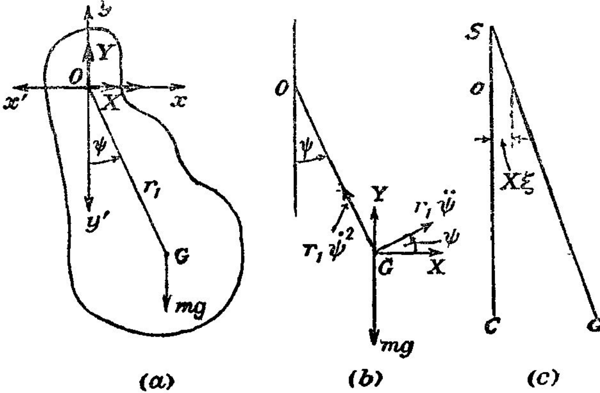
அதுபோலவே, G யின் நிலைக்குத்து ஆர்முடுகல்
$= r_1\dot{\psi}^2$ கோசை $\psi + r_1\ddot{\psi}$ சைன் ψ
$= r_1\dot{\psi}^2$, $\psi \to 0$ எனின்.

∴ கிடைத் திசையிலுள்ள விசை $= mr_1\ddot{\psi}$

$$= -mg\frac{r_1^2}{r_1^2+\kappa^2}\psi, \left[\because\ \ddot{\psi} = -\frac{gr_1\psi}{r_1^2+\kappa^2}\right]$$

† *Beiträge zum Theorie des Reversionspendels*, Potsdam, 1898.

இங்கு, G ஊடாகவும் வரிப்படத் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள கிடையச்சொன்று பற்றி ஊசலின் சுழிப்பாரை κ ஆகும். இவ்விசை X இற்குச் சமன்; அது Ox' என்னும் திசையில் ஆற்றுகிறது என்பதைச்



படம் 5·08. இளகுதாங்கியுடைய ஊசல்.

சயக்குறி உணர்த்துகிறது. எனவே, நியூற்றனின் மூன்றுவது இயக்கவிதிப் படி ஊசலானது தாங்கிமீது திசை Ox இல், பருமன் X கொண்ட விசையொன்றைப் பிரயோகிக்கிறது. தாங்கி விறைப்பாக இராவிட்டால் அதன் பூச்சிய நிலையினின்றும் அது பெயர்க்கப்படும்.

திசை Ox இல் ஆற்றும் அலகுவிசையொன்றுல் தாங்கியானது அதே திசையில் பெயர்ச்சி ξ அடைக. OC ஆனது, படம் 5·08 (c), ஊசலின் பூச்சிய நிலையைக் குறிக்க; கிடைத்திசையில் தாங்கியானது OA அளவால் இளகியிருக்கும்பொழுது ஊசலின் நிலையை AG குறிக்கின்றதென்க; இங்கு,

$$OA = |X|\,\xi \doteq mg\left[\frac{r_1\psi}{r_1+r_2}\right]\xi, \quad [\because \kappa^2 \doteq r_1 r_2, \quad \text{ப. 137 ஐ ஒப்}].$$

இனி, நீட்டிய GA யும் O ஊடே செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடும் ஒனறையொன்று வெட்டும் புள்ளியால் இயக்கக் கணநிலை மையம் S தரப்படுகிறது. எனவே,

$$AS \doteq OS \doteq \frac{OA}{\psi} = mg.\frac{r_1}{r_1+r_2}\xi;$$

அதாவது, சுழற்சியச்சிலிருந்து G யின் பலிதத் தூரம்

$$r_1\left[1+\frac{mg\xi}{r_1+r_2}\right] \text{ ஆகும்;}$$

அது $r_1+\sigma_1$ என்க.

நிமிர்ந்த ஊசலினிடத்து ஆவர்த்தன காலம் T_1 எனின்

$$\frac{g}{4\pi^2}T_1^2=\frac{(r_1+\sigma_1)^2+\kappa^2}{r_1+\sigma_1}=(r_1+\sigma_1)+\frac{\kappa^2}{r_1+\sigma_1}.$$

அதுபோலவே, தலைகீழுசலினிடத்து

$$\frac{g}{4\pi^2}T_2^2=(r_2+\sigma_2)+\frac{\kappa^2}{r_2+\sigma_2}.$$

எனவே, கணித்த ஆவர்த்தன காலம் T ஆனது

$$\frac{g}{4\pi^2}T^2=\frac{g}{4\pi^2}\left[\frac{r_1T_1^2-r_2T_2^2}{r_1-r_2}\right]$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[r_1^2+r_1\sigma_1+\frac{\kappa^2r_1}{r_1+\sigma_1}-r_2^2-r_2\sigma_2-\frac{\kappa^2r_2}{r_2+\sigma_2}\right]$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

இக்கோவையின்கண், κ^2 அடங்கியிருக்கிற உறுப்புக்களில், அண்ணளவாகக் $\kappa^2=r_1r_2$ எனப் புகுத்திஞல், $\frac{1}{1+\frac{\sigma_1}{r_1}}$ முதலியனவற்றை $1-\frac{\sigma_1}{r_1}$ என்றவாறு எழுத முடியும் அளவிற்கு,

$$\frac{gT^2}{4\pi^2}=r_1+r_2+\frac{1}{r_1-r_2}\left[r_1\sigma_1-r_2\sigma_2+r_1r_2\left(1-\frac{\sigma_1}{r_1}\right)-r_1r_2\left(1-\frac{\sigma_2}{r_2}\right)\right].$$

$\sigma_1=\frac{mgr_1\xi}{r_1+r_2}$, முதலியன ஆதலின்,

$$\frac{gT^2}{4\pi^2}=r_1+r_2+\frac{1}{r_1-r_2}[(r_1\quad r_2)\sigma_1+(r_1-r_2)\sigma_2]$$

$$=r_1+r_2+mg\xi.$$

தாங்கி இளகுதலால் எளிய சமவலு ஊசலின் பலித நீளம் கூடுகிறது எனவும் இக்கூடுதலானது ஊசலின் நிறையின் கிடைப் பிரயோகத்தால் ஆகும் பெயர்ச்சிக்குச் சமன் எனவும் மேற்படி கோவை உணர்த்துகிறது.

தாங்கியின் சடத்துவமும், தாங்கிமீது மாறும் நிலைக்குத்து விசையொன்றின் தாக்கமும் மேற்படி கொள்கையில் புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளன என்பது குறித்தற்பாலது. இந்நிலைக்குத்து விசையின் மாறும் பகுதி ψ யின் இரண்டாவது வரிசையிற் படுகின்றமையால் கிடைத்திசையில் இளகுதலால் ஆகும் விளைவுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்பொழுது அதன் விளைவு சிறிதெனக் காட்டலாம்.

எளிய ஊசலொன்றிற்குத் தாங்கியின் இளகுதலைப் பரிசோதனை முறைப்படி ஆராய்தல்.—முதன்முதலாக, இலேசான நூல், ஊசற்குண்டு என்பவற்ருல் ஆகும் ஊசலொன்றைக் கூட்டுசேலெனக் கருதுவோம்.

ஊசற்குண்டின் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து தாங்கியின் தூரம் l எனின் அப்பொழுது, வழக்கமான குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்த,

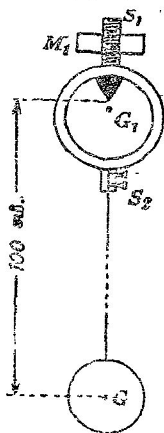
$$(r_1+\sigma_1)+(r_2+\sigma_2)=l,$$
$$(r_1+\sigma_1)(r_2+\sigma_2)=\kappa^2\to 0.$$

இங்கு, ஊசற்குண்டின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையமும் அதுவேயாம்.

r_1 முடிவுள்ளதாதலால் $(r_2+\sigma_2)\to 0$ என்பது தெளிவாம்; மேலும், இக்கோவையிலுள்ள ஒவ்வொரு கணியமும் நேராதலால் r_2 உம் σ_2 உம் பூச்சியத்தைத் தனித்தனியே அடையும் இயல்புடையன. இவ்வூசலினிடத்து σ_1, ஊசலின் நிறைக்குச் சமனான விசையொன்றின் தாக்கத்தால் தாங்கி கிடையான அதே திசையில் அனுபவிக்கும் பெயர்ச்சிக்குச் சமன்.

இளகுதாங்கியொன்றில் அதிரும் கூட்டுசேலொன்றிற்கெனத் தாபித்த கொள்கையிலே σ_1 உம் σ_2 உம் சிறிதாயிருக்குமாறு கட்டாயப்படுத்தியுள்ள போதிலும், எளிய ஊசலொன்றினிடத்து r_2 கண்டிப்பாய் மிகச் சிறிதாக இருப்பதால், σ_1 முடிவுள்ளதாக இருக்கக்கூடும் என மேற்படி விவாதம் மிகத் தெளிவாகக் காட்டுகிறது.

σ_1 ஐப் பரிசோதனை மூலம் துணியும்பொருட்டு எளிய ஊசலொன்று கீழ்வருமாறு ஆக்கப்படுகிறது. படம் 5·09 ஊசலைக் காட்டுகிறது; இங்கு, கத்தியோரத்தைக் காவுகின்ற உலோகச் சட்டம் கிட்டத்தட்ட 10 சமீ. விட்டமுடைய வட்டவளையமொன்றுலானது; சட்டத்தின் விளிம்பு 1 சமீ. தடிப்பும் 1 சமீ. அகலமும் உடையது. இவ்விளிம்புடன் கத்தியோரம் நிலையாக் கப்பட்டிருக்கிறது; அதற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே அசைத்து வைக்கக்கூடிய திணிவு M_1 ஐக் காவும் திருகு S_1 உளது. இதற்குக் கீழாகப் பிடிதிருகுகள் S_2 அளிக்கப்பட்ட உலோகத்தாடைச் சோடியொன்று உளது; இது மெல்லிய கம்பியையும் ஊசற்குண்டையும் காவுகிறது. ஊசற்குண்டின் நிறையானது ஏறத்தாழ 5 கிகி. ஆக இருத்தல் வேண்டும்.



படம் 5·09. இளகு தாங்கியொன்றில் எளிய ஊசல்.

முதலாவதாகக் கம்பியையும் ஊசற்குண்டையும் நீக்கி, கத்தியோரத்தைக் காவும் சட்டத்தின் ஆவர்த்தன காலமானது அமைக்க வேண்டியுள்ள ஊசலின் ஆவர்த்தன காலத்திற்கு அண்ணளவாகச் சமனாக வரும்வரை M_1 இன் நிலையைச் செப்பஞ்செய்க. இது ஒரு செக்கனூசலாகுக. சட்டத்தின் ஆவர்த்தன காலம் பெரிதாயிருக்கும்பொழுது அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 ஆனது கத்தியோரத்திற்குச் சற்றுக் கீழேயே இருக்கும்; ஆயினும், தரப்பட்ட ஆவர்த்தன காலம் எதுவாகிலும் அம்மையத்தின் நிலையைப் பரிசோதனை முறைப்படியே துணிதல்வேண்டும்.

அடுத்ததாகக் கம்பியும் ஊசற்குண்டும் நிலைபெறுகின்றன ; கத்தியோரத்திற்கும் ஊசற்குண்டின் புவியீர்ப்பு மையத்திற்கும் இடையேயுள்ள தூரமானது கிட்டத்தட்ட 100 சமீ. ஆக இருக்குமாறு செய்யப்படுகிறது. இப்பொழுது, ஊசலின் ஆவர்த்தன காலம் கிட்டத்தட்ட ஒரு செக்கன் ஆகும். இங்கு நிர்ணயிக்கப்பட்ட சூழலில், கத்தியோரங் காவுஞ் சட்டத்தின் இருப்பால் இவ்வாவர்த்தன காலம் பாதிக்கப்படமாட்டாது.

அடுத்து, ப. 143 இல் காட்டியுள்ள முறையைப் பயன்படுத்தி, (a) விறைப்பான தாங்கியில், (b) இளகுதாங்கியில், ஊசல் ஏறியிருக்கும் பொழுது அதன் ஆவர்த்தன காலம் துணியப்படுக. பிந்தியது 50 சமீ. $\times$ 3 சமீ. $\times$ 0·5 சமீ. ஆன பித்தளைச் சட்டத்தால் ஆனதாகலாம் ; அதன் குறுகிய விளிம்பில் ஊசலைக் காவுஞ் சட்டம் தாங்கப்பட்டிருக்குமுகமாக அது பேரிடுக்கியொன்றில் கிடையாகப் பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது.

இவ்விரு எடுத்துக்காட்டுக்களில், ஊசலின் ஆவர்த்தன காலங்கள் T_1, T_2 ஆகுக. ஊசலின் நீளம் r உம் விறைப்பில்லாத தாங்கியால் r இல் ஆகும் நீட்சி σ உம் எனின், அப்பொழுது, $T_1^2 = \frac{4\pi^2}{g} r$ உம் $T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g}(r+\sigma)$ உம் ஆகும்; எனவே σ வைத் துணியலாம். ஊசலின் நிறைக்குச் சமனான கிடைவிசையால் தாங்கி அனுபவிக்கும் பெயர்ச்சியுடன் இவ்வண்ணம் கிடைக்கப்பெற்ற பெறுமானத்தை ஒப்பிடுதல் வேண்டும்.

புவியீர்ப்பின் தனியளத்தல்பற்றி இந்நாளைய வேலை

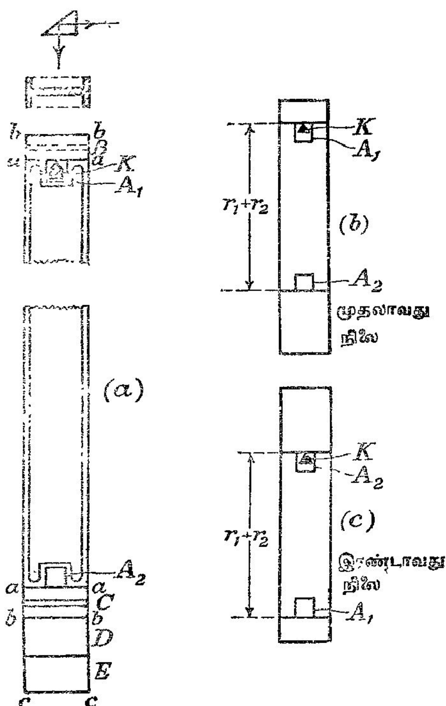
முன்னுரை.—தனியலகுகளிற் புவியீர்ப்புச் செறிவைக் காண்பதற்கான முதன்மையான காரணங்களுள், தெரிந்த திணிவுடைய பொருளொன்றின் மீது புவி பிரயோகிக்கும் ஈர்ப்புக் கவர்ச்சியானது வசதியான நியமவிசையொன்றைத் தருவதும் ஒன்றாகும். மேலும், தனியலகுகளில் மின்னோட்டமொன்றை அளப்பதற்கு மின்னோட்டத் தராசொன்றைப் பயன்படுத்துமிடத்து, மின்னோட்டமொன்றைக் காவும் இரு சுற்றுக்களிடையேயுள்ள கவர்ச்சியும் தெரிந்த திணிவுடைய பொருளொன்றின் மீதுள்ள ஈர்ப்பு இழுப்பும் சமநிலையாக்கப்படுகின்றன. அன்றியும், புரோத்தனின் சுழிகாந்த விகிதத்தைத் துணிதற்கான பரிசோதனையொன்றிலே மின்னோட்டமொன்றைக் காவுஞ் சுற்றொன்றின் மீதுள்ள விசையும் முன்னர் போன்ற ஈர்ப்பு விசையொன்றும் சமநிலையாக்கப்பட வேண்டியதாகின்றது. இவ்வெடுத்துக்காட்டுக்களிலும் இவைபோன்றவற்றிலும் பரிசோதனை செய்யப்படும் இடத்தில் g யின் பெறுமானத்தை 10^5 இல் 1 அல்லது 2 என்னும் திருத்தவரிசையில் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும் ; ஆனால், பாரமானியுயரத்திலிருந்து அமுக்கத்தைக் கணிக்குமிடத்து g யிலுள்ள வழுவானது 10^6 இல் 1 ஐ, அதாவது 10 லட்சத்தில் ஒன்றை மீறலாகாது. இம்மிகுவுயர் திருத்தம் இருந்தாற்றான் சர்வதேச வெப்பநிலையளவுத்

திட்டத்தை மீள எடுத்தாலும் பொழுது செம்மையான நுட்பத்தைப் புகுத்த முடிகின்றது ; ஏனெனில், 100°ச. நிலையைத் தாபித்தற்குப் பயன்படுத்தப் படும் நீரின் கொதிநிலைகாண் ஆய்கருவியிலுள்ள அமுக்கத்தை அளப்பது இன்று நுட்பத்தைக் குறைக்கின்ற காரணங்களுள் ஒன்றாகும். இவ்வெப்ப நிலையை 10^{-4} °ச. திருத்தத்துடன தெரிந்திருக்க வேண்டுமாயின் அமுக் கம் 10^6 இல 3 என்னும் திருத்த வரிசையில் இருக்கவேண்டும். இன்று இரு நியமவளவுகாண் பரிசோதனைச்சாலைகளில g யை அளந்து அவ்வழி வரும் பெறுமான வேறறுமையானது வேறிரு பரிசோதனைச்சாலைகளில் நியமவளவாக்கப்பட்ட ஈர்ப்புமானியொன்று பதிவுசெய்யும் வேற்றுமை யுடன் ஒத்திராதது வருந்தத்தக்கது.

விஞ்ஞானம் முன்னேற்றம் அடைந்திருக்கும் இந்நாட்களில் கேற்றர் என்பவரின் விளைவுகளை நோக்குமிடத்து அவை மதிப்பற்றவை எனலாம் ; ஏனெனில், ஊசலைச் சூழ்ந்திருக்கின்ற வளியாலாகும் விளைவுகள், ஊசல் அதன் தாங்கி ஆகியவற்றின் மீள்தன்மை எனபவற்றைப் பற்றி அவர் காலத்தில் நனகு உணரப்படவில்லை என்பதேயாம்.

கிளாக்கினது புறமாற்றத்தக்க ஊசல்.— 1906 இல், பொட்ஸ்டாம் என்னும் நகரில், ஃபூர்ட்வெங்கிளர் (FURTWANGLER), கியூனன் (KUHNEN) என்போர் புவியீர்ப்புச் செறிவின் பெறுமானமொன்றைத் துணிந்துள்ள னர். இவ்வாராய்ச்சியாளர்களாற் பயன்படுததப்பட்ட புறமாற்றத்தக்க ஊசல்களில் கத்தியோரங்கள் ஊசற் கோல்களுடன் இணைக்கப்பட்டிருந் தன ; எனவே, அவ்வோரங்களிடையேயுள்ள தூரத்தைத் திட்டமாக அளப்பது பெரிதும சிக்கலாயிற்று. கத்தியோரங்கள் ஊசற்றாங்கியின உறுப்புக்களாக அமைநதிருக்க, அக்கத்தியோரங்கள் மீது ஒன்றன்பின் னொன்றாகத் தாங்கப்பட்டிருக்கும் தட்டையானதும் சமாந்தரமானதுமான பரப்புடைய இரு தட்டுக்கள் புறமாற்றத்தக்க ஊசலாலேயே காவப்பட்டு இருக்குமாயின் மிக்குயர் திருத்தத்துடன் மேற்படி நீளவளத்தலை நடத்தமுடியும் என்னும் கருத்தைப் பிற்பட்ட பரிசோதனைகள் உறுதிப் படுத்தியுள்ளன. இத்தகைய இரு பரப்புக்களிடையேயுள்ள தூரத்தை இன்று உயர்திருத்தத்துடன் தலையீட்டுமானி முறைப்படி அளத்தல் இயலும். ஆதலால் கிளாக் (1938) பொருத்தமான ஊசலொன்றைத் திட்டமிட்டுப் பயன்படுத்தியுள்ளார். இன்வார் உருக்காலான ஊசலொன்றைப் புவியின் காந்தப் புலம் உணரத்தக்க அளவில் தாக்குகிறது என இன்று தெரியவருகிறது ; எனவே, காந்தமில்லா இலேசான கலப்புலோகமொன் றாலான ஊசற்கோலொனறையே கிளாக் பயன்படுத்தியுள்ளார். அது படம் 5·10 (a) யில் வரிப்பட முறைபபடிக் காட்டபபட்டிருக்கிறது. I– வெட்டுடையதாய் இருககுமாறு உலைககளபபட்ட அலுமினியக கலப்புலோகத் திணமச் சட்டமொன்றிலிருந்து அது இயநதிர சாதனத்தால் உருவாக்கப் பட்டது. செவ்வகத் துண்டுகளை இணைக்கக்கூடியதாய் ஊசலின் முனைகள் பலப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. ஊசல் ஆடுகிற கததியோரத்தை உட்செலுத்துவ தற்கு இடமளிக்கும்பொருட்டு இப்பலமளிக்கும சாதனங்கள் A_1, A_2 ஆகிய

இடங்களில் வெட்டி வெளியாக்கப்பட்டுள்ளன. நிறைமிகுந்த குற்றியானது, C, D, E என்னும் மூன்று கூறுகளால் ஆக்கப்பட்டது. C யும் நிறைகுறைந்த குற்றி B யும் சர்வசமன்; இவ்வொவ்வொன்றினதும் எதிரான முகங்கள் *aa*, *bb* என்பன குரோமியத்தால் மின்முலாம் பூசியும் பின்னர் தேய்த்துத் தட்டையாக்கிச் சமாந்தரமாக்கப்பட்டுமுள்ளன. B யின் முலாம் பூசியுள்ள இரு பரப்புக்கள் *aa* என்பவற்றுள் ஒன்று கத்தியோரம் K மீது இருக்கின்ற தளமாகவும் மற்றையது ஊசலின் வீச்சத்தை நோக்குவதற்கான தளவாடியாகவும் பயன்படுகின்றன. மீண்டும் மீண்டும்



படம் 5·10. ஊசலின் புறமாற்றத்தக்கவூசல்.
(தே. பௌ. ஆ.)

பரீட்சித்துக் கத்தியோரத்துக்கு மேலே பாரமான முனை அல்லது இலேசான முனை எது இருந்தபோதிலும் ஊசல் கிட்டத்தட்ட அதே ஆவர்த்தன காலத்துடன் ஊசலாடும் வரை குற்றி D யின் நீளம் குறைக்கப்பட்டது; இதற்கான ஏற்பாடுகள் படம் 5·10 (*b*) யிலும் (*c*) யிலும் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. E யின் கீழ்முகமானது ஒரேயொரு பரப்பிலே, அதாவது

cc யிலே தான் முலாம் பூசப்பட்டிருந்தது ; எனவே, ஊசல் தலைகீழாக இருக்கும் பொழுது வீச்சத்தை நோக்குவதற்கு அது தளவாடியாகப் பயன் பட்டுள்ளது. கத்தியோரம் மீது இறக்கிவைக்கப்படும் நேரம் வரும்வரை ஊசல் தக்க தாங்கியொன்றின்மீது ஓய்வாயிருக்கும் பொருட்டுக் குற்றிகள் B, C ஒவ்வொன்றும் குறுக்கே துளைக்கப்பட்டிருந்தன.

ஊசலின் தாங்கி வார்ப்பிரும்பாலான முண்டித்த கூம்பகமொன்றுரும். உயர்வெற்றிடத்தினுள்ளே ஊசல் அடைகக்பபட்டிருந்தது ; மக்லிளௌட் மானியொன்றையும் பிரானிமானியொன்றையும் பயன்படுத்தி எச்சவமுக் கம் அளக்கப்பட்டுள்ளது, ப. 824 ஐயும் தொ.பக். ஐயும் ஒப். ஊசற் கோலின் சராசரி வெப்பநிலையைத் துணிவதற்கு மூன்று பிளாற்றினத் தடை வெப்பமானிகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. 0·0002 செக்கன் திருத்தத்துடன் நேரத்தை அளப்பதறகுத் திட்டமான நேரப்பதிகருவி யொன்று இருந்தது. அளக்கவேண்டிய எந்த நேரவிடையின் தொடக்கத் திலும் அதன் ஈறறிலும் தேவைப்படும்பொழுது ஒரு குறுகிய காலத்திற்குத் தொழிற்படுமாறு செய்யக்கூடிய மின்னுபகரணமொன்று அன்றுவரை முடியாத குறுகிய காலத்தினுள் சராசரி ஆவர்த்தன காலத்தின் பெறு மானமொன்றை மிகவுயர் திட்டததுடன் பெறுவதற்கு உதவிற்று.

கத்தியோரம் வல்லுருக்காலானது ; பல அத்தகைய ஓரங்கள் பயன்படுத் தப்பட்டுள்ளன ; மிகக்கூரானதின் ஆரை 20 μ (0·0008 அங்.) இற்குக் குறைவாகவே இருந்தது. g யின் தோற்றப் பெறுமானங்கள், அ–து. g_ρ ஆனது ρ வின் பெறுமானத்துடன்

$$g_\rho = g_{\rho=0}\,[1 + 0{\cdot}65\rho \times 10^{-7}]$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் தொடர்புபடுத்தப்பட்டிருக்கின்றன எனக் கிளாக் கண்டார் ; இங்கு, ρ ஆனது மைக்கிரன்களில் கத்தியோரத்தின் வளைவாரை. மேற்படி சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி $g_{\rho=0}$ என்பதற்குப் பெறுமானம் துணியப்பட்டது. ρ வுடன் g யின் கூடுதலானது கத்தியோரம், தளம் என் பவற்றிறகிடையேயுள்ள உராய்வால் நேரிடும் புறமாருச் சக்திநட்டத்தால் ஆகிறது எனக் கிளாக் கருதுகிருர்.

வெப்பநிலை மாறுவதால் கோலின் நீளத்தில் உண்டாகும் மாற்றம், பூச்சிய வீச்சததினின்று விலகல், ஆவர்ததன காலத்தில் எச்ச வளி அமுக்கத்தாலான விளைவு, நியமக் கடிகாரததின் ஓட்ட வீதத்திலுள்ள சீரின்மை என்பவற்றையிட்டுத் திருத்தங்கள் செய்யப்பட்டுள்ளன.

அலைநீள ஒப்பீட்டுமானி ஒன்றைப் பயன்படுத்திப் பரல் (Barrell) என்பவர் ஊசலின் நீளத்தை அதாவது $(r_1 + r_2)$ என்பதை அளந்துள்ளார், தொ. III ப. 556 ஐ ஒப் ; 0·36 சமீ. விட்டமுடைய உருக்குக் கம்பித் துண்டொன்றில் ஊசலைக் கிடையாகச் சமநிலைப்படுத்தி r_1, r_2 என்பவற்றின் பெறுமானங்கள் துணியப்பட்டுள்ளன ; இக்கணிப்புக்களில், ப. 183 ஐ. ஒப்., பயன்படுத்தப்பட்ட சமன்பாடு

$$\frac{8\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{r_1 + r_2} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{r_1 - r_2}$$

இலுள்ள கடைசி உறுப்பானது, $(r_1 + r_2)$ ஐக் கொண்டுள்ள உறுப்பைக் காட்டிலும் மிகச் சிறிதாதலின் மேற்படி தூரங்களைப் போதிய திருத்தத் துடன் அளப்பதற்கு உருக்காலான மீற்றர் அளவிடையொன்று பயன்பட்டது.

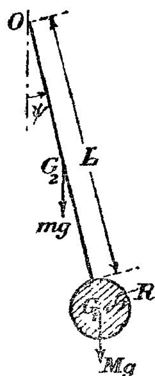
$$g_{\text{தே. பௌ. ஆ.}} = 981{\cdot}1815 \text{ சமீ. செக்.}^{-2}$$

எனக் **கிளாக்** கண்டுகொண்டார் ; இதில், நிகழ்தகு வழு $\pm$ 1·6 மி.கல். ஆகும், ப. 208 ஒப். மீளதன்மையையிட்டுக் **கிளாக்** பிரயோகித்த திருத்தம் பிழையான குறியுடன் இருந்தபடியால் **யெஃபிறீஸ்** (Jeffreys) என்பவர் அதை மீண்டும் கணித்து,

$$g_{\text{தே. பௌ. ஆ.}} = 981{\cdot}1832 \text{ சமீ. செக்.}^{-2}$$
$$= 981183{\cdot}2 \text{ மி.கல்.}$$

எனத் தெரிவித்துள்ளார்.

1946 இற்குப் பினனர் **அஜெலெற்ஸ்க்கி** (Ageletski), **ஏகோரேவ்** (Egorov) ஆகியோர் உருகிய சிலிக்காவாலான மூனறு ஊசல்களைப் பயன் படுததியுள்ளனர் ; அவர்களின் முடிவுகள் **கிளாக்** என்பாரின் முடிவு களுடன் நன்கு ஒத்திருக்கின்றன.



படம் 5·11. ஐவனோ வின் நீண்ட ஊசல்.

நீண்டவூசல்.— நீண்டவூசலொன்றின் தாங்கி மீதுள்ள விசைகளாற் செய்யப்படும் வேலையானது தொகுதியின் முழுசசக்தியைக் காட்டிலும் மிகச்சிறிது எனபதே அவ்வூசல் முறையின் தத்துவமாகும். 1936 இல், ஐவனேவ் (Ivanoff) என்பவர் 20 மீ., 30 மீ. நீளங்களைக் கொண்ட ஊசல்களைப் பயன்படுத்தி யுள்ளார். கம்பியின் திணிவு m இற்கான திருத் தத்தைச் செய்யும்பொருட்டுப் படம் 5·11 ஐக் கருதுக ; நீளம் L கொண்ட கம்பியின் முனையில் விட்டம் 2R உம் திணிவு M உம் கொண்ட கோள மொன்று தாங்கப்பட்டிருப்பதை இப்படம் காட்டு கிறது ; G_1 உம் G_2 உம் முறையே கோளம், கம்பி ஆகியவற்றின் மையப்போலிகள் ஆகும். தொங்கற் புள்ளி O எனின், O ஊடாகவும் வரிப்படத் தளத் துக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள கிடையச்சொன்று பற்றி தொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பம்

$$M\left[\frac{2}{5}R^2 + (L+R)^2\right] + m\left[\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = I \text{ என்க.}$$

ஊசலின் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து அதன் சிறு கோணப் பெயர்ச்சி ψ எனின், இயக்கச் சமன்பாடானது

$$\left[M\left\{\frac{2}{5}R^2 + (L+R)^2\right\} + m\frac{1}{3}L^2\right]\ddot{\psi} + \left\{m\frac{L}{2} + M(L+R)\right\}g\psi = 0\,;$$

எனவே, இயக்கம் எளிய இசையானது ; அதன் ஆவர்த்தன காலம்

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(L+R) + \frac{2}{5}\frac{R^2}{L+R} + \frac{m}{M}\cdot\frac{L^2}{3}\cdot\frac{1}{L+R}}{\left(1+\frac{m}{2M}\cdot\frac{L}{L+R}\right)g}}.$$

எனவே, எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம் l ஆனது

$$l = \frac{L+R+\frac{2}{5}\frac{R^2}{L+R}+\frac{m}{M}\cdot\frac{L^2}{3}\cdot\frac{1}{L+R}}{1+\frac{m}{2M}\cdot\frac{L}{L+R}}$$

$$\simeq \left[(L+R)+\frac{2}{5}\cdot\frac{R^2}{L+R}+\frac{m}{M}\cdot\frac{L^2}{3}\cdot\frac{1}{L+R}\right]\left[1-\frac{m}{2M}\cdot\frac{L}{L+R}\right]$$

$$= L+R+\frac{2}{5}\cdot\frac{R^2}{L+R}+\frac{m}{M}\left[\frac{L^2}{3(L+R)}-\frac{L}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{R^2L}{(L+R)^2}\right]$$

$$= \quad \cdots \quad +\frac{m}{M}\left[\frac{1}{3}(L-R)+\frac{R^2}{3(L+R)}-\frac{1}{2}L-\frac{1}{5}\frac{R^2L}{(L+R)^2}\right]$$

$$= \quad \cdots \quad -\frac{m}{M}\left[\frac{3L-2L+2R}{6}-R^2\left\{\frac{5(L+R)-3L}{15(L+R)^2}\right\}\right]$$

$$= \quad \cdots \quad -\frac{m}{M}\left[\frac{L+2R}{6}-\frac{2}{15}\frac{R^2(L+\frac{1}{2}R)}{(L+R)^2}\right]$$

$$= L+R+\frac{2}{5}\cdot\frac{R^2}{L+R}-\frac{m}{M}\left[\frac{L+2R}{6}-\frac{2}{15}\cdot\frac{R^2}{L+R}\right].$$

இப்பரிசோதனைகளின்போது கம்பியானது தாங்கியுடன் விறைப்பாக இறுக்கப்பட்டிருந்தது ; எனவே கம்பியின் மீள்தன்மைக்குரிய திருத்த மொன்றைப் பிரயோகித்தல் வேண்டும். ஊசலின் ஆவர்த்தன காலத்திற் குச் சமனான சுயாதீனமான காலமுடைய கத்தியோரமொன்று **பியோ** (Biot) என்பவரால் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது ; அவரது உபகரணத்தை இங்கு பயன்படுத்தியிருந்தால் திருத்தம் பெரிதும் குறைக்கப்பட்டிருக்கும். இனிக் கம்பியோரமாகத் தொங்கும் அளவுநாடாவொன்றால், 10^6 இல் 1 என்னும் திருத்த வரிசையில், தூரம் L ஐ அளத்தல் முடியும் ; ஆனால், இதன் பொருட்டுக் கம்பியின் சராசரி வெப்பநிலையை $0{\cdot}1°$ ச. திருத்தத்துடன் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும். நீர் சுற்றி ஓடுகின்ற இரட்டைச் சுவருடைய குழாயொன்றினுள் **ஐவனேவால்** பயன்படுத்தியுள்ள ஊசலானது ஏற்றப் பட்டிருந்தது. கோளங்கள் காந்தமல்லாதவையாக இருந்தன ; ஆனால், தப்பாக உருக்குக் கம்பி பயன்படுத்தப் பட்டிருந்தது ; எனவே, காந்தப்

புலமொன்றில் அக்கம்பி இருப்பதால் உண்டாகின்ற சிறு விசைகள் எவ்வகையிலும் புறக்கணிக்கத்தகாத வழுக்களைப் புகுத்தியிருக்கக்கூடும்.

$$g_{\text{லெனின்கிருட்}} = 981{\cdot}928 \text{ கல்.}$$

என **ஐவனேவ்** கண்டார்.

சுழலும் திரவ முறை.—நிலைக்குத்தச்சொன்று பற்றி, சீரான கோண வேகம் ω உடன் திரவமொன்று சுழலுங்கால் அதன் சுயாதீனப் பரப்பானது குவியத்தூரம் f கொண்ட சுற்றற் பரவளைவுருவை எடுக்கிறது என அதி. XII ப. 710 இல் காட்டப்பட்டுள்ளது ; இங்கு,

$$f = \frac{g}{2\omega^2}.$$

இனி, மேற்படி பரப்பில் பரப்பிழுவையாலாகும் இடர் சிறிது எனவும் அது எல்லைக்கு அணித்தாயுள்ள கங்கணத்தில் மட்டுமே தோன்றும் எனவும் காட்டலாம். இச்செய்திகளை அறிந்திருந்த **மேடி** (Medi) என்பவர் மேலே விவரித்துக் கூறியுள்ளவாறு இரசம் சுழலும்பொழுது உண்டாகின்ற பரவளைவுருவினது பரப்பின் குவியத்தூரத்தை அளந்து அதிலிருந்து g யின் பெறுமானத்தைத் துணியத் திட்டமிட்டார். குவியத்தூரம் அனேகமாகப் 10 சமீ. வரிசையில் இருக்கும் ; இத்தகைய நீளத்தை 10^6 இல் 1 என்னும் திருத்தத்துடன் அளக்க முடிந்தபோதிலும் அவ்வளத்தலுக்குத் தேவையான தெளிவைக் குவியம் காணுமற் கொண்டிருக்கவும் கூடும். திட்டமிட்ட இப்பரிசோதனையில், இரசப் பரப்பின் கறைப்படுத்தலானது அதன் ஒழுங்கான புறவுருவக்கோட்டை அழிக்கலாம் ; எனவே, இங்கு புள்ளிக் குவியம் என்பது பொருந்தாது. **மைக்கெல்சன்** தலையீட்டுமானியைப் பயன்படுத்திக் குவியத் தூரத்தையும், தட்டின் அச்சுடன் பொருத்தியுள்ளதும் சுற்றொன்றிற்குப் 10,000 துடிப்புக்கள் தருகின்றதுமான துடிப்புப் பிறப்பாக்கியொன்றைப் பயன்படுத்திக் கோணவேகத்தையும் அளக்கத் திட்டமிடப்பட்டிருந்தது.

இம்முறையால் கிடைக்கப்பெற்ற திருத்தமான முடிவுகள் இன்னும் வெளியிடப்படவில்லை ; **வூட்** (Wood) என்பவர் (1909) முதன்முதலாகத் தெரிவித்தவாறு அங்குள்ள மற்றைப் பிரச்சினைகளை ஞாபகப்படுத்திஞல் வெளியிடாதது வியப்பன்று. **வூட்** வானியற் தேவைகளையிட்டுச் சுழலுங் கிண்ணமொன்றிலிருந்த இரசத்தின் பரப்பைப் பயன்படுத்த முயன்றபோது சுழற்சி வேகத்தின் ஆவர்த்தன மாறல்களால் குவியமும் ஆவர்த்தன மாற்றம் அடைகிறது என்றும், இதன் காரணமாகக் கிண்ண ஓரங்களிலுள்ள ஒழுங்கீனங்களிலிருந்து குற்றலைகள் தோன்றிப் பரவுகின்றன என்றும் கண்டுள்ளார். மேலும், சுழற்சியச்சு சரியாக நிலைக்குத்தாகவும் கிண்ணத்தின் அடிமட்டம் தட்டையாகவும் சரியாகக் கிடையாகவும் அமைந்திராவிட்டால் இரசத்தில் சுழலலையொன்று உற்பத்தியாகும் என்றும் **வூட்** கண்டுகொண்டார்.

பொருளொன்றின் சுயாதீன வீழ்வைப் பயன்படுத்தும் முறைகள்.— சுயாதீனமாக விழுகின்ற கோட்டுநியமமொன்றை உயர்வேக ஒளிப்பட முறையாற் பதிவுசெய்து g யின பெறுமானத்தைக் காணமுடியும் என **வோலே (Volet)** என்பவர் 1946 இல் தெரிவித்தார். ஒளிப்படக்குழம்பு பூசியுள்ள எளிய சட்டமொன்றைப் பயன்படுத்தி அம்முறையை **றீக்மான் (Rieckmann)** என்பவர் செம்மையாக்கினர் ; அளக்கப்பட்ட நேரங்களில் தோற்றுவிக்கப்படும் பளிச்சீடுகளால பிரகாசிப்பித்த நுண்பிளவொன்றின் விம்பங்கள் இச்சட்ட மீது உண்டாக்கப்பட்டன. அதேபோல் பூசியுள்ள படிகக் கோலொன்றைப் பயன்படுத்தி **மாட்சின்யாக் (Martsinyak)** என்பவர் அதுபோன்ற ஆராய்வொன்றை நடாத்தினர்.

நீடிக்கும் நேரம் 0·2 μ செக். இலும் குறைவான பளிச்சீடுகளைக்கொண்ட விளக்குகள் கிடைக்குமாதலால் இபபரிசோதனைகளிடத்து நேரவிடையைத் திட்டமாக வரையறுக்கலாம் ; இவவிளக்குகள் படிக அலையமொன்றால் ஆளப்பட்டுள்ளன. ஆயினும், தூரத்தை அத்தகைய திருத்தத்துடன் அளக்கமுடியுமா முடியாதா எனபது ஐயத்துக்குரியதாகும். மேலும், சட்டத்தின் வெப்பநிலையை அறிந்திருத்தல் வேண்டும். அல்லாமலும், புவியீர்ப்பு ஒழிந்த விசைகள் சட்டம் மீது பிரயோகிக்கப்படவும் கூடும் ; இவை, காந்த, மின புலங்களில் சட்டத்தின் இயக்கத்தாலும் வளியிலிருந்தும் எழும்.

விழுஞ் சட்டத்தைப் பயன்படுத்தும் பரிசோதனைகளில் கீழ்வரும் குறைபாடுகள் உள. ஒளிப்படத் தட்டில் பிரகாசிப்பித்த பிளவின் இரு விம்பங்களும் சமமாகவும் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டும் இருப்பதில்லை ; அத்துடன தூரங்கள் தலையீட்டுமானியால் அளக்கப்படவுமில்லை. எனவே, தேசிய பௌதிக ஆய்கூடத்திலே, **குக்** என்பவர் கீழ்வரும் கருத்துக்களுக்கு இணங்குமுகமாகப் பரிசோதனைகளை நடாத்துகிறர்.

குண்டொன்று மேல்நோக்கி எறியப்படுக ; தூரம் s ஆயிடையுள்ள இரு தளங்களைக் குண்டு கடக்கும் நேரங்கள் அளக்கப்படுக. தாழ்ந்த தளத்துக்குக் குறுக்கே மேலும் கீழுமாக அடுத்தடுத்து நிகழும் கடப்புக்களின் கால இடை Δt_1 ஆகுக. மேற்றளத்திறகு அதற்கு ஒத்தகால இடை Δt_2 ஆகுக. குண்டின் ஓய்வுக் கணநிலையானது மேற்றளம்குறித்து உயரம் s_0 இல் இருக்குமாயின்

$$s+s_0=\tfrac{1}{2}g[\tfrac{1}{2}(\Delta t_1)]^2,$$

$$s_0=\tfrac{1}{2}g[\tfrac{1}{2}(\Delta t_2)]^2.$$

$$\therefore\ g=\frac{8s}{(\Delta t_1)^2-(\Delta t_2)^2}.$$

உண்மையில், இம்முறையானது இரு முதன்மையான நயங்களை உடையதாகும்.

(1) தளமொன்றைப் பந்து மேலும் கீழுமாக ஒரே வேகத்துடன் கடக்கிறபடியால் Δt ஆனது சமதிட்டத்துடன் தோன்றும் இரு நிகழ்ச்சிகளின் கால வித்தியாசமாகும்.

(2) தூரத்தை வரையறுக்கும் தளங்கள் நிலையானவை; அவற்றின் இடையீட்டைத் தலையீட்டு மானியால் அளக்கமுடிகின்றது.

கோளம் பிசுபிசுப்பு ஊடகமொன்றில் இயங்குகிறபடியால் அதன்பாலுள்ள விளைவை ஆராயும்பொருட்டுக் கீழ்முகமாக அளந்துள்ள தூரங்கள் x என்பதால் குறிக்கப்படுக. பிசுபிசுப்பால் ஆகும் விசையானது வேகத்துடன் நேர் விகிதசமமாயிருக்குமாயின், கீழ்முகமான இறக்கத்தின் இயக்கச் சமன்பாடு

$$m\ddot{x} = mg - \kappa\dot{x},$$

அல்லது $$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = g\ ;$$

இங்கு κ யும் α வும் மாறிலிகள் ஆகும். நேரம், உயரம் ஆகியவற்றின் உற்பத்தியானது கடவையின் உயர்வான புள்ளியில் எடுக்கப்படுக; அதாவது $t=0$, ஆகுமிடத்து, $\dot{x}=0$, $x=0$.

$\dot{x} = v$ என எழுத,

$$\dot{v} + \alpha v = g.$$

எனவே, அடுக்கு $\int \alpha\, dt =$ அடுக்கு αt என்பதைத் தொகையீட்டுக் காரணியாகப் பயன்படுத்த,

$$v = \text{அடுக்கு } (-\alpha t) \left[\frac{g}{\alpha} \text{ அடுக்கு } \alpha t - \frac{g}{\alpha}\right].$$

இங்கு, தொகையீட்டு மாறிலியானது $-\frac{g}{\alpha}$ அடுக்கு $(-\alpha t)$ ஆகும்.

மீண்டும் தொகையிட,

$$x = \frac{g}{\alpha^2} \text{ அடுக்கு } (-\alpha t) + \frac{gt}{\alpha} + \mathrm{B}\ ;$$

இங்கு, $t=0$, $x=0$ இல் ஆகுமிடத்து $\mathrm{B} = -\frac{g}{\alpha^2}$ ஆதலால்.

$$\therefore\ x = \frac{g}{\alpha^2}\left\{\text{அடுக்கு } (-\alpha t) - 1\right\} + \frac{gt}{\alpha}$$

$$= \frac{g}{\alpha^2}\left\{-\alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} - \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + \dots\right\} + \frac{gt}{\alpha}$$

$$= g\left\{\frac{t^2}{2!} - \frac{\alpha t^3}{3!} + \frac{\alpha^2 t^5}{5!} - \dots\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(i)}$$

வெற்றிடத்தில், பொருளானது தூரம் x ஐ இறங்குவதற்குத் தேவைப்படும் நேரம் t_0 ஆகுக; அதாவது $t_0 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$; மேலும், பிசுபிசுப்பைச் சிறிதளவில் உடைய ஊடகமொன்றில் அதே இறக்கத்துக்கான நேரம் $t_0 + \tau$ ஆகுக. α சிறிதாயின் $\tau \ll t_0$. (i) இல் பிரதியிட,

$$\tfrac{1}{2}gt_0^2 = g\{\tfrac{1}{2}(t_0+\tau)^2 - \tfrac{1}{6}\alpha(t_0+\tau)^3 + \dots\},$$

இரண்டாம் வரிசையில் α வையும் τ வையும் கொண்டுள்ள உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்தால்

$$\tfrac{1}{2}gt_0^2=g\{\tfrac{1}{2}(t_0^2+2t_0\tau)-\tfrac{1}{6}\alpha t_0^3\}$$

அல்லது, $$\tau=\frac{\alpha t_0^2}{6}.$$

எனவே, $$t_0+\tau \simeq t_0\left(1+\frac{\alpha t_0}{6}\right).$$

அதுபோலவே, ஏற்றத்தின்போது இயக்கச் சமன்பாடு

$$\ddot{z}=-g-\alpha\dot{z}$$

ஆகும்; இங்கு z மேல்முகமாக அளக்கப்படுகிறது;
அதாவது $x=-z+\mathrm{A}$; இங்கு A ஒரு மாறிலி. எனவே

$$\ddot{x}-\alpha\dot{x}=g;$$

ஆகவே, ஏற்றத்திற்கான நேரம் அண்ணளவாய்

$$t_0\left(1-\frac{\alpha t_0}{6}\right)$$

ஆகிறது.

எனவே, α ஆனது முதல் வரிசையிற் படுமாயின், பறப்புக்கான முழுநேரம்

$$2\left(\frac{2x}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ஆகும்; இது α வைச் சாராது; தணித்தல் சிறிதாதலின் என்க.

உயரத்துடன் புவியீர்ப்பின் மாறலை ஆராயும்பொருட்டு, t யிற்கும் x இற்கும் முன்னர்போலவே உற்பத்தியை எடுத்து, $x=0$ ஆகுமிடத்து புவியீர்ப்புச் செறிவின் பெறுமானம் g எனக் கொள்ளின், ஆழம் x இல் அதன் பெறுமானம்

$$g+\beta x$$

ஆகும்; இங்கு, β ஆனது $0{\cdot}309$ மி.கல்.மீ.$^{-1}$ அல்லது $0{\cdot}31\times10^{-3}$ சமீ.செக்.$^{-2}$ மீ$^{-1}$, அதாவது $0{\cdot}31\times10^{-5}$ செக்.$^{-2}$ ஆகும். எனவே,

$$\ddot{x}=g+\beta x$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டுக்கு, அதாவது

$$\ddot{x}-\beta x=g$$

என்பதற்குத் தீர்வுகாண வேண்டியதாகின்றது.

மூலி ஆனது

$$x=\mathrm{A}\ \text{அகோசை}\ (\beta^{\frac{1}{2}}t+\phi)$$

ஆகும்; இங்கு, A யும் ϕ யும் மாறிலிகள் ஆகும்: அதேநேரம்,

குறிப்பிட்ட தொகையீடானது

$$\frac{g}{D^2-\beta} = -\frac{g}{\beta}.$$ [ப. 39 ஐ ஒப்.]

$t=0$ ஆகுமிடத்து $\dot{x}=0$ ஆதலின் $\phi=0$; மேலும் $t=0$ ஆகுமிடத்து $x=0$ ஆதலின் $A=\frac{g}{\beta}$. எனவே, பொருத்தமான தீர்வானது

$$x=\frac{g}{\beta}\cdot \text{ அகோசை } \beta^{\frac{1}{2}}t-\frac{g}{\beta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{ii})$$

புவியீர்ப்புச் செறிவின மாறலேக் கருதுமிடத்து, இச்சமனபாட்டில் இறக்கத் திற்கான நேரம் t_0+t' ஆகுக. $t' \ll t_0$ உம் $\beta \ll g$ உம் ஆனபடியால், (ii) இல் $t=t_0+t'$ எனப் பிரதியிட,

$$\tfrac{1}{2}gt_0^2=\frac{g}{\beta}\left\{\frac{\beta(t_0+t')^2}{2!}+\frac{\beta^2(t_0+t')^4}{4!}+\ \cdots\ \right\}$$

$$\doteqdot g\{\tfrac{1}{2}(t_0+2t_0t')+\tfrac{1}{24}\beta t_0^4\};$$

இங்கு, β, t' என்பவற்றை இரண்டாவது வரிசையில் கொண்டுள்ள உறுப் புக்கள் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன.

$$\therefore\ t_0t' \doteqdot -\tfrac{1}{24}\beta t_0^4 \text{ அல்லது } t' \doteqdot -\frac{\beta t_0^3}{4!}.$$

$$\therefore\ t_0+t'=t_0\left(1-\frac{\beta t_0^2}{4!}\right).$$

அதுபோலவே, மேல்முகமான பறப்புக்குத் தேவைப்படும் நேரமும் t_0+t' ஆகிறது. எனவே, β வின் முதல் வரிசையைப் பொறுத்தமட்டில், பறப்புக்கான நேரம்

$$\Delta t=2t_0\left(1-\frac{\beta t_0^2}{24}\right)=2\sqrt{\frac{2x}{g}}\left(1-\frac{\beta x}{12g}\right).$$

$$\therefore\ (\Delta t_1)^2-(\Delta t_2)^2=\frac{8(x_1-x_2)}{g}\left\{1-\frac{\beta}{g}\cdot\frac{x_1+x_2}{6}\right\};$$

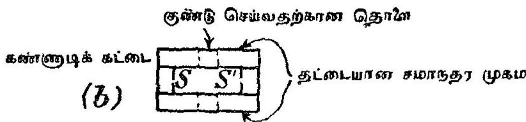
அதாவது, புவியீர்ப்புச் செறிவுக்கெனத் துணியப்பட்ட பெறுமானம் கடவையின் உச்சத்திலிருந்து தூரம் $\frac{1}{6}(x_1+x_2)$ கீழேயுள்ள புள்ளியை ஒத்திருககிறது.

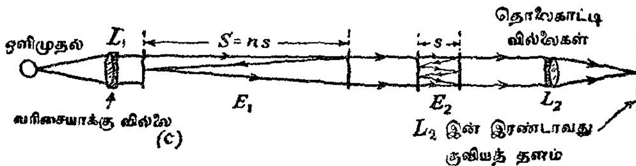
பரிசோதனைக்கு உகந்த பொருள் குண்டு மட்டுமே ; ஏனெனில், குண்டை மேல்முகமாக எறிந்தபொழுது அதறகு அளிக்கப்பட்ட எந்தச் சுழற்சியும் மாட்டேற்றுத் தளஙகளே அது கடக்கும்போது எடுக்கப்படும நோக்கல்களைப் பாதிக்கமாட்டாது. எனவே, காநத, மின புலங்களாலாகும் விசைகள் புறக் கணிக்கத்தக்க அளவில இருக்கும்பொருட்டு மிக்குயர் பண்புடைய ஒளியியற் கண்ணுடியாலான குண்டே பயனபடுத்தப்படுகிறது ; தளமொன்றைக் குறித்துக் குண்டின் மையத்தின் நிலேயை 1μ விலும் மேலான திருத்தத் துடன் உணரும் பொருட்டுக் கீழ்வரும் முறை கையாளப்பட்டது.

ஆய்கருவியின் அடிப்படையான பகுதிகள் படம் 5·12 (a) இல் காட்டப்பட்டுள்ளன ; இந்நூலின் முகப்புப் பக்கத்துக்கு எதிரேயுள்ள படத்தில் விவரங்கள் இன்னும் தரப்பட்டிருக்கின்றன. G_1 உம் G_2 உம் கண்ணுடிக் குற்றிகள் ஆகும் ; அவற்றிறகு எதிர்ததாற்போலுள்ள முகஙகள் சரியாகச் சமாந்தரமாகவும் கிடையாகவும் இருக்கினறன ; அமமுகஙகளிடையேயுள்ள தூரம் தலையீட்டுமானி முறைப்படித் துணியப்படுகிறது. அக்குற்றிகளுள் ஒன்று படம் 5·12 (b) யில் அதிக விவரத்துடன் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. S உம் S′ உம் நுண்ணிய பிளவுகள் ஆகும் ; அவை அமைந்திருக்கும் தளத்தைக் கண்ணுடிக் கோளம தாணடுங்காலே, பிளவுகளுக்கிடையே அது சமச்சீராக இருக்கும் நேரத்திலே, S இன் விம்பம் S′ மீது குவியச் செய்யப்படுகிறது. இவ்வண்ணம், இரண்டாவது பிளவுக்குப பின்னுல் வைக்கப்பட்டிருக்கின்ற ஒளிப்பெருக்கியொன்றில் ஒளிப் பளிச்சீடொனறு படுகிறது ; ஒளிப்பெருக்கி அடுததடுத்துத் தருகின்ற அறிகுறிகளின் காலவிடை அளக்கப்படுகின்றது. இதன் பொருட்டு ஒளிப்பெருக்கியிலுள்ள மின்னேட்டம் பெருக்கப்பட்டு, 100 கிலோவட்டம் செக்.$^{-1}$ நியம நிகழ்வெண் அறிகுறிப் பிறப்பாக்கியொன்றின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் குறித்து எண்ணியொன்றில் அக்காலவிடை அளக்கப்படுகிறது. பறக்கும் அதன் கோளமே இந்நியம அலையத்தைத் தொடக்கியும நிறுததியும் வைக்கிறது. பறப்பின் தொடக்கத்திலும் முடிவிலும் உள்ள ஆவர்த்தன காலத்தின் பினனத்தைக் கோளத்திஞல் அளக்கும் பொருட்டு கதோட்டுக் கதிர்க்குழாயொனறுடன் இணைக்கப்பட்ட வகையீட்டுச் சுற்றென்று பயன்படுத்தபபடுகிறது ; இஙகு சுற்றுனது, முதன்மை வளையியிலுள்ள உயர்வுகளின் பெறுமானஙகள் வகையீட்டு வளையியில் பூச்சியமாகுமாறு உள்ளது. உயாவுநிலைகளைக் காட்டிலும் பூசசிய நிலைகளாகிய இவற்றையே திருத்தத்துடன் காணமுடியும்.

குறுக்கு வில் வகையான கவண ஒன்றைப பயன்படுத்தி உயர்வெற்றிடத்தில் கோளத்தின் பறபபுத் தொடக்கி வைக்கப்படுகிறது. வெபபநிலை மாற்றத்துக்கான எல்லாத திருத்தங்களையும் நீக்கும்பொருட்டு G_1, G_2 என்பவற்றின் எதிர்ததாறபோலுளள முகங்களின இடைத்தூரமானது கோளம் பறககும் காலேயே அளக்கப்படுகிறது. இதன் பொருட்டு, 20 சமீ. எறறலன் ஒன்றிலுள்ள ஒளியியல் பாதையில் இவ்விடைததூரம் உணர்த்தப்படுகிறது. இஙகு அடஙகியுள்ள தத்துவத்தை விளஙகுமபொருட்டு, குறைத் தெறிப்புப் பரப்புக்களைக் கொண்ட இரு சோடித் தட்டுககள படம் 5·12 (c) யில் காட்டியுள்ளவாறு அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன எனக் கொள்க ; இங்கு, ஒரு சோடித் தட்டுக்களின் ஆயிடை S ஆனது மறறைச சோடியின் ஆயிடை s இன் ஒரு சிறு மடஙகு n ஆகும். நேர்வரிசையாக்கப்பெறற ஒளிக் கற்றையொன்று தட்டுக்கள் மீது செங்குத்தாகப் படுமாயின், முதற் சோடியில் இருமுறை தெறிக்கப்படுகின்ற ஒளியும இரண்டாவது சோடியில் $2n$ முறை தெறிக்கப்படுகினற ஒளியும் ஒரேகால தாமததை அனுபவிக்கின்றன. அவ்விரு கற்றைகளும் தலையீட்டு விளிம்புகளைத் தோற்றுவிக்

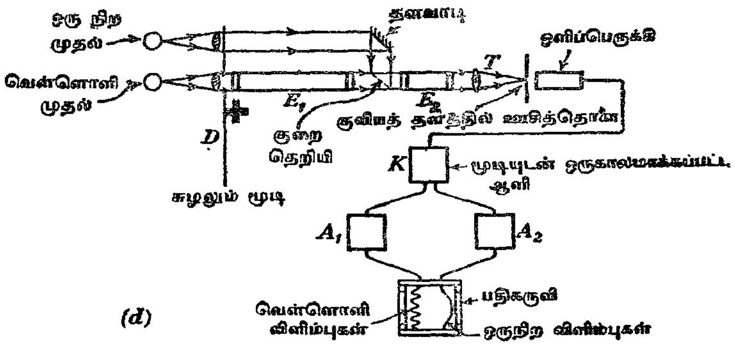
வளியமுக்கத்தை மாற்றும்
முசலம்
தொலைகாட்டி ஒளிப்பெருக்கி
ஆடி
கல்வனோ மானி
20 சமீ.
எற்றலன்
பிளவு ள் கொண்ட
கண்ணாடிக் கட்டை
100 கி' வ.
நியம
அறிகதி
எண்ணி
S_2'
S_2
G_2
வில்லை
பெருக்கி
வகையீடு செய்கருவி
CRT
1m.
ஒளிப்பெருக்கிகள்
எண்ணி
S_1
G_1
S_1'
பெருக்கி
வகையீடு செய்கருவி
CRT
வரிசையாக்கி
வெற்றிடப்பம்பி
குறுக்கு வில்வகைக்
கவ்வு
(a)

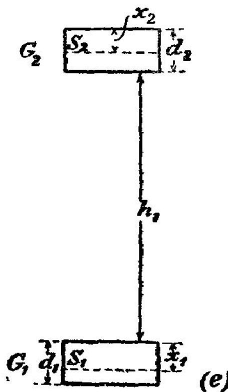




படம் 5·12. புவியீர்ப்புச் செறிவைத் துணிவதற்குரிய குக்கின் திட்டமான முறை.

கின்றன ; மேலும், இங்கு பாதைவேற்றுமை பெயரளவில் பூச்சியம் ஆதலால் வெள்ளொளியைப் பயன்படுத்தியும் விளிம்புகளைப் பெறமுடியும். இத்தகையனவே புறூஸ்ரரின் (Brewster) விளிம்புகள், தொகுதி III ப. 533 ஐ ஒப் ; மேலும், தலையிடுகின்ற இரு கற்றைகளின் செறிவு கள் வேறுபடுகின்றபடியாலும் கறுப்பல்லாத பின்னணியிலே விளிம்புகளை நோக்க வேண்டியிருத்தலாலும் கண்ணுல் பார்க்குமிடத்துச் சிலவேளை களில் விளிம்புகளின் தோற்றம் தெளிவற்றதாகக் காணப்படுகிறது. குக், ரிச்சேட்சன், (Cook, Richardson) என்பவர்கள் (1959) விளிம்புகளை ஒளிமின்னியல் முறைப்படிச் சோதித்துள்ளனர் ; அதே நேரத்தில் இங்கு தொடர்புள்ள பாதைவேற்றுமைகள் சரியான விகிதத்தை அடையும் வரை சிறு எற்றலனிலுள்ள வளியின் அமுக்கத்தையும் அதன் விளைவாக அவ் வளியின் முறிவுக் குணகத்தையும் மாற்றி பரிசோதனையை நடாத்தினர்.





படம் 5·12.

பயன்படுத்தியுள்ள ஒளியியற்றெருகுதியின் அடிப்படையான தத்துவங்கள் படம் 5·12 (d) யில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. பெரிய எற்றலனின் நீளம் 1 மீற்றர் ஆகும்; 20 சமீ. எற்றலனின் அச்சானது, நோக்குந் தொலைகாட்டியின் குவியத் தளத்திலுள்ள 0·8 மிமீ. விட்டமுடைய ஊசித்தொளை யொன்ருல் வரையறுக்கப்பட்டவாறு, அத்தொலைகாட்டியின் அச்சுக்குச் சமாந்தரமாக இருந்தது. ஆரைச்சிறை வடிவமுள்ள தட்டையான மூடி D யைச் சுழற்றிப் படுவொளியானது 200 வட்டம் செக்.$^{-1}$ வீதத்தில் குழப்பப்பட்டது. ஊசித்தொளை வழியாகச் செல்லும் ஒளியானது ஒளிப் பெருக்கியொன்றில் பட்டது; இதன் பயப்பானது ஊசித்தொளையை அடையும் ஒளிச்செறிவுக்கு விகிதசமமான நேரோட்டமொன்றைத் தருமாறு பெருக்கிச் சீராக்கப்பட்டது. நியம அலைநீளத்தைக் குறித்துப் பெரிய எற்றலனின் நீளத்தை அளக்க இத்தொகுதியைப் பயன்படுத்த வேண்டுமாயின், ஊசித் தொளையில் மைய வெள்ளொளி விளிம்பு படுவதற்குத் தேவையான அமுக்கத்தில் இந்த நியம அலைநீளத் தின் தொடர்பில் சிறிய எற்றலனின் ஒளிப்பாதையைத் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும்; இதன்பொருட்டு, அமுக்கத்தை, வழுவானது மில்லிபாரொன் றின் ஆயிரத்தின் ஒருசில பங்குகளை மீருதவாறு அளக்க வேண்டும். வெள்ளொளியைப் பயன்படுத்தி ஒப்பிடப்படும் அதே நேரத்தில் நியம அலைநீளத்தின் தொடர்பில் சிறிய எற்றலனின் நீளத்தை அளப்பதால் இத்தகைய கடினமான செயன்முறையானது தவிர்க்கப்படுகிறது; ஏனெனில், சிறிய எற்றலனிற்குரிய தலையீட்டு வரிசையிலுள்ள முழுவெண்ணுறை பகுதியைக் காணபதற்கு மட்டுமே அமுக்கத்தின் பெறுமானம் தேவைப் படுகிறபடியால் அவ்வமுக்கத்தில் ஒரு மில்லிபார் அளவிலும் வழு இருக் கலாம்.

ஒளிமுதல்களை மறைக்கும் மூடியுடன் நேரவிசைவு செய்யப்பட்ட ஆளி K யினுல் ஒளிப்பெருக்கியின பயப்பு வாயிலானது பெருக்கிகள் A_1, A_2 எனபவற்றுடன் மாறிமாறித் தொடுக்கப்படுகின்றது; எனவே, ஒரு பெருக்கியின் பயப்பானது வெள்ளொளியின் செறிவுக்கும் மற்றைய தின் பயபபு ஒருநிறவொளியின் செறிவுக்கும் விகிதசமமாகும். இரு பயப்புகளும் ஒரே நேரத்தில் பதிவுசெய்யப்படுகின்றன; வளியின் அமுக் கத்தை மிகு திட்டமாக அறியவேண்டாது, இவ்விணைநத பதிவிலிருந்து மைய வெள்ளொளி விளிம்புக்கொத்த ஒருநிறவொளித் தலையீட்டு வரிசையைக் காணமுடிகின்றது.

பிளவுகள் அமைந்திருக்கின்ற இடைத் தளங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தை நேராக அளக்க முடியாது; எனவே, கீழ்த்தரப்பட்ட செயன் முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. குற்றிகள் G_1, G_2 என்பவற்றின் அண்ணிய பரப்புக்களிடையேயுள்ள தூரம் h_1 ஆகுக; இதுவே படம் 5·12 (e) யில் உள்ளவாறு குற்றிகள் அமைந்திருக்கும்பொழுது தலையீட்டுமானி முறை யால் அளக்கப்படும் தூரமாகும். அப்பொழுது, குற்றிகளின் தடிப்புகள் d_1, d_2 எனவும், அவற்றிற்கொத்த குற்றிகளின் மேற்பரப்புக்களிலிருந்து

பிளவுகளின் தூரங்கள் x_1, x_2 எனவும் ஆயின்,

$$s_1 = h_1 + x_1 + (d_2 - x_2)\ ;$$

இங்கு s_1, பிளவுகளிடையேயுள்ள நிலைக்குத்தான தூரமாகும்.

G_1 தலைகீழாக்கப்பட்டபோது பிளவுகளிடையேயுள்ள தூரம் s_2 ஆகிறது என்க ; இந்நிலையில் இரு குற்றிகளின் அணித்தாயுள்ள பரப்புக்களின் இடைத்தூரம் h_2 எனின

$$s_2 = h_2 + (d_1 - x_1) + (d_2 - x_2)\ ;$$

G_2 உம் தலைகீழாக்கப்பட்டால்

$$s_3 = h_3 + (d_1 - x_1) + x_2.$$

ஆனால், G_1 அதனது தொடக்கத் தானத்தை மீண்டும் அடைய G_2 மட்டுமே தலைகீழாக்கப்பட்டால்

$$s_4 = h_4 + x_1 + x_2.$$

$$\therefore\ s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4\bar{s} \quad (\text{என்க})$$

$$= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + 2d_1 + 2d_2,$$

அதாவது $$\bar{s} = \bar{h} + \tfrac{1}{2}(d_1 + d_2)\ ;$$

இங்கு, $$4\bar{h} = h_1 + h_2 + h_3 + h_4.$$

இனி, s, Δt_1, Δt_2 என்பவற்றில் g ஐக் குறிக்க,

$$g[(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2] = 8s,$$

அதாவது $g[\{(\Delta t_1)^2 - (\Delta t_2)^2\}$ இன் சராசரிப் பெறுமானம்]

$= 8[s$ இன் சராசரிப் பெறுமானம்]

$= 8\bar{s}.$

ஈற்றில் இச்சூத்திரத்திலிருந்தே g மதிப்பிடப்படுகிறது. இப்பரிசோதனைகளின் இறுதி முடிவு இன்னும் (யூலை, 1960) கிடைக்கவில்லை.

புவியீர்ப்பு அளவைகள்

முகவுரையும் முன்னுளைய ஆராய்ச்சிகளும்.—புவியீர்ப்பு அளவையின் முதன்மையான நோக்கானது கடல்மட்டப் பரப்பில் ஈர்ப்பைத் துணிதலாகும் ; கடல்மட்டப் பரப்பு என்பது வற்றுப்பெருக்கு இல்லாதபோது சமுத்திரத்திற்கு எல்லையாக விளங்கும் பரப்பு என வரைவிலக்கணம் கூறலாம். கிட்டத்தட்ட எல்லாக் கருவிகளும் நிலையமொன்றிலுள்ள புவியீர்ப்புப் புலத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறையே அளக்கின்றன ; இந்நிலைக்குத்துக் கூறே g ஆல் குறிக்கப்பட்டுப் **புவியீர்ப்பு** என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் சிறு திருத்தங்கள் (ப. 222) செய்யப்பட்ட பின்னர் புவியீர்ப்பிலுள்ள தெளிவாகின்ற சிறு இடமாற்றங்களுக்கும் அளவை செய்யப்பட்ட பரப்பிற்குக் கிட்டத்தட்ட அடுத்துக் கீழேயுள்ள வரையறுக்கப்

9—R R 19159 (66/11)

பட்ட புவிச்சரித அமைப்புக்களுக்கும் இடையே மிக நெருங்கிய தொடர்பு உண்டு என இன்று நன்கு நிறுவப்பட்டிருக்கிறபடியால், கிடைக்கப் பெற்ற முடிவுகளிலிருந்து எவ்வாறு புவிப்பரப்பின் கீழ் சடப்பொருள் பரம்பியிருக்கிறது என்பது பற்றிய ஆராய்ச்சியை நடாத்துவது இரணடாவது நோக்காகும்.

இத்துறையில் முன்னர் ஈடுபட்டவர்கள் புறமாற்றத்தக்க ஊசல்களைப் பயன்படுத்திப் புவியீர்ப்பைத் தனி நிர்ணயஞ் செய்துள்ளனர். இன்று, புறமாற்றத்தக்க ஊசல்கள் பயன்படுத்தப்படும் பரிசோதனைகளைக் காட்டிலும் **ஈர்ப்புமானிகள்** என்னும் கருவிகள், சிறு புவியீர்ப்பு மாறல்களை மிகக் குறுகிய காலத்துள்ளும், தொல்லை பெரிதும் குறைந்த வழியிலும் துணியப் பயன்படுகின்றன.

கல்லும் மில்லிக்கல்லும் (Gal and milligal).—சில ஆண்டுகளாக 1 சமீ. செக். $^{-2}$ பெறுமானமுள்ள ஆர்முடுகலானது ஒரு **கல்** என அழைக்கப்பட்டு வருகிறது. புவிப் பௌதிகவியலில், புவியீர்ப்புச் செறிவில் தோன்றும் சிறு வேற்றுமைகளை மில்லிக்கல் என்னும் அலகால் குறித்தல் வழக்காகும். எனவே,

$$1 \text{ மி.கல்.} = 10^{-3} \text{ கல்} = 10^{-3} \text{ சமீ.செக்.}^{-2}.$$

ஈர்ப்புமானிகள்.—புவியீர்ப்பில் காணப்படும் சிறு மாறல்களைத் துணிவ தற்கு இன்று மூன்று அடிப்படையான கருவிவகைகள் உள; அவை முறையே இயக்கவியல், வாயுவமுக்க அல்லது நிலையியல் தத்துவங்களைப் பொறுத்துள்ளன. பிறகு, நிலையியல் ஈர்ப்புமானி வகையை இரு வகுப்புக் களாகப் பிரிப்பது வசதியாயிருக்கும். இவை, முறையே **நிலையின்மையேற்றப்பட்ட வகுப்பு** எனவும் **நிலையின்மை ஏற்றப்படாத வகுப்பு** எனவும் அழைக்கப்படுகின் றன. ஆரம்பத்தில் உறுதியற்ற, உறுதியுள்ள எனனும் சொற்களே வழக் கில் இருந்தன; ஆனாலும், கருவியைப் பயன்படுத்த முடிவது அது உறுதியின்மையை அடையப்போகும் நேரததிலேயேயன்றி அது உறுதி யின்மை அடைந்தபின்னர் அன்று; ஆதலால் மேலே கூறியுள்ள திட்ட மிக்க சொற்களே கையாளப்படுகின்றன.

இயக்க ஈர்ப்புமானிகள்.—எல்லா ஊசல்களையும் இயக்க ஈர்ப்புமானி களாகப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்; ஆனால் அவை புவியீர்ப்பிலுள்ள சிறு மாற்றங்களை உணரமாட்டா. இன்றைய இயக்க ஈர்ப்புமானிகள் பலவற்றில் **ஹொல்வெக்–லெஜே (Holweck–Lejay)** தலைகீழ் ஊசல் பயன் படுத்தப்படுகிறது; அதன் அடிப்படைக் கொள்கை பின்வருமாறு.

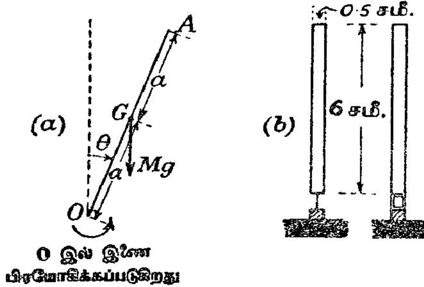
நீளம் $2a$ யும் திணிவு M உம் கொண்ட, விறைப்பானதும் சீரானது மான கோல் OA யின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆகுக, படம் 5·13(a). கோல்மீது $C\theta + D$ என்னும் இணையொன்று தாக்கும்பொழுது அக்கோ லின் அச்சு நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் கோணம் θ வையும் ஆக்குக; இங்கு, C, D என்பன மாறிலிகள் ஆகும். θ வைக் குறைக்குமுகமாகவே இணையின் போக்கு அமைந்திருக்கிறது.

கோலானது சமநிலையில் இருக்கும்பொழுது இணை $C\theta_0 + D$ ஆகுக ; அப்பொழுது

$$Mga \text{ சைன் } \theta_0 = C\theta_0 + D ;$$

இங்கு, θ_0 ஆனது θ வின் சமநிலைப் பெறுமானமும், g ஆனது புவியீர்ப்புச் செறிவும் ஆகும். ஆகவே, θ_0 சிறிது எனின்,

$$D = Mga \text{ சைன் } \theta_0 - C\theta_0$$
$$= (Mga - C)\theta_0.$$



படம் 5·13. ஓர் இயக்க ஈர்ப்புமானி.

சிறுகோண அலைவுகளுக்கு இயக்கச் சமன்பாடானது

$$I\ddot{\theta} = Mga\theta - (C\theta + D)$$

அல்லது
$$I\ddot{\theta} + (C - Mga)(\theta - \theta_0) = 0.$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2}{dt^2}(\theta - \theta_0) \text{ ஆதலின் } \theta - \theta_0 = A \text{ சைன் } \sqrt{\frac{C - Mga}{I}}\, t$$

என்பது மேற்படி சமன்பாட்டின் தீர்வொன்றுகும் ; இங்கு, $t = 0$ ஆகு மிடத்து $\theta = \theta_0$ உம் A ஒரு தொகையீட்டு மாறிலியும் ஆகும். எனவே அலைவு, கிட்டத்தட்ட $\theta = \theta_0$ ஆகவும்,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C - Mga}}$$

என்பதால் தரப்படும் ஆவர்த்தன காலத்துடனும் அமைகிறது. மடக்கை முறைப்படி வகையிட,

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{Ma}{C - Mga}\cdot\delta g$$
$$= \frac{1}{2}\frac{Mga}{C - Mga}\cdot\frac{\delta g}{g}.$$

எளிய ஊசலொன்றுக்கு

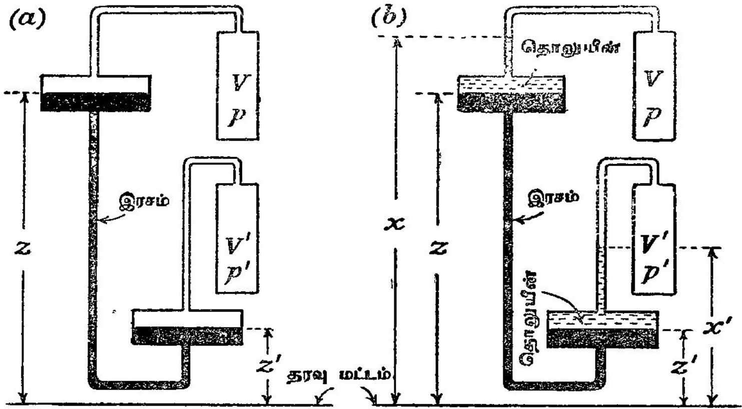
$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{g}.$$

எனவே, தலைகீழ் ஊசலின் உணர்திறனானது, அதே ஆவர்த்தன காலம் உடைய எளிய ஊசலொன்றின் உணர்திறனின் $\left|\frac{Mga}{C-Mga}\right|$ மடங்கு ஆகும். $C-Mga \rightarrow 0$ ஆகும் வண்ணம், கோலைத் தாங்குகின்றதும் அது பெயர்க்கப் பட்டபோது அதன்மீது இணையொன்றை உ ஞற்றுகின்றதுமான அடரின் மீள்தன்மை மாறிலிகளைத் தக்கவாறு தெரிந்தெடுத்து இவ்விகிதத்தை மிகப் பெரிதாக்க முடியும். இருந்தாலும், நடைமுறையில், $C-Mga$ யை மிகச் சிறிதாக ஆக்கமுடியாது ; ஏனெனில், அப்பொழுது அடரானது அவ்வளவு மெல்லியதாகிறபடியால் அதில் திருகலொன்று எளிதில் உண்டாகக்கூடும் ; அந்நிலையில் கோலின் இயக்கமானது ஒரு போதும் எளிய இசையாக இருக்க முடியாது.

லெஜே அவர்கள் மேற்படி பின்னம் 200 என்னும் பெறுமானத்தை மீறலாகாது எனக் கண்டார் ; அத்தகைய பெறுமானமொன்றிற்கு புவியீர்ப்பில் 1 மி. கல் மாற்றத்தை, அதாவது $\frac{\delta g}{g} \simeq 10^{-6}$ எனபதை உணரும் பொருட்டு, காலவிடை T_0 என்பதில் அதற்கு ஒத்த மாற்றம் $10^{-4}\,T_0$ உணர்ந்தாகவேண்டும். எனவே, காலவிடை 1000 செக்கன்கள் எனின், வேண்டிய திருத்தத்தைப் பெறும்பொருட்டு அக்காலவிடையை 0·1 செக்கனை மீறுத் திருத்தத்திற்கு அளந்தால் போதியதாகும்.

ஹொல்வெக் — லெஜே ஆகியோர்களால் திட்டமிடப்பட்ட ஊசலானது நீளம் 6 சமீ. உம் விட்டம் 0·5 சமீ. உம் கொண்ட படிகக் கோலொனறு லானது ; அக்கோலானது, அதன் கீழ் முனையில், எலின்வாாாலான மெல்லிய அடரொன்றால் தாங்கப்பட்டிருக்கிறது. அடரின் அகலம் படிகக் கோலின் விட்டத்துக்குச் சமன் ; ஆனல் அதன் தடிப்பு சமீ. ஒன்றின் ஆயிரத்தில் ஒரு சில பங்குகள் மட்டுமே. படம் 5·13 (b) ஆனது ஊசலின் இரு பககப் பார்வைகளைக் காட்டுகிறது ; அவற்றுள் ஒனறு, எலின்வாராலான வில்லடர் வளைந்திருக்கும் நிலையில், அது படிகக்கோலின் மீது ஓர் அலகு கோணப் பெயர்ச்சிக்குரிய இணையால் தாக்குவதைக குறைக்குமுகமாக அவ்வடரின் ஒரு பகுதி நீக்கபபட்டிருக்கிறது என்பதை வெளிப்படுத்துகிறது. படிகக் கோல் இரு பகுதிகளை உடையது ; ஒனறு, கோலையும் பெரிய திணிவையுங் கொணட ஊசலின் முதன்மையான பகுதியாகும்; மற்றையது. ஈற்றில் ஊசலை நன்ருக வெறுமையாக்கிய கண்ணுடிக் குமிழொன்றினுள் அடைத்து வைக்குமுன் அதன் ஆவர்த்தன காலம் ஒரு பொருத்தமான பெறுமானத்தை அடையுமாறு செப்பஞ் செய்வதற்குரிய இலேசான பகுதியாக உதவுகிறது. இவ்வாறு செய்வதால் ஆவர்த்தன காலத்தைத் திருத்தமாக அளப்பதற்குப் போதிய நீண்டகால இடையூடாக ஊசலானது அலைய முடிகிறது.

நிலைமின்னுலாகும் விளைவுகளை நீக்கும்பொருட்டுப் படிகக்கோல் வெள்ளி முலாம் பூசப்பட்டு, ஊசல் பரடே உருளையொன்றினுள் அமைந்திருக்கிறது.



படம் 5·14. ஹால்க் என்பவரின் வாயுவமுக்க ஈர்ப்புமானியின் கோட்பாடு.

புவியீர்ப்பின் பெறுமானங்கள் திருத்தமாகத் தெரிந்துள்ள இரு நிலையங்களிற் கருவியை நிறுவியும் அவ்வொவ்வொன்றிலும் ஆவர்த்தன காலங்களைக் கண்டும் அது நியமவளவாக்கப்படுகிறது. எனின்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C - Mga}}$$

என்னுஞ் சூத்திரத்தை

$$g = g_0 - \frac{\alpha}{T^2}$$

எனவும் எழுதிக் கொள்ளலாம்; இங்கு, g_0 உம் α வும் மாறிலிகள் எனவே, இரு நிலையங்களில் எடுக்கப்படும் நோக்கல்கள் கருவியை நியம வளவாக்குதற்குத் தகுதியுள்ளதாயிருக்கிற போதிலும் புவியீர்ப்பின் தனிப் பெறுமானங்கள் தெரிந்திருக்கும் வேறு நிலையங்களில் எடுக்கப்பட்ட நோக்கல்களைப் பயன்படுத்தி நியமவளவாக்கலைச் சரிபிழை பார்த்தல் எப்பொழுதும் அறிவுடைத்து.

வாயுவமுக்க ஈர்ப்புமானிகள்.—ஹால்க் (Haalck) என்பவரால், 1935 இல், திட்டமிடப்பட்ட வாயுவமுகக ஈர்ப்புமானியில் புவியீர்ப்பாலாகின்ற விசையை எதிர்க்குமுகமாக வாயுவொன்றின் மீடிறன் இயல்புகளைப் பயன்படுத்தி விசையொன்று பிரயோகிக்கப்படுகிறது. அக்கருவியின் தத்துவங்களை நனகு உணரும்பொருட்டுக் கனவளவுகள் முறையே V யும் V′ உமுடைய இரு கண்ணடிப் பாத்திரங்களைக் கருதுவோம், படம் 5·14 (a) ஐ ஒப். ; அவற்றில்

அமுக்கமானது முறையே p யும் p' உமாக இருக்குமாறு வாயுவொன்று புகுத்தப்பட்டிருக்கிறது ; இரசம் நிரம்பியுள்ள குழாய்களின் தொடரொன்றால் அவை தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. தரவு மட்டமொன்றைக் குறித்து இரசப் பரப்புக்களின் உயரங்கள் z, z' ஆகுக ; வெப்பநிலையானது மாறாதது ஆகுக. அப்பொழுது, இரசத்தின் அடர்த்தி ρ எனின்,

$$p+g\rho(z-z')=p'.$$

இதை வகையிட,

$$\delta p+g\rho(\delta z-\delta z')+\rho(z-z')\delta g=\delta p'.$$

$p\mathrm{V}$ என்பது ஒரு மாறிலி ஆதலால்

$$\delta p=-\frac{p}{\mathrm{V}}\delta\mathrm{V}\ ;$$

$\delta p'$ இற்கும் இதுபோன்ற கோவையொன்று உண்டு. இரச நிரலின் மேல், கீழ் மட்டங்களில் உள்ள குழாய் ஒவ்வொன்றினதுங் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு S எனின்,

$$\delta\mathrm{V}=-\mathrm{S}\,\delta z\ ;\quad \delta\mathrm{V}'=-\mathrm{S}\,\delta z'.$$

$$\therefore\ \frac{p\mathrm{S}}{\mathrm{V}}\delta z+g\rho(\delta z-\delta z')+\rho(z-z')\delta g=\frac{p'\mathrm{S}}{\mathrm{V}'}\delta z'.$$

$$\therefore\ \delta g=\frac{1}{\rho(z-z')}\left[\left(\frac{p'\mathrm{S}}{\mathrm{V}'}+g\rho\right)\delta z'-\left(\frac{p\mathrm{S}}{\mathrm{V}}+g\rho\right)\delta z\right]$$

$$=\frac{g}{p'-p}\left[\left(\frac{p'\mathrm{S}}{\mathrm{V}'}+g\rho\right)\delta z'-\left(\frac{p\mathrm{S}}{\mathrm{V}}+g\rho\right)\delta z\right].$$

அடுத்து, **ஹூால்க்** ஒவ்வோர் இரசப் பரப்பு மீதும் அடர்த்தி σ கொண்ட தொலுயீனை வைத்துப் படம் 5·14 (b) யில் காட்டியுள்ளவாறு வாயுவுடன் தொடுகை வைத்திருக்கும் தொலுயீன் பரப்புக்கள் மயிர்த்துளைக் குழாய்களுள் இருக்குமாறு ஒழுங்கு செய்துள்ளார். தரவு மட்டத்தைக் குறித்து இப்பரப்புக்களின் உயரங்கள் x, x' ஆகவும், ஒவ்வொரு மயிர்த்துளைக் குழாயின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பு s உம் ஆகுக. அப்பொழுது,

$$p+g\sigma(x-z)+g\rho(z-z')=p'+g\sigma(x'-z').$$

$$\therefore\ \left\{\begin{matrix}\delta p+\delta g\,.\,\sigma(x-z)+g\sigma(\delta x-\delta z)\\ +\delta g\,.\,\rho(z-z')+g\rho(\delta z-\delta z')\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\delta p'+\delta g\,.\,\sigma(x'-z')\\ +g\sigma(\delta x'-\delta z')\end{matrix}\right\}.$$

முன்னர்போலவே

$$\delta p=-\frac{p}{\mathrm{V}}\,\delta\mathrm{V},\ \ \delta p'=-\frac{p'}{\mathrm{V}'}\,\delta\mathrm{V}'.$$

மேலும்

$$\delta\mathrm{V}=-s\,\delta x\ =-\mathrm{S}\,\delta z,$$
$$\delta\mathrm{V}'=-s\,\delta x'\ =-\mathrm{S}\,\delta z'.$$

$$\therefore \left\{ \begin{aligned} &-\frac{p}{V}\delta V+\delta g\,.\,\sigma(x-z)+g\sigma\left(1-\frac{s}{S}\right)\delta x \\ &\qquad +\delta g\,.\,\rho(z-z')+g\rho\,.\,\frac{s}{S}(\delta x-\delta x') \\ &\qquad -\delta g\,.\,\sigma(x'-z')-g\sigma\left(1-\frac{s}{S}\right)\delta x' \end{aligned} \right\} = -\frac{p'}{V'}\delta V'.$$

$$\therefore \frac{p}{V}s\,\delta x-\frac{p'}{V'}s\,\delta x'+\delta g\{\sigma(x-z)+\rho(z-z')+\sigma(x'-z')\}$$

$$=g\left[\sigma\left(\frac{s}{S}-1\right)\delta x+\rho\,.\,\frac{s}{S}(\delta x'-\delta x)-\sigma\left(\frac{s}{S}-1\right)\delta x'\right]$$

$$=g\left[\sigma\left(\frac{s}{S}-1\right)-\rho\frac{s}{S}\right](\delta x-\delta x').$$

$$\therefore \delta g=C\,\delta x-C'\,\delta x';$$

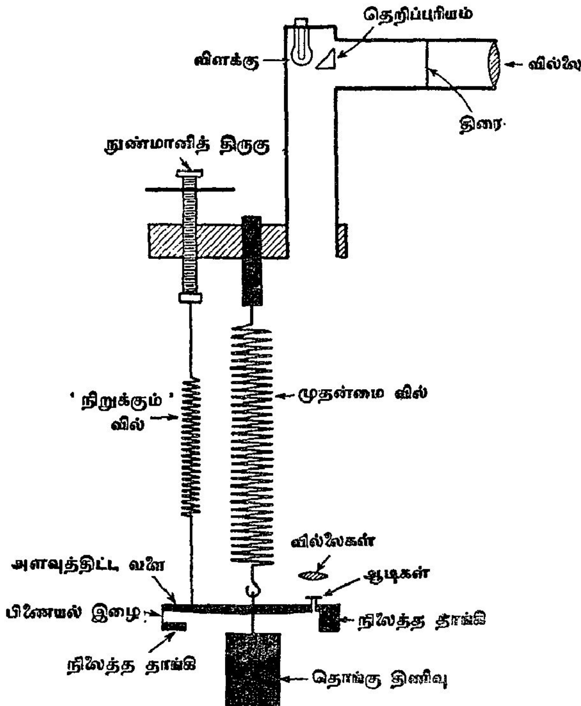
இங்கு, C, C′ என்பன கருவி மாறிலிகளாம். மயிர்த்துளைக் குழாய்களைச் சாய்த்தால் கருவி உணர்வுமிக்கதாகின்றது ; இருந்தபோதிலும் வழுவானது 3 அல்லது 4 மி.கல். இற்குக் குறைவாக அரிதாய்த்தான் இருக்கும். எனினும் அது ஒரு மாபெரும் நயமாகும், அதாவது கடல்மீது புவியீர்ப்பில் மாற்றங்களைப் பதிவுசெய்யும் ஆற்றல் உடையது.

நிலையியல் ஈர்ப்புமானிகள்.—இவ்வகையைச் சேர்ந்த ஈர்ப்புமானியானது, ஒனறில் (நிலையின்மை ஆக்கப்படாத) விற்றராசு அல்லது (நிலையின்மை ஆக்கப்பட்ட) நிலையிற்றராசு என்பதின தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது.

(a) நிலையின்மை ஆக்கப்படாத ஈர்ப்புமானிகள்.—சுரி வில்லொன்றிலிருந்து திணிவொன்று தொங்கவிடப்பட்டிருக்குமாயின் g யின் மாறல்களுடன் அவ்வில்லின் நீளமும் மாறும். புவியீர்ப்புப் பெரிதாயின் வில்லின் நீளம் மிகும். வில்லின் நீளமாறல்கள் உண்மையில் மிகச் சிறிதே ; எனவே திருத்தியளிக்கக்கூடிய எந்த ஈர்ப்புமானியும் 0·1 மி. கல். வரிசையில் g யின் மாறல்களை உணரும் ஆற்றலை உடையதாய் இருத்தல் வேண்டும். அதாவது, ஒளியின் அலைநீளமொன்றின் 50 இல் 1 போன்ற அளவுள்ள நீளமாறல்களையே வில்லில் அளக்க வேண்டியதாகின்றது. எனவே தேவையான பெரிதாக்கலைப் பெறும்பொருட்டு ஒளியியல் அல்லது பொறியியல் அல்லது மின்னியல் முறைகளைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும் ; ஆனால் செயன்முறைப் பிரச்சினைகள் காரணமாக எற்ற இத்தகைய கருவியொன்றை விற்பனைக்குக் கொண்டுவரப் பல்லாண்டுகள் வேண்டியதாயிற்று.

ஹாற்லி (Hartley) ஈர்ப்புமானி.—படம் 5·15 இல் வரிப்படமுறைப்படி காட்டியுள்ள இக்கருவி 1932 இல் திட்டமிடப்பட்டது ; இது முதன் முதலிலே ஆக்கப்பட்டு வெற்றியுற்ற கருவிகளுள் ஒன்றாகும். இதற்குமுன் இடப்பட்ட

திட்டமொவ்வொன்றிலும் உறுதியில்லாச் சமநிலையை நெருங்கியிருக்கும் பொறிமுறை உபகரணம் ஏதேனுமொன்றைப் பயன்படுத்தி உயர்வுமிக்க உணர்திறனைப் பெறுவதற்கான முயற்சிகள் எடுக்கப்பட்டன; இவ்வுறுதி யில்லா நிலையில் குழப்பஞ்செய்யும் எல்லா ஆற்றல்களும் மிகைப்படுத்தப்



படம் 5·15. ஹாற்லி ஈர்ப்புமானியின் தத்துவம்.

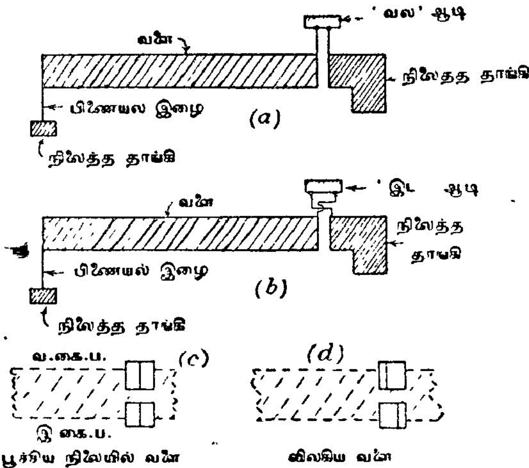
பட்டிருந்தன என்பதே தவிர்க்க முடியாத தோல்விக்குக் காரணமாய் இருந்தது. **ஹாற்லி** என்பவரின் கருவி உயர் உறுதிப்பாடடை முன்னிட்டே திட்டமிடப்பட்டது; g யின் மாறல்களாலாகும் சிறு பெயர்ச்சிகள் ஒளியியல் முறைகளால் பெருக்கப்படுகின்றன.

இங்கு, அடிப்படைத் தத்துவம் பின்வருமாறு: தொங்கும் திணிவு ஒன்றில அதன்மீதுள்ள புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சிக்குச் சரிசமனாகாத, ஆனால் அதற்குக் கிட்டத்தட்டச் சமனான மேன்முக விசையொன்றைப் பிரயோகிக்க முடியுமாயின், தொகுதியைச் சமநிலையில் வைத்துக்கொள்ளும் பொருட்டு அதிகப்படியாய்த் தேவைப்படுகின்ற சிறு விசையில் தோன்றும் சிறு மாறல்களை அளப்பது, ஒத்திட்டுப் பார்க்குமிடத்து இலகுவாகும். முதன்மை

வில்லானது தங்கிதன், தாந்தலம் என்பவற்றின் கலப்புலோகத்தாலானது; அது சுமையின் நிறையில் கிட்டத்தட்ட 99·9 சதவீதத்தைக்காவுகிறது. விலலை ஆக்குவதற்குப பயன்படுத்தியுள்ள கம்பி கம்பியளவுத்திட்டத்தில் நியாயமான வலுவுடையதாய் இருந்தது ; உயர் நம்பிக்கையையிட்டு வில்லானது அதன தோறற மீளதனமை எல்லையின் 20 சதவீதத்தை மீறுவண்ணம் தகைப்புறுத்தப்பட்டது. வில்லுக்கும் சுமைக்கும் இடையில் மிக இலேசான வளையொன்று, தக்க வளையுந் தன்மையுடைய நார்களால் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இடப்பக்கத்தில் நிலையான தாங்கியொன்றில், வளை பிணைக்கப்பட்டிருக்கிறது ; மறுமுனையில் அது இரு சிறு ஆடிகளைக் காவுகிறது.

ஆடிகளை ஏற்றுவது பறறி வெளியிடப்பட்ட விவரங்கள் மிகச் சிறிதளவில் இருக்கிறபோதிலும் அது கிட்டத்தட்டப் பின்வருமாறு செயலாற்றுகிறது என எதிர்பார்க்கலாம்.

அதன் இடப்பக்க முனையில் வளையானது நார்வகைத் தொங்கலொன்றுற் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது ; அதன் எதிர்முனையில், ஆடிகளின் ஏற்றுகையைத் தவிர்த்து அது முற்றிலும் சுயாதீனமாக இருக்கிறது. வளையின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் ஒவ்வொனருக அமைந்திருக்கிற ஆடிகள் வளையின் சுயாதீன முனைக்கும் வேருன நிலைத்த தாங்கியொன்றிற்கும் இடையே நுண்ணிய



படம் 5·16. ஹாற்லி ஈாப்புமானியொன்றில் எதிர்பார்க்கக்கூடிய சில விபரங்கள்.

நார்களால் ஏற்றப்பட்டுள்ளன. படங்கள் 5·16 (a) யிலும் (b) யிலும் காட்டியுள்ளவாறு வளையின் எதிர்ப் புறங்களிலுள்ள ஆடிகளுக்கு ஆடிகளைத் தாஙகும் இழைகளின் ஒழுங்குமுறை வேறுபடுகிறது. எனவே, வளையின் கீழ்முகமான அசைவொன்றிற்கு வலக்கைப் பக்க ஆடி இடஞ்

சுழியாகவும் இடக்கைப்பக்க ஆடி வலஞ்சுழியாகவும் சாய்கின்றன. [ஒவ்வோரிடத்திலும் நிலைத்த தாங்கிக்குச் செல்லும் நாரானது வளைக்குச் செல்லும் நாரைக் காட்டிலும் வலிமைமிக்கதாய் இருந்திருக்கக்கூடும்; மேலும் முந்தியது சிறு சுழற்சிக்கு இடங்கொடுக்கும் பட்டையொன்றூடே சென்று ஆடியுடன் பொருத்தப்பட்டிருந்தது என்பதையும் எதிர்பார்க்கக்கூடும். அது கண்டிப்பாய் வேண்டியதன்று; ஆனால் அது ஒருவேளை பெருமளவில் ஒப்பத்தை அளிக்கக்கூடும். ஒவ்வோரிடத்திலும் நிலைத்த தாங்கியினின்று செல்லும் நார் ஆடியின் மையத்துடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கக்கூடும்.]

இவ்விரு ஆடிகளும் ஒளியியல் நெம்பொன்றின் பகுதியாக அமையும்; வளையின் நிலைக்குத்துப் பெயர்ச்சியின்போது அவை கிடையச்சுக்கள் பற்றி எதிர்த் திசைகளில் சுழலுமாறு ஏற்றப்பட்டிருக்கின்றன. இம்முறையானது உருப்பெருக்கத்தை இரு மடங்காக்குகிறது மட்டுமன்றி அது ஒளியியல் தொகுதியில் மாட்டேற்றுப் புள்ளியொன்றின் தேவையையுந் தவிர்க்கிறது. இரு ஆடிகளும் ஒரே தளத்தில் இருக்கும்பொழுது ஒளியியல் தொகுதியின் ஏனைய பாகங்கள் எச்சிறிய பெயர்ச்சி உற்றபோதிலும் விளக்கு இழையின் இரு விம்பங்களும் நேர்கோடொன்றிலுள்ளதாய் அமையும். காட்டியுள்ள இடத்தில் மிக இலேசான " நிறுக்கும் வில்லொன்று " வளையுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது; மேலும் திருகு நுண்மானியொன்றைப் பயன்படுத்தி இவ்வில்லிலுள்ள இழுவையைச் செப்பஞ்செய்யலாம். பிணைச்சல் நாரில் இழுவையிருக்குமாறு இரு விற்களிலுள்ள இழுவைகளின் கூட்டுத்தொகையும் சுமை, வளை என்பவற்றின் நிறையின் பருமனும் அமைந்திருக்கின்றன. வளையானது உறுதியாக இருப்பதற்கு இது இன்றியமையாதது.

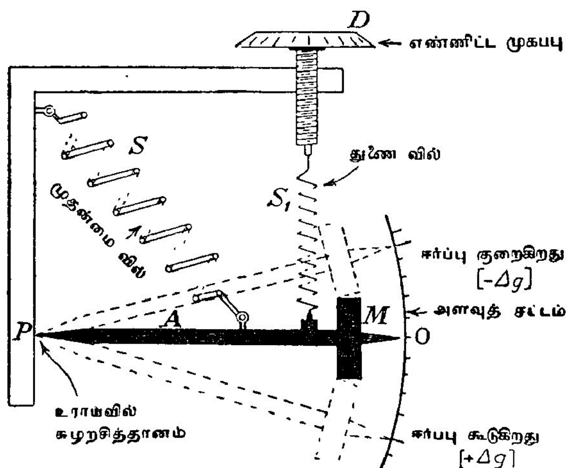
பூச்சியத் தானத்தைப் பெறுவதற்கு மட்டுமே ஒளியியல் தொகுதியானது பயன்படுத்தப் படுகின்றபடியால் அளவீடுகள் அவற்றிற்கான வில்லிலேயே எடுக்கப்படுகின்றன. பூச்சியத் தானத்தினின்று வளையின் விலகலால் ஆகும் சிறு குவிய அழிவானது ஒரு சிறு நட்டத்தை மட்டுமே தரும். g மாறுங்கால் உண்டாகின்ற பார்வைப்புல மாறல்கள் படங்கள் 5·16 (c) யிலும் (d) யிலும் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

இழையின் இரு விம்பங்களும் ஒரே நேர்கோட்டில் இருக்குமாறு கருவி குறிப்பிட்டவொரு தானத்தில் செப்பஞ் செய்யப்பட்டது. இரண்டாவது நிலையமொன்றிற்கு இக்கருவியை எடுத்துச்சென்றால் புவியீர்ப்புச் செறிவின் பெறுமானத்திலுள்ள மாற்றம் காரணமாக இரு விம்பங்களிலும் ஒரு சிறு பெயர்ச்சி உண்டாகிறது. நுண்மானித் திருகைப் பயன்படுத்தி இப்பெயர்ச்சி பூச்சியமாக்கப்படுகிறது; நுண்மானி முகப்பிலுள்ள இரு வாசிப்புகளினதும் வேற்றுமையானது அவ்விரு நிலையங்களிலுள்ள புவியீர்ப்புச் செறிவு வேற்றுமைக்கான அளவாகும். வேற்றுமை தெரியப்பட்டிருந்தால் கருவி உடனடியாகவே நியமமாக்கப்பட்டுவிடும்.

அலுமினியம், உலோகக்கட்டியுருக்கு என்பவற்றாலான கோல்களைப் பயன்படுத்தி, விற்றொகுதியைக் காவுஞ் சட்டமானது வெப்ப நிலைமாறல்களுக்கு

ஓரளவு ஈடு செய்யப்பட்டிருந்தபோதிலும், நடைமுறையில் வளிநுழையவிய லாத, உருளை வடிவமுள்ள, மாரு வெப்பநிலை அடைப்பொன்றில் கருவியை வைக்க வேண்டி இருக்கிறது. கருவியானது g யின் ஒரு மில்லிகல் அளவான மாறல்களை உணரும்.

(b) **நிலையின்மையேற்றப்பட்ட ஈர்ப்புமானிகள். இத்தகைய ஈர்ப்புமானி யொன்றிற்குரிய திட்டக்குறிப்பு.**—வளை A, திணிவு M என்பன எவ்வாறு விறைத்த சட்டப்படலொன்றுடன் பொருத்தப்பட்டுள்ள இரு விற்கள் S, S_1 என்பவற்ருல் தாங்கப்பட்டிருக்கின்றன என்பதைப் படம் 5·17 காட்டுகிறது ; P யிலுள்ள உராய்வில் சுழலையொன்று வளைக்கும் சட்டத் திற்கும் இடையே தொடுகையை ஏற்படுத்துகிறது. புவியீர்ப்பின் தனிப் பெறுமானம் தெரிந்த நிலையமொன்றில் ஈர்ப்புமானி இருக்கும்பொழுது A யுடன் பொருத்தப்பட்ட சுட்டியானது பூச்சிய வாசிப்பைக் காட்டுமாறு விற்களிலுள்ள இழுவைகள் செப்பஞ்செய்யப்படுகின்றன. பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, வேருெரு நிலையத்தில் g வேருயிருக்கும் ; எனவே,



படம் 5·17. **நிலையின்மையேற்றப்பட்ட ஈர்ப்புமானியொன்றிற்குரிய திட்டக் குறிப்பு.**

கருவியை அங்கு எடுத்துச்சென்ருல், வளைமீது M இன் நிறையால் ஆகும் இணை மாறும். அதன் விளைவாக விற்களிலுள்ள இழுவைகளில் அதற் கொத்த மாறல்கள் பிறப்பிக்கப்படும். வில் S_1 ஐ ஆளும் எண்ணிட்ட வாசிப்புத் தரு முகம் D ஐச் சுற்றுவதைக் கொண்டு திணிவு M ஐ அதன் தொடக்க நிலையை மீளச்செய்யலாம். D மீது வாசிப்புகள் நியம மாக்கப்பட்டிருக்குமாறுல் Δg இற்குரிய பெறுமானமொன்றை எளிதிற் பெறுமுடிகின்றது. இத்தத்துவமே **வோடின் (Worden)** ஈர்ப்புமானியின் அடிப்படை ; அதன் வகுப்பில் மிகச் சிறந்தவற்றுள் அது ஒன்ருகும்.

வோடின் ஈர்ப்புமானியின் அடிப்படைக் கொள்கை.—படம் 5·18 இல் O ஊடாகச் செல்லும் கிடையச்சொன்று பற்றிச் சுழலக்கூடிய இலேசான ஆனல் விறைப்பான கோல் அல்லது நெம்பு OA யின் முனை A யில் திணிவு M காவப்படுக ; B என்பது O விற்கு நிலைக்குத்தாய் மேலேயுள்ள புள்ளியொன்று ஆகுக ; அதில், "பூச்சிய நீளம்" கொண்ட வில்லொன்றின் ஒரு முனை நிலையாக்கப்படுக, ப. 448 ஐ ஒப. OA இலுள்ள C என்னும் புள்ளியொன்றில் வில்லின் மறுமுனை தொடுக்கப்படுக. அப்பொழுது காட்டப்பட்ட தூரங்கள் a, b, p, s எனின், O பற்றி M இன் நிறையின் திருப்பம் Mgl சைன் θ ; இங்கு g புவியீர்ப்பும், l நெம்பின் நீளமும், $\theta = \widehat{AOB}$ உமாம். அதே புள்ளி பற்றி வில்லிலுள்ள இழுவையின் திருப்பம் ksp ; k ஆனது வில்லின் மாறிலி. ஆனல், ΔBOC யிலிருந்து

படம் 5·18. வோடின் ஈர்ப்புமானியின் தத்துவம். (லா கொஸ்ரேயின் பூமிநடுக்கம் பதிகருவியை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது.)

$$\frac{s}{\text{சைன } \alpha} = \frac{a}{\text{சைன் } \alpha}.$$

$$\therefore\ ksp = k.a.\frac{\text{சைன் } \theta}{\text{சைன் } \alpha}\,.\,b\,\text{சைன் } \alpha = kab.\,\text{சைன் } \theta.$$

தொகுதியானது சமநிலையிலிருக்கும்பொழுது துணைவில் S_1 என்பதால் ஆகும் இணை S_0 ஆகுக ; அதாவது நெம்புமீதுள்ள முழு முறுக்கமும்

$$(kab - Mgl)\ \text{சைன் } \theta + S_0\,;$$

இது பூச்சியமே. உண்மையில், கருவிகளில் $a = b$; எனவே

$$(ka^2 - Mgl)\ \text{சைன் } \theta + S_0 = 0.$$

அடுத்து அதன் பூச்சிய நிலையினின்றும் வளையானது சிறிதளவு பெயர்க்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்க ; அதாவது θ எனபது $\theta + \beta$ என்பதாகிறது ; இங்கு β சிறிது. S_1 ஆல் ஆகும் மீள்தரு இணையானது $Z\beta$ அளவு கூடிஞல்,

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta + \beta) = \ddot{\beta}$$

ஆனபடியால் இயக்கச் சமன்பாடு

$$I\ddot{\beta} + (ka^2 - Mgl)\ \text{சைன் } (\theta + \beta) + (S_0 + Z\beta) = 0.$$

இங்கு Z ஒரு மாறிலி எனக் கருதப்படுகிறது ; O ஊடாக கிடையச்சொன்று பற்றி M இன் சடத்துவத் திருப்பம் I ஆகும்.

சைன் $(\theta+\beta)$ என்பதை விரித்து,

$$(ka^2-Mgl)\text{ சைன் }\theta+S_0=0$$

என்பதைப் பயன்படுத்த

$$I\ddot{\beta}+\{(ka^2-Mgl)\text{ கோசை }\theta+Z\}\beta=0\,;$$

இங்கு β சிறிதாயிருக்கும்பொழுது சைன் β விற்குப் பதிலாக அதைப் போடலாம. எனவே தொகுதியின் சிற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலம்

$$T=2\pi\left[\frac{Ml^2}{(ka^2-Mgl)\text{ கோசை }\theta+Z}\right]^{\frac{1}{2}}.\qquad [\because I=Ml^2.]$$

பெயர்க்கப்படுமுன் தொகுதியொன்று சமநிலையில் இருக்குமிடத்து, அத் தொகுதியைத் தாக்கும் இணை Γ ஆனது $f(\theta)$ எனின், அப்பொழுது θ ஆனது $\theta+\beta$ ஆகில்,

$$f(\theta+\beta)=f(\theta)+\beta f'(\theta)\text{ [ரெயில்ரின் தேற்றம்.]}$$
$$=0+\beta f'(\theta).$$

இங்கு β என்பது சிறிது.

$$\ddot{\beta}=\frac{d^2}{dt^2}(\theta+\beta)$$

ஆதலால், இயக்கச் சமன்பாடு

$$I\ddot{\beta}+f'(\theta)\beta=0.$$

இப்பொழுது

$$S_0+Z\beta\equiv S_0+\frac{\partial S_0}{\partial\theta}\cdot\beta,$$

எனவே,

$$Z=\frac{\partial S_0}{\partial\theta}$$

என்பதை ஞாபகப்படுத்திஞல் இயக்கச் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}}}.$$

இது முன்கிடைக்கப்பெற்ற விளைவுடன் ஒத்திருககிறது.

வோடின் ஈர்ப்புமானி.—உருகிய படிகததால் இக்கருவி கிட்டத்தட்ட முற்றிலும் ஆக்கப்பட்டுள்ளது ; படம் 5·19 இல் வரிப்படமுறைப்படி காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; அத்தகைய மூன்று கோல்கள் செவ்வகச் சட்டமொன்றின் பகுதியை அமைக்கின்றன. சட்டத்தின் நான்காவது புயம் சிறு படிகக்கோல் R_1 ஐக் கொண்டது ; அது படிகத்தாலேயே ஆன இரு முறுக்கல் நார்களாற் சட்டத்தின் மீதியுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. சட்டத்தின் இடைமுகமான சாய்வைச் செப்பஞ் செய்யக்கூடிய வகையிலே ஆக்கப்பட்ட தாங்கியொன்றுடன், செவ்வகத்தில் R_1 ஐக் காவும் புயத்துக்கு எதிரான

புயம் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. இவ்வீர்ப்புமானியில் இது பெரிதும் விரும்பத்தக்க அமிசமொன்றாகும்; ஏனெனில், மீளதன்மைப் படிகத் தொகுதியின் அமைப்புக் காரணமாகப் புவியீர்ப்பு மாறல்களாலாகும் ஈர்ப்பு மானியின் தூண்டற்பேறுனது ஒருச்சரிவுக் கோணத்தின் கோசைனுடன் நேர்விகிதசமமாக இருக்கிறபடியால் திட்டமான அளவுகோட்டுத் திருத்த முறையொன்று கிடைக்கப்பெறுகின்றது என்பதேயாம். R_2 என்பது இன்னுமொரு படிகக்கோல் ஆகும்; இரு முறுக்கல் நார்களால் அது தாங்கப்பட்டு ஒரு நீண்ட சுட்டி P யைக் காவுகிறது; சுட்டியின் மேல் முனை கிடையாக உள்ளது. ஒளியால் விளங்குகின்ற இம்முனையே நுணுக்குக்காட்டி M இனுல் நோக்கப்படும். கோணல் மாதிரிப்படத்தில் மையவிளிம்பாக அமைந்து சங்கற்பக் குறியாகப் பயன்படுகிறது; பார்வைப் புலம் படம் 5·17 (b) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது; இங்கு குறுகிய கோடுகள் பார்வைத் துண்டிலுள்ள கண்ணடித் தட்டொன்றில் ஆக்கப்பட்ட கீறுகள் ஆகும்; இரு மெல்லிய நீண்ட கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள ஆயிடை கோணல் மாதிரிப் படத்தின மைய வெள்ளொளி விளிம்பைக் குறிக்கிறது.

படம் 5·19. வோடின் ஈர்ப்புமானியின் அமைப்பு; இது வரிப்படமுறைப்படியே வரையப்பட்டுள்ளது, அளவுத்திட்டத்திற்கன்று.

படிகச் சுமை Q என்பது R_2 உடன் விறைப்பாக நிலையாக்கியுள்ள நெம்பொன்றாற் காவப்படுகிறது; இச்சுமையின் திணிவு கிட்டத்தட்ட 5 மிகி. குறுகிய வீச்சொன்றை மீறி அது அசையாதவாறு தடைகள் அமைந்திருக்கின்றன. Q வின் திணிவு சிறிதாகவும் படிகத்தின் மீள்தன்மை இயல்புகள் கிட்டத்தட்ட இலட்சியமாயும் இருக்கிறபடியால் கருவியைக் கொண்டு செல்லும்போது அதன் தொங்கற்றெகுதியை நிலையாக்கவேண்டியதில்லை.

S என்பது பூச்சிய நீள வில் ஆகும் ; அதன் கீழான முனை R_2 உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள நெம்பு ஒன்றில் நிலைத்திருக்கிறது ; அதன் மேல் முனையானது R_1 உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள இருவிரிவு வெப்ப ஈடுசெய் கூட்டுக்கருவியொன்றுற் காவப்படுகிறது.

S_1 என்பது அளவு முகப்பு வில் ஆகும் ; குமிழ் D_1 ஐச் சுழற்றி இவ்வில்லிலுள்ள இழுவையை மாற்றி அமைக்க முடியும் ; வில்லின் முழுவீச்சானது 80–120 மி. கல். புவியீர்ப்பு மாறலை ஒத்திருக்கிறது. ஈர்ப்புமானியின் வீச்சை 4,000 மி. கல். வரை உயர்த்தும்பொருட்டு மீட்டல் வில் S_2 என்பது R_1 உடன் இணைக்கப்பட்டு, அதன் இழுவை குமிழ் D_2 என்பதால் ஒழுங்காக்கப்படுகிறது.

g திருத்தமாகத் தெரிந்திருக்கிற இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட நிலையங்கள் ஒவ்வொன்றிலும், ஒன்றன்பின் ஒன்றாக, ஈர்ப்புமானி நிறுவப் படுகிறது ; D தரும் வாசிப்புகளின் விளக்கத்துக்கு இது பயன்படுகிறது. $\Delta g = 120$ மி. கல். ஆய இருக்கின்ற நிலையமொன்றில் கருவி இருக்கும் பொழுது, பூச்சிய வாசிப்புக் காட்டும்படி D யை அமைத்தபின் P யைப் பூச்சிய நிலைக்குக் கொண்டுவருவதற்கு வில் S_2 பயன்படுத்தப்படுகிறது. மற்றை நிலையங்களுக்கு ஈர்ப்புமானியை எடுத்துச்சென்றபோது அவ்வவ்விடங் களில், P யை அதன் பூச்சியநிலையை மீளச்செய்து, D யின வாசிப்புகளைப் பயன்படுத்தி, Δg இற்கு மேலும் பெறுமானங்கள் எடுக்கப்படுகின்றன.

வோடின் ஈர்ப்புமானியின மீள்தன்மைத் தொகுதியானது உருகிய படிகத் தாலானது ஆதலால், ஈர்பபுமானியானது, அதிர்ச்சியையும் இணைப்பையும் பெரிதும் எதிர்க்கிறது மட்டுமன்றி அது காந்த விளைவுகளிலிருந்து முற்றிலும் விடுவிக்கபபட்டும் இருககிறது. முழுக்கருவியும் அடைப்பொன்றுள் வைக்கப் பட்டு, அஙகு தாழ்வெற்றிடம் ஆக்கப்படுகிறது ; அடுத்து, அடைப்பானது வெப்பக் குடுவையொனறினுள் நிறுவப்படுகிறது. ஆயிரத்தில் ஒனறு என்னும் திருத்த அளவினுள் முகப்பு D யின் வாசிப்புகள் ஏகபரிமாண மானவை. முழு ஈர்ப்புமானி, அதன் காவுபெட்டி என்பவற்றினது முழுத் திணிவானது 5 கிகி. ஐச் சற்றே மீறும் ; அதன் பருமனின் சிறுமை, வெப்பநிலையாளுகைக்கான புற வலுவழங்கியின் நீக்கம் என்பவையே அளவையியலில் இக்கருவியைப் பெரிதும் பயன்படுத்துவதற்குரிய முதன் மையான காரணங்களாம.

இது பூச்சிய வாசிப்புக் கருவியாகும் ; பார்வை நுணுக்குக்காட்டி யொன்றுல் நோக்கப்படும் சுட்டியானது கண்ணுடித் தட்டிலுள்ள சங்கறப் புள்ளிகளைக் குறித்து மையமாக அமையுமாறு வாசிப்பு முகப்பைச் சுழற்றிச் சமநிலை பெறப்படுகிறது.

வாசிப்புத் தரும் சிறு முகப்பு D_1 ஆனது 100 பிரிப்புக்களை உடையது. அவ்வொவ்வொன்றும் புவியீர்ப்பில் 0·1 மி.கல். அல்லது 0·001 சமீ. செக்$^{-2}$. அளவு மாறலை ஒத்திருக்கிறது ; வேணியரொன்றைப் பயன்படுத்தி $\pm$ 0·01 மி.கல். திருத்தத்துடன் விளைவுகளைப் பெறமுடியும். **வோடின்**

ஈர்ப்புமானியானது $10^{-8}g$ இற்கும் $10^{-7}g$ இற்கும் இடையான மாறல்களை அளக்கும் ஆற்றலுடையது ; இங்கு g புவியீர்ப்பை, அதாவது புவியின் ஈர்ப்புப் புலத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறைக் குறிக்கிறது.

வோடின் ஈர்ப்புமானி தரும் புலத் தரவுகளை ஒடுக்குதல்.—அவதானிக்கப்பட்ட புவியீர்ப்பு மாற்றங்களைப் பல விளைவுகளுக்குத் திருத்துதல் வேண்டும் ; அவற்றுள் முதன்மையானவை பின்வருமாறு :

(a) **கருவியின் நகர்வு.**—புவியீர்ப்பு அளவையியலில் பயன்படுத்தப்படும் ஆய்கருவிகளில் உள்ள இந்நகர்வே இம்முறையால் புவிச்சரித அளவையைச் செய்யும்பொழுது மாபெரும் குறையாக இருக்கிறது. பெரும்பாலான கருவிகளைக் காட்டிலும் **வோடின்** ஈர்ப்புமானியில் மிகக் குறைவாயிருக்கின்ற இந்நகர்வு இலட்சிய மீள்தன்மையுடைய தொங்கலிலிருந்து கருவியின் உடைமை வேறுபடுவதனால் உண்டாகிறது ; இந்நகர்வின் இறுதிவிளைவு குறிப்பிட்ட நிலையமொன்றில் ஒருபோது எடுக்கப்பட்ட Δg யின் பெறுமானத்திற்கும் இதற்குப் பின்னர் ஒருபோது எடுக்கப்படும் பெறுமானத்திற்கும் இடையே தோற்ற வேறுபாடொன்றை ஆக்குவதாகும். இவ்விளைவை, நிலையமொன்றில் நேரம் t மணித்தியாலத்திற்கு முதன்முதலாகக் கருவியைப் பயன்படுத்தி அதே நிலையத்தில் நேரம் $(t+1)$ மணித்தியாலத்திற்கு அதை மீண்டும் பயன்படுத்தி நீக்கலாம். நகர்வு சிறிது எனவும் அது ஏகபரிமாணமானது எனவும் கொள்ளப்படுகிறது ; அது $0·1$ மி.கல். மணி$^{-1}$ ஐ அரிதாய்த்தான் மீறும்.

(b) **குத்துயர விளைவு.**—நிலையமொன்றின் குத்துயரமானது Δg யின் நோக்கற் பெறுமானத்தை அவ்விடத்துப் பாறைகள் முதலியவற்றின் பரம்பல், பணபு என்பவற்றின் மாற்றங்களிலிருந்து இரு வகையில் வேறுபடச் செய்கின்றது. முதலாவதாக, புவியீர்ப்பானது புவி மையத்திலிருந்து நிலையத்தின் தூரத்துடன் நேர்மாறுவர்க்க விதிப்படி மாறுகிறது ; புவியீர்ப்பின் பொது நிலைக்குத்துப் படிதிறன் $+0·3085$ மி.கல.மீ.$^{-1}$ ஆகும். இது **'சுயாதீன வளித் திருத்தம்'** எனப்படும். இரண்டாவதாக, மாட்டேற்றுத் தளத்திற்கும் ஈர்ப்புத் தானமூடாகச் செல்லும் கிடைத்தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள சடம் பொருள் g யின் பெறுமானத்தை அதிகரிக்கச் செய்கிறது ; வேண்டிய திருத்தம் $-0·04187\ \rho$ மி.கல்.மீ.$^{-1}$ ஆகும் ; இங்கு ρ, மேற்படி இரு தளங்களுக்கிடையிலுள்ள பாறைகளின் சராசரி அடர்த்தி ஆகும். இது **பூக்னர் (Bougner) திருத்தம்** எனப்படுகிறது.

(c) **அகலாங்கு விளைவு.**—கடைசியாக g யின் எல்லாப் பெறுமானங்களும் ஒரு நியம அகலாங்கிற்கே கொண்டுவரப்படவேண்டும் ; அது வழக்கமாக அளவை செய்யப்படும் வட்டாரத்தின் வடக்கு–தெற்கு அச்சின் மையத்திலுள்ள நிலையத்தின் அகலாங்கு. இம்மாறல் ஆனது புவியின் சுழற்சியாலும், ப. 167 ஐ ஒப்., கோள வடிவத்திலிருந்து புவி வேறுபடுவதாலும் ஆனது.

(d) **வற்றுப்பெருக்காலும் வெப்பநிலையாலும் உண்டாகின்ற விளைவுகள்.**—இவை மிகச் சிறிதே ; இவை பொது நகர்வுத் திருத்தத்துடன் ஒன்று சேர்க்கப்படுகின்றது.

பயிற்சி V

5·01. வட்ட ஆரைச்சிறை வடிவமுள்ள சீரான அடரொன்று அதன் உச்சி ஊடாகவும் அதன் தளத்துக்குச் செவ்வனுகவும் உள்ள கிடையச்சொன்று பற்றி புவியீர்ப்பு காரணமாகச் சிற்றலைவுகளை ஆற்றுகின்றது. எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம் வில்லின் நீளத்தின் அரைவாசியாயின் ஆரைச்சிறையின் கோணத்தைக் காண்க. [2 சைன $^{-1}$ $\frac{3}{4}$.]

5·02. சீரான இருசமபக்க முக்கோணி வடிவம் உள்ள அடரொன்று, கிடையான அச்சொன்று பற்றி நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் சிற்றலைவுகளை ஆற்ற முடியும். அச்சானது அடரின் உச்சி ஊடாகச் செல்லும்பொழுதும் அடரின் அடியின் மையம் ஊடாகச் செல்லும் பொழுதும் ஆவர்த்தன காலம் ஒரே பெறுமானத்தையுடையது எனில் அடரின் கோணத்தை ஆராய்க.

[உச்சிக்கோணம் $\frac{\pi}{2}$ ஆதல் வேண்டும்.]

5·03. இலேசான கோலொன்று அதன் நீளத்துக்குச் செவ்வனான கிடையச்சொன்றைச் சுழற்சியச்சாகக் கொண்டிருக்கிறது; அதன் கீழ் முனையில், சுழலையிலிருந்து தூரம் r_1 இல், திணிவு m காவப்படுகிறது. மேல் முனையில் $\theta m (0<\theta<1)$ என்னும் திணிவு ஒன்று உளது; சுழலையிலிருந்து இத்திணிவின் தூரம் r_2. புவியீர்ப்புக் காரணமாக ஆற்றப்படும் சிற்றலைவு களின் ஆவர்த்தன காலத்திற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{r_1^2+\theta r_2^2}{r_1-\theta r_2}}\right]$$

5·04. சீரான சதுர அடரொன்று அதன் தளத்துக்குச் செவ்வனான கிடையச்சொன்று பற்றி அலைகிறது. ஆவர்த்தன காலம் ஓர் இழிவாக இருக்கும்பொருட்டு எவ்விடத்தில் சதுரத்தை அச்சு ஊடுருவிச் செல்லவேண்டும் என்பதைக் காண்க.

[சதுரத்தின் பக்கம் a எனில் தேவைப்படும் புள்ளியின் ஒழுக்கு அடரின் மையத்தைத் தன் மையமாகக் கொண்டதும், ஆரை $\frac{a}{\sqrt{6}}$ உடையதுமான வட்டமொன்றாகும்.]

5·05. திணிவு $3m$ உம் நீளம் $2a$ யும் உடைய சீரான வளையொன்று அதனது மையத்திற் செங்குத்தாகத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளதும் நீளம் a உடையதுமான இலேசான புயமொன்றைக் கொண்டிருக்கிறது; புயத்தின் முனையிலுள்ள சுழலை ஒன்றிலிருந்து வளையானது கிடையாகத் தொங்குகிறது. வளையின் ஒவ்வொரு முனையிலும் நீளம் a யும் திணிவு m உம் கொண்ட எளிய ஊசலொன்று இருக்கிறது. முழுத் தொகுதியும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சிற்றலைவுகளை ஆற்றுகிறது. எளிய சமவலு ஊசல்களின் நீளங்கள் a, $2a$, $\frac{3}{5}a$ ஆகும் எனக் காட்டி, அவற்றிற்கு ஒத்த அலைவு வகைகளை விவரித்துக் கூறுக.

5·06. எவ்வாறு நிலைக்குத்தச்சொன்று பற்றி சீரான கிடையான சட்டமொன்றின் சடத்துவத் திருப்பத்தை, அச்சட்டம் இருநூற்றிழைகளொன்றால் தாங்கப்பட்டுக் கிடைத்தளத்தில் ஆற்றும் சிற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்திலிருந்து காணமுடியும் என்பதைக் காட்டுக.

5·07. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் ஊடே செல்கின்ற நேர்கோடொன்றில் உள்ள நான்கு புள்ளிகளைக் குறித்து ஒரே ஆவர்த்தன காலத்துடன் கூட்டுச்சேலொன்று சிற்றலைவுகளை ஆற்றும் எனக் காட்டுக.

புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகலைத் தீர்மானிக்கும்போது இவ்விளைவின் பிரயோகத்தை விளக்குக.

5·08.
$$\frac{4\pi^2}{g}=\frac{r_1T_1^2-r_2T_2^2}{r_1^2-r_2^2}=\frac{A}{r_1+r_2}+\frac{B}{r_1-r_2}$$

என எழுதி
$$\frac{4\pi^2}{g}=\frac{T_1^2+T_2^2}{2(r_1+r_2)}+\frac{T_1^2-T_2^2}{2(r_1-r_2)}$$

எனக் காட்டுக.

கேற்றரின் ஊசலொன்று ஒவ்வொரு 60 செக்கன்களில் 2·00 செக்கன் ஆவர்த்தன காலம் உடைய கடிகாரமொன்றைக் குறித்து ஒரு முழு ஊசலாடலால் முந்துகிறது. பாரமிக்க முனையானது மேலே இருக்குமாறு தலைகீழாகக்கப்பட்டபோது அது ஒவ்வொரு 58 செக்கன்களிலும் ஒரு முழு ஊசலாடலால் முந்துகிறது. ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து கத்தியோரங்களின் தூரங்கள் முறையே 65·62 சமீ., 27·61 சமீ. எனின் புவியீர்ப்புச் செறிவின் பெறுமானத்தைக் காண்க. [980 சமீ. செக.$^{-2}$]

5·09. கேற்றரினூசலைப் பயன்படுத்தி எந்த நிலையத்திலும் புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகலைக் காணும் முறையை விளக்குக. என இத்தகைய ஊசல் தரும் முடிவுகள் நூலொன்றின் நுனியிலுள்ள சிறு திணிவொன்றின் ஊசலாடல்களை நேரங்கண்டு கிடைக்கப்பெறுகின்ற முடிவுகளைக் காட்டிலும் திருத்தமிக்கவை ?

புவியின் பரப்பிலுள்ள g யின் மாறல் வகை பற்றிச் சுட்டிக்காட்டுக.

5·10. கேற்றரினூசலைப் பயன்படுத்தி g யைத் துணிதலுக்கான கொள்கையையும் பரிசோதனை விபரங்களையும் தருக. அதன் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து 10 சமீ. தூரத்திலுள்ள அழுத்தமான கிடையச்சொன்று பற்றி நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சிற்றலைவுகளை ஆற்றுகின்ற சீரான சட்டமொன்றின் ஆவர்த்தன காலம் 1·25 செக்கன்கள் ஆகும். சட்டத்தின் நீளத்தைக் காண்க ; சட்டத்தின் அதே ஆவர்த்தன காலத்தைக் கொண்ட மற்றைத் தானத்தையுந் துணிக. கணித்தலில் சட்டத்தின் பக்கப் பரிமாணத்தைப் புறக்கணிக்கலாம்.

[58·8 சமீ., சட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 28·8 சமீ.]

5·11. " உடனிகழ்ச்சி முறை "யைப் பயன்படுத்தி ஊசலொன்றின் ஆவர்த்தன காலத்தைத் துணிதலுக்கான பரிசோதனையொன்றை விவரித்துக் கூறுக.

22 சமீ. நீளமும் 30 கி. திணிவும் கொண்ட கோலொன்று, அதன் முனை விட்டம் 6·0 சமீ. உம் திணிவு 220 கி. உம் கொண்ட நிலைக்குத்தான தட்டொன்றின் ஓரப்புள்ளியொன்றில் நிலையாக்கப்பட்டு, ஊசலொன்றைத் தருகிறது ; ஊசலானது கோலின் மேல் முனை ஊடாகவும் தட்டின் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள அச்சொன்று பற்றி அலைவுகளை ஆற்றுகிறது. சிறு வீச்சு உடைய அலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க. [0·994 செக்.]

5·12. அதன் சுழற்சி அச்சுப் பற்றி சடத்துவத் திருப்பம் I உடைய பறப்புச் சில்லொன்று அதன் அச்சு கிடையாக இருக்குமாறு உராய்வில்லாத போதிகைகளில் ஏற்றப்பட்டிருக்கிறது. சில்லில், அச்சிலிருந்து தூரம் r இல், புறக்கணிக்கத்தக்க பருமனுடைய திணிவு m இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது ; m ஊடாகச் செல்லும் ஆரை நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் கோணம் θ வை ஆக்கும் நிலையில் சில்லு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகிறது. சில்லு அடையும் உயர்வுக் கோண வேகத்திற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

அடுத்து, மேற்படித் தொகுதியானது சிற்றலைவுகளை ஆற்றும்பொழுது அவ்வலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தையே எளிய ஊசலொன்று உடையதாய் இருக்குமாறு அதன் நீளம் l செப்பஞ் செய்யப்படுகிறது. r இன் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு இச்செயன்முறை மீண்டும் மீண்டும் செய்யப்படுகிறது. r இற்கும் l இற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பை நேர்கோட்டு வரைபொன்றால் எவ்வாறு குறிக்கமுடியும் என்பதை விளக்கி, m ஐத் தெரிந்தவிடத்து வரைபிலிருந்து I இன் பெறுமானத்தை எவ்வாறு துணியலாம் என்பதைக் காட்டுக. அதன் சுழற்சி அச்சுப் பற்றி பறப்புச்சில்லொன்றின் சடத்துவத் திருப்பத்தைத் துணிதலுக்கான வேறொரு முறையின் கொள்கையைத் தருக. (L. Sch.)

$\left[\left\{\dfrac{2mgr(1-\text{கோசை }\theta)}{I+mr^2}\right\}^{0.5}\right.$; rl ஐக் குறித்து r^2 ஐ வரைக ; அப்பொழுது $I = m\times$ (வெட்டுத்துண்டு).]

5·13. தனது முனையொன்றூடே கிடையாகச் செல்லுகின்ற கத்தியோரமொன்று பற்றி நீளம் l கொண்ட மெல்லிய சீரான கோலொன்று நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஊசலாடுகிறது.

புவியீர்ப்பாலாகும் சிற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலம் மாறாது இருக்கும்படி கோலின் எந்தப் புள்ளியில் செறிந்த சுமை ஒன்றை வைத்தல்வேண்டும் ?

[மேலான முனையிலிருந்து $\frac{2l}{3}$ தூரத்தில்.]

5·14. (*a*) புவியீர்ப்புச் செறிவானது அதன் பெறுமானத்தின் $\frac{1}{n}$ ஆல் அதிகமாகக் கப்பட்டால் ஊசலொன்று ஒவ்வொரு $2n$ அலைவுகளிலும் ஒரு முழு அலைவால் முன்னேறும் எனக் காட்டுக.

(*b*) எளிய ஊசலொன்றின் ஆவர்த்தன காலமானது மலையடிவாரத்திலும் பார்க்க மலையுச்சியில் $\frac{1}{60}$ சதவீதம் குறைவானது ; வெப்பநிலை மாறுவதால் ஆகும் நீளக்குறைவு $\frac{1}{80}$ சதவீதம். புவியீர்ப்புச் செறிவில் சதவீத உயர்வு $\frac{1}{48}$ எனக் காட்டுக.

(*c*) ஊசற் கடிகாரமொன்றை வேறோர் இடத்திற்கு எடுத்துச் சென்றபோது அது நாளொன்றில் 24 செக்கன்கள் முந்துகிறது எனத் தெரியவந்தது. வெப்பநிலையில் மாற்றம் இருக்கவில்லை எனக் கொண்டு அவ்விரு இடங்களுக்குமுரிய புவியீர்ப்புச் செறிவு வேறுபாட்டின் பெறுமானத்தைக் காண்க. [g/1800.]

5·15. மணிக்கூடொன்றின் சமநிலைச் சில்லானது ஆரை 0·80 சமீ. கொண்ட பாரமான வளையமொன்றெனக் கருதலாம். அதன் திணிவு 0·96 கி. ஆகும். அதன் அலைவுக்காலம் ஒரு செக்கன் ஆக இருக்கும்பொருட்டு வில்லானது கோணப் பெயர்ச்சியலகு ஒன்றிற்கு பிரயோகிக்கும் மீள்தரு இணையைக் காண்க. [0·0156 எக். ஆரையன்$^{-1}$.]

5·16. ஆரை a கொண்ட சீரான கால்வட்டத்துண்டொன்றானது, அதன் உச்சி ஊடேயுள்ள கிடையச்சொன்று பற்றி, அதன் சொந்தத் தானத்தில், புவியீர்ப்பு காரணமாக அலைவுகளை ஆற்றுகிறது. அதன் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க.

[$\pi\sqrt{\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{a}{g}}$.]

5·17. கம்பித்துண்டொன்று, பக்கநீளங்கள் முறையே a யும் b யும் ஆகவுள்ள செவ்வகமொன்றின் இரு புயங்களை ஆக்குமாறு வளைக்கப்பட்டிருக்கிறது. புவியீர்ப்பு காரணமாக, அதனது சொந்தத் தளத்தில் கம்பியின் வளைவூடாக உள்ள கிடையச்சொன்று பற்றி அது ஊசலாடுகிறது. எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம்

$$\tfrac{2}{3}(a^3+b^3)(a^4+b^4)^{-\frac{1}{2}}$$

எனக் காட்டுக.

5·18. ஆரை a கொண்ட மெல்லிய வட்டத் தடமொன்று அதன் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியூடே செல்லும் கிடையச்சொன்று பற்றி அதன் சொந்தத் தளத்தில் ஊசலாடுகிறது. அலைவுகள் சிறிதெனின் எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம் $2a$ எனக் காட்டுக.

5·19. நீளம் $2a$ கொண்ட இலேசான கோலொன்றின் முனைகளில் இருசம திணிவுகள் நிலையாக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கோலானது, அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் r இல், சுழலையில் வைக்கப்பட்டிருப்பின், எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம் $(a^2+r^2)r^{-1}$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

5·20. நீண்ட ஊசலொன்றின் அலைவுவீச்சு 10·0 சமீ. ஆகும். 4 நிமிடங்களுக்குப் பின்னர் வீச்சு 8·0 சமீ. ஆகின்றது. வீச்சு 6·0 சமீ. ஆவதற்கு எவ்வளவு நேரம் செல்ல வேண்டும் ?

[10 நி.]

5·21. புவியீர்ப்பு காரணமாக, நிலைக்குத்துத் தளத்தில், சீரான நீள்வளையத்தட்டொன்று சிற்றலைவுகளை ஆற்றுகிறது. சுழற்சியச்சானது பேரியச்சின் முனையொன்று ஊடே செல்லுகிறதெனில், எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம் $(5a^2+b^2)(4a)^{-1}$ எனக் காட்டுக ; இங்கு a யும் b யும் அரையச்சுக்களும், $a>b$ உம் ஆகும்.

5·22. புவியீர்ப்பு காரணமாக, அதன் சொநதத் தளததில, அதன் மூலேயொனறு ஊடே செலலும் இடையச்சொன்று பற்றி, சாயசதுரமொனறு ஆறறும் சிற்றலேவுகளின ஆவர்த்தன காலம

$$\pi\sqrt{\frac{7a}{3g}}$$

என நிறுவுக ; இங்கு தொங்கற புள்ளி ஊடே செலலும் மூலேவிட்டத்தின் நீளம் a ஆகும்.

5·23. சீரிலலாத கோலொனறு, ஒனறனபின்ஞென்ருக, ஆயிடை l உள்ள தன இரு புள்ளிகள் ஊடாகச் செலலுகினற இடையசசுககள பறறி அலேவுகளே ஆற்றமுடியும். சிற்றலேவு களின ஆவர்த்தன காலங்கள் முறையே t_1, t_2 எனில், கோலின் திணிவுமையமானது தூரம் l ஐ

$$\frac{gt_1^2 - 4\pi^2 l}{gt_2^2 - 4\pi^2 l}$$

என்னும் விகிதத்தில் பிரிககிறது என நிறுவுக.

5·24. கூட்டுசேலப் பயனபடுத்திப் புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகலேத் திட்டமாக அளக்கும்போது ஆகவேணடிய திருத்தஙகளேச சுருககமாகக கூறுக ; கததியோரங்களின வளேவுககுரிய திருத தத்தை விரித்துரைக்க. (S)

5·25. **திணிவு, நிறை** எனபவற்றிறகு வரைவிலக்கணம் கூறித் தரப்பட்ட ஏதேனுமோர் இடததில பொருளொனறின திணிவுககும் அதன நிறைககும் இடையேயுள்ள விகிதசமதது வதைச் சோதிக்கும் பொருட்டு நீர் செயயவிரும்பும் பரிசோதனேகளே விவரித்துக் கூறுக.

5·26. நிலேத்த இடையசசொன்று பறறி உராயவின்றிச் சுழலுமாறு விறைப்பான பொரு ளொனறு ஏற்றப்பட்டிருக்கிறது. அதனது சிறறலேவுக காலததிற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

புவியீாப்புச் செறிவு g ஐ அளக்க இத்தகைய தொகுதியொன்றை நீர் எவ்வாறு பயன் படுத்துவீா என்பது பற்றி விவரித்துக் கூறுக.

5·27. புவிப பரப்பிற்கு மேலேயுளள புள்ளியொன்றிலிருநது பொருளொான்று விடுவிக்கப் பட்டால அது நிலேககுத்துக் கோட்டிலிருந்து கிழக்கு முகமான சிறு விலகலொன்றையும் அத்துடன் மத்தியகோடு முகமான மிகசசிறிய விலகலொனறையும் அடைகின்றது என நிறுவுக.

கிழக்கு முகமான விலகலானது அகலாஙகுக் கோணததின் கோசைனுடனும் விழுந்த தூரத் தின் வாககமூலத்தின் கணததுடனும் நேராக மாறுகிறது எனக காட்டுக. மேலும, அகலாங்கு $51\frac{1}{2}°$ யில், 100 அடி வீழ்வினிடத்து இவவிலகலானது கிட்டத்தட்ட $\frac{1}{11}$ அங்குலம எனவுங் காட்டுக.

5·28. குறையுடைய செககனுாசலொன்று நாளொன்றில் 20 " செக்கன்கள் " இழககிறது. அதன நீளததைக கிட்டத்தட்ட 0·046 சமீ. ஆல குறுக்கிஞல் அதே நிலேயத்தில் அது காலந தவருது ஓடும எனக் காட்டுக.

5·29. புவியானது தன் அசசுப் பற்றிச் சுழலாது இருக்குமாயின், மததியகோட்டில புவி யீாப்புச செறிவின பெறுமானம் இபபோதையதைக் காட்டிலும 3·38 சமீ. செக்.$^{-2}$ ஆல் மிகுநதிருக்கும எனக் காட்டுக.

5·30. இரு நிலேயங்களிலுள்ள புவியீர்ப்புச செறிவுகளே எவ்வாறு திட்டமாக ஒப்பிடலாம் என்பதை விவரமாகக் கூறுக. புவியீாப்பு அளவை முடிபுகளிலிருந்து என்ன செய்தியைப் பெறமுடியும் ?

5·31. தன் சொநதத தளத்தில, தன் மூலேயொன்றூடே செல்லும் இடையச்சொன்று பற்றிச சிற்றலேவுகள் ஆறறுமாறு, சீரான தடிப்புடைய ஓர் உலோகத்தாற் சதுரத்தட்டொன்று அமைககப்பட்டிருக்கிறது. சதுரத்தின் பக்க நீளம் $2a$ ஆயின எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம் யாது ?

$$\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\ a.\right]$$

5·32. திணிவு m கி., நீளம் λ மீ. உடையதும், நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் அசையுமாறு தன் முனையொன்றில் பிணைக்கப்பட்டதுமான, நேரான, சீரான கோலொன்று கிடைநிலையினின்றும் விடுவிக்கப்படுகிறது. நிலைக்குத்து நிலையூடே கோல் செல்லும்பொழுதுள்ள அதனது கோண வேகத்தைக் கணிக்க. அதனது உறுதியில் சமநிலைத் தானத்தினின்றும் கோலானது விடுவிக்கப்படின் இவ்வேகம் இருமடங்காகுமா ?

$$\left[(a)\ \frac{1}{10}\sqrt{\frac{3g}{\lambda}}\ \text{ஆரையன். செக்.}^{-1};\ (b)\ \frac{1}{10}\sqrt{\frac{6g}{\lambda}}\ \text{ஆரையன். செக்.}^{-1}.\right]$$

5·33. நீளம் 30 சமீ. கொண்ட சீரான உலோகக் கோலொன்று, ஒவ்வொன்றும் 100 சமீ. நீளமுடைய நிலைக்குத்தான இரு கயிறுகள் ஆக்கும் இருநூற்றெங்கல்களாற் கிடையாகத் தாங்கப்பட்டிருக்கிறது. கயிறுகள் கோலின் முனைகளுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கோலின் திணிவு 1000 கி. எனின், அது ஒரு சிறு கோணம் θ அளவால் திருக்கப்பட்டிருக்கும்பொழுது அதன்மீது ஆற்றுகின்ற இணையைத் துணிக.

அதனது புவியீர்ப்பு மையம் ஊடே செல்லுகிற நிலைக்குத்தச்சுப் பற்றிக் கோலின் சுழிப்பாரை 10 சமீ. எனின், கிடைத் தளத்தில் கோலின் சிற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க.

[1·34 செக்.]

5·34. எளிய இசையியக்க முறைப்படி அலைவுகளை ஆற்றுகின்ற பொருளொன்றின் ஆவர்த்தன காலத்திற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக. இச்செய்தியைப் பயன்படுத்திக் கூட்டுசேலொன்றின் அசைவு வீச்சம் சிறிதாயிருக்கும்பொழுது அதன் அலைவுக்காலத்தைக் காண்க.

ஆரை r உம் திணிவு m உம் கொண்ட விறைப்பான வட்டத் தட்டொன்று அதன் ஓரம் ஊடாகவும் அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவுமுள்ள கிடையச்சுப் பற்றிச் சிறு வீச்சமுடைய அலைவுகளை ஆற்றுமாறு தாங்கப்பட்டிருக்கிறது. திணிவு M கொண்ட துணிக்கையொன்று தட்டின் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியில் நிலையாக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுதுள்ள ஆவர்த்தன காலம் T ஐக் காண்க ; M இன் பெறுமானம் எத்துணைப் பெரிதாகினும் T யில் ஏற்படும் மாற்றமானது கிட்டத்தட்ட 15 சதவீதத்தை மீறாது எனக் காட்டுக.

5·35. நிலைத்த அச்சொன்று பற்றிச் சுழலும் விறைப்பான பொருளொன்றின் இயக்கச் சத்தியானது $\frac{1}{2}I\omega^2$ ஆகும் எனக் காட்டுக ; இங்கு, குறியீடுகள் அவற்றின் வழக்கமான அர்த்தங்களையே உடையன. கிடையாயிருக்கின்ற அச்சுடைய பறப்புச் சில்லின் விளிம்பில் தெரிந்த திணிவுடைய சிறு பொருளொன்றை எவ்வாறு நிலையாக்கி, கூட்டுசேலொன்றினிடத்துப் பெறப்பட்ட அலைவுகளை நோக்கிச் சில்லுக்கு அவ்வச்சுப் பற்றிய சடத்துவத் திருப்பத்தைத் துணியலாம் என்பதை விவரித்து விளக்கிக் கூறுக.

5·36. "**சடத்துவத் திருப்பம்**" என்னும் பதத்தை விளக்கி "**சமாந்தரவச்சுத் தேற்றத்தை**"க் கூறுக. ஊசலொன்று, மெல்லிய இழையொன்றால் தொங்கவிடப்பட்டதும் முடிவுள்ள ஆரைகொண்டதுமான ஊசற்குண்டொன்றால் ஆனது ; அடிப்படைத் தத்துவங்களிலிருந்து ஊசலின் இயக்கச் சமன்பாட்டைப் பெறுக (தணித்தல் புறக்கணிக்கத்தக்கது). இயக்கச் சமன்பாட்டிலிருந்து ஊசலின் ஆவர்த்தன காலத்தை எவ்வாறு பெறமுடியும் என்பதைக் காட்டுக.

ஊசலொன்று 15·0 சமீ. நீளமுடைய இழையொன்றால் தொங்கவிடப்பட்ட கோளவூசற்குண்டாலானது ; ஊசற் குண்டின் ஆரை 2·24 சமீ. (a) ஊசலின் ஆவர்த்தன காலம், (b) எளிய சமவலு ஊசலின் நீளம் என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

[(a) 0·836 செக்., (b) 17·4 சமீ.]

5·37. அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் r இலிருக்கின்றதுமான இடையச்சொன்று பற்றி ஆரை a கொண்ட சீரான உலோகத்தாலான வட்டத் தகடொன்றின் ஆவர்த்தன காலம் T யிற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக. தகட்டின் விட்டம் 36·0 சமீ. எனின்,

(*a*) $r = a$ ஆகுமிடத்து அலைவுக்காலம் T_r,

(*b*) ஒரே ஆவர்த்தன காலம் T_r இற்குரிய r இன் இன்னொரு பெறுமானம்,

(*c*) இழிவு அலைவுக்காலம் $T_{\text{இழிவு}}$

என்பவற்றைக் கணிக்க.

[(*a*) 1·04 செக்., (*b*) 9·0 சமீ., (*c*) 1·01 செக்.]

அதிகாரம் VI

ஈர்ப்பு

கெப்பிளரின் கோளியக்க விதிகள்.—கோள்களின் இயக்கமானது மிகப் பழங்காலந் தொட்டு கவர்ச்சிமிக்க விடயமொன்ருக விளங்கி வந்திருக்கின் றது. பாபிலோனிய வானியல் விற்பன்னர்கூட கோளியக்க அட்டவணைகளை ஓரளவு வெற்றிகரமாகக் கணிக்கும் வல்லமையுடையோராயிருந்தனர் என்பது இதற்குச் சான்ருகும். புவியே பிரபஞ்சத்தின் மையம் எனக் கொண்டு **ரொலமி** என்பார் புவியிலிருந்து நோக்கப்பட்டவாறு கோள்களின் தோற்ற வியக்கங்களை வட்டங்கள், மேற்சக்கரங்கள் என்பவற்றின் தொகுதியொன் ருல் விவரித்துக் கூறமுடியும் எனக் கண்டுபிடித்தார். **கொப்பனிக்கஸ்** என்பார், 1542 இல், மேற்படி விவரணத்தை எளிதாக்க முயன்ருர்; அவரின் கொள்கையில், மையமாக அமைந்திருக்கின்ற ஞாயிற்றைக் குறித் துக் கோளகள் வட்டங்களிற் சுற்றுகின்றன எனக் கருதப்பட்டது. அவரது ஆராய்ச்சியின் முடிவுகள், நூலாக வருமுன் அவர் காலமாகிவிட்டார்.

ரைக்கொ பிராஹே என்பாரின் வானியல அவதானிப்புகளை முறைப்படி படித்த **கெப்பிளர்** என்பார், 1609 இல், கோளியக்கம் பற்றிய இரு விதி களை வெளியிட்டார்; 1618 இல், மூன்ருவது விதியொன்றும் தொடர்ந்து வெளியிடப்பட்டது. கெப்பிளரின் கோளியக்க விதிகள் பின்வருமாறு:—

(*a*) ஒவ்வொரு கோளும் நீள்வளையமொன்றை அதன் குவியமொன்றில் ஞாயிறு அமைந்திருக்குமாறு வரைகிறது.

(*b*) ஞாயிறைக் கோளொன்றுடன் தொடுக்கும் ஆரைக்காவியானது சமகாலங்களில் சம பரப்பளவுகளை வரைகிறது.

(*c*) கோள்களின் சுற்றற் காலங்களின் வர்க்கம் ஞாயிறிலிருந்து அக்கோள்களின் சராசரித் தூரங்களின் கனத்துக்கு விகிதசமம்.

["சராசரித் தூரம்" என்னும் சொற்றொடருக்குப் பதிலாக இன்று "கோளின் அரைப்பேரியச்சு" என்னுஞ் சொற்றொடர் பயன்படுத்தப்படுகிறது.]

இவ்விதிகளுள் முதலாவதும் இரண்டாவதும் தனித்த கோளொன்றின் இயக்கத்தைப் பற்றியதே என்பது குறித்தற்பாலது; மூன்ருவது விதி, வெவ்வேறு கோள்களின் இயக்கங்களிடையேயுள்ள தொடர்பை உணர்த்து கிறது.

நியூற்றனின் ஈர்ப்பு விதி.—கெப்பிளரின் விதிகள், கோள்களின் இயக் கங்கள் பற்றிய அவதானிப்புகளின் தொகுப்பாக மட்டுமே உள்ளன. இந்நிலையில், அவை யாதொரு விளக்கமும் அளிக்காது, எளிய திட்டமான முறையிலே அவ்வியக்கங்களை விவரித்துக் கூறுகின்றன. 1666 இல், நியூற் றனின் வயது இருபத்து நாலாய் இருக்கும்பொழுது, அவர் ஞாயிற்றுக்கும் கோளொன்றிற்கும் இடையேயுள்ள ஈர்ப்பு விசையைப் பயன்படுத்திக் கோளி

யக்கத்தை விளக்கிக் காட்டினர் ; சற்றேறக்குறைய இருபது ஆண்டு காலமாக இவ்வாராய்ச்சி பற்றிய செய்திகள் எதுவும் வெளியாகவில்லை ; பெரும்பாலும் **ஹல்லே (Halley)** என்பவரின் தூண்டுதலாலேயே **பிறின்சிப்பியா (Principia)** என்னும் நூலின் ஒரு பகுதியாக அவை வெளிவந்துள்ளன.

ஈர்ப்பு விதியைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு நியூற்றனைத் தூண்டியிருக்கக் கூடிய கருத்துக்களை நனகுணரும் பொருட்டு ஆரை r கொண்ட வட்டமொன்றின் மையத்தில் அமைந்திருக்கிற ஞாயிற்றைச் சுற்றிக் கோளொன்று வலம் வருகிறது எனக் கொள்வோம் ; கோளின் சுற்றற் காலம் T யும் அதன் கோண வேகம் ω வும் ஆகுக. ஞாயிற்று முகமாகக் கோளின ஆர்முடுகல் $\omega^2 r$ எனவே அதன் திணிவு m எனின், கோள் மீதுள்ள கவர்ச்சி விசையானது

$$m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r.$$

இங்கு T ஆனது ஆவர்த்தன காலம ஆகும். இனி மூன்றுவது விதியின்படி $T^2 = \kappa r^3$; இங்கு κ ஒரு மாறிலி. எனவே கோள் மீதுள்ள விசையானது $\frac{m}{r^2}$ இற்கு விகிதசமம்; அதாவது, கவர்ச்சியானது ஞாயிற்றுக்கும் கோளுக்கும் இடையேயுள்ள தூரத்தின வர்க்கத்திற்கு நேர்மாறு விகிதசமம்.

இத்தகைய சில கருத்துக்களினுல் உந்தப்பட்ட நியூற்றன தன் ஈர்ப்பு விதியைப் பிரேரிக்க முற்போந்தார்; **எந்தச் சடத் துணிக்கையும் வேறெந்தத் துணிக்கையையும், அவற்றின் திணிவுகளின் பெருக்கத்துக்கு நேர்விகித சமமானதும், அவற்றின் இடைத்தூரத்தின் வர்க்கத்துக்கு நேர்மாறு விகித சமமானதுமான விசையொன்ருல் கவர்கின்றது எனவும், அவ்விசையின் தாக்கக் கோடானது அத்துணிக்கைகளை இணைக்கும் நேர்கோடு எனவும், அவ்விதி கூறுகிறது.** அவ்விரு துணிக்கைகளினதுந் திணிவுகள் m_1, m_2 ஆகவும அவற்றின் இடைத்தூரம r ஆகவும் இருப்பின், அவ்விடைத் தூரத்தைப் பெரிதாக்குமுகமாகத் தாக்குகின்ற விசை F என்ன,

$$F = -\gamma . \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

இங்கு, γ ஆனது **ஈர்ப்பு மாறிலி** எனப்படும் அகில மாறிலி ஒன்ருகும். விசையானது கவரும் விசை எனச் சயக்குறி உணர்த்துகிறது ; இது காந்தவியல், மின்னியல் எனபவற்றிலுள்ள வழக்குடன இணங்குகிறது ; ஆனல் ஈர்ப்பியல் நூல்களில் இவ்வழக்கு எப்பொழுதும் அவ்வாறனறு.

இனி **நியூற்றன்** கருதியுளளவாறு† கோளமொன்றின திணிவு அதன் மையத்தில் செறிந்திருக்கிறதுபோல அதற்குப் புறத்தேயுள்ள புள்ளியொன்றில் அதனுலாகும் கவர்ச்சியுந் தொழிற்படுகிறது எனக் கொள்ளின், சந்திரனின் இயக்கத்திற்கும நேர்மாறு வர்க்க விதியின் உண்மையைச் சோதிக்கலாம். m_1, m_2 என்பன முறையே புவி, சந்திரன் என்பவற்றின் திணிவுகளும், r அவற்றின மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரமும்,

†இக்கூற்றுக்கான நிறுவலொன்றையிட்டுப் ப. 239 ஐப் பார்க்க.

a புவியின் ஆரையும் ஆகுக. T ஆனது சந்திரனின ஆவர்த்தன காலம் (27 நா. 7 ம. 43 நி.) எனின் அப்பொழுது

$$m_2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \text{சந்திரன்மீது புவியாலாகும் கவர்ச்சி விசை.}$$

$$= \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

புவிப்பரப்புப் புள்ளியொன்றிலே புவியீர்ப்பின செறிவு g எனின், அப்புளளியிலுள்ள அலகுத் திணிவொன்றின் மீதுள்ள புவிக் கவர்ச்சியால்

$$g \times 1 = \gamma . \frac{m_1 \times 1}{a^2}.$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளும்

$$ga^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3$$

எனத் தருகின்றன; எனவே $r = 60a$ எனபது ஒரு நெருங்கிய அண்ணளவாகும் எனக் கொண்டால்,

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(60\right)^3 a.$$

$a = 4,000$ மைல் எனக் கொள்வோமாயின்

$$g = 32{\cdot}4 \text{ அடி. செக்.}^{-2}.$$

சந்திரனின் இயக்கம் பற்றிய அவதானிப்புகளிலிருந்து உய்த்தறியப் படுகினற இப்பேறுனது பரிசோதனை உண்மைகளுடன் ஒத்திருக்கின்றபடியால் ஈர்பபுக் கொள்கையின் உண்மை உணர்த்தப்படுகிறது.

மேற்படி விவாதத்தில் கோள்மண்டிலஙகள் வட்டங்களென எடுத்துக் கொளளப்பட்டன; ஆனுல் அவை நீள்வளையங்கள் ஆகும் என **கெப்பிளர்** வற்புறுத்துகிறுர். எனவே கெப்பிளரின் விதிகளைக் கூடின நுட்பத்துடன் சோதித்து அவற்றிலிருந்து பெறக்கூடிய முடிவுகளைக் கண்டுபிடிக்க முயல்வோம்.

கோளொன்று ஞாயிற்றைச் சுற்றி அசையுங்கால, நேரங்கள் t, $(t+\delta t)$ யில் அதன் நிலைகள் முறையே P யும் Q வும், படம் 6·01(a), ஆகுக. அப்பொழுது S, நீள்வளையத்தின் குவியங்களுள் ஒன்றுகும்; கோளத்தின் கதி v எனின்

$$PQ = v.\ \delta t.$$

எனவே ஆரைக்காவி SP யினுல் வாரப்பட்ட பரப்பளவு A ஆனது அவ்வாரைக்காவியின் நிலைத்த தானமொன்றிலிருந்து அளக்கப்பட்டால்,

$$\delta A = \Delta\, SPQ = \tfrac{1}{2}\, p.\ PQ;$$

இங்கு p ஆனது S இலிருந்து நீட்டிய நாண் PQ இற்கு அல்லது, எல்லையில், P யிலுள்ள தொடலி PT இற்கு வரைந்துள்ள செங்குத்து SM ஆகும்.

$$\therefore\ \frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}\, pv.$$

சமபரப்பளவுக்கள் சமகாலங்களில் வரையப்படுகிறபடியால் (கெப்பிளரின் இரண்டாவது விதி) $\frac{dA}{dt}$ ஒரு மாறிலி ஆகும்; அதாவது pv மாறிலியாகும்; அதை h எனக. கோளின் திணிவு m எனின்,

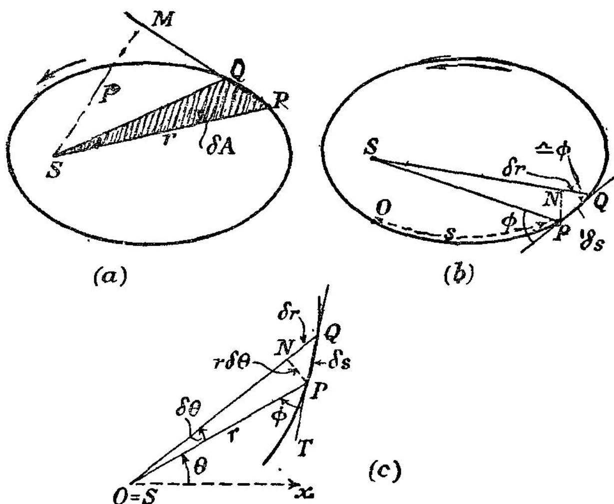
$$mpv = \text{மாறிலி},$$

அதாவது கோளின் உந்தத் திருப்பம் அல்லது கோணவுந்தம் ஒரு மாறிலி ஆகும்; ப. 100 ஐ ஒப்.

அடுத்து ஞாயிற்றைத் தன் குவியமொன்றிற் கொண்டிருக்கும் நீள் வளைய மண்டிலத்திற்கு நேர்மாறு வர்க்கவிதி மட்டுமே இசைவான விசை விதி என்பதை உறுதிப்படுத்துதல் வேண்டும். எனின்,

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2} h$$

ஆகுக; கவரும் விசையானது $f(r) = \bar{F}$ ஆகுக. மேலும் ஆரைக்காவி SP யுடன் நாண் PQ என்பது ஆக்கும் கோணம் ϕ ஆகுக. எல்லையில் Q வானது P யை நெருங்கி இருக்கும்பொழுது, ϕ ஆனது



படம் 6·01. கோளியக்கம்.

P (அல்லது Q) இலுள்ள தொடலியானது SP யுடன் ஆக்கும் கோணம் ஆகும். அப்பொழுது, படம் 6·01 (b) யை ஒப்., $\bar{F}$ கோசை $(\pi - \phi)$ அல்லது $-\bar{F}$ கோசை ϕ ஆனது P யிலிருக்கும் கோளுக்கு

ஆர்முடுகல் v ஐ வழங்கும் விசை ஆகும்; அதாவது,

$$-\overline{\mathrm{F}} \text{ கோசை } \phi = m\frac{dv}{dt};$$

மேலும் $pv = h =$ ஒரு மாறிலி ஆதலின

$$p\frac{dv}{dt} + v\frac{dp}{dt} = 0.$$

$$\therefore -\overline{\mathrm{F}}\frac{dr}{ds} = -\frac{mv}{p}\cdot\frac{dp}{dt} \qquad \left[\because \text{ கோசை } \phi = \frac{dr}{ds}, \text{ படம் } 6{\cdot}01\,(c) \text{ ஐ ஒப்.}\right]$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{F}} = \frac{mv}{p}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dp}{dr} = \frac{mv^2}{p}\frac{dp}{dr}.$$

இனி குவியமொன்றைக் குறித்து நீள்வளையமொன்றிற்குரிய (p, r) சமன்பாடானது

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1. \qquad [\text{ப. } 16 \text{ ஐ ஒப்.}]$$

$$\therefore\ \frac{dp}{dr} = \frac{p^3a}{r^2b^2}.$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{F}} = \frac{mh^2}{p^3}\cdot\frac{p^3a}{r^2b^2} = \frac{m}{r^2}\cdot\frac{h^2a}{b^2}.$$

$\overline{\mathrm{F}} = \mu\frac{m}{r^2}$ என்று எழுதுவோமாயின் இங்கு, $\mu = \frac{h^2a}{b^2}$ அப்பொழுது கோளின் ஆவர்த்தன காலத்திற்கு

$$\tfrac{1}{2}h\mathrm{T} = \pi ab. \qquad [\because\ \delta\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}pv\,\delta t]$$

$$\therefore\ \mathrm{T} = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}}},$$

அதாவது, $\mathrm{T}^2 \propto a^3.$

எனவே எல்லாக் கோள்களுக்கும் μ ஆனது ஒரே பெறுமானமுடையது எனக் கெப்பிளரின் மூன்றாவது விதி உணர்த்துகிறது; அதாவது, கோளொன்று மீதுள்ள விசையானது அக்கோளின் திணிவுக்கு விகிதசமம் என்பதேயாம். பொருள்கள் ஒன்றையொன்று தம்முட் கவர்கிறபடியால் மேற்படி விசையானது மற்றைப் பொருளின் (அதாவது ஞாயிற்றின்) திணிவிற்கும் விகிதசமமாகும். எனவே

$$\overline{\mathrm{F}} = \gamma\cdot\frac{m\mathrm{M}}{r^2} \text{ அல்லது } \mathrm{F} = -\gamma\cdot\frac{m\mathrm{M}}{r^2};$$

இங்கு M ஞாயிற்றின் திணிவும், γ ஈர்ப்பின் அகில மாறிலியுமாகும்.

ஞாயிறுனது நிலைத்த தானமொன்றில் இருக்கிறது எனக் கொள்ளப்பட்டிருப்பதால் மேலேயுள்ள விவாதமானது கண்டிப்பாய் அண்ணளவானதே. உண்மையாய்க கூறுமிடத்து, ஞாயிறு, கோள் ஒவ்வொன்றும் அவற்றின் பொதுத் திணிவுமையத்தைக் குவியமாகக் கொண்டு நீள்வளையங்களை வரைகின்றன ; கோளின திணிவைக் காட்டிலும ஞாயிற்றின திணிவு பெரிதாய் இருக்கிறபடியால் ஞாயிற்றுக்குரிய நீள்வளையம் மிகச் சிறிதாகவே அமையும்.

நியூற்றனின ஈர்ப்புவிதி கட்டாயமானது எனக் கூறமுடியாது ; எனினும் அதைப் பயன்படுத்திப் பெறறுள்ள வானியற் கணிப்புகள், அவதானிப்புகளுடன் நன்கு பொருந்துகிறபடியால் இவ்விதியின் உண்மை நிறுவப்பட்டதாயிற்று. இவ்விதியின் பிரயோகத்தால் விளைந்த கண்டுபிடிப்புக்களுள் மிகு முதன்மையானதெனப் பினவருவதை எடுத்துக் கூறலாம். **யுறேனசு** எனனும் கோளானது 1781 இல், **சர். வில்லியம் ஹேர்ச்சல்** என்பவரால் கண்டு பிடிக்கப்பட்டது ; விஞ்ஞானிகளுக்குத் தெரிந்தவரை, சொற்ப காலமாக, மற்றைக் கோள்களபோல் அதுவும் நடமாடுவதாகத்தான் தோறறிற்று. ஆனுல், பத்தொன்பதாம் நூறறுண்டின் தொடக்கத்திலே அதன் இயக்கத்தைப் பற்றிய சில முரண்பாடுகள குறிககப்பட்டன. எனவே நியூற்றனின் ஈாப்புவிதியைப் பயன்படுத்திக் கணிததுள்ள இயக்கத்திலிருந்து அச்சேய்மையிலுள்ள கோளின் உண்மையான இயக்கம வேறுபடுவதற்கு அதன்மீது ஏதேனுமொரு விசை கண்டிப்பாய்த் தொழிற்படவேண்டுமெனபது தெளிவாயிற்று. 1845 இல், கேம்பிரிட்ஜ் நகரிலே, J. C. அடமஸ் **(Adams)** என்பார், யுறேனசுக்கு அப்பால் அவரால் குறிப்பிட்ட நிலையில், அதுவரை தெரிந்திராத கோளொனறு இருக்குமாயின் யுறேனசின கீழ்ப்படியாத இயல்பிற்கு விளக்கம் அளிக்கலாம் எனக் காட்டினுர். தம் கொள்கையை அரச வானியல் விற்பன்னரிடம் **அடம்ஸ்** தெரிவித்தார் ; ஆனுல் அவவிற்பன்னர் அதன்மீது சற்றேனும் கவனஞ் செலுத்தவில்லை. 1846 இல், **லே வேரியர்** (Le Verrier) என்பார் அதேபோன்ற அறிமுறை முடிபொனறை வெளியிட்டார். இவவாராய்ச்சியாளர் ஒவ்வொருவரும் கிட்டத்தட்ட அதே நிலையில் புதுக் கோளொான்று உளதாக எதிர்வுகூறினர் என அரசவானியல் விற்பனனர் குறித்துள்ளார். ஆனுல், இங்கிலாந்தில், அரைகுறையாகவேதான் இப்புதுக்கோளானது ஆராயப்பட்டுளளது ; அதன் கண்டுபிடிப்பு 1846 ஆம் ஆண்டு செப்ரெம்பர் மாதம் 23 ஆம் திகதியன்று, **காலே** (Galle) என்பவராலே ஆனது. நியூற்றனின் ஈர்ப்புவிதியின் உண்மையையிட்டு இன்னுமொரு சான்றைக் கூறலாம் ; சில வால்வெள்ளிகளுக்கு இவ்விதியைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கப்பட்ட திரும்பற் காலங்கள் நோக்கன்முறையால் உறுதிப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. எனவே பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, வானியற் கணித்தற்றுறையில் நியூற்றனின் ஈர்ப்பு விதியானது தக்க அடிப்படையொன்றுகும் என உறுதிப்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது ; எனினும் கணிப்பும் நோக்கலும்

மிகச் சிறிதளவில் வேறுபடுகின்ற எடுத்துக்காட்டுக்களும் உள ; ஆனால் **அயின்ஸ்ரைன்** என்பாரின தொடர்பியற் கொள்கை அவற்றுக்கு விளக்க மளித்துள்ளது.

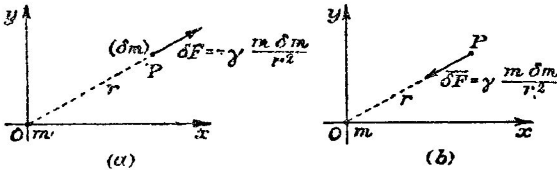
ஈர்ப்புப் புலமொன்றின் வலிமை—ஈர்ப்புச் செறிவு.—ஈர்ப்புப் புலமொன்றில் δm என்னும் சிறு திணிவொன்று வைக்கப்பட்டு, அது $\delta \vec{F}$ என்னும் விசையொன்றை உணருமாயின், அப்பொழுது

$$\underset{\delta m \to 0}{\text{எல்}} \; \frac{\delta \vec{F}}{\delta m}$$

என்பது δm இருக்கும் புள்ளியிலுள்ள **ஈர்ப்புப் புல வலிமை,** அல்லது **ஈர்ப்புச் செறிவு)** $\vec{G}$ எனப்படும். இவ்வாறு

$$\vec{G} = \underset{\delta m \to 0}{\text{எல்}} \; \frac{\delta \vec{F}}{\delta m}.$$

திணிவு m ஐயுடைய துணிக்கையொன்றிலிருந்து தூரம் r இலுள்ள புள்ளி P யில் δm என்னுஞ் சிறு திணிவொன்றைக் கருதுக, படம் 6·02(a). அப்பொழுது δm மீதுள்ள விசை δF ஆனது



படம் 6·02. சடத் துணிக்கையொன்றாலாகும் ஈர்ப்புப் புலத்தில் செறிவு.

$$\delta F = -\gamma . \frac{m \, \delta m}{r^2}.$$

எனவே

$$\vec{G} = \underset{\delta m \to 0}{\text{எல்}} \; \frac{\delta \vec{F}}{\delta m} = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{r} = G\hat{r}.$$

இதுவே O விலுள்ள, திணிவு m கொண்ட துணிக்கையொன்றாற் P யில் ஆகும் ஈர்ப்புப் புல வலிமை. செறிவும் அத்துடன் விசை $\delta \vec{F}$ உம் உண்மையில் O முகமாகவே அமைந்திருக்கின்றன என்பதைச் சயக்குறி யானது உணர்த்துகிறது ; படம் 6·02 (b) யிற் காண்க ; இங்கு, r குறையும் திசையிலேயே δm மீதுள்ள விசை $\delta \overline{F}$ அளக்கப்பட்டிருக்கிறது.

சடத்தின் சீரான ஏகபரிமாணப் பரம்பலொன்றாலாகும் ஈர்ப்புப் புலம்.— நீளவலகு ஒன்றிற்கு அடர்த்தி μ உடைய சீரான நேர்கோட்டுச் சடப்பரம்ப லொன்றை AB ஆனது, படம் 6·03 (a), குறிக்க.

படம் 6·03. சீரான ஏகபரிமாணச் சடப் பரம்பலொன்றால் ஆகும் ஈர்ப்புப் புலம்.

ஈர்ப்புச் செறிவைக் கணிக்க வேண்டிய புள்ளி P ஆகுக. P யிலுள்ள ஈர்ப்புப் புலத்திற்குச் சடப்பரம்பலின் மூலகம் MN ஆல் அளிக்கப்படும் பங்கைக் கருதுக. $OM = x$ உம் $MN = \delta x$ உம் ஆகுக. அப்பொழுது $MP = r$ எனின், கருதும் பங்கானது

$$\delta G = -\frac{\gamma\mu\,\delta x}{r^2}.$$

$OP = p$; $x = p$ தான் θ, $r = p$ சீக θ ஆயின்

$$\delta G = -\frac{\gamma\mu p \text{ சீக}^2\,\theta\,\delta\theta}{p^2 \text{ சீக}^2\,\theta} = -\frac{\gamma\mu}{p}\,\delta\theta$$

$$= -\gamma\left(\frac{\mu . p\,\delta\theta}{p^2}\right).$$

எனவே மையம் P யும், ஆரை p யும் ஏகபரிமாணச் செறிவு μ வும் கொண்ட வட்டவில் CD யின் மூலகம் mn ஆல் ஆகும் புலமும், P யில் MN ஆல் ஆகும் புலமும் ஒரே பெறுமானமுடையவை. இது கோலின் இத்தகைய எல்லா மூலகங்களிடத்தும் உண்மையானது; எனவே P யிலுள்ள புலமானது ஆரை p யும் ஏகபரிமாணச் செறிவு μ வும் கொண்ட வட்டவில் CD யின் புலத்துக்குச் சமனாகும்.

P யில் கோணம் CPD யின் இருகூறுக்கி PR வழியே, mn ஆல் ஆகும் புலத்தின் கூறு, படம் 6·03(b) யை ஒப்.,

$$-\frac{\gamma\mu}{p}\text{கோசை }\phi\,\delta\phi$$

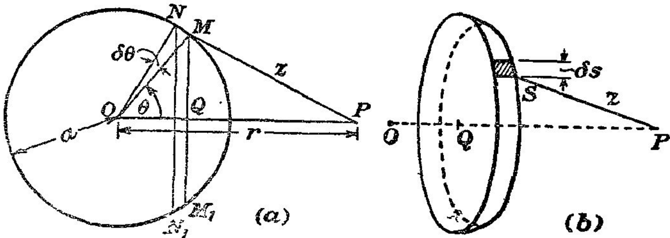
ஆகும்; இங்கு ϕ யானது காட்டியுள்ள கோணம் ஆகும். சமச்சீரையிட்டு இக்கூறுகள் மட்டுமே கவனித்தற்பாலன; இதற்கு இணங்க

$$G = -\frac{\gamma\mu}{p}\int_{-\frac{\beta-\alpha}{2}}^{\frac{\beta-\alpha}{2}}\text{கோசை }\phi\,d\phi$$

$$= -\frac{2\gamma\mu}{p}\text{சைன் }\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha).$$

எனவே, P யிலுள்ள கவர்ச்சி $\vec{A}$ எனின், அதாவது $\vec{A} = -\vec{G}$ எனின், $\vec{A}$ ஆனது பருமன் $\frac{2\gamma\mu}{p}$ சைன் $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ உடையது எனவும், அது P ஊடே கீழ்முகமாக வரைந்துள்ள நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் கோணம் $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ வை) ஆக்குகின்றது எனவும், அதாவது அது கோணம் APB யின் இருகூறுக்கி வழியே தாக்குகிறது படம் 6·03 ஐ ஒப்., எனவும் நாம் அறிகிறோம்.

சீரான சடக்கோள ஓடொன்றால் ஆகும் ஈர்ப்புப் புலம்.—படம் 6·04 (a) யில் ஆரை a கொண்ட கோளவோட்டின் மையம் O வும், O விலிருந்து தூரம் r இல் இருக்கின்றதும் ஈர்ப்புச் செறிவு தேவைப்படுகின்றதுமான புள்ளி P யும் ஆகுக. வரிப்படத் தளத்தில் முறையே M, N, N_1, M_1



படம் 6·04. சீரான கோள ஓடொன்றால் ஆகும் ஈர்ப்புப் புலம்.

என்னும் புள்ளிகளில் ஓட்டின் பரப்பை வெட்டுகின்ற அணித்தாயுள்ள இரு நிலைக்குத்துத் தளங்களுக்கிடையேயுள்ள ஓட்டின் பகுதியைக் கருதுக. அப்பொழுது மூலகவோட்டின் பரப்பளவானது $2\pi a$ சைன் $\theta.\ a\,\delta\theta$ ஆகும்; எனவே அதன் திணிவு $2\pi a^2\sigma$ சைன் $\theta\,\delta\theta$ ஆகும்; இங்கு, ஓட்டுச் சடத்தின் பரப்படர்த்தி σ ஆகும்; ஓட்டுப்புள்ளி ஒவ்வொன்றும் P யிலிருந்து தூரம் $PM = \sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar\text{ கோசை }\theta)}$ வில் இருக்கிறது.

இச் சட வளையத்தின் ஒவ்வொரு மூலகத்தாலு ஆகும் செறிவானது வெவ்வேருன திசையுடையதாயிருப்பதால் P யிலுள்ள செறிவை மதிப் பிடுவதில் உடனடியாக ஈடுபடமுடியாது. S இல் உள்ள அத்தகைய மூல கம் ஒன்றின் நீளம் δs எனின், படம் 6·04(b), அப்பொழுது P யில் அம்மூலகத்தாலாகும் செறிவு

$$-\frac{\gamma . \sigma . a\, \delta\theta .\, \delta s}{PS^2};$$

இதை இருகூறுகளாக, ஒன்று OP வழியேயும் மற்றையது அதற்குச் செங்குத்தாகவும் இருககத் துணிக்கலாம். இனி மேற்படி மூலகததுக்கு எதிரே, அதேவிட்டத்தில் இன்னுமொரு மூலகமும் உளது ; இதனுல் ஆகும் செறிவும் முன்னர்போலவே துணிக்கப்படல் வேண்டும். OP யிறகுச் செங்குத்தான கூறுனது, அதறகு ஒத்ததாக முதல் மூலகம் தரும் கூறை ஈடு செய்யும். எனவே ஈற்றில், OP வழியேயுள்ள கூறுகளை மட்டுமே கருதுதல் வேண்டும். அவ்வொவ்வொன்றும்

$$-\frac{\gamma . \sigma . a\, \delta\theta .\, \delta s}{PS^2} \text{ கோசை } \widehat{SPQ}$$

இற்குச் சமன் ; இங்கு தளம் MM_1 ஆனது OP யை Q என்னும் புள்ளியில் வெட்டுகிறது.

வளையத்தைச் சுற்றி மேற்படி கோவையைத் தொகையிட்டுப் P யில் அம் முழு மூலக வளையத்தால் ஆகும் செறிவு δG கணிக்கப்படுகிறது. கோவை யானது

$$\delta G = -\gamma\sigma \frac{2\pi . a^2 \text{ சைன் } \theta .\, \delta\theta}{a^2 + r^2 - 2ar \text{ கோசை } \theta} \text{ கோசை } \widehat{MPQ}. \; [\because \widehat{MPQ} = \widehat{SPQ}.]$$

$$\therefore\; G = -\,2\pi\gamma\sigma a^2 \int_0^{\pi} \frac{\text{சைன் } \theta\, (r - a \text{ கோசை } \theta)\, d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ கோசை } \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

இக்கோவையைத் தொகையிடும் பொருட்டு

$a^2 + r^2 - 2ar$ கோசை $\theta = z^2$ ஆகுக. அப்பொழுது

ar சைன் $\theta . d\theta = z\, dz$ உம் $2r\,(r - a$ கோசை $\theta) = z^2 - a^2 + r^2$ உம் ஆகும்.

இரு எடுத்துக்காட்டுக்கள் உள : (a) ஓட்டிற்கு வெளியே P இருந்தால் தொகையீட்டு எல்லைகள் $(r-a)$ யும் $(r+a)$ யும் ஆகும்.

$$\therefore\; G = -\frac{2\pi\gamma\sigma a}{2r^2} \int_{r-a}^{r+a} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{z^2}\right) dz$$

$$= -\frac{\pi\gamma\sigma a}{r^2} \left[z - \frac{r^2 - a^2}{z} \right]_{r-a}^{r+a} = -\frac{\pi\gamma\sigma a}{r^2}\,(4a)$$

$$= -\frac{\gamma \,(\text{ஓட்டின் திணிவு})}{r^2}.$$

எனவே கருதிய ஓடானது அதன் முழுத்திணிவும் அதன் மையத்தில் செறிந்துள்ளதுபோல் அதற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியொன்றில் இருக்கும் துணிக்கையைக் கவர்கிறது.

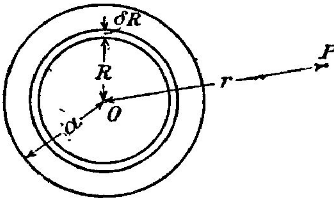
(*b*) ஓட்டிற்கு உள்ளே P இருந்தால் தொகையீட்டு எல்லைகள் $(a-r)$ உம் $(a+r)$ உம் ஆகும். எனவே

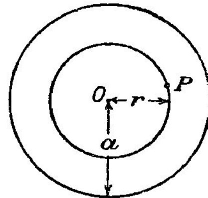
$$G=-\frac{\pi\gamma\sigma a}{r^2}\left[z-\frac{r^2-a^2}{z}\right]_{a-r}^{a+r}=0\;;$$

அதாவது, கோளவோடொன்றினுள் ஈர்ப்புப் புலம் பூச்சியம். [இம்முடிபு எல்லா மூடிய ஓடுகளிடத்தும் உண்மையானது†.]

சீரான கோளத்தால் ஆகும் ஈர்ப்புப் புலம்.—ஆரை a கொண்ட கோளமொன்றின் மையம் O ஆகுக; அதன் சடத்தின் அடர்த்தி ρ ஆகுக. இங்கு இரு எடுத்துக்காட்டுக்களைக் கருதுதல் வேண்டும்.

(*a*) P ஆனது, படம் 6·05 (*a*), கோளத்திற்கு வெளியே உள்ளதும், O விலிருந்து தூரம் r இல் இருப்பதுமான புள்ளியொன்று ஆகுக. கோளமானது ஒருமையமுள்ள ஓடுகளால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது எனக் கருதுக; அவற்





படம் 6·05. சீரான தனிமையாக்கிய கோளமொன்றால் ஆகும் ஈர்ப்புப் புலம்.

றுள் ஒன்று படத்திற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது; அதன் ஆரை R உம், தடிப்பு δR உம் ஆகுக. அப்பொழுது முன்னர் உறுதிப்படுத்தியுள்ள எடுகோளைப் பயன்படுத்தி P இல் இவ்வோட்டாலாகும் ஈர்ப்புச் செறிவு δG எனின்,

$$\delta G=-\gamma\frac{4\pi R^2\rho\,\delta R}{r^2}.$$

$$\therefore\;\; G=-\frac{4\pi\gamma\rho}{r^2}\int_0^a R^2\,dR=-\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi\gamma\rho a^3}{r^2}\;;$$

அதாவது கோளத்தின் முழுத்திணிவும் அதன் மையத்தில் செறிந்திருப்பதுபோல் ஈர்ப்புச் செறிவு ஆற்றுகிறது.

(*b*) கோளத்துக்குள்ளே P இருந்தால், படம் 6·05 (*b*) ஐ ஒப்., O வை மையமாகவும் OP யை ஆரையாகவும் கொண்ட கோளமொன்றை வரைக; $OP=r$ என்க. அப்பொழுது இக்கோளத்துக்கு வெளியேயுள்ள சடப்

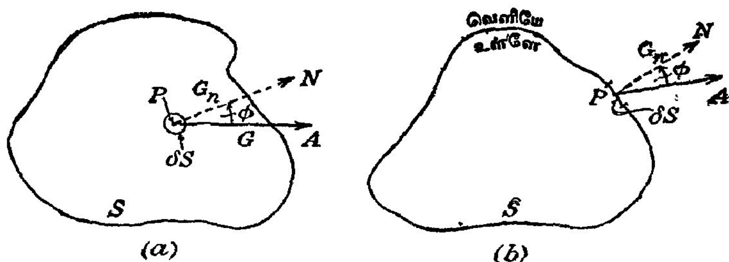
† தொகுதி V, ப. 40 ஐ ஒப்.

பொருளானது P யிலுள்ள செறிவுக்குப் பங்கு ஏதேனும் அளிக்கமாட்டாது ; ஏனெனில் கோளத்திண்மத்தின் இவ்வெளிப்பகுதியானது ஒருமையக் கோளவோடுகளாகப் பிரிக்கப்படுமிடத்து, அவ்வொவ்வொன்றிற்கும் உள்ளே P இருக்கிறது எனக் கொள்க. எனவே P யிலுள்ள செறிவு, ஆரை r கொண்ட கோளமொன்றினுள்ள சடப்பொருளால் மட்டும் ஆகும் ; அதாவது

$$G = -\frac{4}{3}.\frac{\pi\gamma\rho r^3}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho r.$$

[ந.கு. மேற்படி கோவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஆரை a கொண்ட கோளத்தின் மேற்பரப்பிலுள்ள புள்ளிகளில் புல வலிமைக்கு அதே பெறுமானத்தைத் தருகின்றன. இச்சமம் எல்லா எடுத்துக்காட்டுக்களிலும் உண்மையன்று ; கோளவோடொன்றின் பரப்பிற்கு அணித்தாயுள்ள புள்ளிகளில் உள், வெளிப புலங்களைக் கருதுக.]

ஈர்ப்புச் செறிவுப் பாயம்.—P ஆனது, படம் 6·06(a), ஈர்ப்புப் புலமொன்றிலுள்ள புள்ளியொன்று எனக; அப்புள்ளியிலுள்ள ஈர்ப்புச் செறிவு G ஆனது திசை PA வழியே ஆற்றுக. P ஊடாக மூடிய பரப்பு ஏதேனுமொன்றை வரைந்து,† P யைச் சுற்றியுள்ள அப்பரப்பின் சிறு மூலகமொன்றைக் கருதுக. P ஊடாக, δS இற்குச் செங்குத்தாக PN ஐ வரைக. அப்பொழுது, வெளிமுகச் செவ்வன் வழியே G யின் கூறு G_n என்பது G கோசை ϕ ஆகும் ; இங்கு ϕ என்பது $\widehat{APN}$ ஆகும், படம் 6·06(b) யிற் காண்க.



படம் 6.06. ஈர்ப்புச் செறிவுப் பாயம்.

$G_n\,\delta S$ அல்லது (G கோசை ϕ) δS என்னும் கணியம் பரப்பு δS இனை குறுக்கேயுள்ள **ஈர்ப்புச் செறிவுப் பாயம்** என அழைக்கப்படுகிறது. அதேபோல்

$$\int G_n\, dS \text{ அல்லது } \int G \text{ கோசை } \phi\, dS$$

என்பது அப்பரப்பின் குறுக்கேயுள்ள ஈர்ப்புச் செறிவுப் பாயம் ஆகும் ; இங்கு தொகையீடானது பரப்பு S முற்றிலும் கணிக்கப்படுகிறது.

† பரப்பானது முடிவுளளதாகவும் அதன ஒவ்வொரு புளளியிலும் தனிததன்மையுள்ள வெளிமுகமான செவவன உடையதாகவும் இருத்தல வேண்டும்; மேலும், அது ஓராயமாயிருத்தலாகாது.

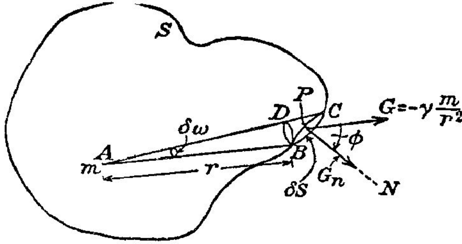
காவிக் குறிப்பீட்டில் பாயமானது $\int \vec{G}.\hat{n}\, dS$ ஆகும் ; இங்கு $\hat{n}$ எனபது δS இல் வெளிமுகமாக வரைந்த செவ்வன் வழியே உள்ள அலகுக் காவியொன்றுகும்.

கோசின் தேற்றம்.—**தன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தனித்தன்மையுள்ள வெளிமுகமாக வரைந்த செவ்வனை உடைய, மூடிய பரப்பொன்றின் குறுக்கேயுள்ள ஈர்ப்புச் செறிவுப் பாய மானது அப்பரப்பால் சூழப்பட்டிருக்கின்ற முழுத்திணிவின் $-4\pi\gamma$ மடங்காகும் என இத்தேற்றம் கூறுகிறது ; அதாவது**

$$\int G_n\, dS = -4\pi\gamma\, \Sigma(m) \text{ அல்லது } \int \vec{G}.\hat{n}\, dS = -4\pi\gamma\, \Sigma(m)\,;$$

இங்கு $\Sigma(m)$, மூடிய பரப்பினுள் இருக்கின்ற முழுத் திணிவையும் குறிக்கிறது.

இதனை நிறுவும் பொருட்டு,† திணிவு m கொண்ட துணிக்கையொன்று A யில் இருக்கின்றதென்க, படம் 6·07 ; S என்பது A யைச் சூழ்ந்திருக்கும் யாதுமொரு‡ மூடிய பரப்பு ஆகுக. மேற்படி பரப்பிலே, ஈர்ப்புச் செறிவு



படம் 6·07. ஈர்ப்புப் புலத்திற்குக் கோசின் தேற்றம்.

G உள்ள புள்ளி P யைச் சுற்றியிருக்கிற சிறு பரப்பு δS என்பது BC ஆகுக. A யிலிருந்து P யின் தூரம் r ஆயின், அப்பொழுது

$$G = -\gamma.\frac{m}{r^2};$$

$$G_n = -\gamma.\frac{m}{r^2} \text{ கோசை } \phi.$$

இங்கு G யின் தாக்கக் கோட்டுக்கும் P யில் பரப்பின் செவ்வனுக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் ϕ ஆகும். [G யின் தாக்கக் கோடானது PA வழியே உள்ளது.] A யை மையமாகவும் AB யை ஆரையாகவும் கொண்டு, கூம்பு ABCயை BD வழியே வெட்டுமாறு, கோளமொன்றை வரைக. அப்பொழுது

† எளிய பரபபுவகை மட்டுமே இங்கு கருதப்படுகிறது. மினனியல தோற்றபபாடுகள் தொடாபாக இத்தேறறமும் அதன பிரயோகங்களும் தொகுதி V ப. 35 இல விரித்துரைக் கப்பட்டிருக்கின்றன.

‡ பரப்பானது முடிவுள்ளதாகவும் அதன ஒவ்வொரு புள்ளியிலும தனித்தனமையுள்ள வெளிமுகமாக வரைந்த செவ்வன உடையதாயும் இருத்தல் வேண்டும ; மேலும் அது ஓராய மாய் இருத்தலாகாது.

$$BC \text{ கோசை } \phi = BD = r^2\,\delta\omega\,;$$

இங்கு $\delta\omega$ என்பது மூலகக்கூம்பு ABC யின் திண்மக் கோணம்.

$$\therefore \delta S \text{ இன குறுக்கேயுள்ள ஈர்ப்புச் செறிவுப் பாயம்} = -\gamma.\frac{m}{r^2}.\text{ கோசை } \phi.BC$$

$$= -\gamma.\frac{m}{r^2}.BD$$

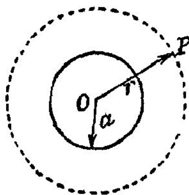
$$= -\gamma.m.\delta\omega.$$

$$\therefore S \text{ இன் குறுக்கேயுள்ள ஈர்ப்புச் செறிவுப் பாயம்} = -\gamma m\int d\omega = -4\pi\gamma m.$$

இவ்வாறு மூடிய பரப்பொன்றினுள் இருக்கின்ற சிறு சடத்துணிக்கை யொன்றிற்குத் தேற்றமானது நிறுவப்பட்டுள்ளது. எனவே இத்தேற்ற மானது சடத்தொகுதியொன்றின் ஒவ்வொரு துணிக்கைக்கும் பிரயோ கப்படுகிறபடியால் அது பொதுவாக உண்மையானது ; அதாவது,

$$\int G_n\,dS = -4\pi\gamma\,\Sigma(m) \text{ அல்லது } \int \vec{G}.\,\hat{n}\,dS = -4\pi\gamma\,\Sigma(m).$$

கோசின் தேற்றத்தின் எளிய பிரயோகங்கள்.—(*a*) இத்தேற்றத்தின் பிரயோகமொன்றை எடுத்துக்காட்டுமுகமாகத் தனிமையாக்கிய சீரான கோளமொன்றால் அதற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியொன்றில் ஆகும் புலத்தைக் கவனிப்போம். ஆரை a யும் திணிவு m உம் உடைய அத்தகைய கோளமொன்றின் மையம் O ஆகுக, படம் 6·08. O விலிருந்து தூரம் r $(r>a)$ இல் இருக்கின்ற புள்ளி P என்பதில் ஈர்ப்புச் செறிவைக் காணும்பொருட்டு, O வை மையமாகக் கொண்டு ஆரை r கொண்ட கோளமொனறை வரைக. அப்பொழுது சமச்சீரையிட்டு ஈர்ப்புச் செறிவானது அக்கோளத்தின் பரப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரே பெறு மானத்தைக் கொண்டிருக்கும்; அத்துடன் எங்கும் அப்பரப்பிற்குச் செவ்வனும் அமைந்திருக்கும் ; அப்பெறுமானம G என்க. எனவே வரைவிலக் கணப்படி அக்கோளத்தின் பரப்பின் குறுக்கேயுள்ள ஈர்ப்புச் செறிவுப் பாயமானது $G(4\pi r^2)$ ஆகும்.



படம் 6·08. தனிமை யாக்கிய சீரான கோள மொன்றால் ஆகும் ஈர்ப்புச் செறிவு.

ஆனல் கோசின் தேற்றப்படி அது $-4\pi\gamma m$ ஆகும். எனவே இவ்விரு கோவைகளையும் சமன்படுத்த, முன்னர் நிறுவியுள்ளவாறு

$$G = -\gamma\frac{m}{r^2}.$$

[r அதிகரிக்கும் திசையிலேயே இது G யின் பெறுமானம் என்பது குறித்தற்பாலது. புலமானது உண்மையில் O முகமாக அமைந்திருக் கின்றது என்பதைச் சயக்குறி உணர்த்துகிறது.]

கோளத்தினுள்ளே, அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் r இல் இருக்கிற புள்ளியொன்றிலுள்ள புல வலிமையானது ஆரை r கொண்ட கோளத்தில் அடங்கியிருக்கின்ற சடப்பொருளால் மட்டுமே தீர்மானிக்கப்படுகிறது. அக்கோளத்தின் பரப்பிற்குக் கோசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்க

$$4\pi r^2 G = -4\pi\gamma\left(\tfrac{4}{3}\pi\rho r^3\right).$$

இங்கு ρ, கோளத்துள் உள்ள சடத்தின் அடர்த்தியாகும்.

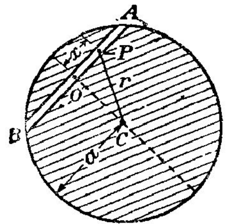
$$\therefore\ G = -\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho r \text{ அல்லது } \overrightarrow{G} = -\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho r\hat{r};$$

அதாவது சீரான திண்மக் கோளமொன்றினுள் இருக்கின்ற புள்ளியொன்றிலுளள புல வலிமையானது கோளத்து மையத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரத்துடன் நேராய் மாறுகிறது.

கோளத்தின் பரப்பில் $G_{r=a} = -\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho a$; இதுவும், பரப்புப் புள்ளியானது கோளத்துக்கு வெளியேயுள்ளது எனக் கருதிக் கிடைக்கின்ற புலமும் ஒரே பெறுமானமுடையவை; இதன் கருத்து யாதெனில், பரப்பில் புல வலிமையானது தொடர்ச்சியுடையது என்பதே.

(*b*) கோளவோடொன்றினிடத்து ஓட்டுக்குப் புறத்தேயுள்ள புள்ளிகளில், ஓட்டின் திணிவு அதன் மையத்திற் செறிநதிருக்கிறதுபோல் அதே புலம் உள்ளது என உடனடியாகக் காணப்படுகிறது; அன்றியும் ஓட்டுக்குள்ளே இருக்கின்ற புள்ளியொனறில் புலம் பூச்சியம் எனக் கோசின் தேற்றம் உடனடியாகக் காட்டுகிறது. எனவே ஓட்டில், புல வலிமையில் முடிவுள்ள தொடர்ச்சியின்மை உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு.—சீரான அடாததியுடைய ஒரு கோளம் எனக் கருதககூடிய புவியினூடாக அழுத்தமான, நேரான குடைபாதையொன்று உளது எனக் கொளக; புவியின ஆரை 6400 கிமீ. எனவுங் கொளக. தொடக்கத்தில் ஓய்வாயிருககினற துணிக்கையொனறு குடைபாதையின ஒரு முனையிலிருந்து அதன மறு முனைககுச் செல்லுதற்கான நேரத்தைப் பெறுக. இநநேரமானது குடைபாதையின் திசையைச் சாராது எனக் காட்டுக.



படம் 6·09. தனிமையாக்கிய சீரான கோளமொன்றுல் ஆகும் ஈர்ப்புச் செறிவு.

படம் 6·09 இல C, புவியின மையமும், AB, குடைபாதையும ஆகும. AB இறகுச செஙகுத்தாக C ஊடே செலலுகினற விடடமானது AB யை O வில் வெடடுக. நேரம் t யில துணிக்கை P யில இருகக; இஙகு, $CP = r$; $OP = x$. அப்பொழுது துணிககையில அலகுத்திணிவு ஒவவொன்றின மீதுமுள்ள விசை $-\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho r$ ஆகும்; இஙகு γ, ρ எனபன அவறறின வழக்கமான பொருள் உடையன; விசையானது CP வழியே திசைகொண்டிருககிறது. PO வழியே அலகுத்திணிவொனறின் மீதுள்ள விசை $\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho r\left(\dfrac{x}{r}\right) = \tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho x$. எனவே துணிக்கையின இயக்கம்

$$\ddot{x} + \tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho x = 0$$

எனனுஞ் சமன்பாட்டால் எடுததுக காட்டப்படுகிறது.

இயககம எளிய இசையானது ; அதன ஆவர்த்தன காலம்

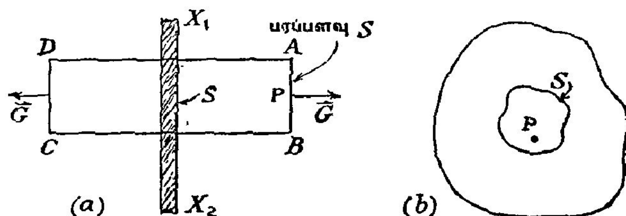
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\gamma\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}.$$

இது கோளததின பருமனையும் குடைபாதையின நீளததையும் சாரமாட்டாது.

$g = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a$ ஆதலின $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ ஆகும்.

தேவைபபடுகினற நேரம $\frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{64\times10^7}{980}}$ செக. $\doteq$ 42 நிமி.

சீரான முடிவில்லாத சடத் தட்டொன்றுல் ஆகும் ஈர்ப்புப் புலம்.—படம 6·10 (a) யில் X_1X_2 எனபது பரப்பலகொன்றிற்கு மாறு அடர்த்தி σ கொண்ட முடிவில்லாத சடத்தட்டொன்றின பாகமொன்றுருக. புலம் தேவைப் படுகின்ற புள்ளி P ஆகுக. உகந்த கோசின் பரப்பொன்றைப் பெறும் பொருட்டுத் தகட்டில் பரப்பு S ஐக் கருதுக, படம 6·10 (b) யிற



படம் 6·10. சீரான முடிவில்லாத சடத் தகடொன்றுல் ஆகும் ஈர்ப்புப் புலம்.

காண்க ; தகட்டில் P யின் எறியமானது S இன் எல்லைக்குள் இருத்தல் வேண்டும். S இன் எல்லையிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தட்டுக்குச செவ்வன்கள் வரைக ; தகட்டின மையத் தளத்திலிருந்து முடிவான சம தூரங்களிலுள்ள தளங்கள் AB, CD என்பவற்றுல மேறபடி செஙகுத்துக்கள் குறுக்கே வெட்டப்படட்டும; AB ஆனது P ஊாடே செல்லுகினறது. அப்பொழுது AB, CD என்பவறறைத் தவிர்த்துக் கோசின் பரபபின் மறறெல்லாப பாகஙகளிலும் பாயம் பூச்சியம் ஆகும். AB அல்லது CD யின் எந்தப புள்ளியிலும் வெளிமுகமான புலச் செறிவு $\vec{G}$ ஆகுக. அப்பொழுது, கருதப்படுகின்ற பரப்பின குறுக்கேயுள்ள ஈர்ப்புச் செறிவுப் பாயமானது

$$(\vec{G}.\hat{n})\,S + (\vec{G}.\hat{n})\,S = 2(\vec{G}.\hat{n})\,S.$$

கோசின் தேறறத்தின்படி இது $-4\pi\gamma(\sigma S)$.

$$\therefore\ \vec{G}.\hat{n} = -2\pi\gamma\sigma.$$

எனவே $\vec{G}$ உம், $\hat{n}$ உம் முரண்சமாந்தரமானவை ; புல வலிமை $2\pi\gamma\sigma$ ஆகும். பிந்தியது தகட்டிலிருந்து P யின் தூரத்தைச் சாராது.

[ந.கு. நிலைமின்னியலிலே இதற்கு ஒத்த எடுத்துக்காட்டில், கோசின் பரப்பானது மின்னேற்றிய உலோகத்தட்டிறகுள் முடிவடையுமாறு செய்யப் படுகிறது ; அங்கு புலம் பூச்சியம் ; இவ்வெடுத்துக்காட்டில் அதைப் பயன்படும் வகையில் செய்யவியலாது.]

ஈர்ப்பழுத்தம்.—ஈர்ப்புப் புலமொன்றிலிருக்கின்ற புள்ளியொன்றிலுள்ள ஈர்ப்பழுத்தமானது, முடிவிலியிலிருந்து கருதப்படும் புள்ளிவரை திணிவலகொன்றை எடுத்துச் செல்லும்பொழுது புலத்திற்கு எதிராகச் செய்யப்படும் வேலை என வரைவிலக்கணத்தாற் கூறப்படுகிறது.

எனவே முடிவிலியிலிருந்து குறிப்பிட்ட புள்ளிவரை δm என்னும் சிறுதிணிவொன்றை எடுத்துச் செல்லும்பொழுது புலத்திற்கு எதிராகச் செய்யப்படும் வேலை $\delta \mathrm{W}$ எனின், அப்புள்ளியிலுள்ள ஈர்ப்பழுத்தம்

$$\mathrm{U} = \underset{\delta m \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta \mathrm{W}}{\delta m} = \frac{d\mathrm{W}}{dm}.$$

மாற்றாக, ஈர்ப்பழுத்தத்திலுள்ள வேறுபாட்டிற்குப் பின்வருமாறும் வரைவிலக்கணம் கூறலாம். P யும் Q வும் ஈர்ப்புப் புலமொன்றிலுள்ள இரு புள்ளிகளும், P யிலிருந்து Q வரை திணிவு δm கொண்ட சிறுதுணிக்கையொன்றை எடுத்துச் செல்லும்பொழுது புலத்திற்கு எதிராகச் செய்யப்படும் வேலை $\delta \mathrm{W}$ வும் ஆயின்

$$\text{எல்} \frac{\delta \mathrm{W}}{\delta m} = \frac{d\mathrm{W}}{dm} = d\mathrm{U}\ ;$$

மேலும், P யிலிருந்து Q விற்குச் செல்லும்பொழுது அழுத்தவுயர்வு $\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} d\mathrm{U}$ ஆகும்.

வரைவிலக்கணம்.—ஈர்ப்புப் புலமொன்றிலிருக்கின்ற பரப்பொன்றின் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஈர்ப்பழுத்தமானது அதே பெறுமானம் உடையதாய் அமைந்திருக்குமாயின் அப்பரப்பானது சமவழுத்தப் பரப்பு எனப்படுகிறது.

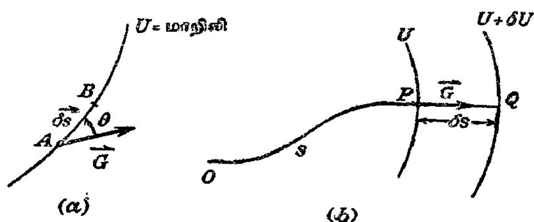
தேற்றம்.—புள்ளியொன்றிலுள்ள புல வலிமையானது அப்புள்ளி ஊடாகச் செல்லுகின்ற சமவழுத்தப் பரப்பிற்குச் செவ்வனாகும்.

சமவழுத்தப் பரபபு U விலே, A யும் B யும் ஆயிடையீடு δs ஐ உடைய இரு புள்ளிகள ஆகுக ; A யிற புல வலிமை $\overrightarrow{\mathrm{G}}$ எனவும், இககாவியானது $\overrightarrow{\delta s}$ உடன கோணம் θ வை ஆக்குகின்றது எனவும கொளக, படம 6·11 (*a*). $\overrightarrow{\delta s}$ வழியே $\overrightarrow{\mathrm{G}}$ இன கூறுனது பெறுமானம் G கோசை θ உடையதாகும ; எனவே, A யிலிருநது B வரை செல்லும்பொழுது புலத்திற்கு எதிராக அலகுததிணிவு ஒனறினிடததுச செயயபபடும் வேலையானது

$$-\mathrm{G}\ \text{கோசை}\ \theta\, \delta \mathrm{S}$$

ஆகும ; வேலை புலத்தாற செய்யபபடுகினறதாதலால் சயககுறி தேவைபபடுகிறது. A யும் B யும் அதே சமவழுத்தப பரபபொனறுமீது இருககினறன ஆதலின் இவவேலை கண்டிப்பாய்ப் பூச்சியம் ஆகும. எனவே, $\overrightarrow{\mathrm{G}}$ பூசசியம இலலாதபோது கோசை θ பூச்சியம ஆதல வேண்டும். எனவே $\theta = \frac{\pi}{2}$; அதாவது, புலமானது கருதபபடும் புள்ளியில் சமவழுத்தப பரப்பிறகுச் செவவனாகும்.

ஈர்ப்பழுத்தத்திற்கும் புல வலிமைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு பற்றி.— படம் 6·11 (b) யில், U வும் U+δU வும் இரு அடுத்துள்ள சமவழுத்தப பரப்புகள் ஆகுக. அப்பொழுது P, பரப்பு U விலுள்ள புள்ளியொன்று ஆயின், P யிலுள்ள புல வலிமை $\overrightarrow{G}$ என்பது பரப்பிற்குப் P யிலுள்ள செவ்வன் வழியே அமைந்திருக்கும். இச்செவ்வனுனது பரப்பு U+δU வை Q வில் வெட்டுக. அப்பொழுது P யிலிருந்து Q வரை δm திணிவு கொண்ட சிறு துணிக்கையொன்றை எடுத்துச் செல்லும்பொழுது புலத் திற்கு எதிராக அலகுத்திணிவொன்றினிடத்துச் செய்யப்படும் வேலையானது $-G(PQ) = -G\,\delta s$ ஆகும் ; இங்கு, $PQ = \delta s$ உம், s, $s+\delta s$ என்பவை முறையே ஏதேனுமொரு நிலைத்த உற்பத்தி O விலிருந்து P, Q என்பவற றின் தூரங்களும் ஆகும்.



படம் 6·11. ஈர்ப்பழுத்தமும் புல வலிமையும்.

எனவே $\delta U = -G\,\delta s$,

அல்லது
$$G = -\text{எல்}\,\frac{\delta U}{\delta s} = -\frac{dU}{ds}.$$

காவிக் குறிப்பீட்டில் இது
$$\overrightarrow{G} = -\hat{s}\,\frac{dU}{ds}\,;$$

இங்கு பொருத்தமான அலகுக்காவி $\hat{s}$.

சடத்துணிக்கையொன்றுலான ஈர்ப்பழுத்தம்.— படம் 6·12 (a) யில், O வில் இருக்கின்ற துணிக்கையொன்றின் திணிவு m என்க. மேற்படி துணிக்கையால் ஆகும் ஈர்ப்பழுத்தத்தைக் காணவேண்டிய புள்ளி A என்க. $OA = a$ என்க. இனி O விலிருந்து தூரம் r இலேயுள்ள புள்ளி P யில், r இன் வளர்திசையில், உள்ள புல வலிமையானது
$$G = -\gamma\frac{m}{r^2} = -\frac{dU}{dr}$$
என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு கருதப்படும் புள்ளிக்குரிய ஈர்ப்பழுத்தம் U ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டைத் தொகையிட்டால்
$$U = -\gamma\frac{m}{r} + K.$$

இங்கு K ஆனது எதேச்சையான மாறிலியாகும். முடிவிலியில் அழுத்தம் பூச்சியம் எனக் கொள்வது வழக்காதலின்

$$U_{r\to\infty} = -\gamma\frac{m}{\infty} + K = 0,$$

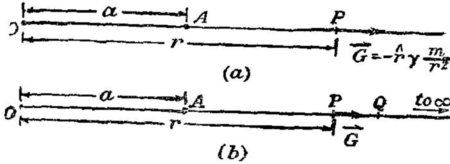
அதாவது $$K = 0.$$

$$\therefore\ U = -\gamma\frac{m}{r}.$$

OA$=a$, O விலிருந்து தூரம் a யிலுள்ள புள்ளி A யில் அழுத்தம் தேவைப்படின்

$$[U]_{r=a} = -\gamma\,\frac{m}{a}.$$

மாற்றுமுறையாக இச்சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு பெறலாம். படம் 6·12 (b) யில், Q ஆனது O விலிருந்து தூரம் $r+\delta r$ இலுள்ள புள்ளி



படம் 6·12. சடத் துணிக்கையொன்றுலான ஈர்ப்பழுத்தம்.

யொன்றுகுக ; δm ஆனது முடிவிலியிலிருந்து அப்புள்ளிவரை கொண்டு வரப்படுகிறது எனக்கொள்க ; அதற்கான பாதையானது Q விலிருந்து P முகமாகவும், OP யை ஒரு பாகமாகக்கொண்ட நேர்கோடு வழியேயும் இருத்தல் வேண்டும். P யிலுள்ள புல வலிமை $\vec{G}$ என்க. r அதிகரிக்கும் திசையில் ஆற்றுங்கால் அது நேர் எனக்கொள்ளப்படும். PQ $=\delta r$ எனின், Q விலிருந்து P வரை செல்லும்பொழுது புலத்துக்கு எதிராக அலகுத் திணிவொன்றினிடத்துச் செய்யப்படும் வேலையானது, QP$= -\delta r$ ஆதலின்,

$$G\times(QP) = -G\,\delta r.$$

இது δU ஆகும்.

$$\therefore\ \delta U = -G\,\delta r.$$

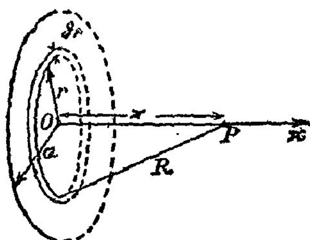
ஆனால் $$G = -\frac{\gamma m}{r^2}.$$

எனவே $$\delta U = \frac{\gamma m}{r^2}\delta r.$$

$$\therefore\ U = \int_{\infty}^{a}\frac{\gamma m}{r^2}dr = -\frac{\gamma m}{a}.$$

இனி P யிலிருந்து வேறொரு பாதையிற் சென்று முடிவிலிக்கு மீண்டால், புலத்தால் இதற்குச் சமனான வேலையைச் செய்தாதல் வேண்டும். இல்லாவிடில், அதன் பாகம் ஒரு முடிவிலியில் இருக்கின்ற மூடிய பாதையொன்று வழியே சிறு துணிக்கையொன்றை எடுத்துச் சென்றால் சக்தி நயத்தையோ நட்டத்தையோ அனுபவித்தல் வேண்டும். எனவே, வேலையை மதிப்பிடும் பொருட்டு O வும் P யும் ஊடே நேர்கோட்டுப் பாதையே பயன்படுத்தப்பட்ட போதிலும் P யிற்குச் சிறு துணிக்கையைக் கொண்டுவரும் பொருட்டுப் பயன் படுத்தப்படும் பாதையைப் P யிலுள்ள அழுத்தஞ் சாராது எனக்கொள்க.

சீரான வட்டத் தட்டொன்றின் அச்சிலுள்ள புள்ளியொன்றில் ஈர்ப்பழுத்தம்.—படம் 6.13 இல், O ஆனது, ஆரை a யும் பரப்பலகொன்றிற்குத் திணிவு σ வும் கொண்ட சீரான வட்டத் தட்டொன்றின் மையம் என்க. O ஊடாகவும் தட்டின் தளத்துக்குச் செவ்வனாகவுமுள்ள அச்சு Ox இல் P ஒரு புள்ளி என்க. உள்ளாரை, வெளியாரை முறையே r, $r+\delta r$ ஆகவுடைய வட்டவளையத்துள் இருக்கின்ற சடப்பொருளானது P யிலுள்ள அழுத்தத்துக்குக் கொடுக்கும் பங்கைக் கருதுக. இவ்வளையத்தின் மூலகங்கள் யாவும் P யிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் இருக்கின்றபடியால், அத்தூரத்தை R எனக் கொண்டு,



படம் 6·13. சீரான வட்டத் தட்டொன்றின் அச்சிலுள்ள புள்ளியொன்றில் ஈர்ப்பழுத்தம்.

$$\delta U = -\gamma . \frac{2\pi r \sigma \, \delta r}{R}.$$

$$\therefore \; U = -2\pi\gamma\sigma \int_0^a \frac{r\,dr}{(r^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -2\pi\gamma\sigma[(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - x].$$

$$\therefore \; G = -\frac{\partial U}{\partial x} = -2\pi\gamma\sigma\left[1 - \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

$a \to \infty$ ஆகுமிடத்து, $\qquad G_{a\to\infty} = -2\pi\gamma\sigma,$

அதாவது, தட்டிலிருந்து முடிவுள்ள தூரங்களிற் புலம் மாறாமல் இருக்கும்; ப. 244 ஐயும் பார்க்க.

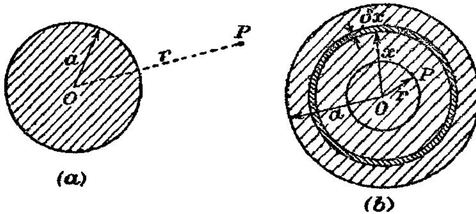
கோள ஓடொன்றுலாகும் ஈர்ப்பழுத்தம் பற்றி.—சடக் கோளவோடொன்றிற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளிகளில், ஓட்டின் முழுத்திணிவு m உம் அவ்வோட்டின் மையத்திலேயே செறிந்திருக்கிறது போல், ஈர்ப்புப் புலம் அமைகிறபடியால், வெளிப்புள்ளிகளில் அத்தகைய ஓடொன்றுல் ஆகும் அழுத்தம் $-\gamma\frac{m}{r}$ ஆல் தரப்படுகிறது; இங்கு r, ஓட்டின் மையத்திலிருந்து புள்ளியின் தூரம் ஆகும்.

ஓட்டுக்குள்ளே புலம் பூச்சியம் ஆகும் ; அதாவது அழுத்தம் மாறிலி ஆகும் ; மேலும் அழுத்தமானது கண்டிப்பாய்த் தொடர் சார்பொன்று ஆதலின், ஓட்டினுள் இருக்கின்ற அழுத்தமானது அதன் பரப்பிலுள்ளதற்குச் சமனுக இருத்தல் வேண்டும் ; அதாவது,

$$U_{\text{உள்}} = -\gamma . \frac{m}{a},$$

இங்கு a ஓட்டின் ஆரை.

தனிமையாக்கிய சீரான கோளமொன்ருலாகும் ஈர்ப்பழுத்தம் பற்றி.— படம் 6·14 இல், ஆரை a யும் திணிவு m உம் உடைய சீரான கோள மொன்றின் மையம் O ஆகுக ; அழுத்தம் தேவைப்படுகின்ற புள்ளி P என்க. இரு நிலைமைகள் உள.



படம் 6·14. தனிமையாக்கிய சீரான கோளமொன்ருல் ஆகும் ஈர்ப்பழுத்தம்.

(a) $r > a$ என்றவாறு, P ஆனது, கோளத்திற்கு வெளியே இருகக ; இங்கு $r = \text{OP}$. அப்பொழுது கோளத்தின் திணிவு O வில் செறிந்திருககிறது எனக் கருத முடிகின்ற படியால்

$$U_{r \geqslant a} = -\gamma . \frac{m}{r}.$$

மேலும்

$$U_{r=a} = -\gamma . \frac{m}{a},$$

$$G_{r=a} = \left[-\frac{dU}{dr} \right]_{r=a} = \left[-\frac{d}{dr}\left(-\frac{\gamma m}{r} \right) \right]_{r=a} = \left[-\frac{\gamma m}{r^2} \right]_{r=a} = -\frac{\gamma m}{a^2} \text{ உம்}$$

ஆகும்.

(b) $r < a$ என்றவாறு, P ஆனது கோளத்துள்ளே இருக்க, படம் 6·14 (b). அப்பொழுது P யிலுள்ள அழுத்தமானது ஆரை r கொண்ட கோளத்துள்ளே இருக்கின்ற சடப்பொருளாலும் அதறகு வெளியேயுள்ள தாலும் ஆகின்றது. முழு அழுத்தத்தின் இப்பாகங்கள் முறையே U_1, U_2 என்பவற்றுல் குறிக்கப்படுக. இனி ஆரை r கொண்ட கோளமொன்றின் திணிவு $\frac{4}{3}\pi\rho r^3$ ஆகும் ; எனவே கோளப் பரப்புப் புள்ளி P யில் அழுத்தம்,

$$U_1 = -\frac{4}{3} . \frac{\pi\gamma\rho r^3}{r} = -\frac{4}{3} . \pi\gamma\rho r^2 .$$

U_2 ஐக் கணிக்கும்பொருட்டு முழுக்கோளத்துக்கும் உரிய, ஆனால் P இடக்கிற கோளத்துக்கு வெளியேயுள்ள, பகுதியை ஒருமையமுள்ள ஓடுகளாகப் பிரிப்போமாக ; இவற்றுள் ஒன்று படம் 6·14 (*b*) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. அதன் ஆரை x உம் தடிப்பு δx உம் ஆகுக. அப்பொழுது ஓடொன்றினுள்ளேயுள்ள அழுத்தம் ஒரு மாறிலியும் அது பரப்பிலுள்ள அழுத்தத்திற்குச் சமனும் ஆதலின், P யில் இவ்வோடாலாகும் அழுத்தமும் ஓட்டுக்குச் சற்று வெளியேயுள்ள புள்ளியின அழுத்தமும் ஒரே பெறுமான முடையவை. எனவே

$$\delta U_2 = -\frac{4\pi\gamma x^2\rho\,\delta x}{x} = -4\pi\gamma\rho x\,\delta x.$$

இதிலிருந்து

$$U_2 = -4\pi\gamma\rho\int_r^a x\,dx = -2\pi\gamma\rho(a^2-r^2).$$

எனவே, அழுத்தம் எண்ணிக் கணியமொனறுதலின், கூட்டலால்

$$U_{r\leqslant a} = U_1 + U_2 = -\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho[r^2 + \tfrac{3}{2}(a^2-r^2)]$$

$$= -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^3\left[\frac{3}{2a}-\frac{r^2}{2a^3}\right] = -\gamma m\left[\frac{3}{2a}-\frac{r^2}{2a^3}\right].$$

வகையிட, திணமக் கோளத்துள் இருக்கின்ற புலத்திற்கு

$$G_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho r = -\frac{\gamma m}{a^3}r \qquad \text{எனவும்}$$

$$G_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0 \qquad \text{எனவும்}$$

காண்கிறோம் ; எனவே புலமானது முற்றிலும் ஓர் ஆரைப் புலமாகும்.

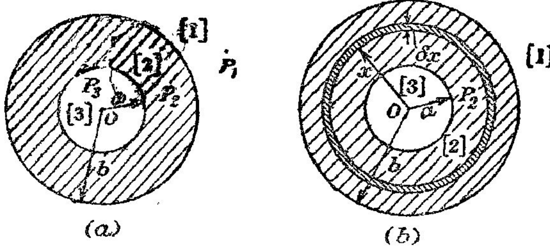
மேலும் கோளத்தின் மையத்திலுள்ள அழுத்தமும் அதன் பரப்புப் புள்ளியொன்றிலுள்ளதும் 3 : 2 என்னும் விகிதமாக இருக்கின்றன எனபதைக் குறித்துக்கொள்ளலாம் ; அவற்றின் பெறுமானங்கள் முறையே $-\dfrac{3\gamma m}{2a}$ உம் $-\dfrac{\gamma m}{a}$ உம் ஆகும்.

சீரான தடித்த கோளவோடொன்றுலாகும் ஈர்ப்பழுத்தம் பற்றி.—படம் 6·15 (*a*) யில், O என்பது அடர்த்தி ρ கொண்ட சடத்தாலான, சீரான, தடித்த ஓடொன்றின் மையம் ஆகுக ; a யும் b யும் $(a<b)$ காட்டியுள்ள வாறு ஓட்டுப்பரப்புக்களின் ஆரைகள் ஆகுக. அப்பொழுது ஓட்டின் திணிவு

$$m = \tfrac{4}{3}\pi\rho(b^3-a^3).$$

காட்டியுள்ள மூன்று பகுதிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அழுத்தத்தைக் கணித்தல் வேண்டும். O விலிருந்து கருதப்படும் புள்ளியின் தூரம் r ஆகுக.

(*a*) $b \leqslant r$. இப்பகுதியைப் பொறுத்தமட்டில் தடித்த ஓடானது ஒருமைய மான மூலக ஓடுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொண்டால் அவ்வொவ் வொன்றும், எனவே முழு ஓடும், அதனது திணிவு O வில் செறிந்திருக்கிறது போலே தொழிற்படுகிறதாதலால், இப்பகுதியிலுள்ள ஈர்ப்பழுத்தம் ஆனது



படம் 6·15. சீரான தடித்த கோளவோடொன்றுலாகும் ஈர்ப்பழுத்தம.

$$U_{b \leqslant r} = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho(b^3 - a^3)\frac{1}{r} = -\gamma\frac{m}{r}.$$

(*b*) $a \leqslant r \leqslant b$. இப்பகுதியில் $OP_2 = r$ ஆகுமாறு P_2 ஒரு புள்ளி ஆகும் ; P_2 இலுள்ள ஈர்ப்பழுத்தம் (*a*) ஆரைகள் a யும் r உம் கொண்ட ஓட்டிலுள்ள சடப் பொருளாலும் (*b*) ஆரைகள் r உம் b யும் கொண்ட ஓட்டிலுள்ள சடப் பொருளாலும் ஆனது. இவ்வழுத்தங்களை முறையே U_1, U_2 என்பவற்றல் குறிப்போமாயின், தடித்த ஓட்டின் இப்பகுதிக்கு வெளியே P_2 உள்ளதாத லால்,

$$U_1 = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho.\frac{r^3 - a^3}{r}.$$

U_2, அதாவது P_2 இலுள்ள அழுத்தத்திற்கு $r = r$, $r = b$ என்பவற்றல் வரையறுக்கப்பட்ட ஓட்டிலுள்ள சடப்பொருள் தரும் பங்கைக் கணிக்கும் பொருட்டு ஆரைகள் x, $x + \delta x$ என்பவற்றல் வரையறுக்கப்பட்ட ஓட்டி லிருந்து கிடைக்கும் பங்கைக் கருதுவோம் ; இங்கு $r \leqslant x$, படம் 6·15 (*b*) யை ஒப். அப்பொழுது அதனுல் ஆகும் அதன் சொந்த அழுத்தத்தையே அது P_2 இலுள்ள அழுத்தத்துக்குப் பங்காகக் கொடுக்கிறது ; அப்பங்கானது

$$-\frac{4\pi\gamma\rho x^2\,\delta x}{x} = -4\pi\gamma\rho x\,\delta x.$$

எனவே,

$$U_2 = -\int_r^b 4\pi\gamma\rho x\,dx = -2\pi\gamma\rho(b^2 - r^2).$$

$$\therefore U_{a \leqslant r \leqslant b} = U_1 + U_2 = -\gamma m\frac{1}{b^3 - a^3}\left[\frac{3rb^2 - r^3 - 2a^3}{2r}\right].$$

(c) $0 \leqslant r \leqslant a$. சடப்பொருளில்லா இப்பகுதியில் அழுத்தம் ஒரு மாறிலி ஆகும்; அது பரப்பு $r=a$ என்னுமிடத்தில் இருக்கின்ற புள்ளியொன்றிற் குரிய அழுத்தத்துக்குச் சமன்; பகுதி [2] இலுள்ள புள்ளியொன்றிற்குரிய அழுத்தத்தை உணர்த்தும் கோவையைப் பயன்படுத்தி இது கணிக்கப்படு கிறது. எனவே

$$U_{0 \leqslant r \leqslant a} = -\frac{3}{2}\gamma m \frac{b+a}{b^2+ab+a^2}.$$

புவிமேற்பரப்பிற்கு மேலே உயரம் h இலே உள்ள பொருளொன்றின் நிலைச் சக்தி.—A ஆனது புவியின் பரப்பிலுள்ள புள்ளியொன்றும், B ஆனது A யிலிருந்து உயரம் h இலுள்ள புள்ளியொன்றும் ஆகுக. (கோளமெனக் கருதப்படும்) புவியின் ஆரை r எனின், r ஐக் காட்டிலும் h சிறிது எனக் கொள்ளப்படுகிறது, அதாவது $\frac{h}{r} \to 0$; புவியின் திணிவு M உம், நியூற்றன ஈர்ப்பு மாறிலி γ வும் ஆயின், அங்கு ஈர்ப்பழுத்தம் $-\gamma\frac{M}{r}$ ஆதலின் A யிலிருக்கின்ற திணிவு m கொண்ட துணிக்கையொன் றின் நிலைச் சக்தி

$$W_A = -\gamma\left(\frac{M}{r}\right)m.$$

அதுபோலவே,

$$W_B = -\gamma\left(\frac{M}{r+h}\right)m.$$

$\therefore\ W_B - W_A =$ A யினின்று B வரை துணிக்கை செல்லுமிடத்துள்ள நிலைச் சத்தி அதிகரிப்பு

$$= -\gamma Mm\left[\frac{1}{r+h} - \frac{1}{r}\right] = -\gamma Mm\left[\frac{1}{r}\left(1-\frac{h}{r}\right) - \frac{1}{r}\right]$$

$$= \gamma\frac{Mmh}{r^2} = mgh;$$

இங்கு g, புவியீர்ப்புச் செறிவு, அதாவது $\left[-\vec{G}\right]_{r=a}$, அல்லது $\gamma\frac{M}{r^2}$.

ஒரே பொருளின் இரு பகுதிகளுக்கிடையேயுள்ள கவர்ச்சி பற்றி.—படம் 6·16 இல், பொருளொன்றின் இரு பகுதிகளும் முறையே A, B களாற் குறிக்கப்படின் A மீது முழுவதினதுங் கவர்ச்சியானது, B மீது A யின் கவர்ச்சி, A மீது அதனால் ஆகும் கவர்ச்சி என்பவற்றின் கூட்டுத்தொகையா கும். ஆனால் பின்னையது பூச்சியமே. ஆகவே ஒரே பொருளின் இரு பகுதிகளுக்கிடையேயுள்ள கவர்ச்சியும் ஒரு பகுதி மீது முழுவதும் ஆற்றும் கவர்ச்சியும் ஒன்றேயாம்.

மையவகற்சிக் கோளக் குழியொன்றுள் ஈர்ப்புப் புல வலிமை.—படம் 6·17 இல், மையம் O வும் ஆரை b யும் கொண்ட கோளமொன்றுள், ஆரை a யையுடைய கோளக் குழியொன்றின் மையம் C ஆகுக. இரு கோளப் பரப்புகளுக்கிடையில் நிறைந்திருக்கும் சடத்தின் சீரான அடர்த்தி ρ ஆகுக. இவ்வாறு ஆக்கப்பட்டுள்ள மையவகற்சியோடானது ஆரை b யும் அடர்த்தி ρ வும் கொண்ட முழுக் கோளமொன்றுலும் ஆரை a யும் அடர்த்தி $-\rho$ உம் கொண்ட கோளமொன்றுலும் ஆக்கப்பட்டுள்ளது எனக் கருதலாம்.

படம் 6·16. ஒரே பொருளின் இரு பகுதிகளுக்கிடையேயுள்ள கவர்ச்சி.

படம் 6·17. மையவகற்சிக் கோளக் குழியொன்றுள் ஈர்ப்புப் புல வலிமை.

P ஆனது குழியிலுள்ள ஒரு புள்ளியாயின் அப் புள்ளியிலுள்ள புல வலிமையானது

$$\text{OP வழியே } -\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho\text{OP} \text{ என்னும் கூறையும்}$$

$$\text{CP வழியே } -\tfrac{4}{3}\pi\gamma(-\rho)\text{CP} \text{ என்னும் கூறையும்}$$

உடையதாகும்.

இக்கூறுகள் பருமனிலும் திசையிலும் ΔOCP யின் பக்கங்கள் PO, CP என்பவற்றுற் குறிப்பிடப்படுகின்றன. எனவே விளையுட் புலமானது பருமனிலும் திசையிலும் CO விணுற் குறிப்பிடப்படுகிறது. எனவே

$$\vec{G}_P = -\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho\,\vec{OC} = \tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho\,\vec{CO}\ ;$$

இது P யின் நிலையைச் சாராதபடியால் குழி எங்கும் புலம் சீராக இருக்கும்.

சீரான, தனிமையாக்கிய, கோளமொன்றின் அரைகளுக்கிடையேயுள்ள கவர்ச்சி.—படம் 1·08 (b) யில், மூலகக் கனவளவு r^2 சைன் $\theta\,\delta r\,\delta\theta\,\delta\phi$ ஐக் கருதுவோமாயின் அது ஆரை r கொண்ட கோளப் பரப்பிலுள்ள புள்ளியொன்றில் இருக்கிறபடியால் கோளத்தின் எஞ்சிய பகுதியால் அதன் மீதுள்ள விசையானது திசை PO வழியேயும் பருமன்

$$\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho r\,.\,\rho\,.\,r^2 \text{ சைன் } \theta\,\delta r\,\delta\theta\,\delta\phi$$

உடையதாயும் இருக்கும்; இங்கு ρ கோளத்துச் சடத்தின் அடர்த்தி ஆகும் கோளத்தைப் பிரிக்கும் தளம் AOC இற்குச் செவ்வனுக இவ்விசை

$$\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho^2 r^3\,.\text{ சைன் }^2\theta \text{ சைன் } \phi\,\delta r\,\delta\theta\,\delta\phi$$

என்னும் கூறை உடையது.

PN வழியேயுள்ள கூறையும் தளம் AOC இற்குச் செங்குத்தாகவுள்ள கூறையும் கருதி இது கிடைத்துள்ளது. அரைக்கோளத்திற்கு ஒன்றன் பின்னொன்றாக எல்லைகள் $\phi=0$, $\phi=\pi$, $\theta=0$, $\theta=\pi$, $r=0$, $r=a$ என்பவற்றிற்கிடையே தொகையிட்டுக் கவரும் விசை பெறப்படுகிறது ; இங்கு a (காட்டப்படாதது) முழுக்கோளத்தின் ஆரை. விடை

$$\frac{3}{16}\frac{\gamma m^2}{a^2}$$

என எளிதிற காட்டலாம் ; இங்கு m கோளத்தின் திணிவு

மேற்படி விளைவைப் பின்வரும் முறையாலும் பெற்றுக்கொள்ளலாம். தளம் AOC யிலிருந்து தூரம் y யிலுள்ள புள்ளி P எனின், P யிலிருக்கின்ற அலகுத்திணிவொன்று மீதுள்ள கவர்ச்சி PO வழியேயும் பருமன் $\frac{4}{3}\pi\gamma\rho r$ உடையதாயும் அமையும் ; இங்கு $OP=r$; தளம் AOC இற்குச் செவ்வனான அதன் கூறு $\frac{4}{3}\pi\gamma\rho y$ ஆகும் ; Oy இற்குச் செவ்வனாய் P ஊடே செல்லுகின்ற தளத்தின் புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் இது அதுவேயாம். அதன் ஆரை $\sqrt{a^2-y^2}$ ஆதலின் $y=$ மாறிலி, $y+\delta y=$ மாறிலி என்னும் தளங்களுக்கிடையிலிருக்கின்ற வட்டத்தட்டு மீதுள்ள கவர்ச்சியானது,

$$\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho y \cdot \pi\rho(a^2-y^2)\,\delta y$$

ஆகும். எனவே தம்முட் கவர்ச்சி

$$\tfrac{4}{3}\pi^2\gamma\rho^2\int_0^a y(a^2-y^2)dy$$

ஆகும் ; இதுவே முன்னர் கிடைத்துள்ள முடிவுமாம்.

ஈர்ப்பு மாறிலி ; புவியின் திணிவும் சராசரி அடர்த்தியும்.—அதன் பரப்பிற்குச் சற்று வெளியேயுள்ள பொருளொன்றின் மீது புவியாற் பிரயோகிக்கப்படும் விசையே நியூற்றனின் ஈர்ப்பு விதியால் விளக்கப்படும் விசைகளுள் சிறப்பான ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும். இங்கு பொருளின் திணிவு m உம், புவியின் திணிவு, ஆரை என்பன முறையே M உம் R உம் ஆயின், புவிப்பரப்புப் புள்ளியொன்றில் வெளிமுகமாக வரைந்த செவ்வன் வழியே உள்ள விசை

$$F=-\gamma\cdot\frac{Mm}{R^2}.$$

உள்முகமாக வரைந்த செவ்வன் வழியே விசை $-F$, அதாவது $\gamma\dfrac{Mm}{R^2}$ ஆகும் ; இது பொருளின் நிறை, அதாவது mg இற்குச் சமன் ; இங்கு g என்பது புவியீர்ப்புச் செறிவு ஆகும். எனவே

$$g=\gamma\cdot\frac{M}{R^2}=\tfrac{4}{3}\pi\gamma DR\,;$$

இங்கு D என்பது புவியின் சராசரி அடர்த்தியாம்.

g, R என்பன தெரிந்த கணியங்கள் ஆதலின், γ வையோ M ஐயோ துணிய முடியுமாயின் மற்றையதை உடனே கணிக்க முடியும் என்பது தெளிவாம்.

இவ்வதிகாரத்தின் மீதிப் பாகத்தில் ஈர்ப்பு மாறிலி γ வைத் துணியும் பொருட்டு நடாத்திய பரிசோதனைகள் விவரித்துக் கூறப்படும் ; இப்பரிசோதனைகள் இயல்பாக இருவகைத்து. முதல் வகுப்பில் வசதியான பருமனும் வடிவமும் தானமும் கொண்ட மலை அல்லது புவியோட்டின் புறவோடு போன்ற பெரிய புவித்திணிவு ஏதேனுமொன்றைத் தேர்ந்தெடுத்து, இராணுவ அளவை முறையாலும் அதனுள் சடங்களின் பரம்பல், அடர்த்தி என்பவற்றைச் சோதனைசெய்தும் அதன் திணிவு துணியப்படுகிறது. அடுத்து அதன் ஒரு புறத்திலுள்ள குண்டுநூல் மீது அல்லது அதற்கு மேலேயோ கீழேயோ இருக்கின்ற ஊசலொன்றின்மீது தாக்குகின்ற அதன் கவர்ச்சி அதே பொருள் மீது முழுப் புவியாலாகும் கவர்ச்சியுடன் ஒப்பிடப்படுகிறது. இவ்வாறு புவியின் திணிவு துணியப்படுகிறது ; இதைப் பயன்படுத்தி மேற்படி சமன்பாட்டிலிருந்து γ வைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம். இரண்டாவது வகுப்புப் பரிசோதனை உகந்த ஆய்கூடமொன்றில் நடாத்தப்படுகின்றது ; இங்கு சிறிய துணிக்கைகளிடையேயுள்ள கவர்ச்சி அளக்கப்படுகிறது. இத்தகைய பரிசோதனைகள் γ வை உடனடியாகத் தருகின்றன.

புவியின் சராசரி அடர்த்தியின் துணிதலானது ஈர்ப்பு மாறிலியின் துணிதலுடன் நெருங்கிய தொடர்புள்ளது. அது புவியின் அதே திணிவும் கனவளவும் கொண்ட ஓரினமான சமவியல்புடைய பொருளொன்றின் அடர்த்தி என வரைவிலக்கணம் கொடுக்கப்படுகிறது.

மேலே குறித்துள்ள முதலாவது வகுப்புப் பரிசோதனைகளைப் பற்றிக்கூறும் பொழுது "**சேர் ஐசாக் நியூற்றன்** என்பவரே அத்தகைய முயற்சியொன்றைப் பற்றி முதன்முதல் எங்களுக்குக் குறிப்பாக உணர்த்தியிருக்கிறர் ; ஏனெனில், அவர்தம் ஆராய்ச்சிக் குறிப்புக்களில் "மூன்று மைல் உயரமும் ஆறு மைல் அகலமும் உள்ள அரைக்கோள வடிவமுடைய மலையொன்று தனது கவர்ச்சியால் நிலைக்குத்துக் கோட்டிலிருந்து குண்டுநூலை இரண்டு கலைக்கு மேலே இழுக்காது, எனக் குறித்திருக்கிறர்" என்று அம்முறையைப் பயன்படுததியுள்ள **மாஸ்க்கலின் (Maskelyne)** என்பார் தெரிவிக்கிறர். ஆனல் இப்பிரச்சினையைத் தீர்த்துவைப்பதற்கு முதன்முதலாக முயற்சி எடுத்த பெருமை **பூயெர் (Bouguer)** என்பவருக்கே உரியது.

பேருவில் பூயெரின் பரிசோதனைகள்.—புவித் திணிவுகளிடையேயுள்ள கவர்ச்சிபற்றிய முதற் பரிசோதனைகள் **பூயெர்** அவர்களால் நடாத்தப்பட்டன ; அப்பரிசோதனைகள் பற்றிய செய்திகள் அவரால் 1749 இல் வெளியிடப்பட்டன. ஊசலொன்றையும் குண்டுநூலொன்றையும் பயன்படுத்தும் பரிசோதனைகளால் புவியின் இடை அடர்த்தியை அவர் துணிய முயன்றர். அவர் பெற்ற விளைவுகள் இன்று அளவறிதற்குரிய அர்த்தம் உடையன அன்று ; ஆனல் இத்தகைய கவர்ச்சியொன்று உண்டு எனக் காட்டிய பெருமை அவரைச் சாரும். அவரது குண்டுநூற் பரிசோதனைகள் மட்டுமே இங்கு விவரித்துக் கூறப்படும்.

இப்பரிசோதனைகளுக்காகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட மலை **சிம்பொராசோ** என்பதாகும் ; அது **பேரு** நாட்டின் மாகாணமாகிய **குவிற்றேவின்** பொதுமட்டத்திற்கு இரண்டு மைல்மட்டும் மேலே இருக்கிறபோதிலும் அதன் உயரம் நான்கு மைல் ஆகும். இப்பிரச்சினையின் தீர்வுக்கெனப் பூயெர் குறித்துள்ள முறைகள் பலவற்றுள் இரண்டு பின்வருமாறு : முதலாவது முறையில், அதனது நனநதலை வாசிப்பானது குண்டுநூலொன்றால் உறுதி யாக்கப்பட்ட கால்வட்டத் தொலைகாட்டியொன்றால் உடுவொன்றின் நள்வான் கோணவேற்றம் முதலாவதாக, மலையின் வடக்குப் பக்கத்தில் அல்லது தெற்குப் பக்கத்தில் அளக்கப்படுகிறது ; அடுத்து, அம் முதல்நிலையத்திற்குக் கிழக்கே அல்லது மேற்கே, குண்டுநூல் மீது மலையின் கவர்ச்சியைப் புறக் கணிக்கத்தக்க அளவிலே சிறிதாய் இருக்கக்கூடிய அம்மலையிலிருந்து போதிய தொலைவிலே, அளவீடு மீண்டுஞ் செய்யப்படுகிறது. இம்முறையையே அவர் பயன்படுத்தினர் ; கால் வட்டததின் ஆரை 2·5 அடி ஆகும். இரண்டாவது செயனமுறையானது மலையின வடக்குப் பக்கத்திலும் தெற் குப் பக்கத்திலும நோக்கல்களை எடுப்பதேயாம் ; வானியல் அகலாங்கிற்கும் புவியின் பரப்பு அல்லது புவிப்பாத்து அகலாங்கிற்கும் இடையேயுள்ள வித்தி யாசமானது மலையாலாகும் திரும்பலின் இருமடங்காகும்.

பூயேரின் ஆராய்ச்சியானது இடர்மிக்க சூழலிலே நடாத்தப்பட்டது ; நோக்கு நிலையங்கள் நித்திய பனிகோட்டுக்கு மேலே இருந்தபடியால் அவ்வாராய்ச்சியானது முக்கியமாகக் கடுங் குளிராலும், உயர்வேகக் காற்று லும் பாதிக்கப்பட்டது ; பிந்தியதின் முழுத்தாக்குதல் தெற்கு நிலையத்தி லேயே உணரபபட்டது. இருந்தாலும் **பூயேர்** பல நோக்கல்களை வெற்றி கரமாக நடாத்தினர் ; பல சிறு திருத்தங்கள் செய்த பின்னர் மலையால் குண்டுநூலானது 8″ கோணத் திரும்பலுறறது என முடிவு செய்தார்.

பிரான்சு நாட்டிலோ இங்கிலாநது நாட்டிலோ தக்க குன்றொன்றைத் தேர்ந் தெடுகக முடியுமாயின் அங்கு இப்பரிசோதனையை மீண்டுஞ் செய்தல் வேண் டும் என்னும் நம்பிக்கையுடன் **பூயேர்** இப்பரிசோதனைகளைப் பற்றிய அவர்தம் அறிக்கையை முடிக்கிறார். இவ்விருப்பு உடனே நிறைவேற்றப்படவில்லை.

மாஸ்க்கெலினினது ஆராய்ச்சி.—1772 இல், அக்காலத்து அரசவானியல் விற்பன்னர் **மாஸ்க்கெலின்** † என்பார் மேற்படி முறையில் பரிசோதனை யொன்றை நடாத்தப்போவதாகத் தீர்மானித்தார் ; அதையிட்டு அரச சபையானது " அப்பரிசோதனைக்கான தக்க குன்றொன்றைத் தேர்ந்தெடுக்க வும் அத்திட்டத்தின் நிறைவேற்றத்திற்கான எல்லா ஏற்பாடுகளைச் செய்ய வும் " குழுவொன்றை நியமித்தது. பல குன்றுகள் நீக்கப்பட்டன ; " இருந்தாலும், கிட்டத்தட்ட **ஸ்கொற்லாந்து** நாட்டின் மையத்திலே, **பேத்ஷையர்** என்னும் மாகாணத்திலே, அதி அற்புதமான குன்றொன்று நல்வாய்ப்பாகத தெரியவந்துள்ளது ; அதன் உயரம் போதியதாயிருந்தது ; மற்றெல்லாக் குன்றுகளினின்றும் அது போதிய அளவில் விலகி இருக்கிறது. கிழக்கிலிருந்து மேற்கு வரையுள்ள அதன் நீளமானது அதன்

† *Phil. Trans.*, 1775 உம் 1778 உம.

வடக்கு தெற்கு நீளத்தைக் காட்டிலும் உணரத்தக்க அளவில் பெரிதாய் இருக்கிறது " என **மாஸ்க்கெலின் கூறுகிறார்.** குன்றானது " **ஷீஹலியன்** " எனப் படும் ; அதன் அர்த்தம் " **நித்திய புயல்** " என்பதாகும்.

நள்வானிலும் இக்குன்றின் வடக்கிலும் தெற்கிலுமுள்ள அதன் உயர் சாய்வுப் பக்கங்களின்மீதும், நிலையங்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டன ; குண்டு நூலோடு உயர்வுத் திரும்பல்களைப் பெறும்பொருட்டு ஒவ்வொரு நிலையமும் மலையில் மேண்முகமாக அதன் கால்வாசி உயரத்தில் இருந்தது. **மாஸ்க்கெலின்** பத்து அடி நனந்தலை நோக்கற்கருவியொன்றைப் பயன்படுத்தினார் ; அக்கருவியின் தொலைகாட்டியானது பொருள்வில்லை முனையிலுள்ள இடையச் சொன்றிலே சுற்றக்கூடியது ; பார்வைத்துண்டு முனையில் பல பாகைகள் வீச்சுடைய படிவகுத்த வில்லொன்று அளிக்கப்பட்டிருந்தது. தொலை காட்டியானது நிறந்தாப் பொருள் வில்லையையுடையது. கருவியின் இடையச்சிலிருந்து தொங்கவிட்ட குண்டுநூலொன்றானது படிவகுத்த வில்லுடன் தொடுகை வைக்கிறபடியால் நனந்தலைத் தானம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. அதன் தளம் புவியியல் நள்வான் தளத்தில் அமையுமாறு கருவி வைக்கப்படுகிறது ; கிட்டத்தட்ட மலைமேனோக்கி கால்வாசி உயரத்திலுள்ள அவ்விரு நிலையங்களிலிருந்து பல உடுக்களின் தோற்ற நனந்தலைகள் நோக்கப்பட்டன. நோக்கல்களைப் பாதிக்கும் அச்சுத்திசை மாற்றம், பிறழ்ச்சி, வேறுசில ஏதுக்கள் என்பவற்றிற்கு உரிய திருத்தங்கள் செய்யப்பட்டன. கடைசியாக அவ்விரு நிலையங்களினதுந் தோற்ற அல்லது வானியல் அகலாங்கு வித்தியாசம் 54·6″ ஆகும் என அவர் காட்டினார். புவியியல் அகலாங்கு வித்தியாசம் 42·94″ ஆகும ; எனவே, மலையாலாகும் விளைவானது ஒவ்வொரு நிலையத்திலும் குண்டுசேலை $\frac{1}{2}$ (54·6 - 42·94″) அதாவது 5·8″ ஆற் திருப்புவதேயாம்.

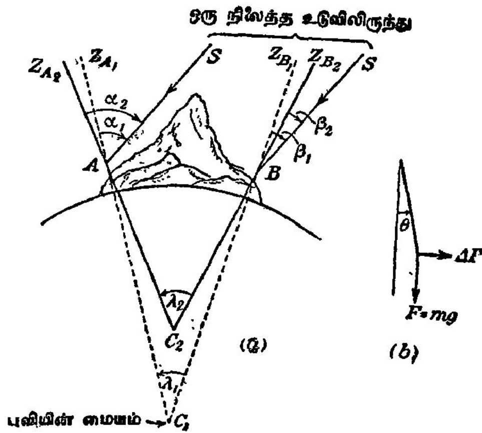
இதனை விளக்குவதற்குப் படம் 6·18 (a) யில் A, B என்பன அவ்விரு நிலையங்கள் ஆகுக ; தொடக்கத்தில், மலை அங்கு இல்லை எனக் கருதுவோம். அப்பொழுது அவ்விரு நிலையங்களினதுந் நனந்தலைக் கோடுகள் முறையே AZ_{A_1}, BZ_{B_1} என்பவற்றால் தரப்படுகின்றன. இவ்விரு கோடுகளையும் பின்னுக்கு நீட்டினால் அவை புவியின் மையம் C_1 இல் ஒன்றையொன்று வெட்டவேண்டும். SA, SB என்பன நிலைத்த உடு S என்பதிலிருந்து வருகின்ற இரு சமாந்தரக் கதிர்கள். அப்பொழுது மேற்படி உடுவின் நனந்தலைத் தூரங்களை α_1, β_1 என்க. இக்கோணங்களே காட்டப்பட்டிருக்கின்றவையாகும். உண்மையில், நனந்தலைக்கு அணித்தாயுள்ள உடுக்களே நோக்கப்பட்டபடியால் இக்கோணங்கள் சிறிதாயிருந்தன ; ஆனால் வரிப்படத்தில் அவற்றைக் கண்டிப்பாய்ப் பெரிதாக்கிக் காட்டவேண்டியிருக்கிறது. A யிற்கும் B யிற்கும் இடையேயுள்ள புவியியல் அகலாங்கு வித்தியாசமானது λ_1 எனின்,

$$\alpha_1 - \beta_1 = \lambda_1$$

என்பது உடனமயாகத் தெளிவு.

இனி மலையானது அங்கு இருப்பதாகக் கொள்வோம் ; இரு நிலையங்களிலும் குண்டுநூலானது முறையே AZ_{A_2}, BZ_{B_2} ஆகிய திசைகளில்

$$\alpha_1 - \beta_1 = \lambda_1.$$



படம் 6·18. சிகலியன் மலையில் குண்டுநூற் பரிசோதனைகள்.

அமையும் ; இக்கோடுகளை நீட்டினால் அவை C_2 இல் ஒன்றையொன்று வெட்டும். $\widehat{AC_2B}$ என்பது A யிற்கும் B யிற்கும் இடையேயுள்ள வானியல் அகலாங்கு வித்தியாசம் λ_2 ஆகும் ; அது

$$\alpha_2 - \beta_2 = \lambda_2$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு α_2, β_2 என்பன முறையே A, B யிலிருந்து உடுவை நோக்கிப் பெறுகின்ற நனந்தலைத் தூரங்கள் ஆகும். முன்னர் கூறியுள்ளவாறு

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 11{\cdot}6''$$

என **மாஸ்க்கெலின்** கண்டுகொண்டார்.

இனி ΔF என்பது நள்வான் தளத்திலே, கிடையான திசையிலே, குண்டுநூலின் குண்டுமீது மலையாலாகும் கவர்ச்சியும், $F = mg$ என்றவாறு F ஆனது அதே குண்டுமீது புவியாலாகும் கவர்ச்சியும் ஆகுக ; இங்கு m, குண்டின் திணிவு ஆகும். அப்பொழுது உண்மையான நிலைக்குத்திலிருந்து குண்டுநூலின் திரும்பல் θ எனின்,

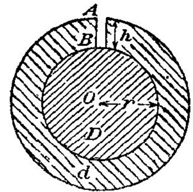
$$\frac{\Delta F}{F} = \text{தான் } \theta = \text{தான் } \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

இதைப் படம் 6·18 (b) யில் எளிதிற் காணலாம். ஆனால், $F=\gamma\frac{mM}{R^2}$;
இங்கு M புவியின் திணிவும் R அதன் ஆரையும் ஆகும். [γ ஐப் பரிசோதனை முறையாகத் துணிவது பற்றி எடுத்துக் கூறும்பொழுது கருதப்படும் பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள கவர்ச்சியை நியூற்றனின் ஈர்ப்புவிதியின் கணிதக் கோவையிலுள்ள சயக் குறியைக் கருதித் தவிர்த்தல் சிலவேளைகளில் வசதியுடைத்து.] இனி மலையின் திணிவு, அதனுள் உறையும் சடங்களின் சராசரி அடர்த்தி, γ என்பவை தொடர்பாக ΔF ஐக் கணிக்க முடியும். இவ்வாறு M ஐக் கணிக்க முடிகின்றது. இக்கணிப்புக்கள் **ஹற்றன்** என்பவரால செய்யப்பட்டன; புவியின் சராசரி அடர்த்தி D யின் பெறுமானம் 4·5 கி. சமீ.$^{-3}$ எனத் தெரிவித்திருக்கிறார். மலையையும் அதன் வட்டாரத்தையும் பிளேஃபெயர் (Playfair) என்பவர் சிரத்தையுடன் அளந்தபின் **ஹற்றன்** மீண்டும் சராசரி அடர்த்தியைக் கணித்து அது 4·9 கி. சமீ.$^{-3}$ எனக் கண்டு கொண்டார்.

1855 இல் அது போன்ற பரிசோதனையொன்றை **எடின்பரோ** மாநகரிலுள்ள " ஆதரின் இருக்கை " என்னுமிடத்தில் **யேம்ஸ், கிளாக்** எனபோர் நடாத்தினர். D = 5·42 கி. சமீ.$^{-3}$ என அவர்கள் கண்டனர்; அன்றியும் சீகலியனிலிருந்து போதிய தூரத்திலுள்ள நிலத்தைக் **ஹற்றன்** அளவை செய்யவில்லை எனக் காட்டியிருக்கின்றனர்.

வரலாற்றைப் பொறுத்தமட்டில் இப்பரிசோதனைகள் முதன்மையானவையே; இன்று அவற்றின் செயன்முறையைப் பெரிதும் திருத்தியமைக்க ஒருவேளை முடியும். ஆனால் அஙகு அம்முறைக்குச் சிறப்பாக உரிய தொல்லையொன்று உளது; அது மலையின் திணிவைத் திருத்தமாக மதிப்பிடுதல் என்பதாகும்; அத்தொல்லை தீர்க்கப்படுவது சாத்தியமன்று.

எயரியின் பரிசோதனைகள்.—சுரங்கமொன்றின் வாயிலிலும் அதன் அடியிலும்–இவை படம் 6·19 இல் புள்ளிகள் A யும் B யும் ஆகும்–ஊசலொன்றின் நேர வீதங்களை நோக்கி அவற்றின் வித்தியாசத்திலிருந்து புவியின் இடை அடர்த்தியைத் துணிய முடியும் என 1826 இல் **எயரி** என்பார் சுட்டிக் காட்டினர். அதன் மையம் புவியினதும், அதன் பரப்பு சுரங்கத்தின் அடியினூடே செல்லுகின்றதுமான கோளமொன்றிலுள்ள திரவியத்தின் இடை அடர்த்தியை D என்க. சுரங்கத்தின் ஆழத்தை h எனவும், தடிப்பு h கொண்ட புவியோட்டிலுள்ள சடத்தின் இடை அடர்த்தியை d எனவும் கொள்க. புள்ளிகள் A, B யில் முறையே ஈர்ப்புப் புல வலிமைகள் G_A, G_B யும், ஈர்ப்புச் செறிவுகள் g_A, g_B யும் ஆயின்,



படம் 6·19. γ வைத் துணிதலுக்குரிய எயரியின் (Airy) முறை.

அப்பொழுது

$$G_B = -\gamma \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 D}{r^2} = -\frac{4}{3}\gamma\pi r D,$$

அத்துடன் $G_A = -\gamma \left[\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 D}{(r+h)^2} + \frac{\frac{4}{3}\pi\{(r+h)^3 - r^3\}d}{(r+h)^2}\right]$

$$= -\frac{4}{3}\pi\gamma\left[\frac{r^3 D + (r^3 + 3r^2 h - r^3)d}{r^2\left(1+\frac{2h}{r}\right)}\right]$$ [h^2 உம் h^3 உம் கொண்ட உறுப்புக்களைப் புறக் கணித்தால்]

$$= -\frac{4}{3}\pi\gamma\left[r\left(1-\frac{2h}{r}\right)D + 3h\left(1-\frac{2h}{r}\right)d\right]$$ $\left[\because \frac{h}{r}\to 0\right]$

$$= -\frac{4}{3}\pi\gamma\left[(r-2h)D + 3hd\right]$$ [h^2 கொண்ட உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்தால்]

$$\therefore \frac{g_A}{g_B} = \frac{G_A}{G_B} = \left(1-\frac{2h}{r}\right) + 3\frac{h}{r}\cdot\frac{d}{D},$$

அதாவது $D = \dfrac{d}{\frac{2}{3} - \left[1-\frac{g_A}{g_B}\right]\frac{r}{3h}} = \dfrac{d}{\frac{2}{3} - \left[1-\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2\right]\frac{r}{3h}}$

ஆகும் ; இங்கு, T_A, T_B என்பன முறையே A யிலும் B யிலும் ஊசலின் காலங்கள் ஆகும்.

ஊசலொன்றைப் பயன்படுத்தி, **கோன்வால்** என்னும் மாகாணத்தி லுள்ள செப்புச்சுரங்கமொன்றின் வாயிலிலும் அதன் அடியிலும் சுயா தீனமாக விழும் பொருளொன்றின் ஆர்முடுகல்களை மறைமுகமாக ஒப்பிட எயரி முயன்றுள்ளார். ஆய்கருவிக்கு எதிர்பாராத வகையில் நேர்ந்த விபத்துக்களால் முயற்சி இரு முறை தோல்வியுற்றது. 1854 இல்,† அரசவானியல் விற்பன்னரான எயரி, விடயத்தை மீண்டும் கவனிக்கலானார் ; இப்பரிசோதனையையிட்டு **டேஹாம்** மாகாணத்தில் உள்ள **ஹாற்றன்** குழி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது ; அதன் ஆழம் 1320 அடி ஆகும். இரு கடிகார வீதங்களை ஒப்பிட்டு மின்சைகைகள் பயன்படுத்தப்பட்டமையால் அவரது ஆராய்ச்சி பெரிதும் எளிதாயிற்று. ஒவ்வொரு நிலையத்திலும், மாறு வூசலொன்றின ஆவர்த்தன காலம் உடனிகழ்ச்சிமுறையாகத் துணியப் பட்டது.

"**கீழேயுள்ள புவியீர்ப்பானது மேலேயுள்ளதைக் காட்டிலும் $\frac{1}{19286}$ பங்கு பெரியது ; அதிலுள்ள திடமின்மையானது மிகையாக உள்ளதன் $\frac{1}{270}$ பங்கு**" என எயரி கண்டார். D யின் பெறுமானம் $(6{\cdot}57 \pm 0{\cdot}04)$ கி. சமீ.$^{-3}$ என இது கொடுத்தது. பின்னர் **ஹோட்டன்** என்பார் எயரியின் அவதானிப்புகளை மறுபடியும் கணித்து D இற்கு $(5{\cdot}48 \pm 0{\cdot}02)$ கி. சமீ.$^{-3}$ ஐப பெறுமானமாகப் பெற றுர். **பொகீமியா** நாட்டில் 1883 இல், **ஸ்ரேனெக்** (Sterneck) எனபார்

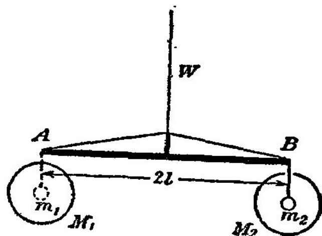
† எயரி, *Phil. Trans.* 146, 297, 1856.

இதுபோன்ற முறையொன்றைப் பயன்படுத்தி D கிட்டத்தட்ட 5·7 இ. சமீ.$^{-3}$ ஆகும் எனக் கண்டார். பரிசோதனைகள் 1000 மீற்றர் ஆழமுடைய சுரங்கமொன்றில் நடாத்தப்பட்டன.

மேற்படி பரிசோதனைகளில் புவியின் நீள்வளைமையாலும் அதன் சுழற்சியாலும் உள்ள விளைவுகள புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றிற்கான திருத்தங்கள அற்பமானவை என முதன் முதல் காட்டியவர் **ஸ்ரோக்ஸ்** ஆவர்.

ஈர்ப்புமாறிலி, புவியின் அடர்த்தி என்பவற்றைக் கவண்டிஸ் துணிந்தமை. இரு ஈயக் கோளங்களின் தம்முள் கவர்ச்சியை, **மிச்சேல்** என்பவர் திட்டமிட்ட முறையொன்றைப் பயன்படுத்தி, **கவண்டிஸ்** † எனபார் அளந்தார். இததுணிதலுக்கான ஆய்கருவியொன்றை **மிச்சேல்** ஆக்கினர் ; ஆனல் பரிசோதனையை நடாத்த முன்னரே அவர் காலமானர். **கவண்டிஸ்** ஆய்கருவியை மாற்றி அதைப் பெருமளவில் திரிபு காட்டி அமைத்தார் ; ஆனல் அதன் கோட்பாடோ மாறாது இருந்தது.

படம் 6·19 இல் உள்ளவாறு முறுக்கற் கம்பி W இல் தூங்கும் இலேசான, கிடையான கோல அல்லது வளையொனறின் நுனிகளிலிருந்து இரு சமமான ஈயக் குண்டுகள் தொங்கவிடப்பட்டன. கிட்டததட்ட வேறென்றாலும் அல்லாது புவியீர்ப்பு விசையால் மட்டுமே குண்டுகள் தாக்கபபட்டன ; எனவே காற்றேட்டங்கள் இல்லாதபோது, தொங்கற்றொகுதியானது கம்பியில் முறுக்கலிலலாத ஓய்வுநிலையையே அடைதல் வேண்டும். அடுத்து, இரு பெரிய ஈயக்குண்டுகள் M_1, M_2 என்பன, நான்கு குண்டுகளின் மையங்களும் ஒரே கிடைத்தளத்தில் கிடக்குமாறும் பெரிய குண்டுகள் ஒவ்வொன்றும் சிறு குண்டொன்றிற்கு அணித்தாய் ஆனல் வளையின் எதிர்ப்புறங்களில் இருக்குமாறும் வைக்கப்பட்டன. இவ்வண்ணம் கவர்ச்சியாலாகும் கிடைவிசைகள் சிறு குண்டுகளைத் தாக்கின ; எனவே இணையொன்றை உணருந் தொங்கல் தொகுதியானது அசைந்து புதுச் சமநிலையொன்றை அடைந்தது ; அப்பொழுது மேற்படி இணையானது கம்பியின் முறுக்கலாலான இணையால் சமமாக்கப்பட்டது. தொங்கற்றொகுதியின் திரும்பல் நோக்கப்பட்டுக் கம்பியின் முறுக்கன் மாறிலியைத் துணிந்த பின்னர், பெரிய குண்டொன்றிற்கும் சிறிய குண்டொன்றிற்கும் இடையேயுள்ள கவரும் விசையைத் தனியலகுகளில் கணித்துக் கொள்ளலாம் ; எனவே γ உம், அதிலிருந்து D யும் துணியப்படுகின்றன.



படம் 6·20. γ வைத் துணியும் கவண்டிசின் முறையின் கோட்பாடு.

† *Phil. Trans.*, 88, 398, 1798

எல்லாத் திருத்தங்களேயும் புறக்கணித்த பின்னர் இப்பரிசோதனையின் கணிப்பு முறை பின்வருமாறு : தொங்கும் சிறு குண்டொவ்வொன்றின் திணிவு m உம் பெரிய குண்டொவ்வொன்றின் திணிவு M உம் ஆகுக. வளையின் நீளம் $2l$ என்க. அதனது பூச்சிய நிலையிலிருந்து கோலின் உறுதிக் கோண விலகல் ϕ எனின், கம்பியின் முறுக்கலால் இணை $b\phi$ தோன்றும் ; இங்கு b, அலகுத்திருகல் ஒன்றிற்குரிய இணை ஆகும் [ப. 327].

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{b}}$$

ஆதலின் [ப. 333 இற் காண்க] வளை, அதிலிருந்து தொங்குந் திணிவுகள் என்பவற்றின் சிற்றலைவுக்காலம் T யின் நோக்கல்களிலிருந்து b யின் பெறுமானத்தைக் கணித்துக்கொள்ளலாம் ; இங்கு I, அதனது சுழற்சி யச்சுப் பற்றி தொங்கற்றொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும் ; அதாவது

$$b = 4\pi^2 \frac{I}{T^2}.$$

ஆனல் ஒவ்வொரு சோடிக் கோளங்களிடையேயுள்ள கவரும் விசை $\gamma \cdot \frac{mM}{r^2}$ ஆதலின், வளைமீதுள்ள இணையானது

$$\gamma \cdot \frac{mM}{r^2}(2l)$$

இற்குச் சமன் ; இங்கு γ ஈர்ப்பு மாறிலி ; r கவருங் கோளங்களின் மையங் களின் இடைத்தூரம்.

$$\therefore\ 2\gamma l \cdot \frac{mM}{r^2} = b\phi = \frac{4\pi^2 I}{T^2}\phi\,;$$

அதாவது
$$\gamma = \frac{2\pi^2 I r^2}{T^2 l m M}\cdot\phi.$$

இனி $g = \frac{4}{3}\pi\gamma RD$ [ப. 254 இற் காண்க] ; இங்கு, R புவியின் ஆரை யும் D அதன இடை அடர்த்தியும் ஆகும். எனவே

$$D = \frac{3}{4}\cdot\frac{L}{\pi}\left(\frac{1}{2R}\right)\frac{lmM}{r^2}\cdot\frac{T^2}{I\phi}\,;$$

இங்கு L செக்கனுசலின் நீளம் ; வசதியையிட்டே இது புகுத்தப்பட்டிருக் கிறது.

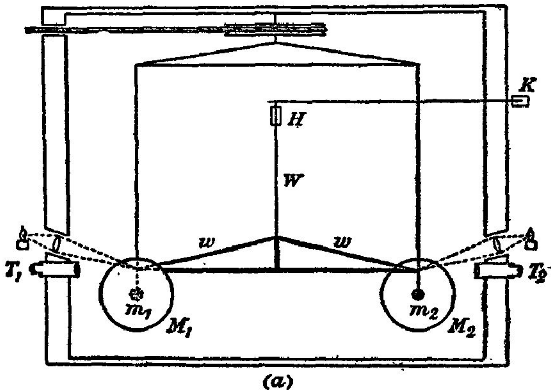
கவண்டிசுக்குப் பின் இத்துறையில் ஈடுபட்ட **பெயிலி** என்பவரின் கூற்றுப்படி இளாபாம் கொமஃனிலுள்ள அவர்தம் தோட்டத்திலுள்ள சிற்றில்லம் ஒன்றிலே, இதற்கென அவர் கட்டிய உள்ளறையொன் றிலே, கவண்டிசின் ஆய்கருவி தாபிக்கப்பட்டது. அதன் சுவர்கள் ஊடே அமைக்கப்பட்ட தொலைகாட்டிகளால் வளையின் இயக்கம் நோக்

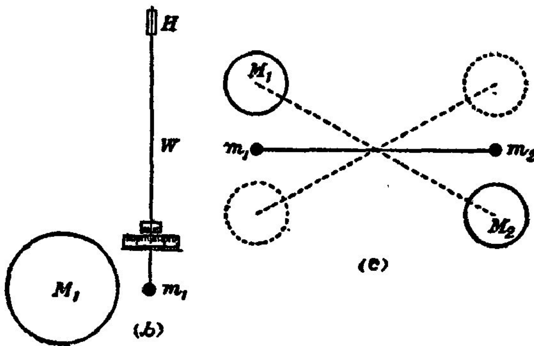
கப்பட்டது, படம் 6·21 (*a*). இவ்வண்ணம் காற்றோட்டங்களாலாகும் குழப்பங் கள் பெரிதும் குறைக்கப்பட்டன. கிட்டத்தட்ட ஒரு மீற்றர் நீளமுடைய முறுக்கற் கம்பி W வெள்ளிமுலாம் பூசியுள்ள செம்பாலானது ; தொங்கல் தொகுதியின் ஆவர்த்தன காலம் கிட்டத்தட்ட 840 செக்கனகள் ஆகும்படி அதன் விட்டம் இருந்தது ; ஆனால் கவண்டிஸ் விரைவில் இதற்குப் பதிலாக 420 செக்கன்கள் ஆவர்த்தன காலந்தரும் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி ஞர். கோல் கள்ளிமரத்தாலானது ; அதன் நீளம் கிட்டத்தட்ட ஆறு அடி ஆகும் ; அதன் நுனிகளிலிருந்து, அதன் மையத்தில் நிலையாக்கி யுள்ள விறைப்பான நிலைக்குத்தான உதை சட்டமொன்று மார்க்கமாகச் செல்லும் இரு கம்பிகள் *w*, *w* என்பவற்றால் அது இறுக்கப்பட்டிருந்தது. ஆய்கருவியிருந்த அறைக்கு வெளியேயிருந்து நெம்பொன்றால் ஆளப்பட்ட முறுக்கற்குடுமி H உடன் வெள்ளிக்கம்பியானது இணைக்கப்பட்டிருந்தது. இரு நிலைத்த தந்தத்தாலான அளவுச் சட்டங்களைப் பயனபடுத்தி வளையின் நிலை துணியப்பட்டது ; இதன பொருட்டு வளையின் ஒவ்வொரு நுனியிலும் வேணியரொன்று இருந்தது–படம் 6·21(*b*) யிற் காண்க. தலைமை அளவுச்சட்டம் அங்குலமொன்றின் இருபதின் கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருந்தது ; வேணியரைப் பயன்படுத்திப் புயத்தின் நிலையை 0·01 அங்குலத்திறகுக் குறைவான வழுவுடன் அவதானிக்க முடிந்தது. அறைக்கு வெளியேயுள்ள விளக்குகளால் விளக்கப்பெற்ற அளவுச் சட்டங்கள், தக்கவாறு ஏற்றியுள்ள தொலைகாட்டிகள் T_1, T_2 இனூடாகப் பார்வையிடப்பட்டன. திருகுகளால் ஆய்கருவி மட்டமாக்கப்பட் டது.

சிறு குண்டுகள் ஒவ்வொனறினதும் விட்டம் கிட்டத்தட்ட 2 அங்குலம் ஆகும் ; பெரிய குண்டுகளின் விட்டம் 8 அஙகுலம் ஆகும். அறையின் கூரையிலுள்ள சுழலையொன்றிற் சுழலும் சட்டமொன்றில் பெரிய குண்டு கள் ஏற்றப்பட்டிருந்தன ; இதனால் படம் 6·21 (c) யில் காட்டியுள்ளவாறு அவறறை முழுக்கோடுகளாற காட்டப்பட்ட நிலையொன்றிலிருந்து புள்ளி யிட்ட கோடுகளாற் காட்டப்பட்ட சமச்சீரான நிலையொனறிற்குக் கொண்டு வர முடிந்தது. இதன விளைவாக ஒளிக்கற்றையின் திரும்பல் இரு மடங் காயிற்று.

வளையின் நிலையியற் சமநிலைத் தானங்களை நோக்குதல் இயலாமல் இருந்தது ; இத்தொல்லையைத் தீர்க்கும் பொருட்டுப் பின்வரும் செயன் முறை கையாளப்பட்டது. பெரிய குண்டுகள் இரண்டும், அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் நேர்கோடானது, கோலுக்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு ஒழுங் காக்கப்பட்டன. இங்கு கம்பியிலிருக்கும் முறுக்கல் இயன்றளவு முற்றிலும் நீக்கப்பட்டுள்ளது. அடுத்துப் பெரிய குண்டுகள் அவற்றின் முதல் தானத் தில் வைக்கப்பட்டன ; அப்பொழுது கோல் அதன் புதுச் சமநிலைத் தானம் பற்றி அதிர்வுகளை ஆற்றலாயிற்று. வளையின் மூன்று அடுத்தடுத்த திரும்பற் புள்ளிகளை நோக்கி அவற்றிலிருந்து சமநிலைத் தானம் கணிக்கப்பட்டது. குண்டுகளை அவற்றின் இரண்டாவது தானத்தில் வைத்து முன்போன்று

நோக்கற்றொடரொன்று எடுக்கப்பட்டது. அப்பொழுது பெரிய குண்டுகளுக்கும் தராசின் வளைக்கும் இடையேயுள்ள கவர்ச்சி பற்றிய திருத்தஞ் செய்த பின் குண்டுகளுக்கிடையேயுள்ள கவர்ச்சியால் வளை உணரும் கோணத் திரும்பல் தெரியவந்தது.





படம் 6·21. ஈர்ப்பு மாறிலியைத் துணிதலுக்குரிய கவண்டிசின் ஆய்கருவி.

அறிமுறைப்படி m, M என்பவற்றின் நிறைகளுக்கு வெற்றிடத்தில் அவற்றை நிறுத்துவரும் பெறுமானங்களைக் காட்டிலும் வளியில் நிறுத்து வரும் பெறுமானங்களைப் பயன்படுத்துதலே திருத்தமிக்கது. உதாரணமாக சிறு குண்டொன்றையும் அகற்கணித்தாயுள்ள பெரிய குண்டையும் கருதுக. இவற்றை அப்புறப்படுத்தி அவற்றின் இடத்தை வளியால் நிரப்பினுல் இவ்விரு வளித்திணிவுகளுக்குமிடையே கவரும் விசையொன்று தோற்றும்; முழு வளியும் சமநிலையில் **இருந்தால்** இவ்விசை சூழல் வளியின் கவர்ச்சி

யால் சமமாக்கப்படும். குண்டுகள் மீண்டும் அவற்றின் தானங்களில் வைக்கப் பட்டால் அவற்றின்மீது சூழல்வளி அதே தாக்கத்தையே பிரயோகிக்கும் ; எனவே விளையுட கவர்ச்சியானது இப்பொழுது மேலதிகமாகப் புகுத்தியுள்ள திணிவுகளால், அதாவது வளியில் நிறுக்கப்பட்ட திணிவுகளால் ஆகிறது.

மொத்தமாக இருபத்தொன்பது முடிபுகள கவண்டிஸால் பெறப்பட்டன ; அவற்றிலிருந்து புவியின் சராசரி அடர்த்திக்குக் கிடைத்த பெறுமானம

$$D = 5{\cdot}45 \text{ கி.சமீ.}^{-3}.$$

[எண்கணித வழுவொன்றின் விளைவாக இவ்விளைவு முதன்முதலில் $5{\cdot}48$ கி. சமீ $^{-3}$ எனக கணிக்கப்பட்டது. வழுவைக் கண்டுபிடித்தவர் **பெயிலி** **(Baily)** ஆவர்.]

பொயின்ரிங் என்பவரினது புவியின் சராசரி அடர்த்தி பற்றிய அவர்தம புகழ்பெற்ற கட்டுரையில, மேற்படிப் பரிசோதனையைப் 'பற்றி விவரித்துக் கூறும் பொழுது " இப்பரிசோதனையில் கவண்டிஷின் ஆய்வை உற்று நோக்கினுல், அவர் ஒரு தலைசிறந்த செய்முறை விஞ்ஞானி என்னும் பொதுக் கருத்து உறுதிப்படுத்தப்படுகிறது. சில அளத்தல்களுக்கான விவரஙகள் தரப்படவில்லை என்பது உண்மையே ; இதையிட்டுப் **பெயிலி** என்பார் குறைகூறியிருக்கிறுர் ; ஆயினும் **கவண்டிஸ்** இயல்பாகவே சிறந்த ஆராயும் ஆற்றலுடையவர் எனபதை நாம் நம்பலாம் ; அவரது மாறிலிகள் சிறு திருத்தங்களுக்கு ஒத்த திருத்தத்துடன் தெரிந்திரா விட்டால் அவர் அச்சிறு திருத்தஙகளைக் கணிக்குமிடத்து அத்துணை இடர்ப் பட்டிருக்கமாட்டார். அவரது முறையைச் சில வழிகளில் திருத்த முடியும என நாம் இபபொழுது அறிவோம்..., ஆனுல, அத்தகைய வரிசையில் விசையை அளத்தல் இதுவே முதலாவது முயற்சி ஆதலின, அவர் வெற்றி பெரிதும குறிப்பிடததக்கதாகும் " எனப் **பொயின்ரிங்** வற்புறுத்துகிறுர்.

முறுக்கற்றராசொன்றுல் γ ஐப் பெறுவதற்குரிய வேறு துணிதல்கள்.— 1841 இலிருந்து 1842 வரை அரசசபையின் வற்புறுத்தலின்பேரில் **பெயிலி** எனபார் கவண்டிஷின பரிசோதனையைத் திருப்பிச் செய்தார். வளையின் கோணவிலகலைத துணிவதற்கு அவர் ஆடி, தொலைகாட்டி எனபவற்றைப் பயனபடுத்திஞர். தராசுப பெட்டியின் உட்புறத்தில் வெள்ளீயமென்னும் கட்டுப்படை அளிக்கபபட்டிருநதது ; ஆய்கருவிக்கும் அதன் சூழலுக்குமிடையேயுளள வெப்பமாற்றத்தைக் குறைத்தற்பொருட்டு தராசுப்பெட்டியின் வெளிப்புறம் கம்பளியால் சுறறப்பட்டிருந்தது. $D = 5{\cdot}67$ கி.சமீ. $^{-3}$ என அவர் கண்டார். நீண்டகாலமாக இப்பெறுமானம் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டிருந்தது ; ஆனுல் அவரது விளைவுகளிலுள்ள பல முரண் பாடுகளைக் **கோனு, பெயிலே** ஆகியோர் சுட்டிக்காட்டினர். மேலும் **பெயிலி** திணிவுகளை வெற்றிடத்துக்குரியதாகத் திருத்திஞர் ; அச்செய்கை

அடிப்படையில் பிழையானது (மேலே பார்க்க) ; ஆனால் உண்மையில் அது பிரதானமானதுமன்று. பெரிய குண்டுகளின் திணிவுகள் கூடுங்காலே D ஆனது தோற்றக் குறைவு காட்டுகிறது எனவும் பெயிலி குறித்தார்; அச்செய்தியை அவரால் விளக்க முடியாமற் போயிற்று.

1870 இல் **கோனு, பெயிலே** என்போர் இவ்வகைப் பரிசோதனைமுறையில் பல முன்னேற்றங்களைப் புகுத்தினர். **கவண்டிஸ்** பயன்படுத்திய ஆய்கருவியின் பரிமாணங்களின் ஒரு கால் மடங்காக ஆய்கருவியின் பரிமாணங்களை ஒடுக்கினர் ; இதனால் பெட்டியிலுள்ள வெப்பநிலை மாறும் வீதம் குறைக்கப்பட்டது. மற்றை முன்னேற்றங்களுள் (i) கவருந் திணிவுகளாக இரசம் பயன்படுத்தப்பட்டது ; அதுவுமல்லாமல் ஆராய்ச்சியாளர் ஆய்கருவியை அணுகாமலேயே இதை ஒரு பாத்திரத்திலிருந்து வேறொரு பாத்திரத்துள் செலுத்த முடிந்தது. (ii) மின் குழப்பங்களைத் தடுக்கும்பொருட்டு ஆய்கருவியின் உறையான உலோகப் பெட்டி புவித்தொடுப்பிடப்பட்டது. (iii) வளையின் விலகல்கள் மின்முறைப்படிப் பதிவுசெய்யப்பட்டன. இறுதி விளைவு $D = 5\cdot56$ கி. சமீ. $^{-3}$ ஆகும்.

ஈர்ப்புமாறிலியைத் துணியும் போய்சின் முறை.—ஈர்ப்புமாறிலியைத் துணிவதற்கு பல ஆராய்ச்சியாளர் முறுக்கற்றராசொன்றை எவ்வாறு பயன்படுத்தினர் என்பது பற்றி ஏற்கெனவே விவரித்துக் கூறப்பட்டுள்ளது. γ வின் சிறுமையையிட்டு மேற்படி ஆராய்ச்சியாளர் ஆய்கருவியின் உணர்திறனைக் கூடியளவு உயர்த்த முயன்றனர். இவ்விலட்சியத்தை முன்னிட்டு, தன் நுனிகளில் திணிவுகளைக் காவும் நீண்ட வளையொன்றைப் பயன்படுத்தினர் ; மெல்லிய கம்பியொன்றால் முழுவதும் தொங்கவிடப் பட்டது. கவரும் திணிவுகளும் கூடியமட்டில் பெரிதாய் ஆக்கப்பட்டன.

இத்தகைய ஆராய்ச்சியில் தொங்கல் தொகுதியினது நிலையியற் சமநிலைத் தானத்தின் நித்தியபெயர்ச்சி பெரும் தொல்லைதருவதொன்றாகும் ; அது பெயர்ச்சியின் ஒருபகுதி கம்பியின் மீள்தன்மையிளப்பாலும், மிகுதி **கவண்டிஸ்** பரிசோதனையால் நிறுவியவாறு, ஆய்கருவி வைக்கப்படும் பெட்டியிலுள்ள வெப்பநிலை மாறும் வீதங்களால் தூண்டப்படும் வளியோட்டங்களின் விளைவுகளாலும் ஆகின்றது.

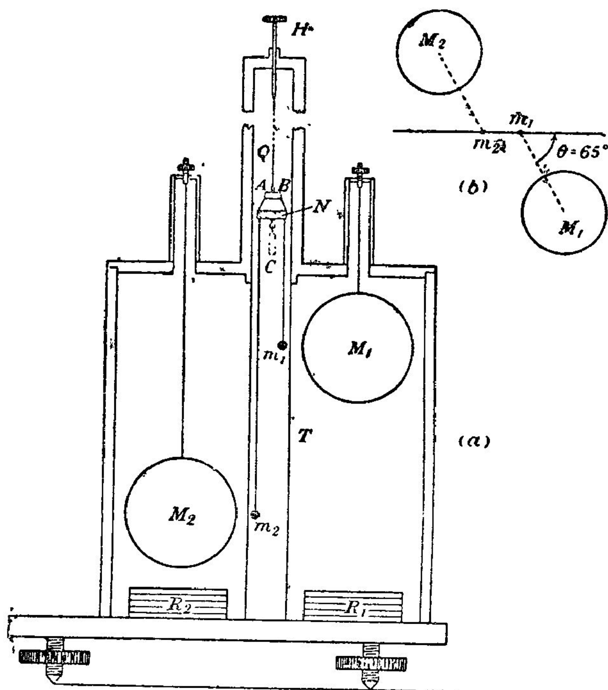
1889 இல், **C.V. போய்ஸ்** என்பார், படிகநார் ஒன்றைத் தொங்கலாகப் பயன்படுத்தும் நோக்கைத் தெரிவித்து, குறிப்பிட்டவொரு நிபந்தனை நிறைவேற்றப்பட்டால் ஆய்கருவியின் உணர்திறனைப் பாதிக்காமல் அதன் நேர்கோட்டுப் பரிமாணங்களைப் பெரிதும் குறைத்துக் கொள்ளலாம் எனக் காட்டினார். தொங்கல் தொகுதியின் ஆவர்த்தன காலம் மாறாது இருத்தல் வேண்டும் என்பதே அந்நிபந்தனை. ஆயின் இத்தகைய இயல்புடைய ஆய்கருவியொன்றைக் கருதுக ; அதுவும் இரண்டாவது ஆய்கருவியொன்றும் ஒரே சடத்தால் ஆக்கப்பட்டுள்ளன ; ஆனால் முதலாவது ஆய்கருவியின் நேர்கோட்டுப் பரிமாணங்கள் இரண்டாவதில் அவற்றிற்கு

ஒத்ததாயுள்ள பரிமாணங்களைக் குறித்து $1 : n$ என்னும் விகிதத்தில் குறைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அது சிறிய ஆய்கருவி என அழைக்கப்படும். அப்பொழுது சிறிய தொங்கல் தொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பம் மற்றை ஆய்கருவியின் சடத்துவத் திருப்பத்தின் n^{-5} மடங்கு ஆகும்; ஏனெனில் திணிவு n^3 மடங்கும் சுழிப்பாரையின் வர்க்கம் n^2 மடங்கும் குறைந்த படியால் எனக் கொள்க. இரு தொகுதிகளும் ஒரே ஆவர்த்தன காலங்களை உடையதாய் இருத்தல் வேண்டுமாயின் நுண்ணிய தொங்கலில் அலகுத்திருகல் ஒன்றிற்கான இணையை $1:n^5$ என்னும் விகிதத்தில் குறைத்தல் வேண்டும். இனிச் சிறிய ஆய்கருவியிலுள்ள குண்டுகளின் திணிவுகள் $1 : n^3$ என்னும் விகிதத்தில் குறைக்கப்பட்டிருக்கும். அவற்றின் இடைத்தூரமும் n மடங்கு குறைந்திருக்கிறது; எனவே சிறிய ஆய்கருவியிலுள்ள கவரும் விசைகள் $1 : (n^6 \div n^2)$, அதாவது $1 : n^4$ என்னும் விகிதத்தில் குறைக்கப்படும். ஆகவே கவரும் விசைகளாலாகும் இணையானது $1 : n^5$ என்னும் விகிதத்தில் குறைக்கப்படும். தொங்கலின் முறுக்கன் மாறிலியும் மேற்படி திருப்பமும் அதே விகிதத்தில் குறைக்கப்பட்டிருக்கிறபடியால் விலகற்கோணம் மாறமாட்டாது.

"இருந்தாலும் வளையின் நீளத்தை மட்டும் பெரிதாக்கிக் கவருந் திணிவுகளை வளையின் நுனிகளுக்கு எதிராகவும் அவற்றிலிருந்து நிலைத்த தூரமொன்றிலும் இருக்கும்வரை, இயக்கினால் சடத்துவத் திருப்பங்கள் $n^2 : 1$ என்னும் விகிதத்தில் மாற, அவற்றிற்கு ஒத்த இணைகள் $n : 1$ என்னும் விகிதத்தில் மட்டுமே மாறும்; எனவே இரண்டில் ஒன்று நேரிடும்வரை வளையின் நீளத்தைக் குறைத்தல் நயம் பயக்கும். ஒன்றில் கெடுதலில்லாமல் வளையைக் காவவோ, வேண்டிய ஆவர்த்தன காலத்தைத் தரவோ போதிய நுண்மை உடைய முறுக்கல் ஊசலொன்றைப் பெறுவது அரிது; அல்லது வளையின் நீளம் கவருங் குண்டுகளின் விட்டத்துக்குக் கிட்டத்தட்ட சமனாகுமிடத்து அவை வளையின் மறு நுனிகளிலுள்ள தொங்குங் குண்டுகளை உணரத்தக்க அளவில் தாக்கத் தொடங்கி விடுமாதலால், எச்ச விளைவானது, எதிர்க்குண்டின் தலையீடு இல்லாத போது குறைக்கப்பட்ட பரிமாணங்களால் கிடைக்க வேண்டிய விளைவைக் காட்டிலும் குறைவானது.

ஈற்றிலே போய்ஸால் பயன்படுத்தப்பட்ட ஆய்கருவி வரிப்பட முறைப்படிப் படம் 6·22 (*a*) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. முறுக்கற் குடுமி H உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற படிக நார் Q ஆற் காவப்படுகின்ற சிறு வளை AB யிலிருந்து நுண்ணிய பொன் கம்பிகளால் m_1, m_2 ஆகிய சிறு குண்டுகள் இரண்டும் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றன. அச்சிறு குண்டுகளும் தொங்கலும் வட்டவெட்டுடைய நிலைக்குத்தான பித்தளைக்குழாய் T யுட் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்றன. இது அசையுந் தொகுதியை வெளிக் குழப்பங்களிலிருந்து காப்பாற்றுகிறது; மேலும் தொங்கல் தொகுதி மையமாகத் தொங்கவிடப்பட்டிருந்தால், குழாயின் கவர்ச்சியால் விளைவில்லை. பெரிய கவருந் திணிவுகள் M_1, M_2 ஐ வளையின் இரு புறங்களிலும் ஒன்று விட்ட

நிலைகளில் இருக்கக்கூடியவாறு ஒழுங்குகள் செய்தல் வேண்டும்; அப்பொழுது வளையானது முதல் ஒரு திசையிலும் அடுத்து மறுதிசையிலும் திருப்பப் படும் ; இவ்விரு திணிவுகளும் குழாய்க்கு வெளியே இருத்தல் வேண்டும். இதையிட்டுப் படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு, இவை பித்தளையாலான வெளிப் பெட்டியொன்றின் மூடியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன ; இங்கு மைய



படம் 6·22. ஈர்ப்பு மாறிலியைத் துணிதலுக்கான போய்சின் ஆய்கருவி.

மான குழாயின் அச்சுடன் பொருந்துகின்ற நிலைக்குத்தான அச்சொன்று பற்றி மூடியானது சுழலமுடியும். m_2 மீது M_1 ஆலும் m_1 மீது M_2 ஆலும் ஆகும் விளைவைக் குறைக்கும் பொருட்டு வரிப்படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு குண்டு கள் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன ; அடுத்துள்ள குண்டுகளின் மையங்கள் ஒரே கிடைத்தளத்தில் இருக்குமாறு கவனஞ் செலுத்தல் வேண்டும்.

இயங்குந்தொகுதியுடன் விறைப்பாக இணைத்துள்ள தளவாடி N வளையின் கோணவிலகலை அளக்க உதவுகிறது. இவ்வாடியின் நிலைக் குத்தான விளிம்புகளில் தவாளிகள் வெட்டப்பட்டுள்ளன ; m_1, m_2

என்பவற்றைத் தாங்கும் கம்பிகள் இத்தவாளிகளுள் அமைந்திருக்கின்றன; இதனால் கம்பிகளிடையேயுள்ள இடைத்தூரம் மாறுமற் பேணப்படுகிறது. பெரிய திணிவு விழுவதால் ஆய்கருவிக்குத் தீங்கு விளையாத வண்ணம் இந்தியா றப்பர்த் திண்டுகள் R_1, R_2 என்பன வைக்கப்பட்டுள்ளன.

இரு நிலைக்குத்தான தளங்களைக் கருதுக ; ஒன்று வளையைக் கொண்டிருக்கிறது ; மற்றையது முதலாவதற்குச் செங்குத்தானது ; அவ்வொவ்வொரு தளத்திலும் குண்டுகளின் மையங்கள் கிடக்குமாயின் அக்குண்டுகள் வளையைத் திருப்பமாட்டா. ஏதோவொரு இடையான நிலையில் கவரும் விசைகளின் திருப்பம் ஓர் உயர்வு ஆகும். படம் 6·22 (*b*) ஆனது குண்டுகளின் மையங்களின் கிடைப்படம் எனின், அங்கு காட்டியுள்ள கோணம் θ, 65° ஆக இருக்கும்பொழுது மேற்படித் திருப்பம் ஓர் உயர்வு ஆகும் எனப் போய்ஸ் காட்டியிருக்கிறர். எனவே இநநிபந்தனைக்கு இணங்குமாறு குண்டுகள் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டுள்ளன.

போய்ஸின் ஆய்கருவியின முதன்மையான பரிமாணங்கள் பின்வருமாறு:

கிடைப்படத்தில் பெரிய குண்டுகளின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம், 6 அங் ;

கிடைப்படத்தில் சிறிய குண்டுகளின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம், (கிட்டத்தட்ட) 1 அங் ;

பெரிய குண்டுகளின் விட்டம் 4·25 (அல்லது 2·25) அங் ;

சிறிய குண்டுகளின் விட்டம் 0·2 (அல்லது 0·25) அங் ;

மேற் சோடிக்கும் கீழ்ச்சோடிக்கும் இடையேயுள்ள மட்ட வித்தியாசம் 6 அங் ;

படிக நாரின் நீளம் 17 அங் ;

மற்றைய முக்கியமான தரவுகள் பின்வருமாறு :—

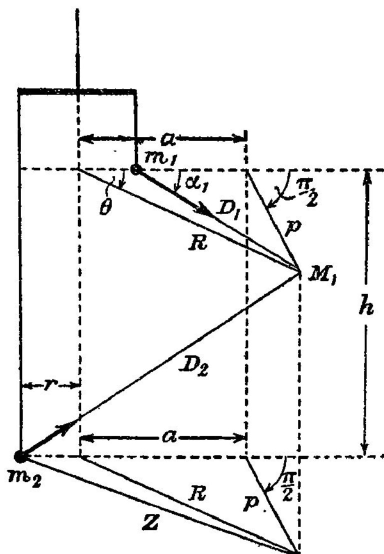
திருத்தமாக ஆக்கியுள்ள கோளக் குழியொன்றுள் உருகிய ஈயத்தை வார்த்துப் பெரிய குண்டுகள் செய்யப்பட்டன ; அச்சின் கழுத்திலுள்ள உலோகத் திண்மமாகும் அதே கணத்தில் அவற்றின்மீது நீரியல் அமுக்கமொன்று பிரயோகிக்கப்பட்டது. எனவே குழிகள் உண்டாகமாட்டா. ஒவ்வொன்றின் திணிவும் கிட்டத்தட்ட 7408 கி. ஆகும்.

சிறிய குண்டுகள் தூய பொன்னுலானவை ; 0·25 அங். விட்டம் உடையனவற்றின் திணிவு 2·65 கி. ஆகும்.

ஆவர்த்தன காலம் கிட்டத்தட்ட 165 செக். ஆகும்.

போய்ஸின் பரிசோதனையிலுள்ள கணிதமுறைக் கொள்கை.—வளையிலிருந்து தொங்குகின்ற குண்டுகளையும் சுழற்சியச்சையும் குறித்துக் கவருங் குண்டுகளின் மையங்களின் நிலைகளைப் படம் 6·23 காட்டுகிறது. முதன்முதலிலே m_1 இற்கும் M_1 இற்கும் இடையேயுள்ள கவர்ச்சியின் திருப்பத்தைக் கருதுக. இவ்விசையின் எணபெறுமானம் $\gamma \cdot \dfrac{m_1M_1}{D_1^2}$ உம், அது ஆற்றும் திசை

m_1M_1 உம் ஆகும் ; அதாவது, அதனது தாக்கக்கோடு, வளையைக் கொண்டிருக்கும் நிலைக்குத்துத் தளத்துடன் கோணம் α_1 ஐ ஆக்குகின்றது.



படம் 6·23. போய்ஸின் γ காண்முறைக்கான கொள்கை. [θ ஆனது வளையின் தளத்தில் நிலைக்குத்துத் தானத்திலிருந்து ஈயக் குண்டுகள் திருப்பப்பட்டுள்ள கோணம், சய பொற் குண்டுகள் திரும்பியுள்ள கோணம் ஆகும்.]

எனவே சுழற்சியச்சுப் பற்றி இவ்விசையின் திருப்பம்

$$\left[\gamma \cdot \frac{m_1M_1}{D_1^2} \cdot \text{சைன் } \alpha_1\right] r = \gamma \cdot \frac{m_1M_1}{D_1^3} \cdot pr\,;$$

இங்கு p யும் r உம் காட்டியுள்ள தூரங்களாகும்.

இனி M_1 ஆல் m_2 மீதுள்ள விளைவைக் கருதுக. இவற்றிற்கிடையேயுள்ள கவர்ச்சி $\gamma \cdot \frac{m_2M_1}{D_2^2}$ ஆகும் ; m_2, M_1 என்பவற்றைக் கொண்டிருக்கின்ற நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இதன் கிடைக்கூறு $\gamma \cdot \frac{m_2M_1}{D_2^2} \cdot \frac{Z}{D_2}$ ஆகும் ; இங்கு, Z உம் D_2 உம் காட்டியுள்ள தூரங்களாம். கவர்ச்சியின் இக்கிடைக்கூறு னது வரிப்படத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக

$$\gamma \cdot \frac{m_2M_1}{D_2^2} \cdot \frac{Z}{D_2} \cdot \frac{p}{Z} = \gamma \cdot \frac{m_2M_1}{D_2^3} \cdot p$$

என்னும் கூறை உடையது.

தொங்கலச்சுப் பற்றி இவ்விசையின் திருப்பம் $-\gamma \cdot \frac{m_2 M_1}{D_2^3} \cdot pr$ ஆகும் ; இத்திருப்பத்தின் போக்கு m_1, M_1 களுக்கு இடையேயுள்ள கவர்ச்சியின் திருப்பத்தின் போக்குக்கு எதிராக அமைந்திருக்கிறபடியால் சயக்குறி புகுத்தப்பட்டுள்ளது.

எனவே தொங்கலச்சுப் பற்றி எல்லாக் குண்டுகளினதும் மொத்தத் திருப்பம்

$$\gamma\left[\frac{m_1 M_1}{D_1^3} \cdot pr + \frac{m_2 M_2}{D_1^3} \cdot pr - \frac{m_2 M_1}{D_2^3} \cdot pa - \frac{m_1 M_2}{D_2^3} \cdot pr\right] = \gamma Q \text{ (என்க).}$$

இது $b\phi$ இற்குச் சமனுகும் ; இங்கு ϕ வளையின் கோணவிலகலும், b படிக நாரில் முறுக்கல் அலகொன்றிற்கான இணையும் ஆகும். b யைக் காணும்பொருட்டு அதனது சுழற்சியச்சுப் பற்றித் தொங்கிய தொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பம் தேவைப்படுகிறது. வெளிப்படையாக மேற்படி அச்சுப் பற்றி தெரிந்த சடத்துவத் திருப்பமுடைய சட்டமொன்றை வழக்கமான முறைப்படிப் பயன்படுத்தி [ப. 447 இற் காண்க] இதனைப் பெறமுடியும். இருந்தாலும் இவ்வெடுத்துக்காட்டில் முறுக்கண மாறிலியானது நாருக்கு அளிக்கப்பட்ட ஈர்ப்பைப் பொறுத்திருக்கிறபடியால், [ப. 338 இற் காண்க] இரு நேரங்காண் முயற்சிகளிலும் படிக நார் ஒரே அளவால் ஈர்க்கப்பட்டிருக்கும் பொருட்டு தொங்குந் திணிவானது ஒரே அளவாக இருத்தல் வேண்டும் என்பது கவனித்தற்பாலது.

எனவே **போய்ஸ்** தொங்கல் தொகுதியின் ஆவர்த்தன காலத்தைத் துணிநதார்—அது T_1 என்க. அடுத்து இரு பொறகுண்டுகளும் அவற்றுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற கமபிகளும் அப்புறப்படுத்தப்பட்டன. தன் அச்சுப் பற்றி தெரிந்த சிறு சடத்துவத திருப்பமும், பொற்குண்டுகள், அவற்றின் இணைப்புக்கள் என்பவற்றின் அதே மொததத் திணிவும் உடைய உருளைவடிவமான ஈடுசெய் எடையொன்று வளையிலிருந்து கொளுக்கியொன்றல் தொங்கவிடப்பட்டது, படம் 6·22 (a) யில் C யைக் காண்க ; இங்கு C புள்ளியிட்ட எல்லைக் குறிக்கோடொனறுல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இந்நிலையில் நார் ஒரே அளவில் நீட்டப்பட்டிருக்கிறது. நோக்கியுள்ள ஆவர்த்தன காலம் T_2 ஆகுக.

நிலைக்குத்தான அச்சொன்று பறறி ஆடி, வளை என்பவற்றின் சடத்துவத் திருப்பம் I_0 உம், தொங்கல் தொகுதியின் சுழற்சியச்சுப் பற்றி பொற்குண்டுகள், அவற்றுடன் இணைக்கப்பட்ட கம்பிகள் என்பவற்றின் சடத்துவத் திருப்பம் I_1 உம் ஆகுக. இப்பொழுது I_1 ஐக் கணித்துக் கொள்ளலாம். நிலைக்குத்தான அச்சொன்று பற்றி உருளையின் சடத்துவத் திருப்பம் I_2 ஆகுக. அப்பொழுது

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{b}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_2}{b}},$$

எனவே
$$b = \frac{4\pi^2(I_1 - I_2)}{T_1^2 - T_2^2}.$$

போய்ஸின் பரிசோதனையில் γ வைக் கணித்தல்.—வளையின் சமநிலைக் கான நிபந்தனையை எடுத்துக்கூறும் சமன்பாடானது

$\gamma Q =$ நிலைக்குத்தான அச்சொன்று பற்றி வளைமீது ஆற்றுகின்ற விசைகளின் திருப்பம்

$$= b\,\phi = b.\frac{\sigma}{4\rho}.$$

இங்கு σ, திட்டப் பிரிப்புக்களில் பெரிய குண்டுகளின் நிலைகளை வளையின பக்கமொன்றிலிருந்து அதன் மறுபக்கத்திற்கு மாற்றி வைப்பதால் வரும் விலகலும், ρ, விலகலைத் துணிவதற்குப் பயன்படுத்தியுள்ள அளவுச் சட்டத்திற்கும் ஆடிக்கும் இடையேயுள்ள தூரமும் ஆகும். ஆடியின் விலகல் அவ்வாடிமீது தெறிக்கப்படும் ஒளிக்கற்றையொன்றுல் நோக்கப் படுகிறபடியால் அளத்தலில் அவ்விலகல் இருமடங்காகிறது ; மேலும பெரிய குண்டுகளை ஏற்கெனவே கூறியுள்ளவாறு இயக்கி வைப்பதால் விலகல மீண்டும் இருமடங்காகிறது. எனவே 4 என்னும் பெருக்கும் எண் புகுத்தப்படுகிறது.

பரிசோதனை முடிபுகள் 1895 இல் வெளியிடப்பட்டன;

$\gamma = 6{\cdot}6576 \times 10^{-8}$ கி.$^{-1}$ சமீ.^{3} செக்.$^{-2}$ எனவும்

$D = 5{\cdot}5270$ கி. சமீ.$^{-3}$ எனவும்

போய்ஸ் கண்டார்.

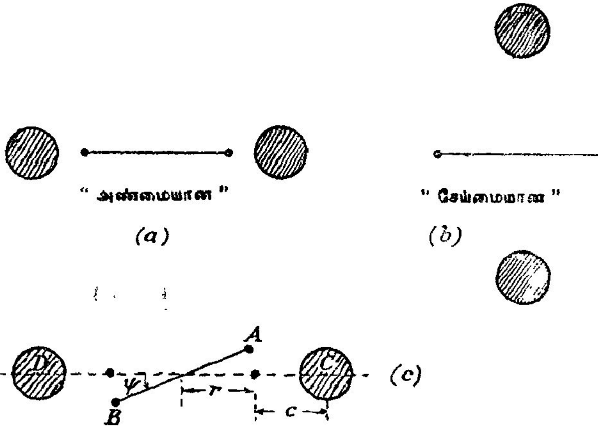
γ வைப் பற்றிப் பிறெளனின் (Braun) பரிசோதனை.—பொஹிமியா நாட்டிலுள்ள **மரியாசைன்** என்னும் ஊரிலே, 1896 இல் **பிறெளன்** என்பார் நியாயமான வெற்றிடம் கொண்ட அடைப்பொன்றிலுள்ள முறுக்கற்றராசொன்றை ஆக்கினுர் ; அடைப்புள் அமுக்கம் கிட்டத்தட்ட 0·005 வளிம. ஆகும் ; எனவே காற்றேட்டங்கள் பெரிதும் குறைக்கப பட்டன. அவரது ஆய்கருவி போய்ஸினதைக் காட்டிலும் மிகப் பெரிதாய் இருந்தது ; தொங்கற கம்பி உலோகத்தால் ஆனது. பின்னர் படிகறுரொன்று பயன்படுத்தப்பட்டது. D இற்குப் **போய்ஸ்** பெற்ற அதே பெறுமானத்தை அவரும பெற்றுர்.

ஈர்ப்புமாறிலி பற்றி ஹைலின் (Heyl) ஆராய்சி.—ஈர்ப்புமாறிலியைத் துணிவதற்கு **கவண்டிஸ்** என்பவர் திட்டமிட்ட முறுக்கற்றராசானது, அதே நோக்குடன் ஆனுல் வெவ்வேறுன ஒழுங்குமுறைகளில், போய்ஸ் ஸாலும் பிறெளனுலும் பயன்படுத்தப்பட்டன. முறுக்கற்றராசை இரு வெவ்வேறுன வகைகளிற் பயன்படுத்தலாம் ; ஒன்று "நேர்த்திரும்பல்" முறை, மற்றையது "ஆடற்காலமுறை". **போய்ஸ்** முந்தியதை மட்டுமே பயன்படுத்தினுர் ; ஆனுல் **பிறெளன்** என்பார் குறுக்கோட்டங்களின் விளைவுகளைக் குறைக்குமுகமாக ஆய்கருவியைப் பகுதிவெற்றிடமொன்றில் ஏற்றி இரு முறைகளையும் பயன்படுத்தினுர். ஆடறகால முறையில், தொங்கல் தொகுதியொன்றின் ஆடற் காலமானது இரு நிலைகளில்

அளக்கப்படுகிறது ; அவற்றை "அண்மை நிலை", "சேய்மைநிலை" என்க. இரண்டாவது முறைக்குரிய இவ்வொழுங்குகளின் இடைப்படங்கள் படம் 6·24 (*a*) யிலும் (*b*) யிலும் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. "அண்மை நிலையில்" தொங்கல் தொகுதிமீது பெரிய குண்டுகளால் ஆகும் கவர்ச்சி ஆடற் காலத்தைக் குறைக்குமுகமாகவே ஆற்றுகிறது ; "சேய்மை நிலையில்" அது பெரிதாக்கப்படுகிறது. பிறௌனின் ஆராய்ச்சியில் இவ்விரு ஆடற் காலங்களினதும் வித்தியாசம் கிட்டத்தட்ட 46 செக்கன்களாய் இருந்தது.

போய்ஸ், பிறௌன் ஆகியோரின் ஆராய்ச்சிகளைப் படித்த பின்னர், இரண்டாவது முறைமட்டுமே மிகு திருத்தமான விளைவைத் தரக்கூடும் என்னும் முடிவுக்கு **ஹைல்** வந்துள்ளார்.

முறையே பொன், பிளாற்றினம், ஒளியியற் கண்ணடி எனபவற்றால் ஆன சிறு திணிவுகளைப் பயன்படுத்தி மூன்று அளவீட்டுத் தொடர்கள் நடாத்தப்பட்டன. இவற்றிலே கணிப்பு நேரங்கள் பார்வையால் நோக்கி நேரம் பதிகருவியொன்றால் பதிவு செய்யப்பட்டன ; வானேக்கு நிலையமொன்றின் நேரவறிகுறிகளைப் பயன்படுத்தி நேரம்பதிகருவி நியமமாக்கப்பட்டது. ஆய்கூடமானது கட்டளைகள் பணியகத்திலுள்ள, மாறா வெப்பநிலையுடைய, 12 மீ. ஆழத்திலுள்ள நிலவறையொன்றாகும் ; அது இரு அறைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டது. முறுக்கற்றராசு சிறிய அறையிலும் நோக்கும் ஆய்கருவி பெரிய அறையிலும் அமைக்கப்பட்டிருந்தன.



படம் 6·24. ஹைலின் முறையால் ஈர்ப்புமாறிலி துணிதலின் தத்துவம்.

பெரிய குண்டுகளின் சடம் 0·90 சதவீதத்தில் காபன் கொண்டுள்ள உருக்கு ஆகும் ; அதன் அமைப்பு மிகப் பெருமளவிற் சீராக இருக்கிறபடியாலும் அதன் கூறுகள் மிகக் குறைந்தவளவில் தனியாக்கும்

இயல்பு உடையதாதலாலும் அச்சடம் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டது. ஊது துளைகளையும் குழாய்களையும் அதில் தவிர்க்கும் பொருட்டு 30 சமீ. விட்டமுடைய உருக்குக் கட்டியொன்று 20 சமீ. விட்டம் அடையும்வரை உலைக்களத்தில் பதனிட்டுப் பின் குளிரவிட்டுக் கடைசியாகக் கடைதற் பொறியில் உருவாக்கப்பட்டது. தேவைப்படும் கணிப்புக்களின் எளிமையையிட்டு அதுவரை கிட்டத்தட்ட எல்லா ஆராய்ச்சியாளரும் கோளவடிவமுள்ள திணிவுகளையே பயன்படுத்தினர். 60 கிகி. திணிவுடைய கோளமொன்றின் கடைதற்பொறியுருவாக்கலின் செயனமுறைத் தொல்லைகள் அத்துணைப் பெரிதாய் இருந்தபடியால் உருளை வடிவத்தையே ஏற்றுக் கொள்ளல் வேண்டும் என முடிவுசெய்யப்பட்டது ; இதன் விளைவாகக் கணித நிபுணருலேயே தொல்லைகளைத் தீர்க்க வேண்டியதாயிற்று.

சிறிய திணிவுகள் கோளவடிவமானவை. வெவ்வேறு சடங்கள் வெவ்வேறன கவருந் தன்மையுடையதாய் இருக்கக்கூடும் என்னும் ஐயத்தால் தூண்டப்பட்டுப் பொன், பிளாற்றினம், கண்ணுடி ஆகிய சடங்கள் பயன்படுத்தப்படவில்லை ; அது சந்தர்ப்பத்தால் நேரிட்டது. ஹைலின் ஆராய்ச்சியில் வெற்றிடத்தில் தொங்கவிட்ட பொற்குண்டுகள் இரசத்தைக் கொஞ்சங் கொஞ்சமாக உறிஞ்சின ; இவ்விரசம் ஒருவேளை அவரால் பயன்படுத்தப்பட்ட இரச அமுக்கமானியிலிருந்து வந்திருக்கக்கூடும். **போய்ஸ்** பொற் குண்டுகளைப் பயன்படுத்தினுர் ; ஆனுல் அவர் வெற்றிடத்தைப் பயன்படுத்தாதபடியால் இத்தொல்லையையிட்டு அவரது ஆராய்ச்சியைப் பற்றிக் குறைகூற இடமில்லை. பொற்குண்டுகளுக்குப் பதிலாக இலேசாக அரக்குச் சாயமிட்ட பிளாற்றினக் குண்டுகள் பயன்படுததப்பட்டன. மூன்றுவது தொகுதி கண்ணுடியாலானது ; எனவே உள் துளைகளைக் கணாுடாகக் கண்டு கொள்ளலாம்.

தங்குதன் கம்பியொன்றுற காவப்பட்ட இலேசான அலுமினியக் கோலொன்றின் நுனிகளிலிருந்து சிறிய குண்டுகள் தொஙகின. தொகுதியை அதனது நிலையியற் சமநிலைத் தானத்தினின்றுந் திரும்பலடையச் செய்யும் பொருட்டு, ஒவ்வொன்றும் கிட்டத்தட்ட 2 கிகி. இரசம் கொணடிருக்கும் இரண்டு போத்தல்கள், ஊசலிற்கு உயர்வான திரும்பல்கள் தரக்கூடிய தானஙகளில் வைக்கப்பட்டன. 15 நிமிடங்கள் சென்றதும் தொகுதி முறுக்கலால் அதனது உயர்வான வீச்சை அடைந்தது ; அடுத்து கவர்ச்சி நேர்மாருக அமையுமாறு போத்தல்கள் வைக்கப்பட்டன. தேவையான வீச்சம் கிடைக்கும்வரை இச்செயன்முறை திரும்பத்திரும்ப நடாத்தப்பட்டது.

கொள்கையை எளிதாககிப் பின்வருமாறு கூறலாம். பெரிய திணிவுகள் " அண்மை நிலை "யில் இருக்கும்பொழுது தொங்கல் தொகுதியின் முழுச்சக்தியையும் கருதுக. அதனது நிலையியற் சமநிலைத் தானத்துடன் தொங்கல் வளையானது கோணம் ψ யை ஆக்கும் கணத்தில், படம் 6·24 (c) இற் காண்க, தொகுதியின் இயக்கச் சக்தி $\frac{1}{2}I\dot{\psi}^2$ உம், அதனது தொங்கலில் சேமித்துள்ள நிலைச்சக்தி $\frac{1}{2}b\psi^2$ உம் ஆகும் ; இங்கு

சுழற்சியச்சைப் பற்றி தொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பம் I யும், தங்குதன் கம்பிக்குரிய முறுக்கன் மாதிரி b யும் ஆகும். மேலும் A ஆனது C, D என்பவற்றிற்கு அணித்தாயும், B ஆனது D, C என்பவற்றிற்கு அணித்தாயும் இருக்கிறபடியால் சிறிய திணிவுகளின் நிலைச்சக்தியைக் கருத வேண்டியதாகின்றது. இதனை $\frac{1}{2}\gamma A_1 \psi^2$ என எழுதலாம் ; இங்கு A_1 ஆனது ஒரு பெரிய திணிவையும் ஒரு சிறிய திணிவையும் தூரங்கள் r, c என்பவற்றாலாகும் தனிக் கேத்திரகணிதச் சார்பொன்றையும் கொண்ட மாறிலி ஆகும். எனவே,

$$\frac{1}{2}[I\dot{\psi}^2 + b\psi^2 + \gamma A_1 \psi^2] = \text{மாறிலி}.$$

நேரத்தைக் குறித்து வகையிட,

$$I\ddot{\psi} + (b + \gamma A_1)\psi = 0.$$

எனவே, சிறறலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலம்

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{b + \gamma A_1}}.$$

அதுபோலவே, பெரிய திணிவு ஒவ்வொன்றும் "சேய்மை" நிலையில் இருக்கின்றபொழுது

$$I\ddot{\psi} + (b + \gamma A_2)\psi = 0.$$

எனவே,

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{b + \gamma A_2}}.$$

இச்சமன்பாடுகள்

$$\gamma = \frac{4\pi^2 I (T_2^2 - T_1^2)}{(A_1 - A_2)T_1^2 T_2^2}$$

எனத் தருகின்றன.

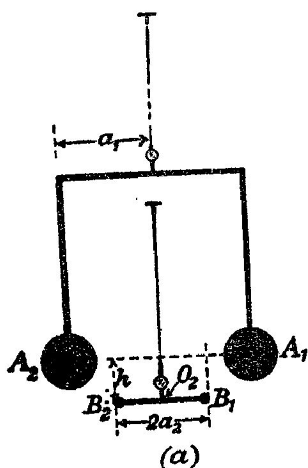
γ விற்குப் பின்வரும் பெறுமானங்கள் கிடைத்தன :—

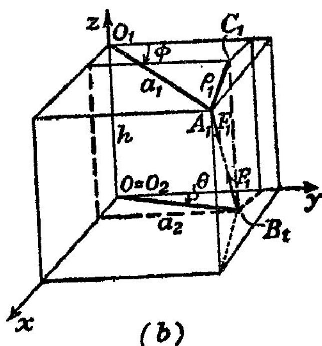
வாணிசு பூசப்பட்ட பிளாற்றினக் கோளங்கள்	$6 \cdot 664 \times 10^{-8}$ கி.$^{-1}$ சமீ.^{3} செக்.$^{-2}$			
கண்ணாடிக் கோளங்கள்	$6 \cdot 674 \times 10^{-8}$	”	”	”
சராசரி	$6 \cdot 669 \times 10^{-8}$	”	”	”

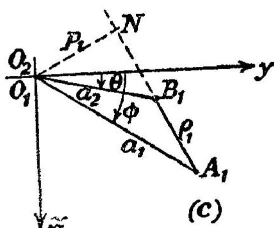
இப்பெறுமானமானது **போய்ஸ், பிறெளன்** ஆகியோர் பெற்றுள்ள பெறுமானங்களைக் காட்டிலும் சற்றுப் பெரிதாய் இருக்கின்றது ; ஹைலின விளைவுகள் காட்டும் முரண்பாட்டிற்குரிய காரணம் தெரியாது.

சாராடினிசேக்கின் (Zahradniček) பரிவுமுறையால் γ வைத் துணிதல்.— ஈர்ப்பு மாறிலி γ விற்குப் பெறுமானம் ஒன்றைக் காணும் பொருட்டுச் **சாராடினிசேக்** என்பவர் 1933 இல் பயன்படுத்திய ஆய்கருவி இரு ஓரச்சு முறுக்கற்றராசுகளைக் கொண்டுள்ளது ; அவை முறையே "முதற்றராசு" எனவும் "துணைத்தராசு" எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. ஒப்பீட்டுப் பார்க்கில்

முந்தியது திடமானது ; அது விட்டம் 0·04 சமீ. கொண்ட உருக்குக் கம்பியா லானது ; அது அதன் கீழ் முனையில் சிறு கோலொன்றைக் காவுகிறது ; பெரிய வளைவாரையுடைய குழிவாடியொன்று இடையான வளையொன்றைத் தாங்குகின்ற இக்கோலுடன் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. வளை ஏறத்தாழ 60 சமீ. நீளமுடைய இடையான பகுதியையுடையது. அதன் முனையொவ்வொன் றிலுமிருந்து சற்று அகலக் குறைவான புயமொன்று நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகின்றது ; எனவே முழுவளையும் ⊓ என்னும் வடிவமுடையது ; அது பித்தளைக் குழாயாலானது. ஒவ்வொன்றும் 5 – 10 கிகி. திணிவு கொண்ட இரு சமமான ஈயக்குண்டுகள் நிலைக்குத்தான புயங்களின் கீழ் முனைகளில், ஒரே மட்டத்தில் படம் 6·25 (*a*) யில் காட்டியுள்ளவாறு







படம் 6·25. γ வின் துணிதலுக்குச் சாராடினிசேக்கின் பரிவுமுறை.

ஏற்றப்பட்டிருக்கின்றன. துணைத்தராசு மிகச்சிறியது ; முதற்றராசின் அச் சுக்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே அதன் அச்சு அமைந்திருந்தது ; அவ்வொவ் வொன்றும் நிலையியற் சமநிலையில் இருக்கும்பொழுது எல்லாத் தாங்கும்

கம்பிகளும் குழாய்களும் ஒருதளமாய் அமைந்துள்ளன. துணைத்தராசின் வளை இட்டத்தட்ட 30 சமீ. நீளமுடைய தடித்த அலுமினியக் கம்பித் துண்டொன்றுலேயே ஆனது ; அதனது முனைகளில் திணிவு 10 கி. கொண்ட சமமான ஈயக்குண்டுகள் உள. இத்தராசும் குழிவாடியொன்றைக் கொண்டுளளது; தராசு ஒவ்வொன்றினதும அலைவுகள் வெள்ளிப்புரோமைட்டுத் தாளாற் சுற்றியுள்ள உருளையொன்றின்மீது ஒளிப்பட முறைப்படிப் பதிவு செய்யப்படுகினறன.

பல்வேறுன ஈயகுண்டுகளுக்கிடையேயுள்ள தம்முள் கவர்ச்சிகளால் ஒவ்வொரு தொகுதி மீதும் விசைகளும் இணைகளும் பிரயோகிக்கப் படுகின்றமையால், பெயர்க்கப்பட்டு விடுவித்த பின்னர் தராசு ஒவ்வொன்றும் அதனது நிலையியற் சமநிலைத் தானம பற்றி தணித்த அலைவுகளை ஆற்றுகின்றது. முதற்றராசின் தணித்தல் அற்பமானது ; எனவே பின் தொடர்கின்ற விவாதத்தில் அது புறக்கணிக்கப்படுகிறது. காற்றேட்டங்களைத் தவிர்க்கும் பொருட்டுத் துணைத்தராசானது கண்ணுடி யன்னல் அளிக்கப்பட்ட மரப்பெட்டியொன்றில அடைக்கப்பட்டு இருக்கின்றது. கண்ணுடி யன்னல் வழியே தொகுதியின் அலைவுகள் பதிவுசெய்யப்படுகின்றது. பரிசோதனையின் முதன்மையான பகுதியானது அவறறிறகிடையே பரிவுநிலை உறுதியாகும்வரை, அதாவது இரு அலைவுக காலங்களும் சமமாகும் வரை இரு தொகுதிகளையுஞ் செப்பஞ் செய்தல ஆகும்.

படம் 6·25 (b) யில் காட்டியுள்ளவாறு, துணைத்தராசினது வளையின் மையம் O_2 என்பது செவ்வக ஆள்கூற்றுத் தொகுதியொன்றின் உற்பத்தி O என எடுக்கப்படுக. நிலைக்குத்தான அச்சு Oz பற்றி அலைவுகளை ஆற்றுது இருக்கும் பொழுது துணை வளையின் அச்சு Oy ஆகும். முதல் வளையானது கோணம் ϕ ஊடாகப் பெயர்க்கப்பட்டிருக்குமிடத்துப் பெரிய குண்டுகளின மையங்களின் ஆள்கூறுகள்

$$x_1 = a_1 \text{ சைன் } \phi,\ y_1 = a_1 \text{ கோசை } \phi,\ z_1 = h$$

உம் $(-x_1,\ -y_1,\ h)$ உமாகும். இங்கு $2a_1$, இக்குண்டுகளின் மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரமும், h, குண்டுகளின் மையங்கள் கிடக்கும் தளங்களுக்கிடையேயுள்ள நிலைக்குத்துத் தூரமும் ஆகும்.

அதுபோலவே $2a_2$ நீளமுடைய துணை வளையானது கோணம் θ ஊடே பெயர்க்கப்பட்டிருக்குமிடத்து அதனுல் காவப்படும் குண்டுகளின் மையங்களின் ஆள்கூறுகள்

$$x_2 = a_2 \text{ சைன் } \theta,\ y_2 = a_2 \text{ கோசை } \theta,\ z = 0$$

உம் $(-x_2,\ -y_2,\ 0)$ உமாகும்.

நிகராக் குண்டுகளிடையேயுள்ள கவர்ச்சிகள் $F_1 = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_1^2}$ என்பதாலும், $F_2 = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r_2^2}$ என்பதாலும் தரப்படுகின்றன ; இங்கு $A_1B_1 = r_1$; $A_1B_2 = r_2$.

இவற்றின் பெறுமானங்கள்,

$$r_1^2=(a_1 \text{ சைன் } \phi - a_2 \text{ சைன் } \theta)^2+(a_1 \text{ கோசை } \phi - a_2 \text{ கோசை } \theta)^2+h^2$$
$$=a_1^2+a_2^2-2a_1a_2 \text{ கோசை } (\phi-\theta)+h^2$$

என்பதாலும்

$$r_2^2=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2 \text{ கோசை } (\phi-\theta)+h^2$$

என்பதாலும் தரப்படுகின்றன.

அடுத்து A_1, B_1 களினூடாகச் செல்லுகின்ற நிலைக்குத்துத் தளமானது A_1 ஊடே செல்லுகின்ற கிடையான தளத்தை A_1C_1 என்னும் நேர் கோட்டில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்க. அப்பொழுது $B_1C_1=h$; மேலும் $A_1C_1=\rho_1$ என எழுதினுல்

$$\rho_1^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$
$$=(a_1 \text{ சைன் } \phi-a_2 \text{ சைன் } \theta)^2+(a_1 \text{ கோசை } \phi-a_2 \text{ கோசை } \theta)^2.$$

அதுபோலவே,

$$\rho_2^2=(a_1 \text{ சைன } \phi+a_2 \text{ சைன் } \theta)^2+(a_1 \text{ கோசை } \phi+a_2 \text{ கோசை } \theta)^2.$$

C_1A_1 இற்குச் சமாந்தரமான திசையில் F_1 இன் கிடைக்கூறு $F_1\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)$; F_2 இற்கு அது $F_2\left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)$. முந்திய கூறு முறுககம $F_1\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)p_1$ ஐத் தோற்றுவிக்கிறது; இங்கு p_1 ஆனது A_1, B_1 களினூடே செலலுகின்ற நிலைக்குததான தளததிலிருநது O_1 இன் செஙகுத்துத் தூரம்.

எனினும்,

$$p_1\rho_1=2\Delta A_1O_1B_1$$
$$=a_1a_2 \text{ சைன } (\phi-\theta)$$

ஆனபடியால், துணைவளைமீது அவ்விரு கிடையான கூறுகளால ஆகும் முறுக்கமானது

$$2\,F_1.\frac{\rho_1p_1}{r_1}=\frac{2\,F_1a_1a_2 \text{ சைன் } (\phi-\theta)}{r_1}.$$

அதுபோலவே அவ்விரு விசைகள் F_2 என்பன

$$\frac{2\,F_2a_1a_2 \text{ சைன் } (\phi-\theta)}{r_2}$$

என்னும் முறுக்கததைத் தோற்றுவிக்கின்றன; இது, F_1 ஆல் ஆணதை எதிர்க்கிறது. இவ்வாறு F_1 தரும் முறுக்கத்தின் போக்குமுகமாக, விளையுள் திருப்பமானது

$$2a_1a_2 \text{ சைன் } (\phi-\theta)\left[\frac{F_1}{r_1}-\frac{F_2}{r_2}\right]=2\gamma m_1m_2a_1a_2 \text{ சைன் } (\phi-\theta)\left[\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right].$$

ϕ யும் θ வும் போதிய சிறுமையுடையனவாயின், இக்கோவை

$$2\gamma m_1 m_2 a_1 a_2 (\phi-\theta)\,\Delta$$

என ஆகின்றது; இங்கு ϕ யும் θ வும் சிறிதாயிருக்குமிடத்து கோசை $(\phi-\theta)\rightarrow 1$ ஆனபடியால்

$$\Delta=\frac{1}{[(a_1-a_2)^2+h^2]^{1\cdot5}}-\frac{1}{[(a_1+a_2)^2+h^2]^{1\cdot5}}.$$

சுழற்சியச்சுப்பற்றித் துணை வளை, அதனது பொருத்துக்கள் என்பவற்றின் சடத்துவத் திருப்பம் I எனின், முதற்றராசு இல்லாதபோது துணைத்தொகுதியின் இயக்கத்தை

$$\mathrm{I}\ddot{\theta}+\mathrm{P}\dot{\theta}+\mathrm{Q}\theta=0$$

என்பதால் எடுத்துக்கூறலாம்; இங்கு P யும் Q வும் மாறிலிகள். முதற்றொகுதி உடனிருக்கும்போது துணைத்தொகுதியின் இயக்கத்தை எடுத்துரைக்கும் சமனபாடு

$$\mathrm{I}\ddot{\theta}+\mathrm{P}\dot{\theta}+\mathrm{Q}\theta=\mathrm{H}(\phi-\theta).$$

இங்கு $\mathrm{H}=2\gamma m_1 m_2 a_1 a_2\,\Delta$. அப்பொழுது

$$\ddot{\theta}+\alpha\dot{\theta}+\beta\theta=\mu\phi\,;$$

இங்கு $\beta=\frac{\mathrm{Q}+\mathrm{H}}{\mathrm{I}}$, $\mu=\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{I}}$, முதலியன. $\phi=\hat{\phi}$ கோசை $\omega_1 t$ என, அதாவது முதற்றராசின் இயக்கம் தணிக்கப்படவில்லை எனக் கொள்வோமாயின் $\mu\phi=\hat{\chi}$ கோசை $\omega_1 t$ ஆகும்;

அப்பொழுது $\ddot{\theta}+\alpha\dot{\theta}+\beta\theta=\hat{\chi}$ கோசை $\omega_1 t$.

இங்கு கருதவேண்டியது குறிப்பிட்ட தொகையீட்டை மட்டுமே; அது இங்கே

$$\theta=\frac{\hat{\chi}}{\sqrt{(\beta-\omega_1^2)^2+\alpha^2\omega_1^2}}\text{ கோசை }(\omega_1 t-\psi)$$

ப. 41 இற் காண்க; இங்கு தான் $\psi=\frac{\alpha\omega_1}{\beta-\omega_1^2}$. துணைத்தொகுதியின இயல்பான ஆவர்த்தன காலம் f_0 ஆகுக; $\omega_0=2\pi f_0$ என்பதற்கிணங்க $\omega_0^2=\beta$ என எழுதினால்

$$\omega_0^2-\omega_1^2=\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

என இருக்கும்பொழுது துணைத்தொகுதியின் வீச்சம் ஓர் உயர்வு ஆகும்;

$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \alpha^2\omega_1^2$ என்பதை ω_1 தொடர்பாக வகையிட்டுப் பூச்சியத்துக்குச் சமப்படுத்தி இவ்விளைவு கிடைக்கப் பெற்றது. இவ்வுயர்வு வீச்சம் θ_0 எனின்,

$$\theta_0 = \frac{\hat{\chi}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \omega_0^2) + \alpha^2\omega_1^2}} = \frac{\hat{\chi}}{\alpha\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2 + \omega_1^2}}$$

$$= \frac{\mu\hat{\phi}}{\frac{2\delta}{T_2}\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{4\delta^2}{T_2^2} + \omega_1^2}}.$$

இங்கு T_2, துணைத்தொகுதியின் ஆவர்த்தன காலமும் $\frac{1}{2}\alpha T_2$ இற்குச் சமனான δ, துணைத்தொகுதியின் அலைவுவட்டமொன்றிற்காய இறக்கமும் ஆகும், தொகுதி V, ப. 347 இற் காண்க.

எனவே $$\theta_0 = \frac{\frac{H}{I}\phi_0}{\frac{2\delta}{T_2}\sqrt{\frac{\delta^2}{T_2^2} + \omega_1^2}} = \frac{HT_2}{2I\delta}\cdot\frac{\phi_0}{\sqrt{\frac{\delta^2}{T_2^2} + \omega_1^2}}$$

$$= \frac{2\gamma m_1 m_2 a_1 a_2 \Delta . T_2}{2I\delta\cdot\sqrt{\frac{\delta^2}{T_2^2} + \omega_1^2}}\phi_0.$$

$$\therefore\ \gamma = \frac{\theta_0}{\phi_0}\cdot\frac{I\delta\sqrt{\frac{\delta^2}{T_2^2} + \omega_1^2}}{m_1 m_2 a_1 a_2 \Delta . T_2}.$$

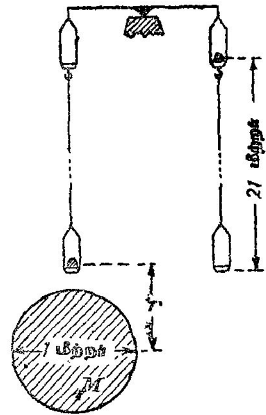
இவ்விரு தொகுதிகளின் இயக்கங்களிலே திரும்பற் புள்ளிகளை நோக்கி $\frac{\theta_0}{\phi_0}$ இற்குப் பெறுமானமொன்று கிடைக்கிறது ; அப்பொழுது $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, இங்கு T_1 முதற்றராசின் அலைவுக்காலமாகும். துணைவளை மீதும் அதனது மற்ற உறுப்புக்கள் மீதுமுள்ள கவர்ச்சியையிட்டு முக்கியமான திருத்தமொன்று பிரயோகிக்கப்படுகிறது ; அதே நேரம், முதற்றராசின் ஏறக்குறைய புறக்கணிக்கத்தக்க தணித்தலையிட்டு சிறு திருத்தமொன்று செய்யப் படுகிறது. இம்முறை திருத்தமானதொன்றாகும் ; நியாயமான குறுகிய காலத்துள் γ விற்கு அதிகமான பெறுமானங்களைப் பெற அது பயன் படுகிறது. **சாராடினிசேக்**

$$\gamma = (6{\cdot}65_9 \pm 0{\cdot}02)\text{கி.}^{-1}\,\text{சமீ.}^3\text{செக்.}^{-2}$$

என முடிவுசெய்துள்ளார்.

பொதுத் தராசொன்றைப் பயன்படுத்தும் பரிசோதனைகள்

வொன் ஜொல்லியின்† ஆராய்ச்சி.—எவ்வாறு பொதுத்தராசொன்றைப் பயன்படுத்தி ஈர்ப்புமாறிலியைத் தீர்மானித்தார் என்பது பற்றி **வொன் ஜொல்லி** 1881 இல் விவரித்துக் கூறினர். அத்தராசு மியூனிக்குப் பல்கலைக்கழகத்துக் கோபுரமொன்றின் முடியில் நிறுவப்பட்டது. இப்பரிசோதனையின் கோட்பாடானது தராசுத்தட்டொன்றிலிருந்து பல மீற்றர் தூரம் கீழே தொங்கவிடப்பட்ட பெரிய திணிவொன்றை மற்றைத் தட்டில் ஈடுசெய்தலாகும். அடுத்துக் கீழ்த் தட்டிற்குக் கீழே பெரிய ஈயத்திணிவொன்றை வைத்து தராசு மீண்டும் சமநிலையாக்கப்பட்டது. இச்சமநிலையாக்கலை மீளப் பெறுவதற்கென மேல்தட்டில் வைக்கப்பட்ட மேலதிகமான திணிவிலிருந்து, கீழத் திணிவுகளுக்கிடையேயுள்ள கவரும் விசை தெரியவந்தது; அதிலிருந்து γ கணிக்கப்பட்டது. படம் 6·26 ஆனது **வொன் ஜொல்லி** பயன படுத்திய ஆய்கருவியின வரிப்படம் ஆகும். பொதுத்தராசு ஒன்றின தட்டுக்களிலிருந்து 21 மீற்றர் நீளமுடைய கம்பிகளால் வேறு தட்டுக்கள தொங்கவிடப்பட்டன. அடுத்து ஒவ்வொன்றும் 5×10^3 கி. இரசம் கொண்ட இரு கிட்டத்தட்ட சமமான கோளங்கள், படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு, ஒன்று மேல் தடடொன்றிலும் மற்றையது கீழ்த் தட்டொன்றிலும் வைக்கப்பட்டு தராசு சமநிலையாக்கப்பட்டது. அடுத்து விட்டம் கிட்டத்தட்ட 1 மீற்றர், திணிவு $5{\cdot}775 \times 10^6$ கி. கொண்டதும் தடித்த ஈயத் தாள்களால் ஆக்கப்பட்டதுமான பெரிய கோளம் M ஆனது இரசத்தால் நிரப்பப்பட்ட பாத்திரம் இருக்கும் கீழ்த்தட்டுக்குக் கீழே வைக்கப்பட்டது. சமநிலையைப் பெறும் பொருட்டு மேல் தட்டில் தேவையான திணிவு மிகுதி μ ஆகுக. அப்பொழுது



படம் 6·26. γ ஐத் துணிவதற்கு வொன் ஜொல்லி பயன்படுத்தியுள்ள ஆய்கருவியின் கோட்பாடு.

$$\mu g = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2};$$

இங்கு m என்பது இரசங்கொண்ட கோளத்தின் திணிவும், M ஈயக் கோளத்தின் திணிவும் ஆகும்; மற்றைக் குறியீடுகள் அவற்றின் வழக்கமான அர்த்தங்களை உடையன. எனவே γ வைக் கணிக்கமுடியும்.

பரிசோதனையில் இது இத்தகைய எளிமையுடையதொன்று அன்று. நான்கு கோளங்கள் எடுக்கப்பட்டன; ஆனல் அவற்றுள் இரண்டு மட்டுமே

† *Wied. Ann.* 14, 331, 1881.

இரசத்தால் நிரப்பப்பட்டன ; நான்கும் காற்றுப்புகாவாறு அடைக்கப்பட்டன. பரிசோதனையின் தொடக்கத்தில் பாரமான இரு கோளங்கள் மேல் தட்டுக்களிலும் இலேசானவை கீழ்த் தட்டுக்களிலும் வைக்கப்பட்டன. பின்னர் தராசு சமநிலையாக்கப்பட்டது. இதனால் உயர்ந்த மட்டத்திற்கும் தாழ்ந்த மட்டத்திற்கும் இடையேயுள்ள வளியடர்த்தி மாறல்களைப் பொருட் படுத்த வேண்டியதேயில்லை. தராசின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள கோளங்கள் ஒன்றின் இடத்தில் மற்றொன்றாக மாற்றிவைக்கப்பட்டன. உயரத்துடன் புவியீர்ப்புச் செறிவு மாறுங் காரணமாகத் தராசின் சமநிலை குலைந்தது. சமநிலையை மீண்டும் பெறும்பொருட்டு மேல தட்டில் ஆகவேண்டிய திணிவு மாற்றத்தைப பயன்படுத்தி, ஆங்காங்குள்ள ஒழுங்கின்மைகளால் உண்டாகும் குழப்பங்கள் நீங்கலாக உயரத்துடன g யின் மாறல் சரிபிழை பார்க்கப்பட்டது. அடுத்துப் பெரிய ஈயக்கோளத்தை வைத்துப் பரிசோதனை மீண்டுஞ் செய்யப்பட்டது. கோளம் உள்ள, இல்லாத சந்தர்ப்பங்களுக் கிடையே நேரிடும் திணிவுநய வித்தியாசம், அதாவது $0{\cdot}589\times10^{-3}$ கி. நிறையிலிருந்து γ கணிக்கப்பட்டது.

முடிவான பெறுமானம் $D=(5{\cdot}69\pm0{\cdot}07)$ கி.சமீ.$^{-3}$ ஆகும் ; ஆனால் கோபுரத்திலே உடன்காவுகையோட்டங்கள் காரணமாக **வொன் ஜொல்லி** யின் முறையில் உயர் திருத்தத்தை எதிர்பார்க்கலாகாது.

போயின்ரிங்கின் தராசுப் பரிசோதனை.—புவியீர்ப்பு மாறிலியைத துணியும் பொருட்டு இப்பரிசோதனையில் பயன்படுததிய தராசானது நான்கடி வளை யுடைய பொன் வியாபாரத் தராசொன்றாகும். அது படம் 6·27 இல் வரிப்படமுறைப்படி காட்டப்பட்டிருக்கிறது. தராசின் வளையிலிருந்து m_1, m_2 என்னும் திணிவுகள் கொண்ட இரு சம உருண்டைகள் தொங்கவிடப் பட்டன. தராசுக்குக் கீழே சுழற்றக்கூடிய மேசை T அமைக்கப்பட்டிருந்தது ; அதன் சுழற்சி அச்சு தராசின் பொறுதி ஊடே சென்றது. மேசைமீது M_1, M_2 என்னும் இரு பெரும் திணிவுகள தாஙகப்பட்டிருந்தன ; வன்மை யயிட்டு அவை† ஈய–அந்திமனி கலப்புலோகமொன்றால் ஆனவை. M_1 இன் திணிவு M_2 இன் திணிவின் இருமடங்காகும். வளைமீது மேசையானது பிரயோகிக்கும் கவர்ச்சி அம்மேசையின் சாய்வால் மாறுகின்றதாதலால் அச்சாய்வைத் தவிர்க்கும் பொருட்டுச் சிறிய திணிவு M_2 ஐப் பயன்படுத்த வேண்டியதாயிற்று. தொடக்கத்தில் **போயின்ரிங்** M_2 ஐப் பயன்படுத்த வில்லை ; அதன் விளைவாக அவர் விளைவுகள் முரண்பட்டன. வெவ்வேறான கோளங்களிடையேயுள்ள கவர்ச்சியால் ஆகும் இணை காரணமாக ஏற் கெனவே சமநிலையாக்கப்பட்ட தராசின் வளையானது சிறு கோணத்தாற் திரும்பிற்று. m_2 இன் கீழ் M_1 வருமாறு மேசை இருசெங்கோணத்தாற் சுழற்றப்பட்டது ; வளையின் கோணநிலை மாற்றம் நோக்கப்பட்டது.

†கலப்புலோகமொன்றின அடர்த்தியைச் சீரானது என உறுதிப்படுத்த முடியாதபடியால் அதனை இப்பரிசோதனையில் பயனபடுத்தலாகாது எனப் **போயிஸ்** குறை கூறுகிறா ; ஏனெனில் அது சீராக இராவிட்டால கோளத்தின புவியீாப்பு மையம் அதன கேத்திரகணித மையத்துடன பொருந்தாது எனபதேயாம்.

வளைமீது மேசையும் அது காவும் சுமைகளும் பிரயோகிக்கும் கவர்ச்சியை அறியோம் ; எனவே இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற விளைவுகளிலிருந்து γ வைக் கணிக்க இயலாது. இக்கவர்ச்சியைத் தவிர்க்கும் நோக்குடன் திணிவுகள் m_1, m_2 ஆகிய ஒவ்வொன்றையும் ஓரடி உயர்த்திப் பரிசோதனை மீண்டுஞ் செய்யப்பட்டது. கீழ்வரும் அண்ணளவான கணிப்பில் எவ்வாறு γ கிடைத்தது என்பது காட்டப்படும் ; இங்கு வெவ்வேறு கோளங்களுக்கிடையேயுள்ள குறுக்குக் கவர்ச்சியைப் புறக்கணிப்பது அண்ணளவுகளுள் ஒன்று கும். தொகுதியின் கேத்திரகணிதவமைப்பு பூரணமாகச் சமச்சீரானது எனவும் கொள்ளப்படும் ; இது இன்னுமோர் அண்ணளவாகும்.

படம் 6·27. புவியீர்ப்பு மாறிலியையும் புவியின் இடை அடர்த்தியையும் துணிதலுக்கான போயின்ரிங்கின் தராசுப் பரிசோதனை.

படம் 6·27 இல் முழுக் கோடுகளாற் காட்டியுள்ளவாறு திணிவுகள் அமைந்திருக்கும்பொழுது தராசின் சமநிலை

$$\left[m_1g + \gamma \cdot \frac{m_1M_1}{r_1^2}\right] l = \left[m_2g + \gamma \cdot \frac{m_2M_2}{R_1^2} \cdot \text{கோசை } \theta_1\right] l + \kappa_1 + a\psi_1$$

என்பதால் எடுத்துரைககப்படுகிறது ; இங்கு κ_1 என்பது வளைமீதுள்ள கவர்ச்சியால் ஆகும் திரும்பல் விளைவைக் குறிக்கும் மாறிலியும், ψ_1 என்பது வளையின் கோணவிலகலும், a மாறிலியொன்றும் ஆகும்.

மேசையானது கோணம் π ஆற் சுழற்றப்பட்டதும் அதற்கு ஒத்த சமன்பாடு

$$\left[m_1g + \gamma \cdot \frac{m_1M_2}{R_1^2} \cdot \text{கோசை } \theta_1\right] l = \left[m_2g + \gamma \cdot \frac{m_2M_1}{r_1^2}\right] l + \kappa_2 + a\psi_2.$$

இவற்றைக் கழிக்க,

$$\gamma\left[\frac{m_1M_1}{r_1^2}-\frac{m_1M_2}{R_1^2}.\text{ கோசை }\theta_1\right]l$$
$$=\gamma\left[\frac{m_2M_2}{R_1^2}.\text{ கோசை }\theta_1-\frac{m_2M_1}{r_1^2}\right]l+(\kappa_1-\kappa_2)+a\beta_1.$$

இங்கு உண்மையிலே அவதானித்த பெறுமானம் $(\psi_1-\psi_2)$ இற்குப் பதிலாக β_1 ஐ எழுதுகிறோம்.

சிறிய கோளங்களை ஓரடி தூரம் உயர்த்தியபொழுது மேற்படிச் சமன்பாடு

$$\gamma\left[\frac{m_1M_1}{r_2^2}-\frac{m_1M_2}{R_2^2}.\text{ கோசை }\theta_2\right]l$$
$$=\gamma\left[\frac{m_2M_2}{R_2^2}.\text{ கோசை }\theta_2+\frac{m_2M_1}{r_2^2}\right]l+(\kappa_1-\kappa_2)+a\beta_2.$$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து κ_1 ஐயும் κ_2 ஐயும் நீக்க,

$$\gamma\left[m_1M_1\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)-m_1M_2\left(\frac{\text{கோசை }\theta_1}{R_1^2}-\frac{\text{கோசை }\theta_2}{R_2^2}\right)\right.$$
$$\left.-m_2M_2\left(\frac{\text{கோசை }\theta_1}{R_1^2}-\frac{\text{கோசை }\theta_2}{R_2^2}\right)+m_2M_1\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)\right]l=a(\beta_1-\beta_2).$$

மாறிலி a இன பெறுமானத்தைக் காணும்பொருட்டுக் கவருங் கோளங்களை அப்புறப்படுத்தி, பொருத்தமான தட்டுக்களிலிருந்து சிறிய திணிவுகள் தூங்கும்பொழுது தராசைச் சமநிலையாக்கி, வளையில் திணிவு μ கொண்ட ஏறியொன்றைத் தூரம் s ஆல் அரக்கிவைத்து, அச்செய்கையால் வளை உணரும் கோணவிலகல் ϕ நோக்கப்படுகிறது. அப்பொழுது

$$a\phi=\mu gs.$$

எனவே γ வும், அதிலிருந்து D யும் கணிக்கப்படுகின்றன. பேமிங்கம் மாநகரிலே, மேசன் கல்லூரியிலே, நிலவறையொன்றிலே, பரிசோதனை யறை அமைக்கப்பட்டது ; அதனுள் வெப்பநிலைமாறல் விகிதங்கள் தோன்றாத வாறு **பொயின்ரிங்** தக்க ஏற்பாடுகள் செய்தார் ; இறுதிச் செப்பஞ் செய்கைகள் எல்லாம் வெளியிலிருந்தே நடாத்தப்பட்டன. தொலைகாட்டி யொன்றைப் பயன்படுத்தியே விலகல்கள் நோக்கப்பட்டன. தூரங்கள் எல்லாம் திட்டமாகவே அளக்கப்பட்டன. ஈற்றில்

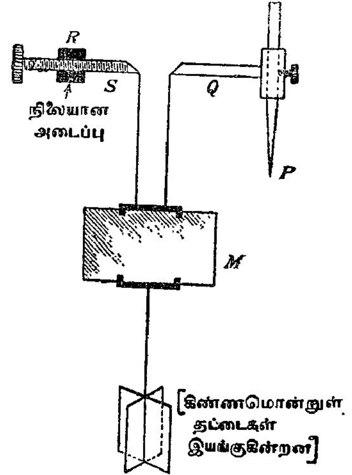
$$\gamma=6{\cdot}6984\times10^{-8}\text{ கி.}^{-1}\text{ சமீ.}^{3}\text{ செக்.}^{-2}$$ எனவும்

$$D=5{\cdot}4934\text{ கி. சமீ.}^{-3}$$ எனவும்

கிடைக்கப்பெற்றன.

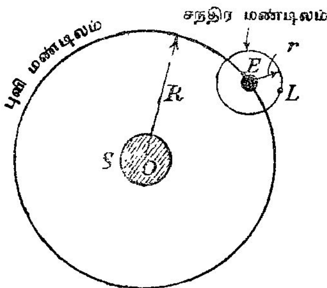
சிறு கோண விலகல்களை நோக்கும் ஒரு முறை.— முன் கூறியுள்ள பரிசோதனையில் வளையின் சிறு கோணவிலகல்களை அளக்கும்பொருட்டுக் **கெல்வின்** திட்டமிட்ட இரட்டைத் தொங்கலாடிமுறையைப் **பொயின்ரிங்** பயன்படுத்தினர். கிடையான திருகு S இன் முனை, திருகின் அதே

கோட்டிலுள்ள புயம் Q இன முனை ஆகியவற்றிலிருந்து நூல்களால் ஆடி M தாங்கப்பட்டிருக்கிறது, படம் 6·28 ; [3 அல்லது 4 மிமீ. இடைத் தூரமுள்ள சமாநதர நூல்களைப் **பொயின்ரிங்** பயன்படுத்திய போதி லும் நூல்கள் ஒன்றிற்கொனறு சமாந்தரமாக இருக்க வேண்டியதே யில்லை.] வரிப்படத் தளத்துக்குச் செங்குத்தான தளமொன்றில் ஊஞ்சலாடு கினற தராசுச் சுட்டிக்குச் செங்குத் தாகப் புயம் Q பொருத்தப்பட்டி ருக்கிறது. Q ஆனது முன்முகமா கத் தூரம் a யினூடு அசையுமாறு சுட்டி ஊஞ்சலாடுகிறது எனக்கொள்க. அப்பொழுது, ஆடி சுழலும் கோணம் $\frac{a}{d}$; இங்கு d என்பது S, Q என்பவற றிற்கிடையேயுள்ள தூரம். எனவே இவ்வொழுங்குமுறையின் உணர்திற னது தூரம் d இற்கு நேர்மாறு விகிதசமம். **போயின்ரிங்** பயன்படுத்திய ஆய்கருவியினது ஆடியின விலகல் தராசு வளையின விலகலின 150 மடங்காகும். கிண்ணமொன்றிலுள்ள இலேசான மசகு எண்ணெயில் அசை கின்ற நான்கு தட்டைகளை ஆடியுடன் இணைத்து ஆடியின் இயக்கத்தைத் தணித்தல் இன்றியமையாதது.



படம் 6·28. சிறு கோணவிலகல்காண் கெல்வின் முறையின் கோட்பாடு.

இரு கோள்களின் திணிவுகளை ஒப்பிடுதற்குரிய அண்ணளவான ஒரு முறை.—கோள்களுள் ஒன்றிற்கு உப கோளொன்று இருக்குமிடத்து மட்டுமே இம்முறை பயன்படும். மண்டிலங்களை வட்டங்கள் எனக் கொள்ளலாம். எடுத்துக்காட்டாகப் புவி, ஞாயிறு என்பவற்றின் திணிவுகளை ஒப்பிடு வோம்.



படம் 6·29. புவி, சந்திரன் என்பவற் றின் மண்டிலங்கள். [இவை வட்டவடிவ மானவை எனக் கொள்ளப்படுகின்றன, ஆனல் அவை அளவுத்திட்டப்படி வரை யப்படவில்லை.]

இவ்வொப்பீட்டையிட்டு S ஞாயிறும் M அதன் திணிவும், E புவியும் m அதன் திணிவும் ஆகுக, படம் 6·29. சந்திரனாகிய L இன் திணிவு μ ஆகுக. அப்பொழுது புவி, சந்திரன் என்பவற் றின் மண்டிலங்களின் சராசரி ஆரை கள் முறையே R உம் r உம்

ஆயின்,

$$\gamma \frac{Mm}{R^2} = m\omega_1^2 R.$$

இங்கு ω_1 புவியின் கோணவேகமும், γ ஈர்ப்பு மாறிலியுமாம்.

$$\therefore \ \gamma M = \omega_1^2 R^3.$$

அதுபோலவே

$$\gamma m = \omega_2^2 r^3.$$

$$\therefore \ \frac{m}{M} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^3;$$

இங்கும் பொதுவாக, T ஆவர்த்தன காலத்தைக் குறித்தால் $\omega = 2\pi T^{-1}$. எனவே அவதானித்த புவி, சந்திரன் என்பவற்றின் ஆவர்த்தன காலங்களையும், முறையே ஞாயிறு, புவி என்பவற்றிலிருந்து புவி, சந்திரன்களின் தூரங்களையும் கொண்டு, புவி, ஞாயிறுகளின திணிவுகளை ஒப்பிடலாம்.

ஈர்ப்பு வீச்சு.—கவரும் பொருள்களின் இடைத்தூரமானது கோள்களிடையேயுள்ள தூரங்கள் போல் பெரிதாய், **போய்ஸ்** முதலியோரின் ஆராய்ச்சிகளில் குண்டுகளுக்கிடையேயிருந்த தூரங்கள் போல் சிறிதாய் இருப்பினும், ஈர்ப்பு விதி உறுதியானது எனப் பரிசோதனைச் சான்றுகள் சுட்டுகின்றன. பரப்புக்களிடையேயுள்ள ஒட்டற்பண்பானது மாறுந் தன்மையுடையபடியால், அப்பண்பு ஈர்ப்பு விசைகளாலானது ஆயின் அப்பொழுது பொருள்கள் ஒன்றோடொன்று "தொடுகை" யில் இருக்கும் அளவிற்கு அவற்றின் இடைத்தூரம் நுணுக்காயிருக்குமிடத்து இவ்விதி மாறியமையக்கூடும்.

ஈர்ப்பு உட்புகவிடுமியல்பும் பளிங்குகளின் கவர்ச்சியும்—மின்புலங்களிற் படிகம் போன்ற பளிங்குத் திரவியங்களின் பண்பானது அப்புலத்தைக் குறித்துப் பளிங்கின் அச்சுக்களின திசையளியைச் சார்ந்துள்ளது என்பது நன்கு தெரிந்ததே; ஆனால் அத்தகைய பளிங்கொன்றின் நிறையை அளந்தபோது அது ஈர்ப்புப் புலத்தைக் குறித்துக் கொண்டிருக்கின்ற திசையளியைச் சாராது எனத் தோற்றுகிறது, அதன் நிறைமாறாது இருந்தமையே காரணம். மேலும் மின்னேற்றம் பெற்ற பொருள்களுக்கு அல்லது காந்த முனைவுகளுக்கு இடையேயுள்ள கவரும் விசையானது அவை பதிந்திருக்கின்ற அல்லது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள ஊடகத்தின் இயல்பைச் சார்ந்திருந்தது. ஈர்ப்புப் புல விசைகள் தொடர்பாக அதற்கு ஒத்ததெதுவும் ஒருபோதும் கண்டுபிடிக்கப்படவில்லை. போய்ஸின் முறுக்கற்றராசை மாற்றியமைத்து இவ்விடயத்தை ஒஸ்ரினும் துவிங்கும்† (Austin and Thwing) பரிசோதித்தனர். குண்டுகளுக்கிடையே ஈயம், இரசம், கிளிசரோல் முதலியவற்றால் ஆன திரைகள் வைக்கப்பட்டன; ஆனால் தொங்குங் குண்டுகளைக் காவும் வளையின் விலகலில் உறுதியாக உணரத்தக்க அளவில் மாற்றங்கள் எதுவும் ஏற்படவேயில்லை.

† *Physical Review.*, 5, 294, 1897.

ஈர்ப்புக்கவர்ச்சி பற்றிய கொள்கைகள்.—சடப்பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள கவரும் விசை பற்றித் தொடர்பியற பொதுக்கொள்கை தரும் விளக்கத்தைத் தவிர்ந்த திருத்தியளிக்கக்கூடிய வேறெதுவும் இல்லை ; ஆயினும் வெளியிடப்பட்ட ஏனைய கொள்கைகள் மீது கண்ணோட்டம் செலுத்தின் அது பயனளிக்கக்கூடும்.

(i) லே சாகேயின் (Le Sage) கொள்கை.—1782 இல் ஜெனீவா மாநகரத்தைச் சேர்ந்த **லே சாகே** என்பார் ஈர்ப்புவிசையை விளக்குமுகமாகக் கொள்கையொன்றை வெளியிட்டார். அக்கொள்கையின்படி வெளியிலே, எண்ணிறந்த சிறு துணிக்கைகள், எல்லா எழுமாற்றுத திசைகளிலும் இயங்கிக் கொண்டிருக்கின்றன எனக் கருதப்பட்டது ; சாதாரணச் சடப்பொருட்களுக்கு இத்துணிக்கைகளை உட்புகவிடும் ஆற்றல் பெருமளவில் உள ; ஆனால் முற்றிலும் அன்று. சுயாதீன வெளியிலே, எனவே இத்துணிக்கைகளின் மோதுகைக்கு முற்றிலும் திறந்தமுகமாக, உள்ள சடப்பொருளானது ஈற்றில் அம்மோதுகையின் விளைவாக எவ்வேகத்தையும் அடையமாட்டாது ; ஏனெனில் ஒரு பக்கத்து மோதுகைகளின தொகை அதன் எதிர்ப்பக்கத்து மோதுகைகளின் தொகைக்குச் சமன். எனினும், இரு பொருட்கள் உடனிருக்கும் பொழுது ஒரு பக்கத்து மோதுகையானது எதிர்ப்பக்கத்து மோதுகையைக் காட்டிலும் குறைவாய் இருக்கும் ; எனவே அவை ஒன்றையொன்று நோக்கி அசையும். இக்கொள்கையைக் கொண்டு ஈர்ப்பு விதியை அளவறிமுறையில் விளக்கும் பொருட்டு, அடர்த்தி மிக்க எச்சடப்பொருளினூலும் மோதும் துணிக்கைகளின் ஒருசிறு பகுதியே நிறுத்தப்படுமாறு எல்லாச் சடப்பொருட்களிலுமுள்ள அணுக்களிடையேயுள்ள தூரங்கள் அணுப் பரிமாணங்களைக் காட்டிலும் பெரியன எனக் கொள்ள வேண்டியதாகிறது ; இன்று இது உண்மை என நாம் அறிவோம்.

மாக்ஸ்வெல் என்பார் கீழ்வரும் நியாயங்களைக் காட்டி இக்கொள்கையை மறுத்துள்ளார்.

(a) சிறு துணிக்கைகளின் வேகங்கள் விண்பொருட்களின் வேகங்களைக்காட்டிலும் மிகமிகப் பெரியதாய் இருத்தல்வேண்டும் ; இல்லாவிடில் அத்துணிக்கைகள் கோள்களின் இயக்கத்தைத் தடுக்கும் ஊடகமொன்றாக விளங்கும்.

(b) ஈர்ப்புவிசைகள் உடனடியாகச் செலுத்தப்படமாட்டா. எடுத்துக்காட்டாக, குறிப்பிட்ட ஒரு கணத்தில் ஞாயிற்று முகமான புவியின் அரைமுடுகலானது, கருதப்படும் கணத்திற்குச் சற்று முன்பாக அதாவது புவியை அடைகின்ற சிறு துணிக்கைகள் ஞாயிற்றுக்கு அணித்தாய்ச் செல்லும்போது ஞாயிறு இருந்த திசையிலேயே அமையும்.

(c) ஓர் இறுத்தல் சடம் மீதுள்ள ஈர்ப்பு விசைகளின் விளக்கத்தையிட்டுத் துணிக்கைகளின் சக்திச் செலவுவீதம் கிட்டத்தட்ட 10^{12} அடி.இ.நிறை.செக்.$^{-1}$ ஆகும் ; இது பிரபஞ்சத்திலுள்ள எல்லாச் சடப்பொருள்களும் மிக விரைவில் வெண் வெப்பத்தை அடையப்போதியதாகும்.

(ii) **சல்லிசின் (Challis) கொள்கை.**—மீள்தன்மைப் பாயி ஒன்றிலுள்ள அலைகள் அப் பாயியில் அமிழ்ந்திருக்கும் பொருளொன்றைச் சாடி நின்று இயக்கிவைக்கின்றன ; பொருளின் ஏக பரிமாணங்களைக் காட்டிலும் அலை நீளம் மிகப்பெரிதாய் (அல்லது மிகச் சிறிதாய்) இருப்பதறகேற்ப இயக்கம் குழப்பமையமுகமாக (அல்லது அதற்கு எதிராக) அமையும், என்பதே இக்கொள்கையின் அடிப்படை.

(iii) **கெல்வினின் கொள்கை.**—இக்கொளகையினபடி எல்லா வெளியும் நெருக்கமுடியாப் பாயி ஒன்றால் நிரப்பபபட்டிருக்கிறது ; எல்லாச் சடப் பொருள்களும் இப்பாயியைத் தொடர்ந்து, மாறு வீதத்தில பிறப்பித்துக் காலுகின்றன ; காலபபட்ட பாயியானது முடிவிலி முகமாகப் பாய்கிறது ; இல்லையேல், முடிவிலியிலிருந்து வருகின்ற பாயி சடப்பொருட்களால் உறிஞ்சப்பட்டு அழிவுறுகிறது. நிகழச்சி எதுவாகிலும் பொருள்களுககிடை யில் அவறறின் இடைத்தூரத்தின வர்க்கத்துடன நேர்மாறு விகிதசமமாக மாறும் கவரும் விசையொனறு உளது எனக் **கெல்வின்** நிறுவினர்.

“இவ்வெலலாக் கொள்கைகளினிடத்தும் வேலைச்செலவு வேண்டியதா கினறது. இவற்றின்படி இயறகை முறைகளைச் சகதிக்காபபு என்னும் மகத்தான கோட்பாட்டின் எடுததுக்காட்டுக்கள் என்று கருதாமல், அவை இக்கோட்பாட்டிற்குக் கீழ்ப்படியாத சக்திகளைத திட்டமாக அமைத்து வருகினற தோறறச் சக்திக்காப்புக கோட்பாடொன்றை ஆதரிக்கும் எடுத்துக்காட்டுக்கள எனக் கருப்படுகின்றன. எனவே இக்கருதுகோள்களின் படி ஈர்ப்பின் விளக்கத்தைப் பெறவியலாது என்னும் முடிவுக்கு நாம் வரவேண்டியதாகின றது” என **மாக்ஸ்வெல்** கூறியுள்ளார். இதுவே **மாக்ஸ்வெலின்** கருத்து. ஆனால் இன்று வாயுக்களின் இயக்கக்கொள்கை தொடர்பாக பூரண மீள்தனமை மோதுகை எனனும் கருதது வழக்காயிற்று ; எனவே **லே சாகேயின்** கொள்கை பறறி இவ்வெதிர்ப்பைக் கூறலாகாது.

(iv) **தகைப்புக் கொள்கை.**—மின் புலமொனறிலுள்ள விசைககுழாய் கள் வழியே இழுவைகளும் அக்குழாய்களுக்குச் செங்குததாக அமுக்கங களும் உள என **மாக்ஸ்வெல்** காட்டியிருக்கிறர். அவற்றின் குறிகளை நேர்மாறுக்கி, அதேபோன்ற தகைப்புக்களின் தொகுதியொன்றால் சடப் பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள கவர்ச்சியை விளக்க முடியும்.

(v) **மின்னியற் கொள்கை.**—சடப்பொருளின் அணுக்கள் ஒவ்வொன்றும் அதனது இயல்பான நிலையில், இலததிரன்களாற சூழப்பட்ட, நேர்மின் னேற்றம் கொண்ட கருவொன்றால் ஆனது ; கருவின் நேர்மின்னை அவ் வெல்லா இலத்திரன்களினதும் முழு மறைமின்னனது சரியாக ஈடுசெய்யு மாறு அவற்றின் தொகை அமைந்திருக்கிறது. அலகு நேரேற்றமொன்றிற்கும் அலகு மறையேற்றமொன்றிற்குமிடையேயுள்ள கவர்ச்சி, ஒரே குறியையுடைய இரு அலகேற்றங்களிடையே தள்ளுகையைக் காட்டிலுஞ் சற்று விஞ்சி இருக்குமானல் இவ்விரு விசைகளுக்குமிடையேயுள்ள வித்தியாசத்தைப் பயன்படுத்தி ஈர்ப்புக் கவர்ச்சியைக் குறைவின்றி விளக்க முடியும்.

(vi) அயின்ஸ்ரைனின் தொடர்புக் கொள்கையும் ஈர்ப்பும்.—நியூற்றன் என்பவரின் இயக்கவிதிகளேயும் அவரது ஈர்ப்புக் கொள்கையையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு வான்பொருட்களின் இயக்கங்கள் பற்றி வியப்பளிக்கும் வகையில் திட்டமாக விளக்கியதுமன்றி எதிர்வுகூறியும இருக்கிறபடியால் அவ்விதிகளேயும் கொள்கைகளேயும் பற்றி ஐயமுறுவது ஒரு "நிந்தனே" எனப் பல்லாண்டுகாலமாகக் கருதப்பட்டு வந்தது. எனினும் சென்ற நூற்ருண்டின ஈற்றில் பிரச்சினைகள் தோனறலாயின ; காலஞ்செல்லச் செல்லப் புதுப்பிரச்சினைகளும் தோன்றின. முதலாவதாகப் பொருளொன்றின் திணிவானது அப்பொருளின் வேகத்தைப் பொறுத்திருக்கும் மாறியொன்றெனத் தெரியவந்துள்ளது ; இரண்டாவதாக, இரு புள்ளிகளின் இடைத்தூரமானது அதை அளக்கும் நோக்குநரின் அசைவைப் பொறுத்திருக்கிறது ; எனவே நீளம் எனனும் கருத்தானது அது தோறறுவது போல் அத்துணை எளியதனறு.

மேலும் பழைய பொறியியலானது எவ்வாறு இரு பொருடகளுக்கிடையே கவரும விசை எழுகின்றது என்பது பற்றி அறிய யாதொரு முயற்சியும் எடுக்கவில்லே ; எனினும் இவ்விசையாலேயே பொருளொனறு வேருென்றிலிருந்து எவ்வளவு தொலேவில இருககிற பொழுதும அப்பொருள மீது விளேவுகளேப் பிறப்பிக்கக்கூடியதாக இருக்கிறது. **அயின்ஸ்ரைன்** எனபார் **(1915)** இப்பிரச்சினேகளேயும் வேறு பலவற்றையும் அவர்தம தொடர்புக் கொள்கையால் தீர்த்துள்ளார். அயின்ஸ்ரைனின் கொள்கையின்படி, ஞாயிற்றைச் சுற்றி மண்டிலமொனறை வரையும் கோளானது நேர்கோடொன்றில் சீரான வேகததுடன் அசைகின்ற பொருளொன்றின் அதே நிலேயில் இருக்கிறது. மேறபடி மண்டிலமானது ஞாயிறருல அதனேச் சூழ்ந்திருக்கின்ற வெளி–நேரத் தொடரகத்தில ஆகினற வளேவுககு ஒப்பானதொன்றின விளேவாகும். 'இத்தொடர்பியல் வெளியில' விகாரப்படைககு ஆளாகாத பொருளொன்றின் பாதையானது ஒருபோதும் எகபரிமாணமாய் அமையாது. "விசை" பற்றிய முழுக் கருத்தும் கைவிடப்படுகிறது ; கோளின் எகபரிமாணமல்லா இயக்கமானது திரிபடைந்த வெளியால் முறறிலும ஆகிறது எனக் கருதப்படுகிறது.

திட்டமாகக் கூறுமிடத்து, நியூற்றனின ஈர்ப்பு விதியானது வலிமை குறைந்த ஈர்ப்புப் புலங்களினிடத்து மட்டுமே பயன்படும் என இககொள்கை காட்டுகிறது. மேலும் அயின்ஸ்ரைனின் கொள்கைப்படி கோள மண்டிலத்தின் பேரியச்சு மெதுவாகவே சுழலவேண்டும். புதன் என்னும் கோளினிடத்து மட்டுமே இச்சுழற்சியை அளக்க முடிகின்றது. கோள்களின இயக்கத்திலுள்ள இத்தோற்ற முரண்பாடானது தொடாபுக கொள்கையின் தோற்றத்துக்கு முன்பே தெரிந்திருந்தது ; அது பழைய பொறியியலுக்கு உண்மையான முட்டுக்கட்டையாக இருந்தது. சுழற்சியானது நூற்ருண்டு ஒன்றில் **43″** ஆகும் எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது ; இது தொடாபியற் கொள்கையுடன ஒத்திருக்கிறது ; ஆனுல் நியூற்றனின் கொள்கையில் இதற்கு விளக்கமெதுவுமில்லே.

மேலும் அயின்ஸ்ரைனின் கொள்கைப்படி, ஒளிக்கதிர் திணிவு உடையது எனவும், கதிரின் வேகம் மிகப்பெரிதாய் இருக்கிறபடியால் அத்திணிவை எவ்வகையிலேனும் புறக்கணிக்க முடியாது எனவும் தெரியவருகிறது. இதன் விளைவாக வலிமைமிக்க ஈர்ப்புப் புலம் ஊடாகச் செல்லும் ஒளிக்கதிர்கள் விலகலுற வேண்டும். நியூற்றன் கூறியவாறு ஒளியானது துணிக்கைகளாலானது எனின், அவரது கொள்கையின்படி ஞாயிற்றிற்கு அணித்தாய்ச் செல்லும் ஒளிக்கதிரானது θ அளவால் விலகலுறவேண்டும்; ஆனால் அயின்ஸ்ரைனின் கொள்கைப்படி அது 2θ ஆதல் வேண்டும். 1919 வைகாசி மாதம் நிகழ்நத முழுக்கிரகணம் இச்செய்தியின் சோதனைக்கு வாய்ப்பாயிருந்தது. இச்சோதனையின் பொருட்டு அனுப்பியுள்ள குழுவினர் பெற்ற விளைவு, 1919 கார்த்திகைத் திங்கள் வெளியிடப்பட்டது; அது, புதுக் கொள்கைக்கு உடனடியான ஒரு மகத்தான வெற்றியை அளித்தது.

கடைசியாக வான்பொருளொன்றின் பரப்பிலிருககின்ற அருட்டிய அணுவொன்றுற் காலப்படும் ஒளியின் மீடிறனுனது, சுயாதீன வெளியில் அல்லது சிறு பொருளொன்றின் பரப்பிலுள்ள அதுபோன்ற அருட்டிய அணுவால் காலப்படும் ஒளியின் மீடிறனைக் காட்டிலுஞ் சற்றுச் சிறிதாய் இருத்தல் வேண்டும என **அயின்ஸ்ரைன்** காட்டியுள்ளார். எனவே குறிப்பிட்டவோர் அணுவினத்திற்கு பரிசோதனைக்கூடத்தில் காலப்படும் அதனது திருசியக் கோடுகளுடன் உடுக்களிலுள்ள அதே அணுவினத்தாற் காலப்படும் திருசியக் கோடுகளை ஒப்பிடுமிடத்து திருசியத்தின் சிவப்பு முனை முகமாகப் பெயாக்கப்படவேண்டும். இப்பெயர்ச்சியின் அளவு

$$1-\frac{f}{f_0}=\frac{\gamma}{c^2}\frac{M}{r};$$

இங்கு f_0 புவிக்குரிய மீடிறன், f உடுவணுவாற் காலப்படும் ஒளியின் மீடிறன், γ நியூற்றன மாறிலி, c ஒளி வேகம், M வான்பொருளின் திணிவு, r அதன் ஆரை. ஞாயிற்றையிட்டு முன்னதாகக் கூறியுள்ள "சிவப்புப் பெயாவு" எனப்படும் இப்பெயர்ச்சியானது 4000 Å அலைநீள ஒளிக்கு 0·008 Å ஆகும். 1925 இல், **அடம்ஸ்** என்பார் **சிறியஸ்** என்னும் உடுவின் தோழனை அவதானித்து, 0·32 Å பெயர்ச்சியைப் பெற்றுர். மேற்படி சூத்திரத்தையும் அவதானித்த இப்பெயர்ச்சியையும் பயன்படுத்தி உடுவின் ஆரை 18,000 கிமீ. எனத் தெரியவந்தது; இது இம்முறையுடன் தொடர்பில்லாத வேறொரு முறையால் கிடைக்கப்பெற்ற பெறுமானத்துடன் ஒத்திருக்கிறது.

இதே விளைவு வானியல் விற்பன்னர்களால் **"வெள்ளைக் குள்ளர்"** என அழைக்கப்படுகின்ற குறிப்பிடத்தக்க உடுவகைகளின் திருசியங்களிலும் காணப்படுகிறது; சாதாரண சடப்பொருளின் அடர்த்தியின் 10,000 மடங்கு அடர்த்தி கொண்ட சடப்பொருளால் அவை ஆக்கப்பட்டுள்ளன எனத் தோற்றுகிறது. எனவே அவற்றினிடத்து $\frac{M}{r}$ இன் பெறுமானங்கள் **அசாதாரணமாக** இருத்தல் வேண்டும்.

கடைசியாக அயின்ஸ்ரைனின் தொடர்பியற் கொள்கையால் நியூற்றனின் ஈர்ப்பு விதி மறையவில்லை என்பது குறித்தற்பாலது. கிட்டத்தட்ட எல்லாப் பௌதிகத் தேவைகள் உட்பட எல்லா எந்திரவியல் தேவைகளுக்கும், நியூற்றனின் விதி போதிய செம்மை உடையதாகும்; ஒருவேளை பொறியியல், பௌதிகவியல் எனபவற்றின் தொடக்கநிலைப் படிப்புக்கு நியூற்றனின் இயக்க விதிகள் எக்காலமும் அடிப்படையாக விளங்கும்.

பயிற்சி VI

6·01. திணிவு m கொண்ட சிறு துணிக்கையொன்று, மெல்லிய உலோக வட்டத்தட்டொன்றின் அச்சில், அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் z இல் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. தட்டு சீரான தடிப்பு t, ஆரை a, சட அடர்த்தி ρ கொண்டதாயின் தட்டிற்கும் திணிவு m இற்குமிடையேயுள்ள ஈர்ப்புக் கவர்ச்சியைக் காண்க.

$$\left[2\pi\gamma\rho t m\left\{1-\frac{z}{(a^2+z^2)\,0{\cdot}5}\right\}\right]$$

6·02. முக்கோணியொன்று, அலகுநீளத் திணிவு முறையே λ_1, λ_2, λ_3 கொண்ட மூன்று சீரான கோல்களால் ஆனது. O ஆனது முக்கோணியுள் இருக்கின்ற புள்ளியொன்று; முக்கோணியின் பக்கங்களினின்று அதன் தூரங்கள் முறையே p_1, p_2, p_3 ஆகும்.

$$\frac{\lambda_1}{p_1}=\frac{\lambda_2}{p_2}=\frac{\lambda_3}{p_3}$$

ஆயின் O விலே துணிக்கையொன்று சமநிலையில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

6·03. புவியும் சந்திரனும் வட்டமான மண்டிலங்களில் இயங்குகின்றன எனக் கருதி, ஞாயிறு, புவி என்பவற்றின் தொடர்புத் திணிவுகளைக் கணிக்க. சந்திரனின் காலம் $\frac{1}{13}$ ஆண்டு எனவும், ஞாயிற்றிலிருந்து புவியின் தூரமானது புவியிலிருந்து சந்திரனின் தூரத்தைக் காட்டிலும் 390 மடங்கு பெரியது எனவும் தரப்பட்டிருக்கின்றன. $[0{\cdot}352\times10^6]$

6·04. ஆரை a யும் சீரான அடர்த்தி ρ வும் கொண்ட கோளமொன்றின் பரப்பிலிருந்து அதன் மையம்வரை நேரான, ஒடுக்கமான குடைபாதையொன்று துளைக்கப்பட்டிருக்கிறது. (a) அழுத்தமாறலகளைக் கருதியும் (b) வேறெந்த முறையாலும், கோளத்தின் மையத்திலிருந்து அதனது பரப்புவரை சிறு திணிவு m ஐ எடுத்துக் கொண்டு போவதற்கான வேலையைத் துணிக. $[\frac{2}{3}\pi m\gamma\rho a^2]$

6·05. திணிவு m உம் ஆரை a யும் கொண்ட மெல்லிய வட்டத்தட்டொன்றின் அச்சில், அத்தட்டத்தின் மையத்திலிருந்து தூரம் z இல், இருக்கின்ற புள்ளியொன்றிலுள்ள ஈர்ப்பழுத்தத்தையும் ஈர்ப்புப் புலவலிமையையும் காண்க. அதிலிருந்து $z=0$ இல் அழுத்தம் ஓர் உயர்வு அடைகிறது எனவும் $z=\frac{a}{\sqrt{2}}$ இல் புலவலிமை எண்ணளவில் ஓர் உயர்வு அடைகிறது எனவும் காட்டுக.

6·06. தனிமையாக்கிய சீரான கோளமொன்று ஓய்வாயிருக்கிறது; அதில் நேரான, ஒடுங்கிய, அழுத்தமான குடைபாதையொன்று துளைக்கப்பட்டிருக்கிறது. குடைபாதையில் சிறு துணிக்கையொன்று ஓய்வுநிலையிலிருந்து அசைகிறது. கோளத்துச சடத்தின் அடர்த்தி ρ வும் ஈர்ப்புமாறிலி γ வும் எனின், இயக்கத்தின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் கண்டு அது கோளத்தின் பருமனையும் குடைபாதையின் திசையையும் சாராது எனக் காட்டுக.

$$\left[T=\sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}\right]$$

6·07. கோளமொன்றின் சடத்தின் அடர்த்தியானது அதன் மையத்திலிருந்துள்ள தூரத்துடன் நேர்மாறாக மாறுகிறது. கோளத்திலுள்ள புள்ளியொன்றிலுள்ள ஈர்ப்புப் புல வலிமையானது அப் புள்ளியின் தானத்தைச் சாராது எனக் காட்டுக.

[$\rho = kr^{-1}$ எனின், $G = -2\pi k\gamma$]

6·08. ஆரை a யும் பரப்பலகொனறிற்குத் திணிவு μ வும் கொண்ட மெல்லிய வட்டத் தட்டொன்றுல், அத்தட்டின மையத்திலிருந்து தூரம் z இலும் அதன் எல்லா ஓரப் புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்திலும் இருக்கின்ற புள்ளியொனறில் ஆகும் ஈர்ப்பழுத்தத்தையும் ஈர்ப்புப் புல வலிமையையும் காண்க.

$$\left[-2\pi\gamma\mu[\sqrt{a^2+z^2}-z], -2\pi\gamma\mu\left\{1-\frac{z}{(z^2+a^2)\,0\cdot5}\right\}\cdot\right]$$

6·09. "ஈாபபுச் செறிவுப பாயம்" என்பதற்கு வரைவிலக்கணம் கூறி, சடபபொருள் ஒனறைச் சூழ்ந்திருக்கினற முடடை வடிவமுள்ள பரப்பொனறிற்குக குறுக்கே அதற்குரிய கோவையொன்றைப் பெறுக.

புவியின் சராசரி அடர்த்தியை 5·5 கி. சமீ.$^{-3}$ எனவும் ஈர்ப்புமாறிலியை $6\cdot6\times10^{-8}$ கி.$^{-1}$ சமீ.^{3} செக.$^{-2}$ எனவும் எடுததுக கொள்ள முடியுமாஞல், புவியின் ஆரையின் தொடர்பில் புவியிலிருந்து சநதிரனின் தூரத்தைக காண்க. சநதிரனின ஆவர்த்தன காலம் 28 நாள் எனக் கொள்ளலாம். [61]

6·10. ஈர்ப்புத தொடாபாகக் கோசின தேறறததைக கூறி, அதைப பயனபடுத்தி இரு சீரான கோளங்கள் ஒனறையொன்று கவருமிடத்து, அதனதன் திணிவு அதனதன மையத்தில் செறிந்திருக்கிறவாறு அவ்வொவவொரு கோளமும தொழிற்படுகிறது எனக் காட்டுக.

மேற்படி முடிவைப் பயன்படுத்தும ஏதேனுமொரு பரிசோதனையைச சுருககமாகக கூறுக

6·11. நியூற்றனின ஈர்ப்பு விதியைக கூறி, நியூறறன ஈர்பபு மாறிலிக்கு வரைவிலககணம் கூறுக.

சீரான கோளவோடொனறினுள்ளே புளளியொன்றில அவவோடாலாகும ஈர்ப்புச செறிவானது பூசசியமாகும் எனக் காடடுக. ஓட்டுககு வெளியேயுள்ள புள்ளியொன்றில் இருக்கும் செறிவுக்கு எளிய கோவையொன்றை எழுதுக.

6·12. செவ் வட்டக் கூமபொன்றின உச்சியில் அககூம்பின் அச்சுககுச் செஙகுத்தான இரு தளங்களிடையே அடஙகியுளள கூம்பினடித்துணடால் ஆகும் ஈாப்புப் புல வலிமை $-2\pi\gamma\rho l\,(1-\text{கோசை}\;\alpha)$ ஆகும எனக காட்டுக ; இஙகு அசசுவழியே கூமபினடித்துணடு நீளம் l உம், அதன சடத்தின் அடர்ததி ρ உம், ஈர்ப்புமாறிலி γ உம ஆகும்.

6·13. ஆரை a யும் அடாத்தி ρ உம் கொண்ட அரைககோளக குனறென்றிறகு வடக்கினும தெறகினும் இருக்கினற நிலையங்களில் அவதானிக்கப்பட்ட அகலாங்குகள் அககுன்றின அடியில் அவதானித்த அகலாஙகிலிருநது $\dfrac{a}{R}\left(2+\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)$ என்னும் அளவால வேறுபடுகின்றன எனக் காட்டுக ; இங்கு R புவியின் ஆரையும் ρ_0 அதன் சடத்தின் சராசரி அடர்த்தியும் ஆகும்.

6·14. (a) கெப்பிளரின கோளவியகக விதிகள், (b) அவ்விதிகளிலிருநது பெறக்கூடிய முடிவுகள் எனபவறறைபபறறிக கூறுக.

கீழ்வரும் தரவுகளிலிருந்து சநதிரனுககும் புவிக்கும் இடையேயுள்ள தூரத்தை மதிப்பிடுக :—ஈர்ப்புச் செறிவு = 980 சமீ. செக.$^{-2}$; புவியின் சராசரி விட்டம் = $1\cdot273\times10^{4}$ கிமீ., மதிமாதம் = 27·32 நாள். [புவியைச் சுற்றிச் சந்திரன் வட்ட மண்டிலமொன்றில் அசைகிறது எனக் கொள்க.]

[$3\cdot83\times10^{5}$ கிமீ.]

6·15. நியூற்றனின அடிபபடையான ஈர்பபு விதியைக கூறுக.

போய்சின் முறையால நியூற்றனின் மாறிலியைத் துணிவது பற்றி விவரித்துக் கூறி அதற்கான கொள்கையைத் தருக.

6·16. ஒவவொனறும திணிவு 20 கி. கொணட இரு சிறு கோளங்கள், ஒவ்வொனறும் 10 மீ. நீளமுடைய இலேசான இழைகளால, தாங்கப்பட்டிருக்கின்றன. கோளங்களின் மையஙகள் ஒரே கிடைத் தளத்தில் இருககின்றன. மேல முனைகளில் இழைகளின இடைத தூரம் 2 சமீ. எனின், கோளஙகளின் மையஙகளின் இடைத்தூரமானது 2 சமீ. ஐக் காட்டிலும் எவ்வளவு குறைவாயிருக்கும ? [γ வின பெறுமானததைக கொள்க.]

[$6\cdot6\times10^{-7}$ சமீ.]

6·17. ஈர்ப்பு மாறிலியின பெறுமானததை $6\cdot6\times10^{-8}$ கி.$^{-1}$ சமீ.^{3} செக.$^{-2}$ எனக கொண்டு அலகு அடர்த்தியுடைய உருண்டைக் கோளொனறிற்கு அணித்தாக வட்டமண்டிலமொன்றில சுழலும சிறு உபகோளொனறின ஆவர்த்தன காலத்திறகுப் பெறுமானமொனறைக் காணக.

[$1\cdot20\times10^{4}$ செக்.]

6·18. புவியின பரப்பிற்கு அணித்தாகவும, அதன மையம் ஊடே செலலும தளமொன்றிலும் அதைச் சுற்றித துணிகையொனறு இயங்குவதறகுத தேவையான இழிவுக கதியையும் புவியின் ஈாபபுப் புலததிலிருந்து துணிக்கையொனறின் விலகுதலேயிட்டு அதற்கு அளிகக வேண்டிய இழிவு வேகததையும் ஒபபிடுக. உமமுடைய தீாவு அணணளவாக மட்டுமே இருப்பதற்குக காரணங காட்டுக. [$1:\sqrt{2}$]

6·19 நியூற்றனின் ஈர்ப்புமாறலி γ இறகு வரைவிலக்கணஙகூறி அமமாறிலியின் பெறுமானததைத திட்டமாய்த துணிவதறகுரிய ஆய்கூட முறையொனறை விவரித்துக கூறுக

சமீ.கி.செக். அலகுகளில $\gamma=6\cdot7\times10^{-8}$, புவியின் ஆரை $6\cdot4\times10^{8}$, அதன் சராசரி அடாத்தி 5·5 என்பன ஆயின புவிப்பரபபில புவியீாபபுச் செறிவைக கணிக்க. [988 சமீ.செக$^{-2}$]

6·20. ஈர்ப்புமாறிலி என்பதற்கு வரைவிலக்கணங்கூறி, எவவாறு அம்மாறிலியின பெறுமானத்தைப் பயனபடுத்திப் புவியின் சராசரி அடாத்தியைக் கணிக்கமுடியும் என்பதை விளக்குக

கவண்டிசுப் பரிசோதனையின கோட்பாட்டைச் சுருககமாகக் கூறி, போய்ஸ் பயன்படுத்திய ஆயகருவியில் இருககின்ற நயங்களை விளககுக.

6·21. சீரான கோளத்தின ஆரை 1·0 சமீ. ஆகும. அதற்கு நேராகக் கீழேயும் அதைக் கிட்டததட்டத் தொடுமாறும், ஆரை 25 சமீ. உம், அடாததி $10\cdot4$ கி.சமீ$^{-3}$ உம் கொண்ட இரண்டாவது கோளமொனறு வைககப்பட்டால முநதிய கோளததில தோன்றும் சதவீத நிறை அதிகரிபபைக் காணக.

6·22. கமபியொன்றால தாஙகப்பட்ட 160 சமீ. நீளமுடைய, கிடையான, இலேசான கோலொன்றின எதிர்முனைகளில இரு சிறு கோளங்கள நிலையாக்கப்பட்டிருககின்றன ; முறுக்கல் அலைவுகளின் ஆவாத்தன காலம் 400 செக். ஆகும். முடிந்தவரை உயர்வு விலகலை உண்டாக்குமாறு கவருங் கோளங்களின் மையங்களின் இடைத்தூரம் 20 சமீ. ஆக இருக்கையில் அவ்வொவவொரு சிறு கோளத்திற்கும் எதிரே திணிவு 2×10^{5} கி. கொண்ட இரு கோளஙகளை ஒவ்வொனறுக வைப்பதாற் கோலில் விளையும் விலகலை மதிப்பிடுக.

[கவருந் திணிவுகளிடையேயுள்ள "குறுககு விளைவை"ப் புறக்கணிக்க ; $\pi^2=10$ எனக் கொள்க ; உமது கணிப்பில என் தொங்குங கோளம் ஒவ்வொன்றினதுந் திணிவை அறிய வேண்டியதில்லை என்பதை விளக்குக.] [$1\cdot7\times10^{-3}$ ஆரையன்]

6·23. $\gamma=(6\cdot670\pm0\cdot005)10^{-8}$ தைன். சமீ.^{2} கி.$^{-2}$ (கி.$^{-1}$ சமீ.^{3} செக்.$^{-2}$) எனின், ஒவ்வொன்றும் 5 கிகி. திணிவுடைய இரு கோளங்களின் இடைத்தூரம் 30 சமீ. ஆய் இருக்கும்பொழுது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள விசை எவ்வளவு ?

γ வின் மேற்படி பெறுமானத்தையும் புவியின் ஆரை $6\cdot37\times10^{8}$ சமீ. எனவும் கொண்டு புவியின் சராசரி அடர்த்திக்குப் பெறுமானமொன்றைக் காண்க.

[$(1\cdot853\pm0\cdot002)\times10^{-3}$ தைன்., 5·54 கி. சமீ.$^{-3}$]

6·24. புவியானது கோளவடிவமாகவும் அதன் உள்ளுறை சீராகவும் இருக்குமாயின, பனூரொன்றில் ஒருவர் உயரம் z எழும்பும்போதுள்ள ஈர்ப்புக் கவர்ச்சிக் குறைவானது சுரங்கமொன்றில் அதே ஆழத்துக்கு இறங்கும்போதுள்ள குறைவின் கிட்டத்தட்ட இருமடங்கு என நிறுவுக.

6·25. உணர்ச்சியுள்ள பொன் நிறு தராசொன்றின் புயம் வழியே 1 மிகி. ஐ 1 சமீ. தூரம் அரக்கிவைத்தபோது தராசின் விலகல் 600 அளவுத் திட்டப்பிரிப்புகளை ஆகுமவண்ணம் அத்தராசின் உணர்திறன் அமைந்திருந்தது. தராசில் ஒவ்வொன்றும் திணிவு 400 கி. உம, ஆரை 2 சமீ. உம உடைய இரு கோளங்கள், அவற்றின் இடைத்தூரம் 60 சமீ. ஆக இருக்கும் வண்ணம் ஈடு செய்யப்பட்டபொழுது, ஆரை 12 சமீ. கொண்ட ஈயக் கோளமொன்று சிறு கோளங்களுள் ஒன்றிற்கு நேராகக் கீழேயும் அதைக் கிட்டத்தட்டத் தொடுமாறும் வைக்கப்பட்டிருந்தது. அடுத்து, கோளத்தை மற்றைச் சிறு கோளத்திற்குக் கீழே, முன்னர் போன்ற நிலையிலே அரக்கிவைத்தபோது தராசின் விலகல் 192 திட்டப் பிரிப்புக்களாக ஆயிற்று ; ஈர்ப்பு மாறிலிக்குப் பெறுமானமொன்றைக் காண்க.

[$g=1000$ சமீ. செக். $^{-2}$ எனவும், ஈயத்தின் அடர்த்தி 11·37 கி. சமீ. $^{-3}$ எனவும் எடுக்க.]

[$6{\cdot}86\times10^{-8}$ கி. $^{-1}$ சமீ. ^{3} செக. $^{-2}$]

6·26. நியூற்றன் ஈர்ப்பு மாறிலியைத் துணிவதற்குரிய திட்டமான முறையொன்றை விவரித்துக் கூறுக.

ஞாயிற்றை மையமாகக் கொண்டு அதைச்சுற்றிக் கிட்டத்தட்ட வட்டமண்டிலங்களிற் கோள்கள் அசைகின்றன என்னும் முடிபைப் பயன்படுத்தி, ஒரு கோளின் ஆண்டின் வர்க்கமானது ஞாயிற்றினின்று அக்கோளின் தூரத்தின் கனத்துக்கு விகிதசமம் என்னும் கெப்பிளரின் மூன்றாவது விதியை நிறுவுக.

கோளொன்றைச் சுற்றி உபகோளொன்று தெரிந்த ஆவர்த்தன காலத்துடனும் அக்கோளிலிருந்து தெரிந்த தூரத்திலும் வட்டமண்டிலமொன்றில் அசையுமாயின், எவ்வாறு கோள், ஞாயிறு என்பவற்றின் திணிவு விகிதத்தைப் பெறமுடியும் என்பதைக் காட்டுக ; இங்கு கோளின் ஆண்டையும் ஞாயிற்றிலிருந்து அதன் தூரத்தையும் தெரிந்தவை எனக் கொள்ளலாம். (G)

6·27. ஈர்ப்பு மாறிலியைத் துணிவதற்குரிய திருத்தமான முறையொன்றை விவரித்துக் கூறுக.

அம்மாறிலியின் பெறுமானத்தை $6{\cdot}7\times10^{-8}$ தைன் சமீ.^{2} கி.$^{-2}$ எனக் கொண்டும் புவியானது 3×10^{4} மீ. செக். $^{-1}$ என்னும் கதியுடன் $1{\cdot}5\times10^{11}$ மீ. ஆரையுடைய வட்ட மண்டிலமொன்றில் அசைகிறது எனக் கருதியும் ஞாயிற்றின் திணிவைக் கணிக்க. [$2{\cdot}01\times10^{30}$ கிகி.

6·28. எயரியின் சுரங்கப் பரிசோதனையை விவரித்துக் கூறுக. இப்பிரச்சினைக்குரிய புவி வெளியோட்டின் சராசரி அடர்த்தி 2·5 கி. சமீ. $^{-3}$ எனின், 0·5 மைல் ஆழம் உடைய சுரங்கமொன்றின் அடியில் புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகலைக் காண்க. புவியின் சராசரி அடர்த்தி 5·5 கி. சமீ. $^{-3}$ எனவும், புவியின் ஆரை 4000 மைல் எனவும், புவியீர்ப்புச் செறிவு 981·2 சமீ. செக். $^{-2}$ எனவும் தரப்பட்டிருக்கின்றன. [981·28 சமீ. செக $^{-2}$]

6·29. உயரம் h கொண்ட மலைப்பீடத்துப் புள்ளியொன்றில் புவியீர்ப்புச் செறிவின் பெறுமானம்

$$g\left[1-\left(2-\frac{3\rho}{2\rho_0}\right)\frac{h}{a}\right]$$

ஆல் தரப்படுகிறது என நிறுவுக ; இங்கு g கடல்மட்டத்துப் புவியீர்ப்புச் செறிவும், a புவியின் ஆரையும், ρ_0 புவியின் சராசரி அடர்த்தியும், ρ பீடத்துச் சடத்தின் அடர்த்தியும் ஆகும். [குறிப்பு : பீடத்தை பரப்படர்த்தி ρ கொண்ட மெல்லிய வட்டத்தட்டு எனக் கருதலாம் ; மேலும் $g=\frac{4}{3}\pi\gamma\rho a$; பீடத்தில் "கோளத்தால்" ஆகும் ஈர்ப்புச் செறிவு $g\,\frac{a^2}{(a+h)^2}$ ஆகும்.]

6·30. 5 கி. திணிவொன்றைப் புவிப்பரப்பிலிருந்து 21 மீ. உயர்த்தியபோது அதன் நிறை 31·8 மில்லிகிராம்–நிறையால் குறைந்துள்ளது என **வொன் ஜொல்லி** என்பார் கண்டார். இச்செய்தியைப் பயன்படுத்திப் புவிப்பரப்பிலிருந்து 1 கி. சடமானது 1 சமீ. உயர்த்தப்படுமிடத்து அதன்மீதுள்ள புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சிக் குறைவைக் கணிக்க. $g=980$ சமீ. செக$^{-2}$ உம், $r=6{\cdot}4\times10^8$ சமீ. உம் ஆயின், வொன் ஜொல்லியின் விளைவிலிருந்து பெற்ற பெறுமானத்தையும், அறிமுறைக் கணிப்புத் தரும் பெறுமானத்தையும் ஒப்பிடுக.

[குறிப்பு $F=\frac{\gamma M}{r^2}$ எனின், $\frac{dF}{dr}=-\frac{2\gamma M}{r^3}$ ஆகும் என்றவாறு]

[$2{\cdot}97\times10^{-6}$ தைன ; 1 : 1·02]

6·31. உணர்ச்சியுள்ள தராசொன்று நான்கு தட்டுக்களைக் கொண்டுள்ளது ; அவற்றுள் ஒரு சோடி மற்றைச் சோடிக்கு 20 மீ. கீழே இருக்கிறது. மேல் தட்டுக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் 5 கிகி. திணிவுடைய கோளமொன்றை வைத்துத் தராசு ஈடுசெய்யப்பட்டது. கோளமொன்றை அதற்குக்கீழே இருக்கின்ற தட்டில் இடமாற்றியபோது அதன் திணிவு கூடிற்று ; இதன் பொருட்டு மேல் தட்டொன்றில் 32 மிகி. ஐச் சேர்த்துத் தராசு மீண்டும் ஈடுசெய்யப்பட்டது.

50 சமீ. ஆரைகொண்ட ஈயக்கோளமொன்றை கீழ்த் தட்டிலிருக்கின்ற கோளத்திற்கு நேர் கீழே வைத்தபோது சமநிலையாக்கத்துக்கு மேல் தட்டொன்றில் இன்னும் 0·69 மிகி. திணிவு சேர்க்க வேண்டியிருந்தது. ஈயத்தின் அடர்த்தியை 11.4 கி. சமீ.$^{-3}$ எனவும், புவியின் ஆரையை $6{\cdot}4\times10^8$ சமீ. எனவும் கொண்டு, புவியின் திணிவுக்குப் பெறுமானங் காண்க.

[$6{\cdot}0\times10^{24}$ கிகி.]

6·32. புவியின் மத்திய கோட்டில் இருக்கின்ற பொருளொன்றின் நிறை பூச்சியமாக இருக்கும் வண்ணம் அதிவிரைவாகப் புவி சுழலுமாயின் அதன் ஆவர்த்தன காலத்தைக் கணிக்க. [$r=6{\cdot}4\times10^8$ சமீ. எனக் கொள்க.] [நாள் $\frac{1}{17}$.]

6·33. நியூற்றனின் ஈர்ப்பு மாறிலியைத் துணிதலுக்கான ஆய்கூட முறையொன்றை விவரித்துக் கூறுக.

ஞாயிற்றைச் சுற்றிச் செல்வாய், புவி ஆகியவற்றின் சுழற்சிக் காலங்களின் விகிதம் 1·88 ஆகும். ஞாயிற்றினின்று இக்கோளங்களின் தூரங்களின் விகிதத்தைக் காண்க. இவ்விடயமாகப் பயன்படுத்தியுள்ள சூத்திரத்தை நிறுவுக. [1·52]

6·34. சீரான கோளமொன்றிற்கு வெளியேயிருக்கின்ற புள்ளியொன்றிலுள்ள ஈர்ப்பழுத்தத்திற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

புவியின் பரப்பிலிருந்து உயரம் 1,000 கிமீ. வரை 10,000 கிகி. முழுத்திணிவு உடைய எறிபொருளொன்றைச் செலுத்துவதற்கு வாணமொன்றால் வழங்கப்பட வேண்டிய சக்தியைக் கணிக்க. வளியில் உராய்வு விசைகளைப் புறக்கணிக்கலாம். புவிப்பரப்பில் புவியீர்ப்புச் செறிவை $g=9{\cdot}80$ மீ. செக.$^{-2}$ எனவும், புவியின் ஆரையை $R=6{\cdot}37\times10^6$ மீ. எனவும் கொள்க. [$6{\cdot}2\times10^5$ யூல்.]

6·35. சீரான கோளமானது திணிவு m உம் ஆரை a யும் உடையதாயின், அதன் ஓர் அரைக்கோளம் மற்றதன்மீது பிரயோகிக்கும் கவர்ச்சி $\frac{3}{16}\frac{\gamma m^2}{a^2}$ ஆகும் எனக் காட்டுக.

6·36. ஆரை a யும் அடர்த்தி ρ வும் உடைய சீரான கோளம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் b யில் இருக்கின்ற தளமொன்றால் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. அவ்விரு கூறுகளுக்குமிடையேயுள்ள தம்முள் கவர்ச்சி

$$\tfrac{1}{3}\pi^2\gamma\rho^2(a^2-b^2)^2$$

எனக் காட்டுக.

6·37. அவற்றின் இடைத்தூரம் பெரிதாய் இருக்கும்பொழுது ஓய்வாயிருந்த, ஆரை a யும், அடர்த்தி புவியின் சராசரி அடர்த்தியும உடைய, இரு சமமான கோளங்கள் $\sqrt{\frac{g}{2R}}$ எனனும் பொதுக்கதியுடன் ஒன்றோடொன்று மோதும எனக் காட்டுக ; இங்கு ஈர்ப்புச் செறிவு g யும், புவியின் ஆரை R உமாகும். [அவற்றின தம்முள் கவர்ச்சி மட்டுமே இக்கோளங் களைத் தாக்குகினறது எனக் கொளக.] [குறிப்பு : இரு கோளங்களும் தொடுகை வைத்திருக்கும பொழுது கோளமொன்று மற்றதின புலத்தில அடைநதுள்ள நிலைச்சக்திக் குறைவானது இரு கோளங்களின் இயக்கச் சக்திகக்குச் சமன.]

6·38. புவியிலிருந்து பார்க்கும்பொழுது ஞாயிற்றின சராசரிக் கோண விட்டம் $9{\cdot}4\times10^{-3}$ ஆரையனும், ஈர்ப்புமாறிலி $6{\cdot}7\times10^{-8}$ சமீ.^{3} கி.$^{-1}$ செக்.$^{-2}$ உமாயின, ஞாயிற்றுச் சடப்பொரு ளின அடர்த்தியை மதிப்பிடுக. [ஓர் ஆண்டு $=3{\cdot}1\times10^{7}$ செக. எனக் கொளக.]

[$1{\cdot}41$ கி.சமீ.$^{-3}$]

6·39. ஆரை a கொண்ட கோளமொன்றின மையத்திலிருந்து தூரம் r இலுள்ள புள்ளியொன்றில் அடர்த்தி ρ ஆனது

$$\rho=\frac{M}{\pi a^{3}}\left(\frac{3}{2}-\frac{r}{a}\right)$$

ஆல் தரப்படுகிறது.

கோளத்தின திணிவு M எனக் காட்டுக. மேலும், கோளத்தின பரப்பில, ஈர்ப்புச் செறிவு g யும், $\frac{h}{a}$ இன் முதலாவது படிக்கு மேலானவை புறக்கணிக்கப்பட்டும் இருக்குமாயின் பரப்பிலிருந்து உயரம் h இல் செறிவு

$$g\left(1-\frac{2h}{a}\right)$$

எனவும, ஆனால் பரப்பிலிருந்து ஆழம் h இல் அதன் பெறுமானம மாறாது இருக்கிறது எனவும் காட்டுக.

அதிகாரம் VII

மீள்தன்மையும், தகைப்பும், விகாரமும், சடங்களின் வலிமையும்

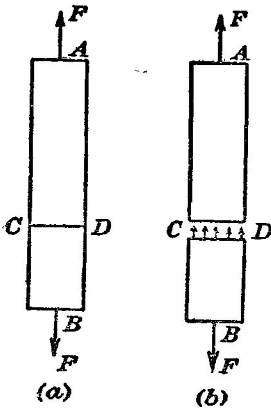
தோற்றுவாய்.—பொறியியலானது மிகமிகச் சிறிய ஆனால் திணித்த துணிக்கை என்னும் கருத்துடன் தொடங்கி, அழுத்திய புற விசைகளின் தாக்கத்தின் கீழ் அத்துணிக்கையின் போக்கையும் ஆராய்கிறது ; அடுத்து **விறைப்பான பொருள்** என்னும் கருத்து விவாதத்துக்குக் கொண்டுவரப் படுகிறது ; அதைத் தாக்கும் விசைகளின மாற்றங்கள் எதுவாகிலும் அதன் எந்த இரு புள்ளிகளின் இடைத்தூரமும் மாறாது இருக்கும் என்று அதற்கு வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகிறது. உண்மை கூறுமிடத்து ஒரு பொருளும் பூரணமாக விறைப்பானது அன்று ; விசைகளின் தாக்கத்தால் சாதாரண சடஙகளின் போக்கைப் பற்றிய ஆய்வு மீள்தன்மையியல் எனப்படும்.

விகாரம்.—பொருளொன்று உள் மூலக்கூற்று விசைகளால் மட்டுமே தாக் கப்பட்டுச் சமநிலையில் இருக்கும்பொழுது அப்பொருளானது அதன் **இயல் பான நிலையில்** இருக்கிறது எனக் கூறப்படுகிறது. அதன் சடம் தகைப் புறும்படி பொருளொன்றுமீது புற விசைகள் தாக்கும்பொழுது அப்பொரு ளின் வடிவத்திலோ, பருமனிலோ, அவ்விரண்டிலுமோ **அது** மாற்றம் அடையுமாயின் அது **விகார நிலையில்** இருக்கிறது அல்லது **விகாரப்பட்டி ருக்கிறது** எனக் கூறுகிறோம். மாக்ஸ்வெலின் கூற்றுப்படி [Theory of Heat, பக்கம் 295] பூரண விறைப்பான பொருளொன்று உண்டு எனில், தகைப்புநிலையை உண்டாக்கும் புறவிசைகளால் தாக்கப்படுங்காலே அது விகாரமுறாது. உண்மையில் இத்தகைய நிபந்தனைகளுக்குக் கீழ்ப்படிகின்ற பொருட்கள் இல ; அதாவது தெரிந்த சடங்கள் யாவும் மீள்தன் மையுடையன ; அதாவது பொருளொன்றில் தகைப்பிருந்தால் விகாரமும் உடன் இருக்கும். **பொருளொன்று, குறிப்பிட்டவொரு வெப்பநிலையில், வரையறுத்த தகைப்பொன்றின் பிரயோகத்தால் வரையறுத்த விகார மொன்றை அடைதல், தகைப்பு பிரயோகிக்கப்படுங்காலம் நீடித்தபோதிலும் விகாரம் கூடாமல் இருத்தல், தகைப்பு நீக்கப்பட்டதும் விகாரம் உடனே யும்† முற்றிலும் மறைதல் ஆகிய உடைமைகளைக் கொண்டிருப்பின் அது** பூரணமான **மீள்தன்மையுள்ள பொருளாகும்** என **மாக்ஸ்வெல்** வரைவி லக்கணம் கூறியுள்ளார். சில சந்தர்ப்பங்களிலே புற விசைகள் நீக்கப்பட்ட பொழுது பொருளடைந்த புதுப் பருமனும், வடிவமும் நிலைத்திருக்கவுங் கூடும் ; அப்பொழுது அப்பொருளின் சடம் **பூரண ஞெகிழித் தன்மை**

†இசசொல்லானது இன்று மாக்ஸ்வெலின் ஆரம்பக கூற்றுடன் சேர்ககப்பட்டிருக்கிறது.

உடையது எனப்படும். இருந்தாலும், வடிவையழிக்கும் விசைகள் மிகாதிருக்கும்வரை மட்டுமே திரவியங்கள் பூரண மீள்தன்மையுடையன எனபதும், பிரயோகிக்கப்படுகினற விசைகள் போதிய அளவில் சிறிதாய் இருந்தால் பூரண ஞெகிழித் தன்மையுடைய பொருட்களும் சிறிதளவு மீள்தன்மையுடையவையாய் இருக்கக்கூடும் என்பதும், இஙகு கண்டிப்பாய்க் குறித்தற்பாலது. பின்வரும் கட்டமொன்றில் பூரண மீள்தன்மையெல்லையை மீறித் தகைப்புறும் சடங்களின் போக்கு மிக விரிவாக எடுத்துக் கூறப்படும்.

இழுவைத் தகைப்பும் இழுவை விகாரமும்.—படம் 7·01 (a) யில் AB ஆனது, அதன்து நீள்பக்கவச்சு வழியே இரு இழுப்புவிசைகள் F, F என்பவற்றுல் தாக்கப்படும் சீரான கோலொன்று என்க. CD ஆனது கோலின் நீள்பக்கவச்சுக்குச் செங்குத்தானதும கோலே இருகூறுகளாகப் பிரிக்கின்றதுமான தளமொன்ருகுக. இழுப்புவிசைகள் பிரயோகிக்கப்பட்டதும் உள்விசைகள் தொழிற்படாதுவிடின் கோல் நீளும்; மேலும் உடைப்பு நிகழும்வரை நீட்டல் தொடர்ந்து நிகழும். இனி பகுதி AC ஆனது, CD இன் குறுக்கே, பகுதி DB மீது விசையொன்றைப் பிரயோகிக்கும்; இவ் விசையானது, மேற்படி காரணத்தால் உற்பத்தியாகி CD யின் மூலகமொவ்வொன்றையும் தாககுகின்ற மூலக விசைகளின் விளேயுளாகும், படம் 7·01 (b) யைப் பார்க்க. CD யின் சமநிலேயின் பொருட்டு மேற்படி விளேயுளானது முனே B யில் தாக்குகின்ற விசை F இற்குச் சமனெதிராக இருத்தல் வேண்டும. அதுபோலவே பகுதி AC இடத்துமாம்.



படம் 7·01. நீள்பக்க இழுப்பாலாகும் உள்விகாரம்.

பொருளே இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் அததகைய எந்தத் தளத்திற்கும் குறுக்கே தாக்குகின்ற சம,எதிர் விசைகளேயிட்டு அப்பொருளானது **தகைப்புற்றிருக்கிறது** அல்லது **தகைப்பு நிலேயில்** இருக்கிறது எனப்படும். எனவே தகைப்பு எனனுஞ்சொல் ஒன்றேடொன்று தொடுகை வைத்திருக்கின்ற இரு பொருட்களிடையே அல்லது ஒரே பொருளின இரு பகுதிகளுக்கிடையே தாககுகின்ற தமமுள தாக்கத்தைக் குறிக்கும்பொருட்டுப் பயன்படுத்தப்படுகிறது; இததாக்கத்தால் ஒரு பொருளோ ஒரு பகுதியோ மற்றதுமீது விசையொனறைப் பிரயோகிக்கின்றது.

பரப்பு CD யின் எந்தப்பாகத்தின் குறுக்கேயும் தாக்குகின்ற விசையானது அப்பாகத்தின் பரப்பளவிற்கு நேர்விகிதசமமாக இருக்குமாயின், அத்

தகைப்பு சீரானது எனப்படும். எனவே, CD யின் பரப்பளவு S உம், அப்பரப்புமீது தகைப்பின் பரம்பல் சீரானதும் எனின், $\frac{F}{S}$ என்னும் கணியமானது பொருளின் கருதப்படும் வெட்டின் குறுக்கே உள்ள **நீட்சித் தகைப்பு** அல்லது **இழுவைத் தகைப்பு** எனப்படும். விசைகளை நேர்மாறுக்கினால் பொருளானது உதைப்பொன்றை உணரும் ; அதற்கொத்த தகைப்பானது **நெருக்குத் தகைப்பு** எனப்படும் ; அதன் பெறுமானம் $\frac{F}{S}$ ஆகும்.

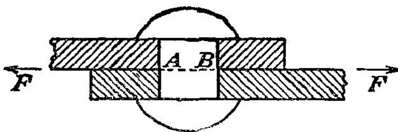
தகைப்பானது சீராயில்லாதபோது பரப்பளவு δS கொண்ட மூலகம் ஒன்றிற்குக் குறுக்காகவும் செவ்வனகவும் தாக்குகின்ற விசை δF ஆகுக. அப்பொழுது δS இன் புள்ளியொன்றிலுள்ள தகைப்பு p ஆனது

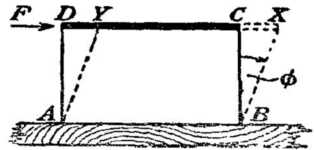
$$p = \underset{\delta S \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta F}{\delta S} = \frac{dF}{dS}.$$

கோலின் தொடக்கநீளம் l உம், நீட்சி Δl உம் எனின் கோலிலுள்ள **இழுவை விகாரம்** $\frac{\Delta l}{l}$ ஆகும். எனவே விகாரமானது பரிமாணமற்ற கணியமொன்ருகும்.

தகைப்பானது பரப்பலகொன்றிற்கான விசையே ஆதலின், தனியலகு முறைகளில் தகைப்புக்களை ஒன்றில் தைன். சமீ.$^{-2}$ இல் அல்லது இறுத்தலி அடி.$^{-2}$ இல் அளத்தல் வேண்டும். தகைப்பின மற்றைய பொதுவான அலகுகள் தொன நிறை. அங்.$^{-2}$, கிகி. நிறை. சமீ.$^{-2}$, வ. அ. என்பன ; முதல் இரண்டும் ஈர்ப்பலகுகள் ஆகும்.

கொய்வு விகாரமும் கொய்வுத் தகைப்பும்.—பொருளொன்றில் தொடுகையிலிருக்கின்ற இருபகுதிகளுக்கிடையில், பகுதியொன்று மீது மற்றைப் பகுதியின் தாக்கததால் பக்கப்பாடாகவும் தொடுகைப் பரப்பிற்குத் தொடலிமுகமாகவும் சம, எதிர் விசைகள் தொழிற்படும்பொழுது அப்பகுதிகளுக்கிடையில் கொய்வுத் தகைப்பொன்று உளது. இவ்வாறு வெட்டு AB இன்





படம் 7·02. (a) கொய்வுத் தகைப்பும் கொய்வு விகாரமும். (b) கொய்வு விகாரம்.

குறுக்கேயுள்ள இழுப்பு F, F என்பதைத் தாங்கும் இரு தட்டுக்களைச் சேர்த்துத் தறையொன்று பிடித்துக் கொண்டிருக்கிறது எனக் கொள்க, படம் 7·02 (a). இந்நிலையில் தறையின் கீழ்ப்பாகம் AB இற்குச் சமாந்தரமான

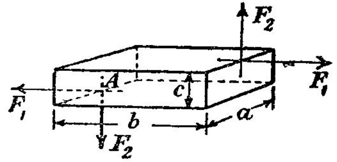
விசையொன்றை மேற்பாகமீது பிரயோகித்து அதன் இடப்பக்கமுகமான அசைவைத் தடுக்கிறது ; அது போலவே மேற்பாகமானது கீழ்ப்பாகமீது விசையொன்றைப் பிரயோகிக்கிறது. தறையானது தளம் AB இன் குறுக்கே, **கொய்வு நிலையில்** இருக்கிறது எனக் கூறப்படுகிறது ; குறுக்குவெட்டு AB யின் பரப்பளவு S எனின் **கொய்வுத் தகைப்பானது** $\frac{F}{S}$ ஆகும் என வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகிறது.

கொய்வு நிலையானது இருக்கும்பொழுது எவ்வாறு விகாரத்தை அளக்க முடியும் என்பதை அறியும்பொருட்டு மேசையொன்றுடன் ஒட்டப் பட்டிருக்கின்ற இந்தியா றப்பர்க் கட்டையொன்றின் குறுக்குவெட்டு ABCD ஐக் கருதுக ; ஒட்டப்பட்ட முகத்தின் அடையாளம் AB ஆகும், படம் 7·02 (*b*). கட்டையின் மேல்முகத்தில் ஒட்டப்பட்டிருக்கின்ற பித்தளைத் தட்டொன்று AB இற்குச் சமாந்தரமான விசை F ஆல் முன்செல்லுமுகமாகத் தூண்டப படுகிறது எனக் கற்பனை செய்க. சமநிலையையடைந்ததும் தட்டானது XY என்னும் நிலையில் இருக்கின்றதென்க. அதாவது றப்பர்க் கட்டையின் கீழ்முகத்தைக் குறித்துத் தட்டானது CX என்னும் பெயர்ச்சியை அடைந்திருக்கிறது. கட்டையானது கொய்வுநிலையில் இருக்கிறது என் கிறோம் ; கொய்வுவிகாரமானது சிறு கோணம் $\widehat{CBX}$ இன் வட்டவளவிறகுச் சமன் ; அது ϕ என்க. $\phi = \frac{CX}{BC}$ ஆதலால், கொய்வு விகாரமானது BC யை இடைத்தூரமாகக் கொண்ட இரு இடையான படைகளின் பக்கமுகமான தொடர்புப்பெயர்ச்சி CX, தூரம் BC என்பவற்றின் விகிதத்துக்குச் சமன் எனக் காணப்படும் ; அதாவது அலகு இடைத்தூரம் கொண்ட இரு இடையான படைகளின் பக்கமான தொடர்புப பெயர்ச்சியின் எண் பெறுமானத்திற்கு அது சமன்.

மேல் முகத்தின் பரப்பளவு S எனின், கொய்வுத் தகைப்பானது $\frac{F}{S}$ ஆகும்.

ஈர்க்கும் (அல்லது அமுக்கும்) விசைகளால் ஆகின்ற விகாரத்திற்கும் கொய்வுகளால் ஆகின்றவற்றிற்கும் இடையேயுள்ள கீழே கூறப்படும் வித்தியாசம் முதன்மையானது ; முந்தியதிற் பொருளின் கனமும் வடிவமும் மாறக்கூடும், ஆனால் பிந்தியதில், பொருளின் கனம் மாறாது இருக்க அதன் வடிவு மட்டுமே மாற்றம் அடைகின்றது. சமவியல்பு உடைய, அதாவது எல்லாத் திசைகளிலும் ஒரே அளவில் இயல்புகளைக் கொண்ட சடமொன்றால் ஆனதும் சீரான அமுக்கத்தால் தாக்கப் படுவதுமான சதுரமுகியானது வடிவமாற்றம் இல்லாமல் கனவளவு மாற்றம் மட்டும் தோன்றும் எடுத்துக்காட்டு ஒன்றாகும்.

கொய்வாலாகும் நிரப்பு தகைப்புகள்.— தேற்றம் : **குறிப்பிட்டதொரு திசையிற் கொய்வுத் தகைப்பு ஒன்று இருப்பதற்கு அதற்குச் செங்குத்தானதும் சமமானதுமான கொய்வுத் தகைப்பொன்று இருத்தல் வேண்டும்.** இதை நிறுவும்பொருட்டு பக்கங்கள் a, b, c களை உடைய செவ்வகப் பொருளொன்றைக் கருதுவோம் ; அது படம் 7·03 இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. கீழ் முகத்தைக் குறித்து மேல் முகத்தைப் பெயர்க்குமாறு தூண்டும் விசைகள் F_1 உம் F_1 உம் ஆகுக. இம்முகங்கள ஒவ்வொன்றின் பரப்பளவும் ab ஆகும் ; எனவே இங்கு கொய்வுத் தகைப்பு $\frac{F_1}{ab}$ ஆகும. மேற்படி விசைக்குச் செஙகுத்தாகக் கொய்வுகள் F_2, F_2 என்பன அமைந்துளளன என்க. அப்பொழுது ஒதத தகைப்பானது $\frac{F_2}{ac}$ ஆகும். சமநிலையையிட்டு அவற்றின் எந்தத் தளத்துப் புள்ளியைக் குறித்தும் எல்லா விசைகளினதும் திருப்பம் பூச்சியம் ஆதல் வேண்டும். அப்புள்ளி A என்க. அதாவது $F_1c = F_2b$. abc என்பதால் முழுவதையும் பிரித்தால்



படம் 7·03. கொய்வாலாகும் நிரப்பு தகைப்புகள்.

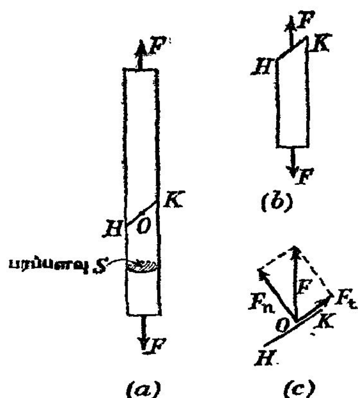
$$\frac{F_1}{ab} = \frac{F_2}{ac};$$

அதாவது தகைபபுக்களை சமனுகும்.

கனவளவு விகாரம்.—திண்மமொன்று அல்லது பாயியொன்று அமுக்க மாற்றமொன்றை அனுபவிக்குங்காலே அச்சடத்தில் கனவளவு மாற்றம் நிகழ்கிறது. இங்கு $\frac{\text{கனவளவு மாற்றம்}}{\text{தொடக்கக் கனவளவு}}$ என்னும் விகிதமானது விகாரத்தின் அளவாகும்.

செவ்வன் தகைப்புக்களும் தொடலித் தகைப்புக்களும்.—இதுவரை பொருளொன்று மீது தாக்குகின்ற இழுப்பு விசைகளின் திசையானது தகைப்பு கணிக்கப்பட்ட பரப்பிற்குச் செவ்வனுகவே அமைந்திருந்தது எனக் கொள்ளப்பட்டது. ஆனல், பொதுவாக, பொருளொன்றில் வரையப்படும் எந்தத் தளத்திற்குங் குறுக்கே தகைப்பொன்று கட்டாயமாக இருக்கும். இதை விளங்கும்பொருட்டு HK என்பது சீரான கோலொன்றிற்குக் குறுக்கேயுள்ள தளமொன்று ஆகுக ; தளத்தின் செவ்வனனது கோலின் அச்சுடன் கோணம் θ வை ஆக்குக, படம் 7·04 (a). அங்கு காட்டியுள்ளவாறு இழுப்புவிசைகள் F, F ஆகுக. கோலின் கீழ்ப்பகுதியின் சமநிலையையிட்டு அதன்மீது தாக்குகின்ற விசைகள் படம் 7·04 (b) யில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. இனி HK மீதுள்ள விசை F ஐ F_n, F_t என்னும் இரு கூறுகளாகத் துணிக்கலாம், படம் 7·04 (c) ; அவை வெட்டு HK இற்கு

முறையே செவ்வனாகவும் தொடலியாகவும் இருக்கின்றன ; அவற்றின் பெறுமானங்கள் முறையே F கோசை θ, F சைன் θ ஆகும். எனவே, HK இன் குறுக்கேயுள்ள செவ்வன் தகைப்பானது



படம் 7·04. கோலொன்றின சரிவான வெட்டுமீதுள்ள விகாரம்.

$$p_n = \frac{F_n}{\text{பரப்பளவு HK}} = \frac{F_n}{\text{S சீக } \theta}.$$

இங்கு S, கோலின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு ஆகும். F_n = F கோசை θ ஆதலால்

$$p_n = \frac{\text{F கோசை } \theta}{\text{S சீக } \theta} = \frac{F}{S} \text{ கோசை}^2\ \theta.$$

அதுபோலவே தொடலித் தகைப் பானது

$$p_t = \frac{F_t}{\text{பரப்பளவு HK}}$$

$$= \frac{F}{S} \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{F}{S} \text{ சைன் } 2\theta.$$

எனவே சைன் $2\theta = 1$, அதாவது θ ஆனது $\frac{1}{4}\pi$ அல்லது $\frac{3}{4}\pi$ ஆக இருக்கும்பொழுது சடத்திலுள்ள தளமொன்றின புள்ளியொன்றில் தாக்குகின்ற தொடலித் தகைபபானது ஓர் உயர்வு ஆகும். சடங்களாலான கோல்களை ஈர்த்துச் சோதிக்குமிடத்து, இழுப்பு விசைகளின் திசையுடன கோணம் $\frac{1}{4}\pi$ இற் சாய்ந்திருக்கும் பரப்புக்களுக்குக் குறுக்கே தாக்குகினற கொய்வு களாலேயே இளகுதல் ஒரு பகுதியிலேனும் நிகழ்கின்றது என அடிக்கடி காணப்படடிருக்கிறது.

p_n உம p_t யும் காவிகள ஆதலால், வெட்டு HK யின் குறுக்கேயுளள விளையுட் தகைபபானது F இற்குச் சமாந்தரமாகும்; அதன் பெறுமானமானது

$$p = [p_n^2 + p_t^2]^{0·5} = \left[\left(\frac{\text{F கோசை } \theta}{\text{S சீக } \theta}\right)^2 + \left(\frac{\text{F சைன் } \theta}{\text{S சீக } \theta}\right)^2\right]^{0·5},$$

$$= \frac{F}{\text{S சீக } \theta}$$

$$= \frac{F}{\text{பரப்பளவு HK}}.$$

பொருளொன்றிலுள்ள எந்தச் சிறு மூலகப் பரப்பொன்றுக்கும் இது போன்ற செயல்முறையொன்றைப் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம். எனவே மூலகப் பரப்பு δS மீது தாக்குகின்ற எல்லா மூலகவிசைகளினது விளையுளும் δF ஆயின், படம் 7·05 (a), அதை δF கோசை θ, δF சைன் θ என்னும்

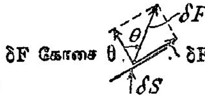
இரு கூறுகளாகத் துணிக்கலாம் ; இங்கு θ ஆனது δF உடன் δS இற்கு வரையபபடுஞ் செவ்வனொன்று ஆக்குங் கோணமாகும். எனவே

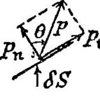
$$p_n = \underset{\delta S \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta F \text{ கோசை } \theta}{\delta S} = p \text{ கோசை } \theta,$$

$$p_t = \underset{\delta S \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta F \text{ சைன் } \theta}{\delta S} = p \text{ சைன் } \theta.$$

இத்தகைப்புக்கள் படம் 7·05 (b) யில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.





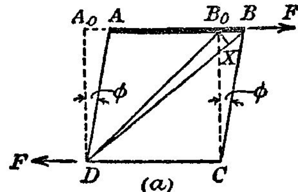


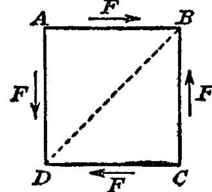
படம் 7·05. செவ்வன் தகைப்புக்களும் தொடலித் தகைப்புக்களும்.

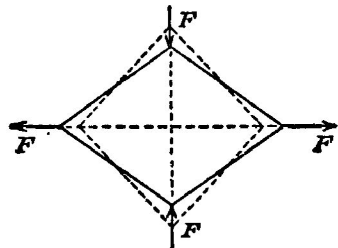
பரப்பொன்றிற்குச் செவ்வனுன தகைப்புக்கள் பொருள் ஒன்றை ஈர்க்கும் அல்லது நெருக்கும் விசைகளால் ஆகக்கூடும் ; பிந்திய எடுத்துக்காட்டில் "கசங்குதலைத்" தவிர்க்கும் பொருட்டுப் பொருளின் நீளம் சிறிதாய் இருத்தல் வேண்டும். முந்திய விசைத்தொகுதியாலாகும் தகைப்பு நேர் எனக் கருதப்படும் ; அதாவது பொருளின் கறபனைப் பரப்பொன்றின் குறுக்கே தாக்கி அதற்கு அக்கம் பக்கமுள்ள பாகங்களைப் பிரித்துவைக்க முயலும் தகைப்பு நேரானது.

தொடலித் தகைப்புக்கள், அதாவது பொருள் ஒன்றின் பாகமொன்றை மற்றைப் பாகமீது வழுக்குமாறு தூண்டும் தகைப்புக்கள், **கொய்வுத் தகைப்புக்கள்** எனப்படும், படம் 7·06 (a) இற் காண்க.

கொய்வு ; பிறிதொரு கருத்து.—ABCD என்பது, கொய்வு நிலையிலிருக்கின்ற, சமவியல்புடைய சடத்துச் சதுரமுகியின் வெட்டொன்று







படம் 7·06. கொய்வு ; பிறிதொரு கருத்து.

12—RR 19159 (66/11)

ஆகுக, படம் 7·06 (a) : A_0B_0CD என்பது மூலவெட்டு ஆகும். கொய்வு விகாரமானது கோணம் ϕ யினுல் அளக்கப்படுகிறது. கொய்வு $\frac{F}{S}$ ஆகும்; இங்கு S, சதுரமுகியினது முகமொன்றின பரப்பளவாகும். வரிப்படத்தைப் பரிசோதனை செய்தால மூலவிட்டம் DB_0 ஆனது DB இறகு நீட்டப் பட்டிருககிறது எனவும மற்றை மூலவிட்டம் A_0C ஆனது AC இறகு ஒடுககப் பட்டிருக்கிறது எனவும் அறிவோம். முநதிய மூலவிட்டத்தைக் கருதுக. D யை மையமாகவும் DB_0 ஐ ஆரையாகவும கொண்டு DB யை X இல வெட்டுமாறு வட்ட வில்லொனறை வரைக. B_0B சிறிதாதலின், $B_0\widehat{B}X = \frac{1}{4}\pi$ உம், $B_0\widehat{X}B = \frac{1}{2}\pi$ உம் ஆகும என்பது தெளிவு. எனவே, $BX = B_0X$.

DB வழியேயுள்ள விகாரமானது

$$\frac{DB - DB_0}{DB_0} = \frac{BX}{DB_0}$$
$$= \frac{B_0B}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\phi,$$

இங்கு a விகாரப்படாத நிலையில் சதுரமுகியின் விளிம்பு நீளம் ஆகும்.

அதுபோலவே AC வழியே $\frac{1}{2}\phi$ அளவு கொண்ட நெருக்கும் விகார மொனறு உளது.

DB, AC களை வழியே விகாரங்கள் உள என நிறுவபபட்டிருக்கிற படியால் அதே திசைகளில் தகைப்புககளும இருத்தல வேணடும் எனபது தெளிவு. ப. 301 இல் நிறுவியுள்ள தேற்றத்தினபடி, கருதப்படும் சதுரமுகியின் சமநிலையையிட்டுப படம 7·06 (b) யில காட்டியுள்ள விசைத் தொகுதியானது அதன் முகஙகள் மீது தாக்குதல் வேண்டும எனபது தெளிவு. முகம் ஒவ்வொனறின் குறுககேயுமுள்ள தகைபபு $F \div S = p$ ஆகும். இனி BCD என்னும பாகம, முறையே திசைகள் CB, CD வழியே தாக்குகின்ற விசைகள் F, F இனுலும் BCD மீது பாகம் ABD பிரயோகிக்கும் விசை F_x இனுலும் தாக்கப்பட்டுச் சமநிலையில இருக்கிறது. F, F என்பவறறின் விளையுளானது CA வழியே விசை $\sqrt{2}$. F என்பதாகும். எனவே F_x ஆனது CA வழியே தாககும் விசை $\sqrt{2}$. F ஆதல் வேண்டும். இது பரப்பளவு $\sqrt{2}$. S இன் மீது பரப்பப்பட்டிருககிறபடியால் அதற்கு ஒத்த தகைப்பு

$$p_x = \frac{\sqrt{2} \cdot F}{\sqrt{2} \cdot S} = p.$$

அது ஒரு நெருக்குந் தகைப்பு ஆகும்.

அதுபோலவே ABC என்னும் பாகத்தின் சமநிலையைக் கருதி BD வழியே இழுப்புத் தகைப்பு ஒனறு இருததல் வேண்டும் எனக் காட்டலாம்; அது p_y ஆகுக; அதன் பருமனும் p ஆகும். எனவே கொய்வுத்

தகைப்பு p ஆனது, திசையொன்றிலுள்ள இழுவைத் தகைப்பு p யினதும் அத்திசைக்குச் செங்குத்தானதும அததகைபபுககுச் சமமானதுமான நெருக்குந் தகைப்பினதுஞ் சேர்மானத்துக்குச் சமானமாகும், படம் 7·06 (c) ஐப் பார்க்க.

ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தான இரு திசைகளில் தாக்குகின்ற இரு தனித் தகைப்புக்களின் சேர்க்கை.—(a) நிகர்த்த தகைப்புக்கள் : படம் 7·07 (a) யில் காட்டியுள்ளவாறு ஈர்க்கும் விசைச் சோடிகள் F_x, F_x; F_y, F_y, என்பவற்ருல் தாக்கபபடுகின்ற சடக் கட்டையொன்றைக் கருதுக. உட்புள்ளி O இல் F_x, F_y என்னும் விசைகளால், அவ்வவற்றின் திசைகளுக்குச் செவ்வனன தளங்கள் மீது ஆகும் தகைப்புக்கள் முறையே p_x உம் p_y யும் ஆகுக ; அத்திசைகளே செவ்வகவச்சுக்கள் Ox, Oy களாக எடுக்கப்படுகின்றன. O ஊடே செல்லுகின்ற ஏதேனுமொரு தளம் HK இற்குச் செவ்வனுகவும் தொடலியாகவுமுள்ள தகைப்புக்களைக் கருதுக ; அத்தளத்தின் செவ்வனனது x அச்சுடன் கோணம் θ வை ஆக்குக. சடத்தில் p_x உம் p_y யும் மாறக்கூடும். ஆனபடியால் HKL என்னும் சிறு மூலகமொன்றின் சமநிலையைக கருதுக. ஓர் அலகிற்குச் சமனுன அதன் ஆழமானது வரிப் படத்தளத்திற்குச் செஙகுத்தாக அமைந்திருககிறது ; HL உம் KL உம் முறையே அச்சுக்கள் Ox, Oy இற்குச் சமாந்தரம். இம்மூலகத்தின் முகங்கள் மீது சடத்தின் எஞ்சியிருக்கிறபகுதியால் ஆகும் விசைகளைக் கருதுக. வரிப்படத்தளத்துக்குச் சமாந்தரமான முனைமுகஙகள் மீதுள்ள விசைகள் சமனுகவும் எதிராகவும் உள்ளபடியால் அவை இங்கு கருதப்படவில்லை. மற்றை முகஙகள் மீதுள்ள விசைகள்

$$\delta F_x = p_x.KL,$$
$$\delta F_y = p_y.HL,$$
$$\delta F_n = p_n.HK,$$
$$\delta F_t = p_t.HK.$$

என்பவற்ருல் தரப்படுகின்றன. இங்கு p_n, p_t என்பன முறையே முகம் HK இலுள்ள செல்வன கூறும் தொடலிக் கூறுமாம். δF_n, δF_t என்பன, முகம் HK மீது பொருளின எஞ்சிய பாகத்தின் தாக்கத்தால் ஆகும் விளையுள விசையின் கூறுகளாம்.

விசைகளை HK இற்குச் செஙகுத்தாகவும் அதன் வழியேயும் துணித்துச் சமநிலையையிட்டு

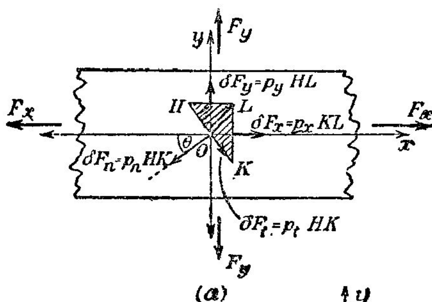
$$p_n.\ HK = p_x.\ KL.\ \text{கோசை}\ \theta + p_y.\ HL.\ \text{சைன்}\ \theta \qquad \text{எனவும்}$$
$$p_t.\ HK = p_x.\ KL.\ \text{சைன்}\ \theta - p_y.\ HL.\ \text{கோசை}\ \theta \qquad \text{எனவும்}$$

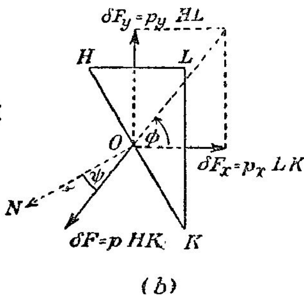
பெறுகிரேம்.

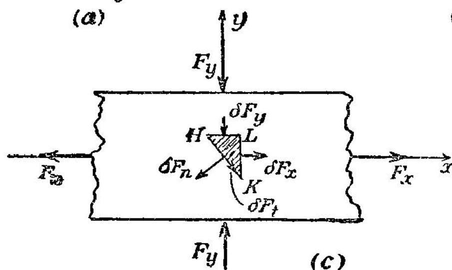
$$\therefore\ p_n = p_x.\ \text{கோசை}^2\ \theta + p_y.\ \text{சைன்}^2\ \theta,$$
$$p_t = (p_x - p_y)\ \text{சைன்}\ \theta.\ \text{கோசை}\ \theta = \tfrac{1}{2}(p_x - p_y)\ \text{சைன்}\ 2\theta.$$

கடைசிச் சமன்பாடானது கொய்வுத் தகைப்பைத் தருகிறது ; $\theta=\frac{1}{4}\pi$ அல்லது $\theta=\frac{3}{4}\pi$ ஆகுமிடத்து அது ஓர் உயர்வு ஆகும். அதற்கு ஒத்த செவ்வன் தகைப்பு

$$[p_n]_{\theta=\frac{1}{4}\pi}=p_x\text{கோசை}^2\,\tfrac{1}{4}\pi+p_y\,\text{சைன்}^2\,\tfrac{1}{4}\pi=\tfrac{1}{2}(p_x+p_y).$$







படம் 7·07. ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தான இரு தகைப்புக்களின் சேர்க்கை.

HK யிலுள்ள எந்தப் புள்ளியிலும் விளையுள் தகைப்பு p ஆகுக, படம் 7·07 (b) யிற காணக. அப்பொழுது,

$$p.\text{HK}=\text{HK மீதுள்ள விளையுள் விசை}$$
$$=\sqrt{(\delta F_x^2+\delta F_y^2)}$$
$$=\sqrt{(p_x.\text{KL})^2+(p_y.\text{HL})^2}=\text{HK}\sqrt{p_x^2\,\text{கோசை}^2\,\theta+p_y^2\,\text{சைன்}^2\,\theta}.$$
$$\therefore\; p=\sqrt{(p_n^2+p_t^2)}.$$

முகம் HK மீதுள்ள விளையுள் தகைப்பின் திசையைக் குறிக்கும் பொருட்டு, ஒன்றில், OX உடன் விளையுள் ஆக்கும் கோணம் ϕ யை, அல்லது முகம் HK யின் செவ்வனுடன அது ஆக்கும் கோணம் ψ யைக் கணித்தல் வேண்டும். இனி,

$$\text{தான்}\;\phi=\frac{\delta F_y}{\delta F_x}=\frac{p_y.\text{HL}}{p_x.\text{KL}}$$
$$=\frac{p_y}{p_x}.\;\text{தான்}\;\theta.$$

மேலும் $p_n = p$. கோசை ψ யும், $p_t = p$. சைன் ψ உமாம்.
எனவே

$$\text{தான் } \psi = \frac{p_t}{p_n} = \frac{(p_x - p_y) \text{ சைன் } \theta . \text{ கோசை } \theta}{p_x . \text{ கோசை}^2 \theta + p_y . \text{ சைன}^2 \theta} .$$

(b) **நிகராத் தகைப்புக்கள்.**—விசைகள் F_y என்பன சடத்தை நெருக்கு முகமாக அமைநதிருக்கினறன எனக் கொளக. மீண்டும் HKL எனனும் மூலகத்தைக் கருதுக ; முகஙகள் HL, KL என்பவறறின் மீது தாககும் விசைகளின் தாக்கத்திசைகள் படம் 7·07 (c) யில் காட்டியுளளவாறு அமைந்திருக்கினறன ; அவற்றின் பருமன்கள்

$$\delta F_x = p_x . \text{ KL},$$
$$\delta F_y = p_y . \text{ HL}.$$

HK இற்குக் குறுக்கேயுள்ள தகைபபின் செவ்வன், தொடலிக் கூறுகள் முறையே, p_n, p_t யும் ஆகுக ; எனவே இம்முகமீதுள்ள விளையுள் விசையின் கூறுகள் முறையே p_n. HK, p_t. HK ஆகும். இம்மூலகத்தின சமநிலையை யிட்டு முன்போலவே,

$$p_n . \text{ HK} = \delta F_n = \delta F_x . \text{ கோசை } \theta - \delta F_y . \text{ சைன் } \theta \qquad \text{எனவும்}$$
$$p_t . \text{ HK} = \delta F_t = \delta F_x . \text{ சைன் } \theta + \delta F_y . \text{ கோசை } \theta \qquad \text{எனவும்}$$

பெறுகிறோம்.

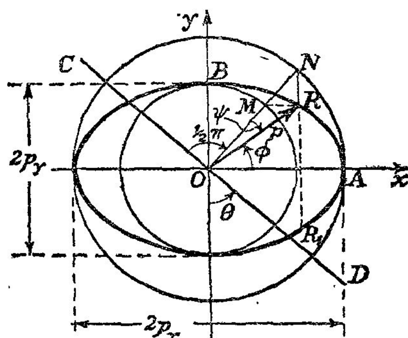
$$\text{எனவே } \; p_n = \frac{F\delta_n}{HK} = p_x . \text{ கோசை}^2 \theta - p_y . \text{ சைன்}^2 \theta ,$$
$$p_t = \frac{\delta F_t}{HK} = (p_x + p_y) \text{ சைன } \theta . \text{ கோசை} \theta = \tfrac{1}{2}(p_x + p_y) \text{ சைன் } 2\theta .$$

மீண்டும், $\theta = \frac{1}{4}\pi$ அல்லது $\theta = \frac{3}{4}\pi$ ஆகுமிடத்து தொடலித் தகைப்பா னது உயர்வு ஆகும் ; அதற்கு ஒதத செவ்வன தகைப்பு $\frac{1}{2}(p_x - p_y)$ ஆகும்.

மேற்படி நிகரா விசைகளின் பருமன் சமன் ஆயின் அப்பொழுது $|p_x| = |p_y| = p$ என்க ; அப்பொழுது வழக்கில் முதன்மை வாய்ந்த தகைப்பு வகையொன்றைப் பெறுகிறோம் ; இஙகு $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$ எனபவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட தளஙகளுக்குச் சமாந்தரமான எந்தத் தளமீதுமுள்ள செவ்வன் தகைப்பும் பூச்சியமாகும் ; தொடலித் தகைபபு p ஆகும. அப்பொ ழுது பொருளானது **தனிக் கொய்வு நிலையில்** இருப்பதாகக் கூறப்படுகிறது.

தகைப்பின் நீள்வளையம்.—இந்நீள்வளையத்தை ஆக்கும் பொருட்டு O வை மையமாகவும், OA $= p_x$, OB $= p_y$ என்பவற்றை ஆரைகளாகவும் கொண்டு இரு வட்டங்கள் வரையப்படுகின்றன, படம் 7·08. தகைப்புத் துணியப்படும் தளத்தின் அடையாளம் CD ஆகுக ; இத்தளத்திற்கு O விலுள்ள செவ்வன் ON என்பது x–அச்சுடன் கோணம θ வை ஆக்குக. ON

மேற்படி இரு வட்டங்களையும் M இலும் N இலும் வெட்டுமாயின், அப்பொழுது M, N களூடாகவும் முறையே Ox இற்கும் Oy இற்கும் சமாந்தரமாகவும் வரையப்பட்ட நேர்கோடுகளானவை, OA யையும் OB யையும் முறையே அரைப்பேரியச்சாகவும் அரைச்சிறியச்சாகவும் கொண்ட நீள்வளையத்தின் புள்ளி R இல் ஒன்றையொன்று வெட்டுதல் வேண்டும்.



படம் 7·08. தகைப்பின் நீள்வளையம்.

R இன் ஆள்கூறுகள் (p_x கோசை θ, p_y சைன் θ) ஆகும் ; எனவே CD மீதுள்ள விளையுள் தகைப்பானது

$$\mathrm{OR} = \sqrt{p_x^2 \text{ கோசை}^2\,\theta + p_y^2 \text{ சைன்}^2\,\theta} = p.$$

மேலும் OR ஆனது Ox உடன் கோணம் ϕ யை ஆக்குமாயின்,

$$\text{தான் } \phi = \frac{p_y}{p_x}.\ \text{தான் } \theta\,;$$

அன்றியும் ψ ஆனது $\widehat{\mathrm{RON}}$ ஆயின்

$$\text{தான் } \psi = \text{தான் } (\theta - \phi) = \frac{(p_x - p_y)\ \text{தான் } \theta}{p_x + p_y\ \text{தான்}^2\,\theta} = \frac{p_t}{p_n}.$$

எனவே OR ஆனது CD மீதுள்ள விளையுள் தகைப்பின் பருமனையும் திசையையும் தருகிறது.

[ந.கு. தகைப்புக்களுள் ஒன்று புறமாற்றப்பட்டால் CD மீதுள்ள தகைப்பானது OR_1 என்பதால் தரப்படும் ; இங்கு R_1 ஆனது R இன் " விம்பம் " ஆகும்.]

தலைமைத் தளங்களும் தலைமைத் தகைப்புக்களும்.—தெரிந்த வெவ்வேறு தளங்களின் குறுக்கே ஒன்றில் முற்றிலும் செவ்வன் தகைப்புக்களை அல்லது முற்றிலும் தொடலித் தகைப்புக்களைப் பிறப்பிக்கும் பிரயோக விசைத் தொகுதியானது பொருளொன்றைத் தாக்கும்பொழுது

விளையுள் தொடலித் தகைப்பைத் தருமாறு வெவ்வேருன தொடலிக் கூறு களைக் காவிமுறைபபடி கூட்டி வேறெரு தெரிநத தளத்தின் குறுக்கே யுள்ள தகைப்பு நிலையைத் துணியலாம் ; அதுபோலவே செவ்வன் கூறு களிடததுமாம்.

சடமொன்றிலுள்ள புள்ளியொன்றினூடே செல்லும் தளங்கள் ஒவ் வொன்றிற்கும் குறுக்கேயுளள விளையுட் தகைப்பானது முற்றிலும் செவ் வன் தகைபபாக இருக்குமாயின அத்தளங்கள் **தலைமைத் தளங்கள்** எனப்படும் ; அவறறிற்குக் குறுககேயுள்ள செவவன தகைப்புககள் **தலைமைத் தகைப்புக்கள்** எனபபடும்.

சடமொன்றில் புள்ளியொன்றிலுள்ள தகைப்பு நிலை எவ்வளவு சிக்கலாய் இருந்தபோதிலும், அங்கு தம்முட் செஙகுததான மூன்று தலைமைத் தளங்கள் உள எனக் காட்டலாம. எனவே கருதப்படுகினற புளளியிலுளள தகைப்பை எப்பொழுதும் மூன்று தலைமைத் தகைபபுக்களாகத் துணிக்க லாம். இம்மூன்று தலைமைத தகைப்புக்களின் திசைகளைப் பௌதிகவியற் கருததுக்களைப் பயனபடுதது அடிககடி காணமுடியும் எனப் பினவருவதி லிருநது தெரியவரும்.

ஹூக்கின் விதியும் பூரண மீள்தன்மையெல்லையும்.—குறிப்பிட்ட தகைப் பொன்றல ஆகும் வடிவழிவானது அததகைப்புக்கு நேர்விகிதசமம் எனப் பல சடஙகளிடம பரிசோதனை முறைப்படி கண்டுபிடிககப்பட்டிருக் கிறது ; ஏதேனுமொரு தகைபபுக்கப்பால் இவ்வேகபரிமாணத் தொடர் புடைமை செல்லாது ; அத்தகைப்பானது பிரயோகிக்கப்படும தகைப்பு வகைக்குக் கருதப்படும் சடத்தின **மீள்தன்மையெல்லை** என அழைககப் படுகினறது. மீள்தனமையெலலைக்குக் கீழே இவவேகபரிமாணத் தொடர் பின் உண்மையானது முதனமுதல் ஹூக் என்பவரால் 1679 இல் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது ; அது ஹூக்கின் விதி எனப்படும. சடமொன்றின் மீது மீள்தன்மையெல்லைக்குக் குறைந்த தகைப்பொனறு பிரயோகிக்கப் பட்டால் அத்தகைப்பை நீககியதும் அச்சடமானது அதனது தொடக்க நிலைக்கு முறறிலும் மீளும் ; ஆனல் பிரயோகிக்கப்படும தகைப்பானது மீளதன்மையெல்லையை மீறினல், தகைப்பு நீக்கப்பட்டதும் அது தொடக்க நிலையை மீளமாட்டாது. அப்பொழுது சடமானது நிலைபேருன அமைப்பு ஒன்றை அடைநதிருக்கிறது எனறு சொல்லபபடுகிறது. [மேலே வரை விலக்கணங் கூறப்பட்ட மீளதன்மையெல்லை எனபது இன்று எந்திரி களால் அடிககடி விகிதசமவெலலைக்குரிய தகைப்பு எனக் குறிக்கப் படுகின்றது ; சடத்தில் ஆகச் சிறிய கட்டுப்படாத நிலைபேருனவமைப்பைத் தரும் தகைப்பையே மீள்தன்மையெல்லை என்பர். எனினும் அவ்விரண் டிற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம் அற்பமானது ; பின்தொடர் விவாதங் களில அது புறக்கணிககப்படும்.]

மீள்தன்மையெல்லைக்கான வேறெரு வரைவிலக்கணம் பினவருமாறு : அது உயர்வான முற்றிலும் மீளபபெறக்கூடிய வடிவழிவைத தரும்

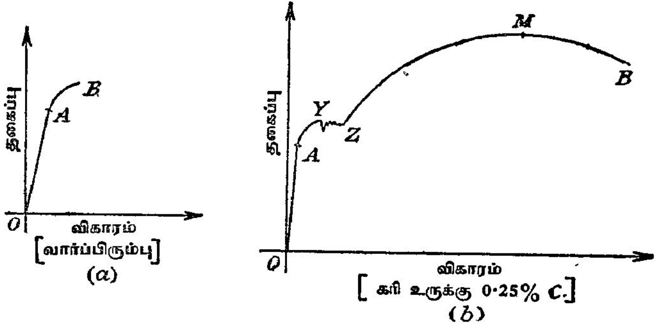
தகைப்பாகும். அதன் பெறுமானத்தைப் பரிசோதனை முறைப்படிக் காண்பதற்கு மாதிரிச சடமீது சுமையேற்றி, அத்தகைப்பு நீக்கப்பட்டதும், இரு புள்ளிகளிடையேயுள்ள தூரம் அளக்கபபடுகிறது. பிரயோகிக்கப்பட்ட தகைப்பு ஒவவொனறிற்கும் நிலைபேறுனவமைபபு கிடைக்கப்பெறும்வரை தகைப்பை அதிகமாக்கிச் செய்கைமுறையானது திரும்பத்திரும்பச் செய்யப்படுகிறது. சுமைதொடர்பாக, நிலைபேறுனவமைப்பு வரைபாகக் குறிக்கப்படுகிறது; வரைபிலிருந்து நிலைபேறுனவமைப்பைத தொடக்கிவைக்கும் தகைப்புப் பெறப்படுகிறது. பெரும்பான்மையான திண்மச் சடங்களினிடதது இவ்விரு வரைவிலக்கணங்களுந் கிட்டத்தட்ட ஒரே பொருளுடையனவேயாம்.

மீள்தன்மை எல்லையை மீறித் தகைப்புற்ற சடங்களின் போக்குப்பற்றி விவாதிக்கையில், படிப்படியாக அதிகரிக்கும இழுப்பு விசைக்கு ஆளாக்கப் படும் மாதிரிச் சடங்களை மட்டுமே கருதுவோம்.

பிரயோகிக்கப்படும் தகைப்பு மீள்தன்மையெல்லையை மீறுமிடத்துத் திண்மமொன்றின் போக்கு.—(a) இழுவையேற்றிய எளிதில் நொருங்கு கின்ற சடங்கள்: வார்ப்பிரும்பு, வல்லிரும்பு, போற்லண்ட் சீமந்து, கல், செங்கல் என்பவை எளிதில நொருங்குகின்ற சடத்துக்குரிய எடுததுக்காட்டுக் கள். படம் 7·09 (a) அத்தகைய பொருளொன்றிறகு விகாரம, தகைப்பு என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காட்டுகிறது. பகுதி OA ஆனது ஏகபரிமாணமாகும்; எனவே A இறகுரிய தகைபபு மீள்தன்மையெல்லை ஆகும்; ஆனுல் A இற்கு அப்பால் வரைபு வளைவுற்றிருக்கிறது. புள்ளி B ஆனது சடம் உடையும நிலையை உணர்த்துகிறது.

(b) **இழுவையிலுள்ள நுண்கம்பியாக்கத்தக்க சடங்கள்.**—0·25 சதவீத கரியுருககினிடத்துக் கிடைக்கப்பெறற தகைப்பு–விகார வரைபு படம் 7·09 (b) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது; அபபடம் தானே பதிகினற முறைப்படி எடுக்கப்பட்டது. A, மீள்தன்மையெல்லையாகும்; அதற்கு அப்பால் புள்ளி Y வரை, வரைபு வளைவுறுகிறது. அடுததுவரும் பகுதி YZ இல் செய்முறையாகத் தகைப்பில் எவ்வித அதிகரிப்புமின்றி விகாரம் பெரிதும் கூடுகிறது; உணர்ச்சியுள்ள தானேபதிகின்ற நீட்சிமானியொன்றில் ஒழுங் கற்ற அலையும் கோடொன்ருக YZ தோற்றுகிறது; இஙகு, Z இறகு ஒத்த தகைப்பு Y இற்கு ஒத்ததைக் காட்டிலும் சிறிது. Y ஆனது **இளகுநிலை** எனப்படும்; அதற்கு ஒதத தகைப்பானது **இளகு தகைப் பாகும்.** AY என்னும் கட்டத்தில் நீட்டலானது ஓரளவு மீள்தனமையி ஞலும் ஓரளவு சோதிக்கப்படும சடத்தில் பரம்பியிருக்கினற நுண் துணிக்கைகளின அசைவாலாகும் ஞெகிழிப் பாய்ச்சலினுலும் ஆகினறது. Z இற்கு அப்பால் நீட்சி இளகுமுறைப்படியாகும்; மீள்தனமைக் கட்டத் தில் நீட்டல் தனி இழுவையாலாகிறது; ஆனுல் ஞெகிழிக் கட்டத்தில் கொய்வுத் தகைப்பானது உயர்ந்ததாயிருக்கிறது; எனவே மாதிரியின் எல்லாப் பாகங்களிலும் அவ்வவ்விடங்களில் உற்பத்தியாகின்ற தகைப் புக்களாலேயே நீட்டலானது பெரும்பாலும் ஆகிறது. தகைப்பை அதிக ரிக்கச் செய்து சட்டம் முறியப்போகும்வரை நீட்டல சீராக நிகழ்கிறது.

அடுத்து கவனிக்கத்தக்க உறுதியின்மையுடைய கட்டம் ஒன்று தோன்றி, மாதிரியானது புள்ளியொனறில் பெரிதும் மெலிகிறது ; அதாவது அப்புள்ளியில் சுருககொன்று உண்டாகிறது ; அனறியும் அதுவரை மாதிரியின அழுத்தமாக இருந்த பரப்பானது கவனிககத்தக்க அளவில் கரடுமுரடாகிறது. அதாவது மாதிரியில "கழுத்து" உணடாகிறது. இது நிகழ்ந்த அம் மாததிரததே தகைப்புத் தானே குறைந்து வளையியின் பாகம் MB கிடைக்கப்பெறுகிறது ; கடைசியாகக் கட்டம் B யில் முறிபபு



படம் 7.09. பிரயோகிக்கப்படும் தகைப்பானது மீள்தன்மையெல்லையை மீறுமிடத்து திண்மமொன்றின் நிலைமாறல்.

நிகழ்கிறது. M இற்கு ஒத்த தகைபபானது சோதிக்கப்படும் பொருளின் **ஈற்று வலிமை** அல்லது **இழுவை வலிமை** எனப்படுகிறது. சுமையை மெது வாக உயர்த்திச் சோதனைமாதிரி மீது பிரயோகிக்கப்படும் உயர்வு விசையை அம்மாதிரியின் தொடக்கக குறுக்குவெட்டுப் பரப்பால் பிரித்து வருவதே அச்சடத்தின் இழுவை வலிமை. உருக்கு (0·18 சதவீதம் கரி) ஆனது 20 தொன். நிறை. அங. $^{-2}$ இழுவை வலிமை உடையது ; உருக்கு (0·32 சதவீதம் கரி) 34 தொன. நிறை. அங். $^{-2}$ இழுவை வலிமை உடையது ; வெளிநாட்டு மரங்களைத் தவிர்த்தால், மரங்களுள் வலிமைக்கும் உறுதிக்கும் மாதிரியாகச் சிறப்புறறு விளங்கும் பிரித்தானிய சிந்தூரத்தின் இழுவை வலிமையானது கிட்டத்தட்ட 7 தொன். நிறை. அங். $^{-2}$ ஆகும். ஆனால் சிந்தூரத்தில ஒரு வகை அமிலம் இருப்பது வருந்தத்தககது ; அது இரும்பையும் உருக்கை யும் அரிக்கும் ஆற்றலுடையது. இது காரணமாகவே மரக் கப்பலைச் செய்யு யும்போது செமபாலான தறைகள் பயனபடுத்தப்படுகின்றன.

சில மங்கனீசு அல்லது நிக்கல் உருக்குகள், குப்பிரோ கலப்புலோகங் கள் போன்ற சடங்களிடத்து இளகுநிலை இன்று ; எனவே மீள் தன்மை நிலையிலிருந்து ஞெகிழி நிலைக்கு மாற்றம் சீரானது.

தந்த எந்தத் தகைப்பு—விகார வரைபும் தொடர்பாக இளகுநிலைக்கு அப்பாலுள்ள கட்டத்தில், தகைப்பு மாருது இருக்கக் குறிப்பிட்டவொரு

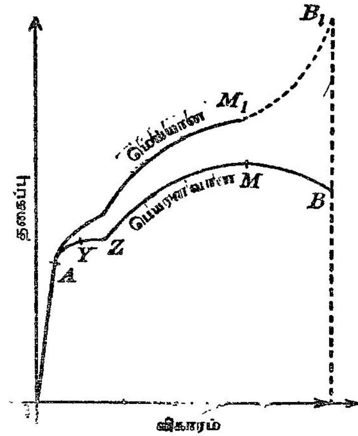
தகைப்பேற்றத்தாலாகும் விகாரத்தின் பெரும் பகுதியானது அவ்வேற்றதைக் கிட்டத்தட்ட உடனுக்குடனே பின்தொடர்கின்றது என்பதையும், ஆனால் விகாரத்தின் ஒரு மிகச்சிறியபகுதி தாமதித்தே தோற்றுகிறது என்பதையும் ஞாபகப்படுத்திக்கொள்ளல் வேண்டும். இத்தோற்றப்பாட்டை ஈவிங் என்பார் "நகர்தல்" என அழைத்துள்ளார். எனவே இழுவைச் சோதனையொன்றில் எவ்வீதத்தில் தகைப்பானது பிரயோகிக்கப்படுகிறது என்பதைக் கண்டிப்பாய்க் குறித்தல் வேண்டும்; ஏனெனில் அவ்வீதமானது மீள்தன்மையல்லா விகார அளவைப் பாதிக்கிறது என்பதேயாம். (வியாபாரவுலகிற் சிலவேளைகளில் மீள்தன்மையெல்லை எனப்படும்) இளகு நிலைக்கு அப்பால், சட்டத்தில் படிப்படியாக நிகழ்கின்ற குறுக்குவெட்டுப்பரப்பு ஒடுக்கம் விகாரத்துக்கு நேர்விகிதசமம் எனக் காணப்பட்டிருக்கிறது; எனவே மாதிரியின் கனவளவு மாறாது இருக்கின்றது.

மெய்யான தகைப்பு—விகார வரிப்படங்களும் பெயரளவுத் தகைப்பு விகார வரிப்படங்களும்.—மாதிரியின் தொடக்கநிலைக் குறுக்குவெட்டுப்பரப்பு தொடர்பாகச் சடமொன்றின் இழுவை வலிமையைக் குறித்தல் வசதியென எந்திரிகள் கருதுகின்றனர். மேலும், தானேபதிகின்ற கருவிகள் எப்பொழுதும் சுமை—விகார வரிப்படங்களையே தருகின்றன; ஆனால் மாதிரியின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பானது மாறாமல் இருக்கும்வரை மட்டுமே சுமை தகைப்புக்கு விகிதசமம். F என்பது இழுவையும், $F \to 0$ ஆகுமிடத்து S என்பது குறுக்குவெட்டுப் பரப்பும் எனின், பெயரளவுத் தகைப்பானது $p = \frac{F}{S}$ என்பதால் தரப்படுகிறது. எனினும் மெய்யான குறுக்குவெட்டுப் பரப்பு S_0 ஆயின், மெய்யான தகைப்பு $\frac{F}{S_0} = P$ என்பதால் தரப்படும். மீள்தன்மையெல்லைக்குக் குறைந்த தகைப்புக்களிடத்து $S - S_0 \to 0$; எனவே அப்பொழுது பெயரளவுத் தகைப்புக்கும் மெய்யான தகைப்புக்குமிடையேயுள்ள வித்தியாசம் மறையும். நுண்கம்பியாகத்தக்க சடங்கள் மீள்தன்மையெல்லை கடந்து தகைப்புறுங்காலே S உம் S_0 உம் கவனிக்கத்தக்க அளவில் வேறுபடக்கூடும். எனவே பெயரளவுத் தகைப்பு—விகார வரிப்படங்களையும் மெய்யான தகைப்பு—விகார வரிப்படங்களையும் வேறுபடுத்திக் கூறுதல் வேண்டற்பாலது. கரியுருக்கிற்கான இத்தகைய வரிப்படங்கள் படம் 7·10 இல் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. M இற்கு ஒத்த புள்ளி M_1 வரை மட்டுமே மெய்யான தகைப்பு—விகார வரிப்படத்தை வரைய முடிகிறது; ஆனாலும் முறிக்குஞ் சுமையை முறிப்பின் போதுள்ள குறுக்குவெட்டுப் பரப்பாற் பிரித்து அவ்வளையியின் கடைசிப்புள்ளி B_1 இன் நிலையைக் கணிக்க முடியும். முறிப்பின் போதுள்ள மெய்யான தகைப்பானது பெயரளவுத் தகைப்பைக் காட்டிலும் மிகப்பெரிதாம்.

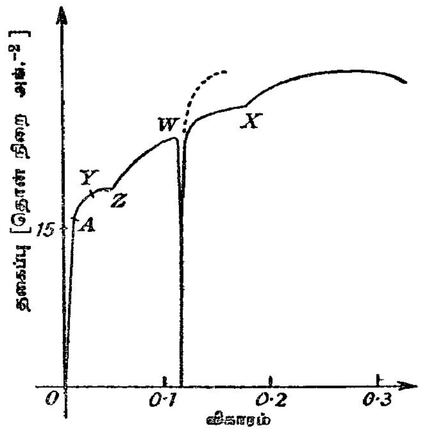
உலோகங்கள், கலப்புலோகங்கள் ஆகியவற்றின் குளிர்நிலைப் பண்படுத்துகை.—நுண்கம்பியாகத்தக்க சடத்துண்டொன்றின் விகாரப்பட்ட நிலையா

னது, பொதுவான தகைப்பு—விகார வரிப்படத்தில் புள்ளி W விஞல் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொளக, படம் 7·11. தகைப்பைப் பூச்சியத் திறகுக் குறைத்து, கிட்டத்தட்ட உடனடியாக இழுவைச் சோதனை யொன்றை நடத்திஞல், தகைபபுக்கும் விகாரத்துக்கும் இடையேயுள்ள விகிதசமததொடர்பின் வீச்சு குறைககப்பட்டிருக்கிறது எனவும், மாதிரி மீது முன்பு பிரயோகிக்கபபட்ட தகைப்புககுச் சறறுக் கூடுதலான தகைப் பொனறிற் புது இளகுநிலையொனறு தோற்றுகிறது எனவும் காணப் படும்.

மேலும் நிலை X ஐ அடைந்ததும், பல மணிததியாலஙகளுக்குத் தகைப்பு மாருமல் பேணபபடுக; இனித தகைப்பை அதிகரிக்கச் செயதால புது இளகுநிலையொன்று தோறறும். குளிர நிலையில இருககும உலோகமானது இவ்வணண்ம பொறிமுறைப்படிப் பணபடுததப்படுவதால அதன இழுவை வலிமை கூடுகிறது; அலலாமலும அதன இறுதி விகாரமும் குறை கிறது; உலோகமானது குளிர்நிலைப் பணபடுத்தபபட்டது எனப்படுகிறது.



படம் 7·10. பெயரளவுத் தகைப்பு விகார வரிப்படமும் மெய்யான தகைப்பு விகார வரிப்படமும்.



படம் 7·11. உலோகங்களின் குளிர்நிலைப் பண்படுத்துதல்.

வூட்டல் (Wurtel) தட்டு எனப்படுவதிலுள்ள சிறு துளையொன்றூடே கம்பி யொனறு இழுக்கபபடடால் அது குளிர்நிலைப் பண்படுத்தப்பட்டுளளதாகும். எந்திரத்தால மட்டமாககுதலாலும் சம்மட்டியால் அடிக்கப்படுதலாலும் அதுபோன்ற விளைவுகள தோனறுகினறன. ஏறகெனவே குறித்துள்ள குளிர்நிலைப் பண்படுத்துதலின விளைவுகளைவிட மற்றை விளைவுகள் நுண்கம்பி யாககப்படுதனமை குறைதல், வன்மை கூடுதல், பொறியியல் அதிர்ச்சி யெடுக்குந்தன்மை குறைதல் என்பன ஆகும்.

அடுத்து மேற்படி மாதிரிக்குச் சர்வசமனான மாதிரியொன்றை W ஆல் குறிக்கப்படும் நிலையை அடையச்செய்து பின்னர் அதன மீதுள்ள தகைப்பை நீக்கிப் பூச்சியத் தகைப்புநிலையில் போதிய நீண்டகாலம் அது வைககபபட்டுள்ளது எனக் கொளக. இனி இழுவைச் சோதனையை நடாத்தினல் இளகுநிலை உயர்ந்திருக்கிறது எனக் காணப்படும்; எனவே மாதிரியானது ஓய்வாய் இருந்த காலத்தில் வன்மையாக்கும் முறை யொன்று நிகழ்ந்திருக்கிறது.

மாதிரியைக் காய்ச்சிக் குளிரவைத்து, குளிர்நிலைப் பண்படுத்துதலால் ஆகும் வன்மையை நீககலாம்; அதாவது பொருத்தமான வெப்பநிலை யொன்றை அடையும்வரை சடத்தைச் சூடாக்கி, அதன்பின் அதை மெது வாகக் குளிரவிடுதலே இம்முறையாகும்.

சடங்களின் இழுவை வலிமை. காவற் காரணி.—சடமொன்றை முறியச் செய்யும் தகைப்பானது பயனபடுததப்படும் அத்தகைப்பு வகையைப் பொறுத்தமட்டில் அச்சடத்தின் இறுதி வலிமையை அளக்கிறது—நீள்பக்க இழுபடியொனறல் ஈர்க்கப்படுகின்ற உலோகக் கோலொன்றினிடத்து அது **அச்சடத்தின் இழுவை வலிமை** எனப்படும்.

எநதிரவியலமைப்பொன்றைத் திட்டமிடுமிடத்துப் பயன்படுத்தப்படும் சடத்தின் இறுதி வலிமையின் ஒரு குறிப்பிட்ட பின்னத்தை அவ்வமைப்பி லுள்ள உயாவுத்தகைப்பு மீருதவண்ணம் கவனஞ் செலுத்தல் வேண்டும். இப்பின்னம் **வேலைசெய்யும் தகைப்பு** எனப்படும்.

$$\frac{\text{இறுதி வலிமை}}{\text{வேலைசெயயும் தகைபபு}}$$

என்னும் விகிதமானது **காவற்காரணி** எனப்படும். பிரித்தானிய பொதுநல வாயத்தில் இது வழக்கமாக 10 ஆகும்; ஐக்கிய அமெரிக்க நாடுகளில் இது வழக்கமாக 5 மட்டுமே.

யங்கின் மட்டு.—நீள்பககத் தனியிழுப்பொன்றல் தாக்கப்படும் கம்பி யொனறைக் கருதுக; அதாவது அதன் நுனிகளிற் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற இரு சமவெதிர் விசைகள் F என்பவற்றல் அது ஈாக்கப்படுகிறது; ஈர்க்கும் விசை களின் திசைகளுக்குச் செங்குத்தான திசைகளிற் கம்பியானது தடையின்றி ஒடுங்கமுடியும். கம்பியின் குறுககுவெட்டு ஆரை r உம், அதன் தொடக்க நீளம் l உம், நீட்சி Δl உம் ஆகுக. அப்பொழுது நீள்பக்க விகாரம் $\frac{\Delta l}{l}$ உம், நீள்பககத்தகைப்பு $\frac{F}{\pi r^2}$ உம் ஆகும். பூரண மீள்தன்மையெல்லையை மீருதவாறு கம்பியானது ஈர்க்கப்பட்டிருப்பின் ஹூக்கின் விதிப்படி

$$\frac{F}{\pi r^2} = (\text{மாறிலி})\,\frac{\Delta l}{l}.$$

இம்மாறிலி கம்பியின் சடத்தின் **யங்கின் மட்டு** அல்லது **நீள்பக்க விரியல் மட்டு** எனக் குறிக்கப்படுகிறது. அதை E யினற் குறித்தால்

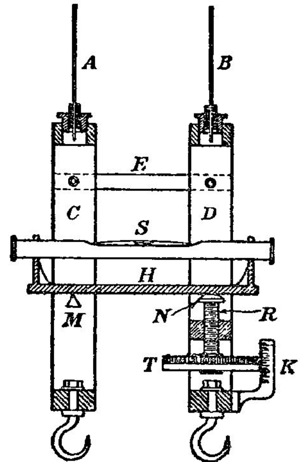
$$\frac{F}{\pi r^2} = E.\frac{\Delta l}{l}.$$

கம்பியொன்றின் சடத்திற்கு E யை ஆய்கூடங்களில் துணியுமிடத்துப் பொதுவாக அக்கம்பியின கீழ்நுனியிற் பிரயோகிக்கப்படும் விசை F ஆனது திணிவு m கொண்ட சுமையொன்று மீதுள்ள புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சியாகும்; இத்திணிவானது கம்பியிலுள்ள தக்க பற்றென்முற காவப்படுகிறது. அப்பொழுது $F = mg$; இங்கு g என்பது புவியீர்ப்புச் செறிவு ஆகும் ; எனவே

$$E = \frac{mgl}{\pi r^2 \Delta l}.$$

E யைத் தைன். சமீ.$^{-2}$., இரு–நிறை. அங்.$^{-2}$, தொன்–நிறை. அங்.$^{-2}$ முதலியவற்றில் அளக்கலாம்.

நீளமான கம்பியொன்றின் சடத்திற்கு யங்கின் மட்டைத் துணிதற் கான சேளின் ஆய்கருவி.—ஒரே சடத்தாலான இரு கம்பிகள் விறைப்பான ஒரே தாங்கியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன ; அவற்றின் நீளங்கள் கிட்டத்தட்ட 2 மீற்றர் ஆகும். ஒவ்வொரு கம்பியும் அதன் கீழ்நுனியில் பித்தளையாலான செவ்வகச் சட்டமொன்றைக் காவுகிறது ; சட்டங்களின் கீழ்ப்பக்கங்களிலிருந்து பொருத்தமான சுமைகளைத் தொங்கவிடலாம். படம் 7·12 இல் A யும் B யும் கம்பிகள் ஆகும் ; C யும் D யும் சட்டங்களின் நுனிப் பார்வையைக் காட்டுகின்றன. சட்டங்களின் தொடர் பிடப்பெயர்ச்சியைத் தடுக்காதவண்ணம் அவற்றுடன் சுயாதீன வகையிலே பிணைக்கப்பட்ட கோல்கள் இரண்டினுள் E ஒன்றுகும் ; உலோகத்துண்டு H என்பது நீர்மட்டம் S ஐக் கொண்டுள்ளது ; அதன் நுனியொன்றில் இருக்கின்ற பொறுதி M ஐக் குறித்துச் சுயாதீன வகையில் அது அசையக்கூடும். அதன் மறு முனையில் நிலைக்குத்தான திருகு R இன் கூர் N மீது அது தாங்கப் பட்டிருக்கிறது ; திருகு கோடிடபபட்ட தலை T யால் திருப்பப்படுகிறது. திருகுப் புரி யிடை 0·5 மிமீ. ஆகும் ; T யின் விளிம் பில் 50 சம பிரிப்புக்கள் உள. தலை T யானது ஒரு பிரிப்பால் திரும்புமிடத்து திருகு 0·01 மிமீ. அசைகிறது.



படம் 7·12. கம்பிகளின் ஈர்த்த லாய்வுக்கான சேளின் ஆய்கருவி

அவை நேராக இருக்குமாறு ஒவ்வொரு கம்பியும் 1 கிகி. திணிவைக் காவுகிறது ; வளிக் குமிழியின் முனையொன்று மட்டத் தின் மையத்தில் இருக்கும்பொழுது திருகின் வாசிப்பு நோக்கப்படுகிறது. [குமிழியை மைய நிலையில் வைப்பதற்கான செப்பஞ்செய்கை யைக் காட்டிலும் இம்முறையே குமிழியின் திட்டமிக்கச் செப்பஞ்செய்கைக்குப் பெரிதும் பயன்படுகிறது.] அடுத்து கம்பியொன்றி

லுள்ள சுமை 1 கிகி. அளவில் ஏற்றப்படுகிறது; இதனுல் கம்பி ஈர்க்கப் பட்டு வளிகுமிழி பெயர்க்கப்படுகிறது. திருகைச் சுழற்றி, குமிழியை அதனது நியம நிலைக்குக் கொண்டுவரலாம். திருகின் கூறை அசைத்து வைத்துள்ள தூரமானது கம்பியின நீட்சிக்குச சமனுகும். அடுத்து படிபபடியாகச் சுமையை ஓர் உயர்வுவரை ஏறறிப பின படிப்படியாக ஒருமுறையில ஒரு கிகி. ஆகச் சுமை குறைககபபடுகிறது. ஒவ்வொரு சுமையிலும திருகின் வாசிபபு எடுக்கப்படுகிறது. வரைபு அலலது வேறெரு முறையைப் பயன் படுததிச் சுமையின திணிவில 1 கிகி. ஏறறத்திற்குரிய சராசரி நீட்சி துணியப்படுகிறது. இப்பினணமானது θ எனின்,

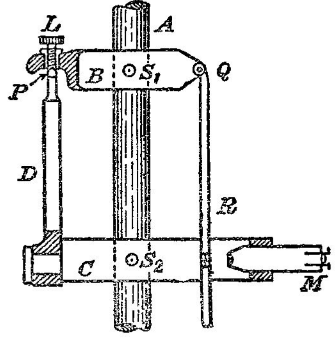
$$E = \frac{gl}{\pi r^2}\left(\frac{1}{\theta}\right) \times 10^3$$

என்னுஞ் சூத்திரத்திலிருந்து கம்பியின் சடத்தின் யங்கின் மட்டுக்குப் பெறுமானமொனறைப் பெறலாம்.

ஈவிங்கின் நீட்சிமானி.—இழுவைத் தகைப்பொன்றுல் தாக்கப்படுகின்ற குறுகிய கோலொன்றின நீட்சியைத் துணியும்பொருட்டு, வரிப்பட முறைப்படி படம் 7·13 இல் காட்டியுள்ள நீடசிமானியை **ஈவிங்** எனபார் திட்டமிட் டார். அதனைப் பயனபடுததி மாதிரியின நீள மாறலைத் தொடர்ந்து நோக்கமுடிகினறது; அதை ஒன்றில நிலைக்குத்தான அலலது கிடையான சோதிக்கும் கருவிகளில் அமைத்துக் கொளளலாம்.

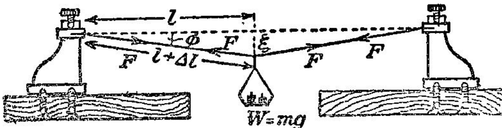
S_1, S_2 என்னும் இரு திருகுச் சோடிகளாற் சோதனைத்துண்டு A யுடன் கருவி இறுகப் பற்றப்பட்டிருக்கிறது; S_1, S_2 எனபன பிடிக்கும துண்டுகள் B, C என்பவற்றுடன இணைக்கப்பட்டிருக்கினறன. அவற்றின் இடைததூர மானது வரையறுதத அளவில [10 சமீ. அலலது 20 சமீ.] இருக்குமாறு திருகுகளின நுனிகள செபபஞ் செயயப்படுகின்றன; எனவே இத்தூர மானது நீட்சி அளக்கவேண்டிய மாதிரியின தொடக்க நீளத்தை நிர்ண யிக்கிறது. D ஆனது கீழ்ப்பிடிகருவி C யிலிருந்து நீட்டிய நிலைக்குத் தான பிடிகருவியொன்றுகும; அது உருண்டை வடிவம் அளிக்கப்பட்ட முனையொன்றில முடிவடைகிறது. அம்முனையானது மேற் பிடிகருவி B யுடன் பறறப்பட்ட திருகொனறிலுளள கூம்புத்துளையொன்றில் அமை கிறது; எனவே சோதனைத்துண்டானது விரிவடையும்பொழுது அதைப் பொறுதியாகப் பயனபடுத்திப் பிடிகருவி B சுழல்கிறது. சோதனைத் துண்டின் அச்சிலிருந்து அதே தூரத்தில் பிடிகருவி B யின் எதிர்ப்பக்கத் தில் உளள புளளி Q ஆனது C இறகுத தொடர்பாகச் சோதனைத துண்டின் நீட்சியின் இருமடங்கு தூரம் அசைகிறது. நுணுக்குக்காட்டி M ஐப் பயன் படுத்தி இவ்வசைவு அளக்கப்படுகிறது; நுணுக்குக்காட்டியானது C யுடன் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்து Q வைச் சுழலையாகக கொண்ட கோலொன் றிலுள்ள குறிமீது குவிந்து இருககிறது. இக்குறியானது கோலிலுள்ள துவாரமொன்றில் அமைககப்பட்டிருககின்ற கண்ணுடித்தட்டில் கீறியுள்ள நுண்ணிய கோடொன்றுகும்; அது சிறு ஆடியொன்றுல் தெறிக்கப்படும்

ஒளியால் ஒளிர்ப்படைகிறது. இக்கோடுமீது நுணுக்குக்காட்டி குவியுமாறு செய்யப்பட்டிருக்கிறது ; அதன விம்பத்தின் பெயர்ச்சி நுணுக்குக்காட்டி யின் பார்வைத் துண்டிலிருக்கின்ற நுணுக்குமானிச் சட்டத்தில் நேரே அளக்கப்படுகிறது.— $2 \cdot 5 \times 10^{-5}$ சமீ. வரிசையில் படும் நீட்சிகளை அவதா னிகக முடிகிறது. பொறுதி P யிற்குரிய கூம்புருப் பையானது திருகு நுண மானி L இன் முனையொன்றில் ஆக்கப்பட்டிருக்கிறது ; திருகு நுண மானியைச் செப்பஞ்செய்து கோல் R இலுளள குறியின விம்பத்தை M இலுள்ள பாாவைத்துண்டுத திடடத தில் வசதியான புள்ளியொன்றில் அமையுமாறு செய்யலாம்; அல்லாம லும் அது பார்வைத் துண்டிலிருக் கின்ற திருகு நுண்மானி அளவிடை யின அளவுகோடு திருத்துவதிற பயன் படுகிறது. மீள்தன்மை எல்லையைக் கடநதபின மாதிரியின போக்கையிட்டு நோக்கல்களை எடுக்குமபொழுது மாட்டேற்றுக் குறியின் விம்பமானது நுணுக்குக்காட்டியின பார்வைப் புலததிற்கு வெளியே போகும்வகையிலே அசைவு அததுணைப் பெரிதாய் இருக்ககூடும். திருகைப் பயன்படுத்தி, விம்பம் திட்டத்திற்கு மீளுமாறுசெய்து, அவதானிப்புக்கள் தொடர்ந்து எடுக்கப்படுகின்றன.



படம் 7.13.—சுவிங்கின் நீட்சிமானி.
[Camb. Inst. Co. என்பவர்களின் பட்டியலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளது.]

கிரேசாந்தின் (Gravesande) முறையால் கம்பியொன்றின் சடத்திற்கு யங்கின் மட்டைத் துணிதல்.—இப்பரிசோதனையில் விட்டம் 0·056 சமீ. உம் நீளம் கிட்டத்தட்ட ஒரு மீற்றரும் உடைய நிக்கற் கம்பியொன்று வசதியாகும். இரு பிடிகருவிகளுக்கிடையே அது தளராமற் பிடிக்கபபட்டிருக்கிறது; கம்பி



படம் 7·14. கிரேசாந்தின் முறையால் கம்பியொன்றின் சடத்திற்கு யங்கின் மட்டைத் துணிதல்.

கிடையாக உள்ளது, படம் 7·14 ஐக் காண்க. கம்பி மீது சுமையேற்றும் பொருட்டு அதன் மையததில் தட்டு அல்லது கொளுக்கியொன்று தொங்க விடப்பட்டிருககிறது. கம்பியின் தொடக்க நீளம் $2l$ ஆகுக ; தொங்கும்

நிறை W ஆகுமிடத்து, கம்பியின் மையத்தில் இறக்கம் ξ எனக் கொள்க. கம்பியில் தொடக்க இழுவை F_0 ஆகுக; கம்பியிற சுமை யேற்றிய பின்னர் அது F இறகுக் கூடுக; கம்பியின் புது அரைநீளம் $l+\Delta l$ ஆகுக. கிடைக்கோட்டுடன கம்பியின் ஒவ்வோர் அரைவாசியினதும் கோணம் ϕ ஆகுக; ϕ சிறிது எனக் கொள்க. கம்பியின் சடதிறகு யங்ஙின் மட்டு E ஆகுக. அப்பொழுது

$$W = 2F \text{ சைன் } \phi;\ E \cdot \frac{\Delta l}{l} = \frac{F - F_0}{A}.$$

இங்கு A என்பது கம்பியின் குறுக்கு வெட்டுப்பரப்பு.

இனி,

$$\text{சீக } \phi = 1 + \frac{\Delta l}{l} = 1 + \frac{F - F_0}{EA}.$$

$$\therefore\ F = F_0 + EA(\text{சீக } \phi - 1),$$

அத்துடன், $$W = 2 \text{ சைன் } \phi [F_0 + EA(\text{சீக } \phi - 1)].$$

ஆனல் $$\text{சீக } \phi = (1 + \text{தான்}^2 \phi)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^2}{l^2},$$

அத்துடன் $$\text{சைன் } \phi = \frac{\xi}{(\xi^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} \simeq \frac{\xi}{l}\left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi^2}{l^2}\right].$$

$$\therefore\ W = \frac{2\xi}{l}\left(1 - \frac{\xi^2}{2l^2}\right)\left(F_0 + EA\frac{\xi^2}{2l^2}\right).$$

எனவே சீக ϕ, சைன் ϕ என்பவற்றிற்குரிய கோவைகளில் $\frac{\xi^4}{l^4}$ ஐப் புறக் கணித்தால்,

$$\frac{Wl}{2\xi} = \frac{EA\xi^2}{2l^2} + F_0\left(1 - \frac{\xi^2}{2l^2}\right).$$

$$\therefore\ \frac{W}{\xi} = \xi^2\left(\frac{EA}{l^3} - \frac{F_0}{l^3}\right) + \frac{2F_0}{l}.$$

$\xi^2 = x$ எனவும் $\frac{W}{\xi} = y$ எனவும் பயன்படுத்திஞல் மேற்படி சமன்பாடு

$$y = x\left(\frac{EA}{l^3} - \frac{F_0}{l^3}\right) + \frac{2F_0}{l} \text{ ஆகும்.}$$

இது சாய்வு $\left(\frac{EA - F_0}{l^3}\right)$ உம், y அச்சில் வெட்டுத்துண்டு $\frac{2F_0}{l}$ உம் உடைய நேர்கோடொன்றின் சமன்பாடு ஆகும். எனவே F_0 ஐயும் E ஐயும் துணிய முடிகிறது.

கம்பியொன்றினது சடத்தின E ஐத் துணிதலுக்கான இம்முறையானது பதினெட்டாம் நூற்றுண்டின் தொடக்கத்தில **கிரேசாந்து** எனபவரால் பிரேரிககபபட்டது ; ஆனுல் தொடகக இழுவையைத் துணிவது ஒரு பிரசசினையாக இருந்தபடியால் இம்முறை பயன்படுததப் படவில்லை. **பேகசன்***
எனபவரால முதன்முதலாகப பிரேரிககப்பட்ட வரைபு முறையைப் பயனபடுததி E ஐயும் F_0 ஐயும் துணியமுடிகிறது. அப்பொழுது இந்த முறையானது நம்பத்தக்கதொனறு ஆகிறது.

கிரேசாந்துவின் முறையையிட்டு ஏறறுளள சூத்திரத்தை எளிமைகூடிய வகையிலே பின்வருமாறு பெறலாம. படம 7·15 (*a*) யில, நீளம் $2l_0$ கொணட கிடையான கமபியொனறின் நுனிகள நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிற புள்ளிகள் A யும் B யும் ஆகுக ; AB யின் மையம் O ஆகுக ; நிறை W ஆற கம்பியானது மையமாகச் சுமையேறறியுளளபோது கமபியின் மையபபுள்ளியானது C யிறகு இறஙகுகிறது எனக் கொளக ; இங்கு $OC=\xi$. $AC=l$ ஆகுக. $CD=2OC$ என ஆககினுல் C யின் சமநிலையிற்கான நிபந்தனைகளை நிறைவேறறும் விசை முககோணி Δ ACD ஆகும் ; அபபொழுது

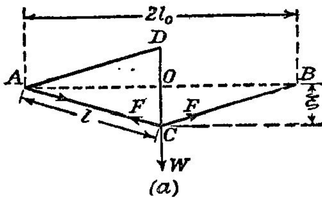
$$\frac{F}{l}=\frac{W}{2\xi}, \quad \text{அல்லது} \quad F=\tfrac{1}{2}W\frac{l}{\xi}.$$

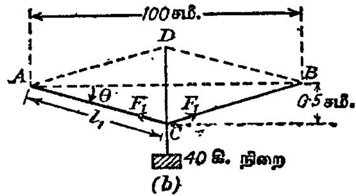
மேலும்

$$l=\sqrt{l_0^2+\xi^2}\doteq l_0\left(1+\frac{\xi^2}{2l_0^2}\right).$$

$$\therefore\ l-l_0=\frac{\xi^2}{2l_0}.$$

இனி கம்பியின் சடத்திற்கு யங்ஙின் மட்டு E யின் பெறுமானத்தைக் கணிக்கும்பொருட்டு, இழுக்கும் விசையில் தோனறும் மாற்றத்தை அதாவது $F-F_0$ ஐ அறிதல்வேண்டும ; இங்கு F_0 என்பது கம்பியின் தொடக்க இழுவை ஆகும்.





படம் 7·15. யங்ஙின் மட்டைத் துணிதலுக்குரிய கிரேசாந்தின் முறை.

இங்கு F_0 தெரியாததே ; ஆனுல் ஒன்றன் பின்னென்ருக W_1, W_2 ஆகிய நிறைகளை கம்பியிற் சுமையேற்றி அவற்றிற்கு ஒத்த இறக்கங்கள் ξ_1, ξ_2

* *Sci. Prog.*, 22, 461, 1928.

என்பவற்றை நோக்கினல்

$$F_1 = \tfrac{1}{2} W_1 \frac{l_1}{\xi_1}, \qquad F_2 = \tfrac{1}{2} W_2 \frac{l_2}{\xi_2} \qquad \text{ஐயும்}$$

$$l_1 - l_0 = \frac{\xi_1^2}{2l_0}, \qquad l_2 - l_0 = \frac{\xi_2^2}{2l_0} \qquad \text{ஐயும்}$$

பெறுவோம்.

கம்பியின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பு A எனின்,

$$E = \frac{F_2 - F_1}{A} \div \frac{l_2 - l_1}{l_0}$$

$$\doteqdot \left[\left(\frac{W_2}{\xi_2} - \frac{W_1}{\xi_1}\right)\frac{1}{A} \cdot l_0^3\right] \div [\xi_2^2 - \xi_1^2].$$

அல்லது வரைபு முறையொன்றையிட்டு,

$$E = \frac{F - F_0}{A} \div \frac{l - l_0}{l_0}$$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{lW}{2\xi} - F_0\right) \div \frac{\xi^2}{2l_0^2}.$$

$$\therefore\ EA\xi^2 = l_0^2\left(\frac{l}{\xi} W - 2F_0\right)$$

அல்லது, $$\frac{W}{\xi} \doteqdot \frac{EA}{l_0^3}\xi^2 + \frac{2F_0}{l_0}. \quad \left[\because \frac{l}{l_0} \to 1\right]$$

எடுத்துக்காட்டு.—நீளம் 1·0 மீற்றரும குறுககுவெட்டுப் பரப்பு 1·00 மிமீ.[2] உம கொண்ட கிடையான உருககுக கம்பியொனறு, இரு நிலைதத தாஙகிகளுககிடையே ஈாக்கப்பட்டு, அதன் மையபபுளளியிற சுமையேறறபபட்டிருககிறது. திணிவு 40 கி. கொண்ட சுமையொன்ருல் ஆகும தொய்யல 5·0 மிமீ. உம, 600 கி. சுமையொனருல ஆகும் தொய்யல 15·0 மிமீ. உம் ஆகும. உருககினது யஙகின மட்டுககுப பெறுமானம காணக.

சுமையின பெறுமானம் 40 கி. ஆய் இருககும்பொழுது, கமபியின அரைநீளம் l_1 உம் கமபியில இருககும இழுவை F_1 உம ஆகுக. படம 7·15 (b) யில் CD ஆனது தொய்யலின் இருமடஙகு ஆயின, ACBD யை விசையிணைகரம எனப பெறுவோம்; அதிலிருந்து $\frac{F_1}{l_1} = \frac{40}{1}$, அல்லது $F_1 = 40 \times 50 = 2000$ கி. நிறை [$\because\ l_1 \doteqdot 50$ சமீ.] எனப் பெறுவோம்.

சுமை 600 கி. ஆகும்போது கம்பியின் அரைநீளம l_2 உம் அதன் இழுவை F_2 உம் ஆகுக முனபோலவே கணிதது $F_2 = 10{,}000$ கி. நிறை எனப் பெறுகிருேம்.

இனி $$l_1 = \sqrt{50^2 + 0{\cdot}5^2} = 50\sqrt{1 + \frac{1}{10^4}} = 50\left[1 + \frac{5}{10^5}\right] \qquad \text{உம}$$

$$l_2 = \sqrt{50^2 + 1{\cdot}5^2} = 50\sqrt{1 + \frac{2{\cdot}25 \times 4}{10^4}} = 50\left[1 + \frac{45}{10^5}\right] \qquad \text{உம்}$$

ஆகும்.

$$\therefore \quad \text{விகார மாறறம} = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \doteqdot \frac{l_2 - l_1}{50}.$$

$$E = \frac{\text{தகைபபு மாறறம}}{\text{விகார மாறறம}} = \left(\frac{8000 \times 980}{0{\cdot}010}\right) \div \left(\frac{50}{50} \cdot \frac{40}{10^5}\right)$$

$$= 1{\cdot}96 \times 10^{12} \quad \text{தைன. சமீ.}^{-2}$$

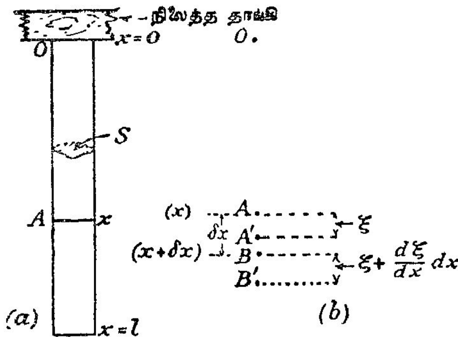
நிலேக்குத்தாகத் தொங்குகின்ற சீரான கோலொன்றினிடத்து அதனது சொந்த நிறையால் ஆகும் நீட்சி.—கோலின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பு S உம் அதன் ஈாக்கப்படாத நீளம் l உம் ஆகுக. படம் 7·16 (a) யில் காட்டியுளளவாறு, கோலானது கீழ்முகமாக நிலேக்குத்தாயத் தொங்கும் பொழுது, கோலின பக்கத்தில குறிததுள்ள ஆள்கூறுகள், கோல ஈாக்கப் படாத நிலேயில உளள பொழுது அதன மேல முனேயிலிருந்து அதன் இடையான வெட்டுகளின் தூரஙகளேக் குறிகக. இனி A யில் இடையான பகுதியொன்றின குறுக்கே உள்ள இடைத் தகைப்பு p யைக் கருதுக. அதன் நிலே x ஆற குறிக்கப்படுகிறது. A யில் இடைததளத்தின் குறுககே, கோலின் கீழ்ப் பகுதிமீது அதனமேற பகுதி பிரயோகிககும் விசையானது அத்தளத்துக்குக் கீழேயுள்ள கோலினது பகுதியின் நிறையைச் சமமாக்க வேணடும் ஆதலால்

$$pS = g\rho S(l - x).$$

இங்கு g புவியீர்ப்புக் கவர்ச்சியும், ρ கோலின சடத்தின் அடர்த்தியும் ஆகும்.

படம் 7·16 (b) யில், கருதப்படும் தளத்துத் துணிக்கைகள எல்லா வற்றினதும இடைக் கீழ்முகப் பெயாச்சி ξ ஆகுக. அப்பொழுது

$$\xi = f(x);$$



படம் 7·16. கோலொன்றினிடத்து அதனது சொந்த நிறையால் ஆகும் நீட்சி.

மேலும் தளம் $x + \delta x$ இலுள்ள துணிக்கைகளின் பெயர்ச்சி

$$\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x.$$

படம் 7·16 (b) யில், $OA=x$, $AB=\delta x$; அதன் சொந்த நிறையின் தாக்கத்தால் கோல் விரியும்பொழுது A ஆனது A′ இற்குச் செல்லுகிறது ; அதாவது $\xi=AA'$. அதேநேரத்தில் $BB'=\xi+\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\delta x$ ஆகுமாறு B ஆனது B′ இற்குச் செல்லுகிறது. எனவே மூலகம் AB ஆனது நீளம் A′B′ உடைய தொன்றுகிறது ; இங்கு

$$\xi+A'B'=\delta x+\left(\xi+\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\delta x\right).$$

$$\therefore\ A'B'=\left(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\delta x.$$

எனவே கருதப்படும் மூலகத்திலுள்ள நீட்சி விகாரமானது,

$$\frac{A'B'-AB}{AB}=\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{d\xi}{dx}\,.$$

வளையின் சடத்திற்கு யங்கின் மட்டு E எனின்

$$E\frac{d\xi}{dx}=p=g\rho(l-x).$$

$$\therefore\ \xi=\frac{g\rho}{E}\,(lx-\tfrac{1}{2}x^2)\,;$$

இங்கு $x=0$ ஆகுமிடத்து $\xi=0$ ஆதலின தொகையீட்டு மாறிலி பூச்சிய மாகும். எனவே கோலினிடத்து அதன சொந்த நிறையால விளையும் நீட்சி

$$[\xi]_{x=l}=\frac{g\rho}{E}\,(l^2-\tfrac{1}{2}\,l^2)=\frac{1}{2}\,\frac{g\rho l^2}{E}$$

என்பது தெளிவாம்.

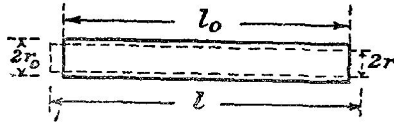
பொய்சோனின் (Poisson) விகிதம்.—மாறு வெப்பநிலையில் இருக்கின்ற கம்பியொனறு இரு சம, எதிர் விசைகளால் தாக்கப்படும்பொழுது கம்பியில் இழுவை விகாரமொன்று பிறப்பிக்கப்படுகினறது. நீளத்திலுள்ள அதிகரிப்பு Δl இற்கும தொடக்க நீளம் l இற்குமிடையேயுள்ள விகிதமானது இழுவை அல்லது நீளபகக விகாரம் எனப்படும. இத்தகைய சூழலிற் கம்பியின நீள அதிக ரிப்புடன கம்பியில் விட்டச் சுருங்கலொன்றும் தோற்றுகிறது எனக் கவன மாக எடுதத அளவீடுகள் தெரிவிக்கின்றன. ஈர்க்கப்பட்ட கம்பியொன் றிலே, விட்டச் சுருங்கலிற்கும் தொடக்க விட்டத்திற்கும் இடையேயுள்ள விகிதமானது பக்க விகாரம் எனப்படும். மாறு வெப்பநிலையிலுள்ளதும் மீள்தனமையெல்லையை மீறித் தகைப்புறுததுமான சடமொன்றினிடத்து பக்கவிகாரத்திறகும நீள்பக்க விகாரத்திறகும் இடையேயுள்ள விகிதமானது ஒரு மாறிலி ஆகும் ; அது **பொய்சோன் விகிதம்** எனப்படும் ; அது σ என்க.

எனவே, கம்பியானது விகாரப்பட முன்னரும் விகாரப்பட்ட பின்னரும் அதன் ஆரை முறையே r உம் $(r+\Delta r)$ உமாயின் பக்க விகாரம் $-\dfrac{\Delta r}{r}$ ஆகும்.

$$\therefore\ \sigma=\left(-\frac{\Delta r}{r}\right)\div\left(\frac{\Delta l}{l}\right).$$

தரப்பட்ட சடமொன்றிற்குப் **பொய்சோன் விகிதம்** காண் பரிசோதனை முறைகள், பக்கங்கள் 358, 409, 427, 435, 459 இல் விவரித்துக் கூறப்படும்.

நீள்பக்க, பக்க விகாரங்களுடன் தோற்றும் கனவளவு மாற்றம்.— ஈர்க்கும் விசைகளின் பிரயோகத்திற்கு முன் கம்பியொன்றின் நீளம்,



படம் 7·17. நீள்பக்க, பக்க விகாரங்களுடன் தோற்றும் கனவளவு மாற்றம்.

குறுக்கு வெட்டு ஆரை, கனவளவு என்பன முறையே l_0, r_0, V_0 ஆகுக, படம் 7·17. கம்பியின ஈர்க்கபபட்ட நிலையில் அவை முறையே l, r, V ஆகுக ; கம்பியின் ஈர்த்தல் அச்சுக்குச் செங்குததான எல்லாத் திசைகளிலுங் கம்பி தடையின்றிச் சுருங்கலாம் எனவும், மீள்தன்மையெல்லை மீறப்படவில்லை எனவும் கொள்ளப்படுகிறது. அப்பொழுது கனவளவுப் பின்னமாற்றம்

$$\frac{V-V_0}{V_0}=\frac{r^2l-r_0^2l_0}{r_0^2l_0}.$$

நீள்பக்க விகாரம் ϵ என்பது $\dfrac{l-l_0}{l_0}$ ஆகும் ; மேலும் கம்பியினது சடத்தின் பொய்சோன் விகிதம் σ எனின்,

$$\frac{r_0-r}{r_0}=\sigma\left(\frac{l-l_0}{l_0}\right)=\sigma\epsilon.$$

எனவே $$\frac{r_0}{r}=(1+\sigma\epsilon).$$

$$\therefore\ \frac{V-V_0}{V_0}=\left[\frac{1}{(1+\sigma\epsilon)^2}\cdot(1+\epsilon)\right]-1;$$

இவ்விகாரமானது எப்பொழுதும் நேரானது ; $\sigma=0{\cdot}5$ ஆகுமிடத்து $\sigma\epsilon$ அவ்வளவு சிறிதாய் உள்ளதால் $(1+\sigma\epsilon)^2\simeq 1+2\sigma\epsilon$ அது பூச்சியம் ஆகின்றது என்பது குறிக்கப்படும்.

$\sigma = 0{\cdot}25$ எனின் (இது பல சடங்களுக்குப் பொதுவான பெறுமானம்) ϵ^3 முதலியனவற்றைக் கொண்ட உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்து

$$\left[\frac{V - V_0}{V_0}\right]_{\sigma=0\cdot25} = \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3}{16}\epsilon^2\right)(1+\epsilon) - 1$$
$$= \tfrac{1}{2}\epsilon - \tfrac{5}{16}\epsilon^2.$$

மேலும் ϵ^2 புறக்கணிக்கப்பட்டால், சிறப்பாக இவ்வெடுத்துக்காட்டில் கனவளவு விகாரம் $\frac{1}{2}\epsilon$ ஆகும், அதாவது நீளப்பக்க விகாரத்தின் அரைவாசி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு.—இந்தியா றப்பர் வடமொன்று ஈாக்கப்பட்டபொழுது வடிவ மாற்றத்துடன் கனவளவு மாற்றத்தை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தபொழுது அது கிட்டத்தட்டப் புறக்கணிக்கத்தக்க அள விற் சிறிதாய் இருந்தது. இந்தியா றப்பருக்குப் பொயசோனின் விகிதத்தின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

வடத்தின் குறுக்குவெட்டு வட்ட வடிவமானது எனக் கொள்க; அதன் தொடக்க நீளமும் ஆரையும் முறையே l உம் r உம் ஆகுக. மீள்தன்மையெல்லையை மீறாதவண்ணம் வடம் ஈாக்கப்பட்டபொழுது நீளம் $l(1+\alpha)$ உம் ஆரை $r(1-\beta)$ உம் ஆகுக. வடத்தின் கனவளவு மாறாது இருக்கிறபடியால்

$$(1+\alpha)(1-\beta)^2 = 1\ ;$$

அதாவது $\qquad (1+\alpha)(1-2\beta) = 1\ ;\quad \beta^2 \rightarrow 0$ ஆதலின்,

ஆனால் பொயசோனின் விகிதம் $(\beta \div \alpha)$; எனவே மேற்கூறியவற்றிலிருந்து இதன் பெறுமானம் 0·5.

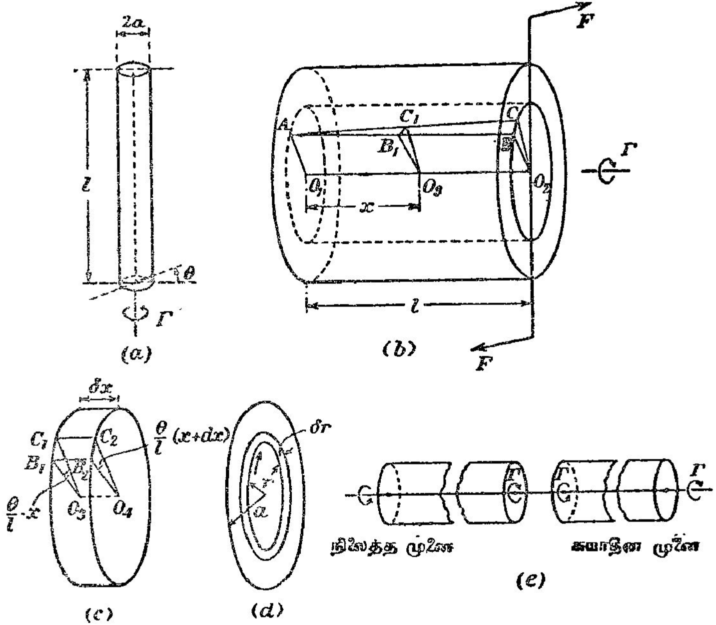
விறைப்பு மட்டு.—விகார நிலையானது எளிய கொய்வொன்றால் ஏற்படுத்தப்பட்டபொழுது, தொடக்கத்திற் சதுர வடிவவெட்டு உடையதாய் இருந்த மூலைமொன்று இப்பொழுது மூலைவிட்டமொன்று வழியே நீட்டியும் அதே அளவிற்கு மற்றை மூலைவிட்டம் வழியே குறுகியும் இருக்குமாறு சடம் திரிவுறும் எனக் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. சதுரமுகியின் இரு தொடக்க நிலைப் பக்கங்களுக்குச் சமாந்தரமாக அதன் இரு பக்கங்கள் அமையுமாறு புது வெட்டைத் திருப்பினால், அப்பொழுது மற்றைச் சோடிப் பக்கங்களின் புது நிலைக்கும் பழைய நிலைக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் ϕ ஆனது கொய்வுக் கோணம் ஆகும், [படம் 7·02 (a), ப. 299 இற் காண்க]. இவ்வகை விகாரத்திலே மீள்தன்மை எல்லை மீறப்படாமல் இருக்குமாயின், ஹூக்கின் விதி செல்லுபடியாகிறபடியால்

$$p = n\phi.$$

இங்கு p கொய்வுத் தகைப்பும், n கருதப்படும் சடத்திற்கு ஒரு மாறிலியும் ஆகும். இம்மாறிலியானது சடத்தின் விறைப்பு மட்டு எனப்படும். [உலோகங்களுக்கு அது கிட்டத்தட்ட 0·4 E ஆகும்; இங்கு E, கருதப்படும் உலோகத்தின் யங்கின் மட்டு ஆகும்.]

திருகிய கம்பி அல்லது வட்டவுருளை அல்லது தண்டு என்பவற்றிற்குரிய கொள்கை.—கம்பிவடிவத்திலுள்ள சடமொன்றின் விறைப்பு மட்டைத் துணியும் பரிசோதனைமுறையை நன்கு விளங்கும் பொருட்டுக் கீழ்வரும் அறிமுறை உரையாடல் இன்றியமையாததாகும். [செவ்வட்டவுருளை போன்ற] சீரான கம்பியொன்றின் நீளம் l ஆகுக; அதன் மேல் நுனியில் அது

நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது ; படம் 7·18 (*a*) இற் காண்க ; அதன் கீழ் நுனியில் இடையான இணை Γ என்பதால், அது கோணம் θ ஆற் திருகப்பட்டிருககிறது. அப்பொழுது சடமானது எளிய கொய்வு நிலையில் இருக்



படம் 7·18. திருகிய கம்பி அல்லது உருளைக்குரிய கொள்கை.

கிறது ; கம்பியின் நீளத்திலோ அதனது குறுக்கு வெட்டு ஆரை *a* இலோ மாறல் நிகழ்ந்திருக்கமாட்டாது ; அப்படி நிகழ்ந்திருநதால் மாறலின் குறியானது இணையின குறியுடன் நேர்மாறுதல் வேணடும் ; ஆனால் உண்மையிலே இணையின் தாக்கததால் உருளையில் தோன்றும் விளைவானது இணையின் போக்கைச் சாராது.

படம் 7·18 (*b*) யில், ஆரை a யுடைய கம்பியின் அச்சு $O_1 O_2$ ஆகுக. அதிலிருந்து ஆரை r கொண்ட உருளையொனறு வெட்டப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்க ; அவ்விரு உருளைகளின் அச்சுக்கள் பொருந்தியிருக்கினறன. $O_1 O_2$ இற்குச் சமாந்தரமாக இருக்கினறதும் ஆரை r கொண்ட உருளையின் பரப்பில் கிடக்கின்றதுமான நேர்கோடொனறின் விகாரப்படாத நிலை AB ஆகுக. இணையைப் பிரயோகிககும்போது B ஆனது C யை அடைக ; இங்கு $\widehat{BO_2C}$ = கம்பியின் சுயாதீன நுனியிலுள்ள திருகற் கோணம் ; அது θ எனக. AB யில், A யிலிருந்து தூரம் x இல் உள்ள புள்ளி B_1

இற்கு நூக்கல் B_1C_1 ஆகும் ; இங்கு

$$\frac{B_1C_1}{x} = \frac{BC}{l} = \frac{r\theta}{l}.$$

எனவே B_1 இலுள்ள திருகற் கோணம் $= \frac{B_1C_1}{r} = \frac{\theta}{l} \cdot x = \theta\left(\frac{x}{l}\right).$

அடுத்துத் தடிப்பு δx கொண்ட, உருளையச்சுக்குச் செங்குத்தாக B_1 ஊடே செல்லுகின்ற சடச் சீவலொன்றைக் கருதுக ; இங்கு $\delta x = B_1B_2 = C_1C_2$, படம் 7·18 (c) யைப் பார்க்க. அப்பொழுது B_2 இலுள்ள திருகற கோணம் $\frac{\theta}{l}(x+\delta x)$ ஆகும். அதாவது சீவலின தட்டை முகங்களுக்கிடையே தொடர்புத் திருகல் $\frac{\theta}{l}.\delta x$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ கொய்வுக் கோணம்} = \frac{(\text{தொடர்புத் திருகல்}) \times \text{ஆரை}}{\text{தட்டை முகங்களின இடைத்தூரம்}} = \frac{r\theta}{l}.$$

எனவே கொய்வுத் தகைப்பு p ஆனது

$$p = n.\frac{r\theta}{l}$$

ஆல் தரப்படுகிறது ; இங்கு n கம்பியினது சடத்தின் விறைப்பு மட்டு.

அடுத்து B_1 இன் அச்சுமீதுள்ள எறியம் O_3 ஊடே, அச்சு O_1O_2 இற்குச் செங்குததாகச் செல்லுகின்ற தளமொனருற் கம்பியானது இரு துணடுகளாக வெட்டபபட்டிருக்கிறது எனக் கருதுக. அப்பொழுது அச்சுப பறறி O_3 இன் இடப்பககத்திலுள்ள துண்டுமீது தாக்குகின்ற உள்விசைகளின திருப்ப மானது கமபியின் நிலைத்த நுனியில தாக்குகினற இணை Γ ஐச் சம மாக்குதல் வேண்டும். இவ்விணையின் கணிப்பையிட்டு இடப்பக்கத்துப பகு தியின நுனிப் பரப்பில, ஆரைகள் r, $(r+\delta r)$ கொண்ட ஒருமைய வட்டங்க ளால் வரையறுத்த வளையததில், நீளம் δs கொண்ட சிறு மூலகமொனறைக் கருதுக. அதன பரப்பளவு $\delta s.\delta r$ ஆகும் ; எனவே அதன் மீது தாக்கும் விசை $p.\delta s.\delta r$ ஆகும் ; கம்பியச்சுப் பறறி இவ்விசையின் திருப்பம் $pr.\delta s.\delta r$ ஆகும். எனவே கருதப்படும் முழு மூலக வளையம மீதுள்ள தகைப்பானது $\delta\Gamma$ திருப்பமுடைய முறுக்கமொன்றைத் தருகிறது ; இங்கு

$$\delta\Gamma = 2\pi r^2 p.\delta r \qquad [\because \oint ds = 2\pi r].$$

$$= \frac{2\pi n\theta}{l} \cdot r^3.\delta r.$$

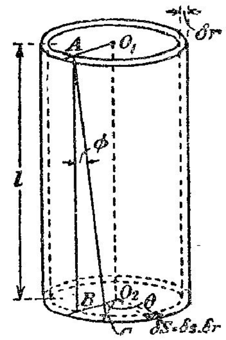
$$\therefore \ \Gamma = \frac{2\pi n\theta}{l}\int_0^a r^3.dr = \frac{\pi n\theta}{2l}.a^4;$$

எனவே
$$\theta = \frac{2l\Gamma}{\pi n a^4}.$$

தரப்பட்ட கம்பியொனறில் அலகுத்திருகலே (அதாவது ஆரையன்) ஆக்கத் தேவையான இணையானது கம்பியின் **முறுக்கன் மாறிலி** எனப்படும்; அது b யினுற் குறிக்கப்படுக; இது, அசையுஞ் சுருட் கல்வனேமானிக் கொள்கையில் சம்பநதப்பட்ட ஒரு மாறிலியாகும், தொகுதி V, ப. 342 பார்க்க; அதன் பெறுமானம் $\pi n a^4 \div 2l$.

வேறு முறை.—கம்பியொன்றில இணையொன்ருல் ஆக்கப்படும் திருகலுக் கும் கம்பியின பரிமாணங்கள் அதன் சடததின் விறைப்பு மட்டு எனப வற்றிற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைக் கீழவரும் முறைப்படி பெற்றுக் கொள்ளலாம்; எற்கெனவே தநதுள்ள முறையைக் காட்டிலும் இது எளிமை மிக்கதாய் இருந்தபோதிலும் முந்தியதே அறிவூட்டும் ஆற்றல் கூடியது.

கம்பியொன்றின் நுனிகளிலே, கம்பியச்சுக் குச் செஙகுததான தளஙகளிலே, சம எதிர் இணைகள் பிரயோகிக்கப்படின், கம்பி திருகப் படுகிறது; அப்பொழுது படைகள் ஒவ் வொனறிலுமுள்ள துணிக்கைகள் அதற்குத் தொடர்ந்த அடையொன்றில் அடுத்திருக்கினற துணிக்கைகளேக் குறித்துச் சிறு தொடர்புப் பெயர்ச்சி அடையும். கம்பியானது கொயவு நிலேயில் இருககிறது; கம்பியின் பரிமாணங்கள் அதன் சடததின் விறைப்புமட்டு என்பவை தொடர்பாகத் திருகற் கோணத்திற்கும் பிர யோகிக்கப்படும் இணைக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.



படம் 7·19. திருகிய கம்பி யொன்றின் கொள்கை (வேறு முறை).

அதன் மேல் நுனியில் கம்பி நிலேயாக்கப் பட்டிருக்கிறது எனவும், அதன் கீழ் நுனியில் பிரயோகிக்கப்படும் இணே Γ எனவும் கொள்க. கம்பியுடன் பொதுவச்சுள்ள தும் அதன் ஒரு பாகமாகவுள்ளதுமான மெல்லிய உருளேக் குழாயொனறைக் கருதுக; அதன் நீளம் l உம் உளளாரை r உம் தடிப்பு δr உம் ஆகுக. கம்பி திருகுற்றபோது இம்மெல்லிய உருளேயின் உட்பரப்பிலுள்ள பிறப் பிக்குங் கோடு AB என்பது நிலே AC இற்குப் பெயர்க்கப்படுக. திருகுக் கோணம் θ வும் கொய்வுக்கோணம் ϕ யும் சிறிதாயின் $l\phi = r\theta$.

தொடலித் தகைப்பு, அதாவது குழாயின் அடியில் அலகுப் பரப்பள வொன்று மீது தாக்குகின்ற தொடலி விசை p ஆகுக. அப்பொழுது குழாயின் அடியிலுள்ள நீளம் δs உடைய சிறு மூலகமொன்றுமீது தாக்குகின்ற விசையானது, மூலகத்தின் பரப்பளவு $\delta s.\delta r$ ஆதலின்,

$$p\,\delta s\cdot\delta r$$

ஆகும். குழாயின் அச்சுப்பற்றி இவ்விசையின் திருப்பம்

$$pr\,\delta s.\delta r = n\phi r\,\delta s\cdot\delta r,$$

$p = n\phi$ ஆதலின் ; இங்கு குழாயின் சடத்தின் விறைப்பு மட்டு n ஆகும். எனவே குழாயின் அடியிலுள்ள தகைப்பானது இணை $\delta \Gamma$ ஐப் பிறப்பிக்கிறது ; இங்கு

$$\delta \Gamma = 2\pi n\phi r^2 \cdot \delta r \qquad [\because \oint ds = 2\pi r.]$$

$$= \frac{2\pi n\theta r^3 \, \delta r}{l}.$$

இனி ஆரை a யும் நீளம் l உம் உடைய கம்பியைத் திருகுவதற்குத் தேவையான இணை Γ, அக்கம்பியைப் பொதுவச்சுள்ள மூலகவுருளைக் குழாய்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கருதி அவ்வெல்லாவற்றின் திருகலுக்கும் வேண்டிய மூலக இணைகளைக் கூட்டிவருந் தொகைக்குச் சமன். எனவே முன்போல

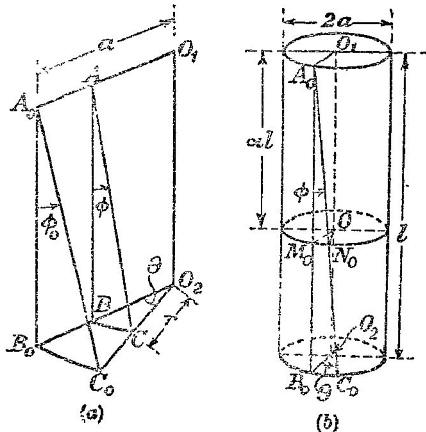
$$\Gamma = \int_0^a \frac{2\pi n\theta r^3 \, dr}{l} = \frac{\pi n a^4}{2l}\,\theta \,;$$

உள் ஆரை a_1 உம் புற ஆரை a_2 உம் கொண்ட குழாய்க்கு

$$\frac{\Gamma}{\theta} = \frac{\pi n}{2l}(a_2{}^4 - a_1{}^4)$$

எனப் பெறுகிறோம்.

திருகிய கோலொன்றில் தகைப்புநிலை மாறல்.—படம் 7·20 (a) யில், திருகல் நிகழமுன்னர் ஆரை a யுடைய கம்பியொன்றின் பரப்பிலுள்ள



படம் 7·20. திருகிய கம்பியொன்றில் தகைப்புநிலை மாறல்.

பிறப்பாக்கியொன்று A_0B_0 ஆகுக. கம்பியினுள்ளே ஆரை r கொண்ட உருளைப் பரப்பிலே ஒத்த பிறப்பாக்கி AB ஆகுக; அப்பொழுது AB ஆனது

தளம் $A_0O_1O_2B_0$ இல் உள்ளது. கம்பி திருகப்பட்டதும் A_0B_0 என்பது A_0C_0 ஐயும், AB என்பது AC யையும் அடைக; கம்பியின் கீழ்நுனியில் திருகற் கோணம் θ ஆகுக; அப்பொழுது

$$B_0C_0 = a\theta \text{ உம் } BC = r\theta \text{ உமாம்.}$$

மேலும் காட்டப்பட்ட கோணங்கள் ϕ_0, ϕ எனின்

$$\phi_0 = \frac{B_0C_0}{l} = \frac{a\theta}{l} = \frac{a}{l}\cdot\frac{BC}{r} = \frac{a}{r}\phi,$$

அல்லது
$$\phi = \frac{r}{a}\phi_0.$$

ஆனால் ϕ கள் கொய்வுக் கோணங்களே; எனவே O_1O_2 இலிருந்து தூரம் r இலுள்ள மூலகங்களில் தகைப்பு p ஆனது

$$p = n\phi = n.\frac{r}{a}\phi_0 = \frac{r}{a}p_0$$

என்பதால் தரப்படுகிறது; இங்கு p_0 என்பது கம்பியில் உயர்வுத் தகைப்பு.

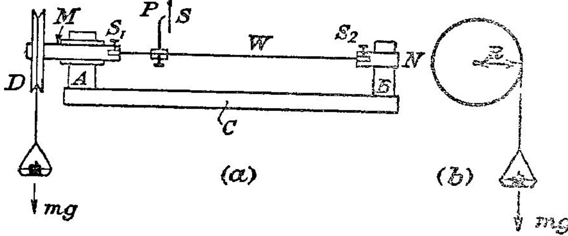
அடுத்துத் தளம் M_0ON_0 இலுள்ள தகைப்புக்களைக் கருதுவோம், படம் 7·20(b); இங்கு $O_1O = \alpha l$; இதில் $0 < \alpha < 1$ ஆகும். OM_0, ON_0 என்னும் ஆரைகள் இரண்டும் கோணம் $\alpha\theta$ வை ஆக்கும் வண்ணம் ஒன்றுடனொன்று சாய்ந்திருக்கின்றன; அதாவது கம்பியின் பரப்பில் தளம் M_0ON_0 இல் இருக்கின்ற புள்ளிகளிலே கொய்வு விகாரமானது

$$\frac{M_0N_0}{A_0M_0} = \frac{a.\alpha\theta}{\alpha l} = \phi_0$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது; இங்கு ϕ_0 என்பது B_0C_0 இலுள்ள விகாரம் ஆகும். எனவே புள்ளியொன்றிலுள்ள கொய்வுத் தகைப்பானது கம்பியச்சிலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரம் r ஐ மட்டும் சாரும்; கம்பியின் சுயாதீன நுனியிலிருந்து புள்ளியின் நிலைக்குத்துத் தூரத்தை அது சாரமாட்டாது; அதன் உயர்வுப் பெறுமானம் p_0 ஆகும்; இது கம்பிப் பரப்பிலுள்ள கொய்வுத் தகைப்பு ஆகும்.

நிலையியல் முறையொன்றால் சீரான கம்பியொன்றின் விறைப்பைத் துணிதல். படம 7·21(a) யில், கம்பி W ஆனது பித்தளையாலான இரு சிறு செவ்வகக் கட்டைகளுடன் பற்றுசுபிடிககப்பட்டிருக்கின்றது; திருகுகள் S_1, S_2 என்பவற்றால் இக்கட்டைகள் கட்டையான கிடைக்கோல்கள் M, N என்பவற்றில் நிலையாக்கப்பட்டிருக்கின்றன; பாரமான சட்டம் C ஆல் காவப்படுகின்ற நிலைக்குத்தான உலோகத் தூண்கள் A, B என்பவற்றில் அவை தாஙகப்பட்டிருககினறன; கம்பியின் விட்டம் 2 மிமீ. இலிருந்து 4 மிமீ. வரையும், அதன் நீளம் கிட்டத்தட்ட 50 சமீ. ஆகவும் இருத்தல் வேண்டும். கோல்களின் அச்சுக்கள் கம்பியின் அச்சுடன் பொருந்தியிருக்கின்றன.

கோல் N ஆனது B இனுள்ளே நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது ; கோல் M கப்பியொன்றைக் காவுகிறது ; அக்கோலால் A யில் சுயாதீனமாகச் சுழல முடியும். சில்லு D ஆனது நாணென்றைக் காவுகிறது ; நாணின் நுனி யொன்று சில்லில் கட்டப்பட்டிருக்கிறது ; அதன் மறு நுனி தராசுத்தட் டொன்றைக் காவுகிறது ; இதில் சுமையேற்றலாம். கம்பியில் அதனது



படம் 7·21. நிலையியல் முறையொன்றால் முறுகல் விறைப்பைத் துணிதல்.

அச்சுக்குச் செங்குத்தாகச் சுட்டி P விறைப்பாகப் பிடிப்பூட்டப்பட்டிருக் கிறது ; அது பாகைகளில் அளவுகோடிட்டதும் வரிப்படத் தளத்துக்குச் செங்குத்தாக அமைந்திருக்கும் வண்ணம் வைக்கப்பட்டதுமான வட்ட அளவிடை S இன பாகமொன்றில் இயங்கும். கம்பி வழியேயுள்ள எந்தப் புள்ளியிலும் சுட்டியை நிலையாக்கலாம.

தட்டிலுள்ள சுமையின திணிவு m உம், புவியீர்ப்புச் செறிவு g யும், சில்லு அத்துடன தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற நாடா ஆகியவற்றின் ஆரை களின கூட்டுத்தொகை R உம் ஆயின் கம்பியிற் பிரயோகிக்கப்படும் முறுக்கம்

$$\Gamma = mg\mathrm{R}.$$

ஆரை a கொண்ட கம்பியின் நிலைத்த நுனியிலிருந்து சுட்டி P யின் தூரம் l உம், சுட்டி P யின் கோண விலகல் θ வும் ஆயின் கம்பியின் சடத்தின் விறைப்பு மட்டு

$$n = \frac{2mg\mathrm{R}l}{\pi\theta a^4}.$$

இவ்வாய்கருவியைப் பயன்படுத்தும் பரிசோதனைகளில் கப்பியின் மையத் தினூடே கம்பியின் அச்சுச் செல்லாமையால் தோன்றும் வழுவை நீக்கும் பொருட்டுத் தட்டில் அதே சுமையைப் பயன்படுததிக் கம்பியை இரு திசைகளிலும் திருகித் திருகற் கோணத்தின் சராசரி காணப்படுகிறது.

பரிசோதனை.—மேற்படி ஆயகருவியில பயனபடுததத்தகக கம்பிகள மூனறு உள எனக் கொளவோம் ; அவற்றுள இரண்டு கமபிகள ஒரே ஆரையை உடையவை ; ஆனால வெவ்வேறு சடங்களால் ஆனவை ; இரண்டு கம்பிகள ஒரே சடததால ஆனபோதிலும் வெவவேறு ஆரைகளை உடையவை.

(*a*) கம்பிகளுள் ஒன்றையும் சுட்டியைச சிலனு D யிற்கு அணித்தாயும் பயன்படுத்துமிடத்துத் தட்டில் வெவவேறு திணிவுகளை ஏறறி அவறறிற்கு ஒதத சுட்டி அளவீடுகளை நோககுக. மேறபடி சூத்திரததின்படி θ ஆனது m இறகு நேர்விகிதசமமாக இருததல வேணடும். இதனை வரைபு முறைபபடி மெய்பபிகக.

(*b*) நாணிலிருநது தொஙகுந திணிவு மாறுது இருககக் கம்பியில சட்டமும் சுட்டியும் வெவ்வேறு நிலைகளில அமைககபபட்டிருககுமபொழுது, அதாவது l வெவ்வேறு பெறுமானஙகள கொண்டிருககும்பொழுது கோணவிலகலுககு வாசிப்புத தொடரொனறு எடுக்கபபடுகிறது. l இன் பெறுமானமொவவொனறிறகும திருகலைப் பெறும்பொருட்டு முதலிலே கமபியின விகாரபபடாத இயலபான நிலையிலும், பினனர் தராசுத்தட்டில மாறுத் திணிவு இருககிறபோதும் அளவுச்சட்ட வாசிபபை நோககுதல வேணடும். இவவாறு l இன் வெவவேறு பெறுமானஙகளுககு திருகல θ பெறபபடுகிறது. வரைபு முறையைப பயனபடுத்தித் தரபபட்ட கமபியொன்றிறகு $\frac{\theta}{l}$ மாறிலி எனக் காட்டுக.

(*c*) அதே ஆரையுடைய ஆனால் வெவ்வேறு சடஙகளாலான கம்பிகளின விறைப்பு மட்டுகளை ஒபபிடுக. பொது ஆரை a யும விறைபபு மட்டுகள n_1, n_2 உம் ஆகுக. கமபி பொவ்வொனறிற்கும m ஐயும கமபியிற் சுட்டியின நிலையையும மாறச்செய்க. இனிப பொதுவாக மேலே தரபபட்டுள்ள சமனபாட்டை

$$\theta = \frac{c}{n}(ml)$$

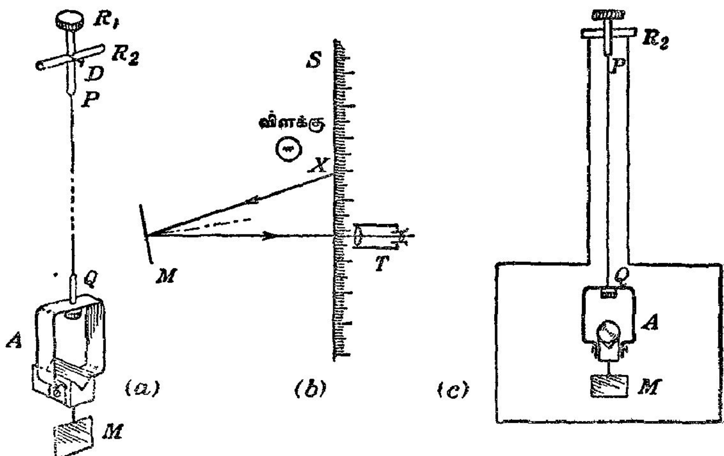
என எழுதலாம்; இஙகு c ஒரு மாறிலி. எனவே ml தொடர்பாக θ வைக் குறித்தால், நேர்கோட்டின சரிவானது விறைபபுமட்டு n இறகு நோமாறு விகிதசமம. எனவே அமைகக முடியுமான இரு வரைபுகளின சரிகளைப பயன்படுததி விறைபபு மட்டுகளை ஒபபிடமுடிகின்றது.

(*d*) அதுபோலவே ஒரே சடத்தாலான ஆனால் வெவவேறு ஆரைகள் கொண்ட இரு கம்பிகளைப பயனபடுத்திக கம்பிகளின அதே மாறு நீளம, தராசுததட்டில மாறுத திணிவு என்பவறறிறகுரிய கோணவிலகலானது, கமபியாரையின நானகாம வலுவுககு நோமாறு விகிதசமம எனக காட்டுக.

(*e*) வெவவேறு திணிவுகளின தொடரொன்றையும, அதே திணிவிற்கு l இன வெவ்வேறு பெறுமானஙகளையும பயனபடுததி, $ml = \kappa\theta$ என வரைபு முறையொனறுற் காட்டுக. இஙகு κ ஒரு மாறிலியாகும. நேர்கோட்டின சரிவிலிருநது κ யைப் பெறுக; இதிலிருந்து, சோதிககப்படும கமபியினது சடததின விறைபபுமட்டு n இன பெறுமானததைத் துணிக.

முறுக்கல் அலைவுகளைப் பயன்படுத்திக் கம்பியொன்றினது சடத்தின் முறுக்கல் விறைப்பைத் துணிதல் [அத்துடன் குறிப்பிட்ட அச்சொன்று பற்றிக் கோல்களின் சடத்துவத் திருப்பங்களை ஒப்பிடுதல்].—இதற்குரிய ஆய்கருவியானது படம் 7·22 இல் காட்டப்பட்டிருககிறது. தொஙகற் கம்பி PQ ஆற் காவப்படுகின்ற உலோகத்தட்டு A இல, தளவாடி M இணைக்கபபட்டிருக்கிறது, படம் 7·22 (*a*) [இரு சடத்துவத் திருப்பஙகளை ஒப்பிடுவதற்குத் தொஙகற் கம்பியானது பொசுபர் வெண்கலததால் ஆனதாயிருத்தல் நன்று]. படம் 7·22 (*b*) யில் காட்டியுள்ளவாறு, ஆடியிலிருந்து கிட்டத்தட்ட ஒரு மீற்றர் தூரத்திலிருக்கின்ற கிடையளவிடையொனறின் விம்பமானது அவ்வாடியால் ஆக்கப்பட்டுக் கிடைத் தொலைகாட்டியொன்றால் நோக்கப்படுகிறது. வேறொரு கோல் R_2 இன ஊடே செஙகுத்தாகச் செல்லுகின்ற கோல் R_1 உடன் கம்பி பற்றுசு பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது; படம் 7·22 (*c*) யில் காட்டியுள்ள

வாறு R_1 தொங்கற் தொகுதியைத் தாங்குவதற்குப் பயன்படுகிறது. திருகு D யைத் தளரச்செய்து R_1 ஐத் திருப்பி, அளவிடைக்குச் சமாந்தரமாக ஆடியை அமைக்கலாம். இரு கண்ணாடிப் பக்கங்கள் கொண்ட மரப் பெட்டியொன்று காற்றோட்டங்களிலிருந்து ஆய்கருவிக்குக் காப்பு அளிக்கிறது.



படம் 7·22. கம்பியொன்றினது சடத்தின் முறுக்கல் விறைப்பைத் துணிவதற்குரிய இயக்கவியல் முறை.

அளவிடையில் இருக்கின்ற புள்ளி X இன் விம்பம் தொலைகாட்டியின் குறுக்குவெட்டு மயிருடன் பொருநதுமாறு தொலைகாட்டியும் விளக்கொன்றால் ஒளிர்விக்கப்படும் அளவிடையும் செப்பமிடப்படுகின்றன. X ஆனது, கறுப்பு அம்பொன்றால் குறியிடப்பட்டிருக்கிறது. சிறு திருகொன்றை வழங்கித் தொட்டிலானது சிறுமுறுககலலைவுகள் ஆறறுமாறு செய்யப்படுகிறது; ஊசலாடலலைவுகள் தோன்றுவண்ணம் கவனஞ்செலுத்தல் வேண்டும். நேரமானியொன்றைப் பயன்படுத்தி அலைவுக்காலம் காணப்படுகிறது. இருவர் ஒன்றுசேர்ந்து பரிசோதனையை நடத்தினால், அவர்களில் ஒருவர் தொலைகாட்டியினூடே குறி X இன் விம்பத்தை நோக்கி, அவ்விம்பமானது தொலைகாட்டியின குறுக்குவெட்டு மயிரைக் கடக்கும்பொழுது சடுதியான சத்தமொன்றை உண்டாக்குவார்; அப்பொழுது மேற்படி நிகழ்ச்சியின் நேரத்தை மற்றவர் குறிததுக்கொள்வார். சராசரிக்காலம் வழக்கம்போல் பெறப்படுகிறது.

அடுத்துத் தொட்டிலில் உலோக உருளையொன்று வைக்கப்படுகிறது; தொங்கலின் அச்சானது உருளையின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடே செல்ல வேண்டும். அம்புப் புள்ளியின் விம்பம் தொலைகாட்டியின் கிடைக் குறுக்கு

மயிர்மீது இருக்குமாறு அத்தொலேகாட்டி செப்பமிடப்பட்டு இருந்தால் அதேபார்வை மீளும்வரை தொட்டிலில் உருளே அரக்கிவைக்கப்படுகிறது. இதனுல் தொங்கல், அச்சுப் பற்றித் தொட்டிலின் சடத்துவத் திருப்பம் மாருமையும், தொங்கல் உருளேயின புவியீர்ப்பு மையம் என்பவையூடாகச் செல்லுகின்ற அச்சுப் பறறிய சடத்துவத் திருப்பம பொருத்தமானது எனப தும் நிச்சயப்படுத்தபபடுகின்றன.

அடுத்து நன்கு தெரிந்துள்ள முறைகளுள் ஒன்ருல் தொட்டில், உருளே என்பவற்றின் ஆவர்த்தன காலம் காணப்படுகிறது.

உருளே, அதன் தொட்டில் என்பவற்றின இயக்கத்தை எடுத்துரைக்கும் வகையீடுச் சமன்பாடு

$$I\ddot{\theta} + b\theta = 0.$$

இங்கு கோணவிலகல் θ வும், தொங்கலின் முறுக்கன் மாறிலி b யும், அதனது சுழற்சியச்சுப் பறறித் தொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பம I யும் ஆகும். ஆனுல்

$$b = \frac{\pi n a^4}{2l} \qquad [\text{ப. } 327].$$

எனவே ஆவர்த்தன காலம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{b}} = 2\pi\sqrt{\frac{2lI}{\pi n a^4}}.$$

துரதிட்டமாக I என்பது தொங்கல் அச்சுப்பறறி உருளேயின் சடத்துவத் திருப்பம் மட்டுமன்று ; ஏனெனில், தொட்டிலும அதே அச்சுப்பற்றி ஒரு வரையறுத்த ஆனுல் இதுவரை தெரியாத, சடததுவத் திருப்பம் உடையது எனக் கொள்க. இதையிட்டே தனித்தொட்டிலின் ஆவர்த்தன காலத்தைத் துணியவேண்டியதாகின்றது.

தொட்டிலின் ஆவர்த்தன காலம் T_0 உம் உருளே, தொட்டில் ஒன்று சேர்ந்த ஆவர்த்தன காலம் T_1 உம் ஆகுக. அப்பொழுது

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{b}} \quad \text{உம்} \qquad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{b}} \quad \text{உம்}$$

ஆகும் ; இங்கு I_0, I_1 என்பன முறையே சுழற்சியச்சுப் பற்றி தொட்டில், உருளே என்பவற்றின் சடத்துவத் திருபபங்கள் ஆகும். இனி, உருளேயின் பரிமாணங்களிலிருந்து I_1 ஐக் கணித்துக் கொளளலாம். ப. 82, இற் காண்க. மேற்படி சமன்பாடுகளே வர்க்கமாக்கி I_0 ஐ நீக்க,

$$b = \frac{4\pi^2 I_1}{(T_1^2 - T_0^2)}.$$

எனவே

$$n = \frac{8\pi l I_1}{(T_1^2 - T_0^2)\, a^4}.$$

இனி, கம்பியின நீளம், ஆரை என்பவற்றை அளப்பது மட்டுமே எஞ்சியிருக்கிறது. இச்சூத்திரத்தில் ஆரையின நான்காம் வலு வருகிறபடியால் போதிய திருத்தத்துடன் கம்பியின் விட்டத்தை அளத்தல் வேண்டும். கோல R_1, தொட்டில் ஆகியவற்றிலிருந்து கமபியை அப்புறப்படுதத முடியுமாயின் தெரிந்த வெப்பநிலையுடைய நீரில அமிழ்ந்திருக்குமாறு தராசுப் புயமொன்றிலிருநது கம்பியைத தொங்கவிடுவதால் நேரிடும திணிவு நட்ட நோக்கலிலிருந்து கமபியின் சராசரி ஆரையைத் துணியலாம். இல்லாவிட்டால் திருகு நுண்மானியொன்றைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும்.

பரிசோதனையின் நோக்கானது கம்பியினது சடத்தின விறைப்பு மட்டைக் காணல் அன்று, அது குறிப்பிட்ட அச்சொன்று பற்றி இரு பொருட்களின சடத்துவத் திருப்பஙகளை ஒப்பிடுதல் எனின், b யையோ கம்பியின் பரிமாணஙகளையோ காணவேண்டியதேயில்லை. எனெனில் இரண்டாவது உருளை வைக்கப்பட்டிருக்கும் பொழுதுள்ள ஆவர்த்தன காலம் T_2 உம், தொங்கலச்சுப் பறறி அதன் சடத்துவத திருப்பம் I_2 உம் ஆயின,

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_2}{b}}.$$

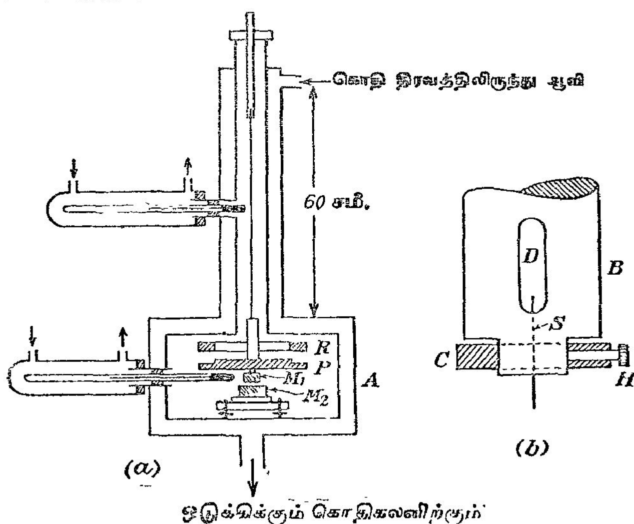
எனவே,
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{T_1^2 - T_0^2}{T_2^2 - T_0^2} = \frac{(T_1 - T_0)(T_1 + T_0)}{(T_2 - T_0)(T_2 + T_0)}.$$

உலோகக் கம்பியொன்றின் விறைப்பும் வெப்பநிலையுடன் அதன் மாறலும்.—கம்பியொன்றின் சடத்தினது விறைப்பின மாறல் தொடர்பாகக் **ஹோட்டன் (Horton)**† எனபவர் நடாத்தியுள்ள இப்பரிசோதனைகளில், சோதிக்கப்படுகின்ற கம்பியும் அதிரியும, அதாவது கம்பியால் அதன் கீழ் நுனியில் காவப்படும் பொருளும் ஆவியால வெப்பமாக்கப்படும் கஞ்சுகக் குழாய் A யில் அடைக்கப்பட்டிருந்தன, படம் 7·23(*a*). ஆவியானது மேல் நுனி வழியாகப் புகுந்து, கீழ் நுனிவழியாக வெளியேறி ஒடுககியொன்றிற்குச் சென்று அங்கிருநது கொதிகலததுக்குச் செலுத்தப்பட்டது. இவ்வாறு ஆவியாகும் திரவத்தின பண்பு மாறாது இருந்தது. அதன் இரு நுனிகளும் பிடிகருவிகளால் பிடிக்கப்பட்டுக் கம்பி W அமைந்திருந்தது ; கம்பியானது பிடிகருவிகளின் தாடைகளின் நுனிகளில, ஒரே நேர் வட்ட வெட்டில் அதனது பரிதி சுற்றி இறுககிப் பிடிக்கப்பட்டிருக்கும் வண்ணம் பிடிகருவிகள் தனிப்பட்ட முறையில திட்டமிடப்பட்டிருந்தன. அத்தகைய பிடிகருவியொன்றைச் செய்யும்பொருட்டு படம் 7·23 (*b*) யிற் காட்டியுள்ள வாறு கம்பியைக் காவும் உருக்குக்கோல் B ஐ நுனியில் ஒடுக்கி அதற்கு உருக்காலான பட்டை C அளிக்கப்பட்டது. இந்தக் கோலில் B யின் அச்சுக்குச் சமாந்தரமாகவும், அதன் கீழ் நுனிக்கு அணித்தாயும் நீண்ட துவாரம் D யும் நுண்பிளவு S உம் ஆக்கப்பட்டன. பிளவினுள் உலோக மென் தகட்டுத் துண்டொன்றைப் புகுத்திப் பட்டையை இருத்தி,

†ஹோட்டன, *Phil. Trans.*, A, 204, 1, 1905.

அது திருகு H இனல் இறுக்கபபட்டது. சோதனைக் கம்பியின் அதே விட்டம் [நி.க.அ. இல. 20] உடைய துவாரமொன்று கோலின் அச்சு வழியே துளைக்கப்பட்டது. எனவே சோதனைக் கம்பியை அதன் தானத்தில் வைக்க முடிந்தது.

$\frac{3}{8}$ அங். தடிப்பும் 5 அங். விட்டமும் உடைய துவக்குலோகத்தாலான, வட்டத்தட்டொன்றே அதிரும்பொருள் P ஆக இருந்தது ; தட்டின் கீழ்ப் பக்கத்துடன் தளவாடியொன்று இணைக்கப்பட்டிருந்தது. அதனது சுழற்சியச்சுப் பற்றி அதிரி P யின் சடத்துவத் திருப்பத்தை உயர்த்தும்பொருட்டுப் P யுடன் வட்டவளையம் R ஐ இணைக்க முடியும். P யின் மேல் முகத்தின் விளிம்பை ஒடுக்குவதால் ஆகும் வட்டத் தவாளியில் வளையம் சரியாகப் பொருந்தி இருந்தது. எனவே தவாளியிலே மையமாகவும் இலகுவாகவும் வளையத்தை இருத்தலாம்.



படம் 7·23. வெப்பநிலையுடன் விறைப்பின் மாறலைப் பரிசோதனை முறைப்படி ஆராய்தல்.

ஊஞ்சலாடல் இல்லாது தட்டை அதிரச் செய்யும்பொருட்டு அதன் புவியீர்ப்புமையம் ஊடே செல்லுகின்ற நிலைக்குத்து அச்சுப் பற்றி அது சுழலுமாறு தட்டின் கீழ்ப்புறப் பக்கத்தில் இரு இடையீடுபட்ட காற்றுத் தாரைகள் செலுத்தப்பட்டன. நேர வரிசையில் தாரைகளைச் செப்பஞ் செய்து அதிர்வுகளின் வீச்சத்தை விரைவில் உயர்த்தமுடிகின்றது.

ஆய்கருவியுள்ளே உள்ள வெப்பநிலை, இதற்கென தேசீய பௌதிக ஆய்சாலையில் நியமமாக்கப்பட்ட இரசங்கொண்ட இரு கண்ணாடி வெப்ப

மானிகளால் தரப்பட்டது. வெபபமானிகளின் காம்புகள் மாரு வெப்ப நிலையொன்றில் நிலைநிறுத்தியுள்ள நீராக்கஞ்சுகக் குழாய்களாற் சூழப்பட்டிருந்தபடியால் காம்பின் திறந்த வைப்புக்கான திருததத்தை மிக எளிதாகச் செய்யமுடிந்தது.

அதிர்வுகளைத் திருத்தமாக நேரம்காணும பொருட்டு M_1 இற்குக் கீழே இரண்டாவது தளவாடி M_2 ஒழுஙகு செய்யப்பட்டது. M_2 நிலையானது; M_1 இன் ஓய்வுநிலையில் இரு ஆடிகளும சமாந்தரம். ஆவர்த்தன காலம் ஒரு செக்கன் உடைய பளிச்சீடுகள் இரு ஆடிகளாலுந் தெறிக்கப்பட்டுத் தொலைகாட்டியினூடாக நோக்கப்பட்டன; தொலைகாட்டியின் பார்வைப் புலம் பரந்ததாய் இருந்தபடியால் எப்பொழுதும் பளிச்சீட்டின் இரு விம்பங்கள் காணப்பட்டன; ஒனறு அதே நிலையிலும் மறறையது பளிச்சீடு உண்டானபொழுது அசையும் ஆடி இருந்த நிலையைப் பொறுததுள்ள வேருன புலப் பாகத்திலுமாகக் காணப்பட்டன. இரு ஆடிகளும் திட்டமாகச் சமாந்தரமாக இருக்கும்பொழுது இரணடாவது பளிச்சீடு நிகழுமாயின் அதன இரு பளிச்சீட்டு விம்பங்களும் பொருந்தும்; இபபொருந்துகைகளிலிருந்து அதிருந் தொகுதியின் ஆவர்த்தன காலம் பெறப்பட்டது.

வழக்கமாக, மிகமிக நெருங்கிய நேரங்களை ஒப்பிடும் பொழுதே உடனிகழ்ச்சி முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. **ஹோட்டன்** ஆனவர் போயினரிஙகின் கருத்தொன்றைப் பயன்படுத்தினுர்; இரு ஆவர்த்தன காலங்கள் பெரிதும் வேறுபடுகின்ற போதிலும் இம்முறையைப் பயனபடுத்தி அவற்றை ஒப்பிடமுடியும். இதனை எடுத்துக்காட்டும் பொருட்டு முழு அதிர்வொனறின் காலம் 4·116 செக்கன் எனக் கொள்வோம். இதைப் பளிச்சீடுகளின 1 செக்கன் ஆவர்த்தன காலத்துடன ஒப்பிட வேண்டியதாகிறது. இனி தொலைகாட்டியில் அதே இடத்தில் பளிசசீடொன்றின விமபஙகள் இப்பொழுதுதான் பொருந்தியுளளன எனக் கொள்க; இப்பொருந்துகை நிகழ்ந்த செக்கனைப் பூச்சியம என அழைப்போம். 4 செக்கன் சென்றபின் இரு ஆடிகளும் சரிசமாந்தரமாக இருக்கமாட்டா; எனவே தொலைகாட்டியிற் பளிச்சீட்டு விம்பங்கள் ஓரளவு பிரிந்திருக்கும். ஆவர்த்தன காலம் 4 செக்கனுக்குக் கூடுதலாய் இருக்கிறபடியால அசையும் ஆடி நிலைதத ஆடிக்குச் சமாந்தரமாக இன்னும் வந்திருக்க மாட்டாது; எனவே அசையும் பளிச்சீடானது அதன் பூச்சிய நிலைக்குக குறைநதே தோறறும். n செக்கன்கள், அதிர்வுக் காலத்தின மிகுநெருஙகிய அண்ணளவான ஒரு முழுவெண் மடங்கு ஆகுக; n ஒரு முழு எண் ஆகும். அப்பொழுது நாம் n செக்கன் காத்திருந்தால் இலக்கம் n கொணட பளிச்சீடு நிகழும் பொழுது இரு ஆடிகளும் நெருங்கிய முறையில் சமாந்தரமாக இருக்கிறபடியால் பளிச்சீடுகளும் மிக அணணளவாகப் பொருந்தும். இனி $9 \times 4 \cdot 116 = 37 \cdot 044$; எனவே 37 செக்கன்களை கழிநததும் அசையும் பளிச்சீடு நிலையானதற்கு மிகு அணித்தாய்த் தோறறுதல வேண்டும்; ஏனெனில் இன்னும் 0·044 செக்கனில் ஆடும் நிலையான ஆடிக்குச் சமாந்தரமாகிவிடும் என அறிக. முன்புபோல ஆடறகாலததின் மடஙகு

37 செக்கன்களுக்குக் கூடுதலாய் இருக்கிறபடியால், பளிச்சீடானது அதன் ஓய்வுநிலைககுக குறைந்தே தோற்றும். இனி 37 ஆவது பளிச்சீடுக் குப்பின் தோன்றும பளிசசிடுகளை ஒன்று, இரண்டு என்றவாறு அழைத்துச் செக்கன்களை எண்ணுகிறோம் என வைத்துக்கொள்வோம்; மீண்டும் ஒன்றிலிருந்து தொடஙகி அதுபோல் செய்வோம். ஒவ்வொரு முப்பத்தேழாவது பளிச்சீடின் நிலையும் அதறகு அடுத்து முந்தியுள்ள பளிச்சீடின நிலையைக் குறித்துக் குறைந்தே தோறறும்; அதாவது அது நிலைத்த மையப் பளிச்சீடிலிருந்து கூடுதலாகப் பிரிந்திருக்கும். இவ்வாறு நடக்கும்பொழுது இலக்கம் 1 உடைய பளிச்சீடு (அதாவது 37 ஆவதற்கு அடுததுப் பின வந்தது) நிலைத்த மையப் பளிச்சீடைக் கொஞ்சம் கொஞ்சமாக அணுகும்; பினனர் அததுடன் பொருந்தும். அப்பொழுது அசையும் ஆடியானது ஒரு முழு செக்கன் பிந்திற்று என்பது தெளிவாம்; ஏனெனில அது நிலைதத ஆடிக்குச் சமாநதரமாக வர இன்னுமொரு செக்கன தேவைப்படும். ஒவவொனறும் 37 செக்கன்கள் கொண்ட N கூட்டங்கள எண்ணப்பட்ட பின்னரே இப்பொருந்துகை நிகழ்கிறது எனக கொள்க.

ஆகவே அதிரியானது 37N + 1 செக்கன்களில் 9N அதிர்வுகளை ஆற்று கிறது; அதிாவுக் காலம T எனின,

$$9NT = 37N + 1, \quad \text{அல்லது} \quad T = \left(\frac{37}{9} + \frac{1}{9N}\right) \text{ செக்கன்கள்.}$$

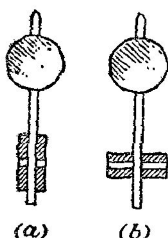
பரிசோதனையினபோது சரியான பொருந்துகை அரிதாய் இருந்தபடியால் மேற்படி நேரஙகாண் முறையானது சறறு மாற்றி அமைக்கப்பட்டது; விவரஙகளுக்கு ஆரம்ப வெளியீட்டை ஆராய்க.

வெப்பநிலை மாறறம் தொடர்பாகக் கமபி, அதிரி என்பவற்றின் நீட்டற் பரிமாணஙகள அடைநத மாறறஙகளையிட்டுத் திருத்தங்கள் செய்யப் பட்டன; நியம மீறறர்–ஒப்பீட்டுமானியொனறைப் பயனபடுத்தி எகபரிமாண விரிவுக் குணகஙகள அளக்கப்படடன.

தனிச் செம்பு, உருக்கு (பியானோககம்பி) ஒழிந்த சடஙகள் ஒவ்வொன்றி னிடத்தும, குறிபபிடடவொரு வெபபநிலையில் விறைப்பு மட்டு மாறிறறு. அது நேரத்துடன அதிகரித்தது எனக கிடைக்கபெறற முடிபுகளிலிருந்து காணப்பட்டது. தனிச் செமபு, உருககு என்பவற்றினிடத்து வெப்பநிலை கூடுமபொழுது விறைப்பு மடடு குறைநது காணப்பட்டது. இரண்டிற்குமிடை யேயுளள தொடாபு ஏகபரிமாணமானது. பொன, இரும்பு, தகரம், ஈயம் எனபவறறினிடத்து மேறபடி "நேரவிளைவு" தவிர்க்கப்படின, தொடாபு ஏகபரிமாணமானதொனறு ஆகுமாறு முடிபுகள அமைந்திருக்கின்றன.

இமமுறை தொடர்பாக ஏறகெனவே தந்துள்ள சமன்பாடுகளைப் பயன் படுதததி மீளதனமை மட்டுகள் கணிக்கப்பட்டன; அங்குக் கூறியுள்ள நீர்நிலையியன முறையைப் பயனபடுததியே கம்பியின் சராசரி விட்டம் பெறபபட்டது.

உருக்கிய படிகத்தின் விறைப்பு மட்டு.—உருக்கிய படிகத்தின் விறைப்பு மட்டையும் வெப்பநிலையுடன் அதன் மாறலையும் துணியும்பொருட்டு வற்கெனவே விவரித்துக் கூறியுள்ள ஆய்கருவி போனறதொன்றையே **ஹோட்டன்**† பயன்படுத்தினர். உருக்கிய படிகத்திலிருந்து ஆக்கப்பட்ட நார்களைப் பயன்படுத்துமிடத்து, அதன் சுழற்சி அச்சுப் பற்றி அதிரியின் சடத்துவத் திருப்பம் மாறும்பொழுது திணிவு மாருமல் இருத்தல் வேண்டும் எனப் **போய்ஸ்** ஏறகெனவே காட்டியுள்ளார். **ஹோட்டன்** இந்நிபந்தனைக்கேற்ப இருபகுதிகளால் ஆன அதிரியொன்றைப் பயன்படுத்தினர்; அது பித்தளைக் கோலொன்றையும், ஒரு துவாரம் அதன் அச்சு வழியேயும், மற்றையது அவ்வச்சுக்குச் செங்குத்தாகவும் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் ஊடாகவும் துளைக்கப்பட்ட இரு துவாரங்கள் கொண்ட பித்தளை உருளையொன்றையும் கொண்டிருந்தது. இத்துளைகளின் விட்டமும் கோலின் விட்டமும் சமமாயிருந்தன. எனவே அதைப் படம் 7·24 (*a*) அல்லது (*b*) யில் காட்டியுள்ளவாறு பொருத்த முடிந்தது. மறறைப் பரிசோதனை விவரங்கள் உணரத்தக்க அளவில் மாற்றப்படவில்லை. 15° ச. இல் உருக்கிய படிகத்தின் விறைப்புமட்டு $3{\cdot}00 \times 10^{11}$ தைன். சமீ.$^{-2}$ எனக் காணப்பட்டது; மட்டு வெப்பநிலையுடன் கூடிற்று.

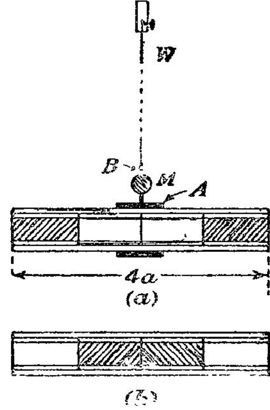


படம் 7·24. படிகநார் முறுக்கற் பரிசோதனைகளுக்கான அதிரி.

முறுக்கலலைவுப் பரிசோதனைகளில் அதிரியாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்ற மாக்ஸ்வெல் ஊசி.—கம்பியொன்றினது சடத்தின் விறைப்பு மட்டை இயக்கவியல் முறைப்படி துணிவதற்குத திட்டமிட்ட பரிசோதனைகளில் வசதியான அதிரியொன்று மாக்ஸவெலின் ஊசி எனப்படுகிறது. அது நான்கு சம பித்தளைக் குழாய்த் துண்டுகளைச் செருகி வைக்கக்கூடிய பித்தளைக் குழாயொன்ருகும்; ஒவ்வொரு குழாயின் நீளமும் அது பொருந்தியிருக்கும குழாய் நீளத்தின் ஒருகால்வாசி ஆகும். சிறு குழாய்களுள் இரண்டு பொள்ளானவை; மற்றவை ஈயத்தால் நிரப்பப்பட்டுள்ளன [அல்லது அவை பொருத்தமான நீளமும் விட்டமும் உடைய பித்தளையாலான திண்மக் கோல்கள் ஆகலாம்]. நீண்ட பித்தளைக் குழாயானது ஆடி M ஐக் காவுகின்ற கட்டைப் பித்தளைக குழாய் A இனுள் சரியாய்ப் பொருந்தியிருக்கிறது; A யின மையம் ஊடாக நிலைக்குத்தாகச் செல்லுகின்ற கட்டையான தடித்த பித்தளைக் கம்பி B யுடன் ஆடி விறைபபாக இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. விறைபபுமட்டுத தேவைபபடுகினற கம்பி W வின கீழ் நுனியானது B யுடன் இணைக்கப்பட்டிருககிறது; அதன் மேல் நுனி தக்க பிடியியொன்ருல் பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது.

†ஹோட்டன, *Phil. Trans.*, A, **204**, 407, 1905.

படங்கள் 7·25 (a) யிலும் (b) யிலும் காட்டியுள்ளவாறு குழாய்களை வைத்து அலைவு அச்சுப் பற்றித் தொகுதியின் சடத்துவத் திருபபத்தை நியாயமான அளவு மாற்றலாம். இவை I_1, I_2 என்பவற்றுல் குறிக்கப்படுக; I_2 ஐக் காட்டிலும் I_1 பெரிதாய் இருக்க. அடுத்து வழக்கமான முறைகளுள் ஒன்றுல் ஆவர்த்தன காலங்கள் T_1, T_2 என்பன துணியப்படுகின்றன. கம்பியினது சடத்தின் விறைப்பு மட்டைத் துணியும் பொருட்டு (I_1-I_2) இற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுதல் வேண்டும்.



படம் 7·25. மாக்ஸ்வெலின் ஊசி.

நீண்ட குழாயின் நீளம் $4a$ யும், ஈயம் கொண்டிருக்கும் குழாய் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள ஈயத்தின் திணிவு m உம் ஆகுக; பின்னையது ஈயம் நிரம்பிய குழாய், வெறுங் குழாய் என்பவற்றின் திணிவு வித்தியாசம் ஆகும். [திண்மப் பித்தளைக் கோல்களைப் பயன்படுத்துமிடத்து அவற்றுள் ஒன்றிற்கும் வெறுங்குழாய் ஒன்றிற்கும் உள்ள வித்தியாசத்தையே காணல் வேண்டும்.] இனி அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடே செல்லுகின்ற நிலைக்குத்தச்சொன்று பற்றி நீளம் a கொண்ட சீரான கோலொன்றின் சடத்துவத் திருப்பம் $\frac{1}{12}ma^2$ ஆகும். ப. 76 இற் காண்க. எனவே ப. 78 இலுள்ள தேற்றப்படி (a) யிலுள்ள ஈயத்தின் சடத்துவத் திருப்பம்

$$2m[\tfrac{1}{12}a^2+(\tfrac{3}{2}a)^2]=\tfrac{14}{3}ma^2.$$

இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டில் அது

$$2m[\tfrac{1}{12}a^2+(\tfrac{1}{2}a)^2]=\tfrac{2}{3}ma^2.$$

எனவே மேற்படிக் கோவைகளின் வித்தியாசம் சுழற்சியச்சுப் பற்றித் தொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பத்தில் தோற்றும் மாற்றம் $4ma^2$ ஆகும்.

மேற்படிக் கோவையை நேரே எழுதியிருக்கலாம். ஏனெனில் இரு ஈயப் பகுதிகளின் திணிவு மையங்களைக் கிடைத்தூரம் a, அதாவது $(\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}a)$ இனுற் பெயர்த்து வைப்பதாலேயே தொகுதியின் புவியீர்ப்புமையமூடே செல்லுகின்ற நிலைக்குத்தசுப் பற்றி அததொகுதியின் சடத்துவத் திருப்பம் மாறுகின்றது; எனவே சுழிப்பாரையின வர்க்கததில் ஆகும் மாறறம்

$$2[(\tfrac{3}{2}a)^2-(\tfrac{1}{2}a)^2]=4a^2.$$

(a), (b) என்னும் ஒழுங்குகளுக்கு ஒத்த அலைவுக் காலங்கள் முறையே T_1 உம் T_2 உம் ஆகுக. சுழற்சியச்சு பறறி குழாய்கள், ஆடி, கோல் B

என்பவற்றின் சடத்துவத் திருப்பம் I_0 எனின்,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{b}}; \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_2}{b}}.$$

$$\therefore \quad T_1^2 = \frac{4\pi^2}{b}(I_0 + I_1); \qquad T_2^2 = \frac{4\pi^2}{b}.\quad (I_0 + I_2).$$

$$\therefore \quad (T_1^2 - T_2^2)\frac{b}{4\pi^2} = (I_1 - I_2).$$

எனவே கம்பியினது முறுக்கன் மாறிலி b இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்கலாம். கம்பியின் விட்டத்தையும் அதன நீளத்தையும் கண்ட பினனர், கம்பியினது சடததின் விறைப்பு மட்டைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு.—ஒரு கூட்டம் கம்பிததுணடுகள நுனிககு நுனியாகத் தொடுக்கப்பட்டிருக்கு மிடத்து முறுககல் விறைப்பு மட்டானது, அதாவது $\Gamma \div \theta$, சமாநதரமாகத் தொடுககப்பட்ட தடைகளினிடத்துப் பயனபடுத்தப்படும அதே சூததிரததால தரப்படுகிறது என நிறுவுக; இங்கு குறியீடுகள் அவறறின வழக்கமான கருததுககள உடையன. இதிலிருந்து நீளம் l உடைய கூம்புரு கம்பியொன்றினது சடததின விறைப்பு மட்டு, அதன் நுனிகளின் ஆரைகள a, b எனபவை தொடாபாகக கமபியின முறுக்கன மாறிலியைக் காண்க; இஙகு $b > a$.

அதன் குறுககு வெட்டு வடடமானதும, ஆனுல் நீளம் வழியே அதன விட்டம் மாறு கின்றதுமான உலோகக கமபியொனறு தரப்படடிருநதால அவவுலோகத்தின விறைப்பு மட்டிற்குத் திருததமான பெறுமானமொன்றைப பெறும் பொருட்டு எவ்வாறு நீா பெற்ற சூததிரததை மாறறியமைததுப் பரிசோதனையில பயனபடுததுதல வேணடும என்பதைக் காடடுக.

வழக்கமான குறிப்பீட்டைப் பயனபடுத்தினுல்,

$$\Gamma = \frac{\pi n a^4 \theta}{2l}.$$

எனவே l_1, a_1, n_1, θ_1; l_2, a_2, n_2, θ_2; ... முதலியவற்றுல் வரையறுக்கப்பட்ட கம்பிகளுக்கு

$$\Gamma = \frac{\pi n_1 a_1^4 \theta_1}{2l_1} = \frac{\pi n_2 a_2^4 \theta_2}{2l_2} = \ldots = \frac{\pi n_k a_k^4 \theta_k}{2l_k} = \ldots$$

$$\therefore \quad \Sigma(\theta) = \Gamma\left[\frac{2l_1}{\pi n_1 a_1^4} + \frac{2l_2}{\pi n_2 a_2^4} + \ldots + \frac{2l_k}{\pi n_k a_k^4} + \ldots\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\left[\frac{\Gamma}{\Sigma(\theta)}\right]} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{\pi n_k a_k^4}{2l_k}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{\Gamma}{\theta_1}\right]} + \frac{1}{\left[\frac{\Gamma}{\theta_2}\right]} + \ldots + \frac{1}{\left[\frac{\Gamma}{\theta_k}\right]} + \ldots\Bigg],$$

இது தேற்றத்தை நிறுவுகிறது.

அடுத்து படம் 7·26 (a) யில காட்டியுளள கமபியில நீளம் δx கொண்ட துண்டொன்றைக் கருதுக ; கம்பியின் பூசசிய நுனியிலிருநது தூரம் x இலுள்ள குறுக்கு வெட்டின் இடை ஆரை y ஆகுக ; இஙகு

$$y = \left(\frac{b-a}{l}\right)x + a.$$

இம்மூலகத்தின் நுனிகளிடையேயுள்ள திருகல் $\delta\theta$ எனின்,

$$\Gamma = \frac{\pi n y^4\, \delta\theta}{2\delta x},$$

அல்லது

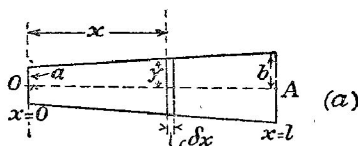
$$\frac{\Gamma}{\delta\theta} = \frac{\pi n}{2}\left(\frac{b-a}{l}x + a\right)^4 \frac{1}{\delta x}.$$

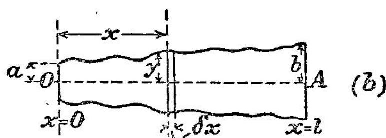
$$\therefore \quad \frac{1}{\left(\frac{\Gamma}{\theta}\right)} = \int_{x=o}^{x=l} \frac{d\theta}{\Gamma} = \frac{2}{\pi n}\int_o^l \frac{dx}{\left(\frac{b-a}{l}x + a\right)^4}$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{l}{b-a}\left[\frac{1}{b^3} - \frac{1}{a^3}\right].$$

$$\therefore \text{ முறுக்கல் மட்டு } = \frac{3}{2}\frac{\pi n a^3 b^3}{l}\cdot\frac{1}{a^2 + ab + b^2}.$$

சீரற்ற கம்பியொன்றின் நெட்டாங்கு வெட்டு படம் 7·26 (b) யிற் காட்டப்





படம் 7·26. மாறுகின்ற விட்டமுடைய கம்பிகளின் முறுக்கல் விறைப்பு மட்டு.

பட்டுள்ளது. முன்னர் போலவே நீளம் δx உடைய மூலகமொன்றுக்கு

$$\frac{\Gamma}{\delta\theta} = \frac{\pi n y^4}{2\delta x} \quad \text{அல்லது} \quad 2\Gamma\frac{\delta x}{y^4} = \pi n\, \delta\theta.$$

எனவே

$$2\Gamma\Sigma \left(\frac{\delta x}{y^4}\right) = \pi n\, \theta :$$

இங்கு வெவ்வேறு வெட்டுகளிற் கம்பியின் விட்டத்தை அளந்து, x உடன் y^{-4} இன் மாற்றததைக் காட்டும வரைபைக் கீறி, மேறபடி கூட்டலே வரைபு முறைப்படி செயதல வேணடும்.

இருநூற்றெங்கல் ; விறைப்பிற்குரிய திருத்தம்.—(*a*) **சமாந்தர நாண்கள்.** தொஙகல் நாணகளோ கமபிகளோ சமாந்தரமாக இருக்குமிடததுப் படம 7·27 (*a*) என்பது ஆயகருவியின் கிடைப்படம் ஆகுக ; நாண்களைக் குறிககின்ற வட்டங்களின் விட்டஙகள் மிகப பெரிதாககபபட்டிருக்கின்றன. தொங்கலாற் காவப்படுகின்ற சட்டத்திறகு அணித்தாயுளள கம்பியின் வெட்டில, L ஆனது நிலேதத நேர்கோடொனறு ஆகுக. அதன் மையம் O ஊடாகச் செல்லுகின்ற நிலேக்குத்தான அச்சுப்பறறிச் சட்டம் கோணம் ψ யினூடாகச் சுழனறபின அச்சட்டத்தைக் குறித்து நோகோடு L நிலே மாற்றம் அடைந்திராது, படம் 7·27 (*b*) யிற் காண்க ; அதாவது கம்பியில் திருகல் ψ ஆகும். எனவே கம்பியின் குறுக்குவெட்டாரை a_0 உம், அதன் நீளம் λ உம ஆயின், அவற்றின் விறைபபுக் காரணமாகச் சட்டம் மீது கம்பிகளால் அதிகப்படியாகப் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற மீள்தரு இணை யானது

$$2\left(\frac{\pi n a_0^4 \psi}{2\lambda}\right)=\frac{\pi n a_0^4 \psi}{\lambda}.$$

இங்கு n, கம்பியினது சடத்தின் விறைப்பு மட்டு ஆகும். எனவே சிற்றலேவுகளின் இயக்கச் சமனபாடானது

$$I\ddot{\psi}+\left(\frac{mga^2}{\lambda}+\frac{\pi n a_0^4}{\lambda}\right)\psi=0.$$

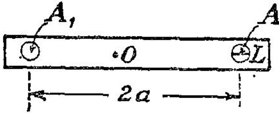
ஆகின்றது, ப. 159 இற் காண்க ; அதாவது $I=m\kappa^2$ எனின்

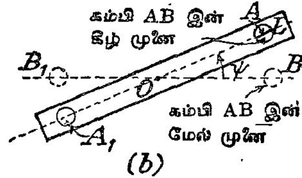
$$T=2\pi\kappa\sqrt{\frac{1}{a^2+\frac{\pi n a_0^{1}}{mg}}\cdot\frac{\lambda}{g}};$$

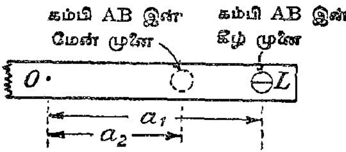
இங்கு m என்பது சட்டத்தின் திணிவு, முதலியவை.

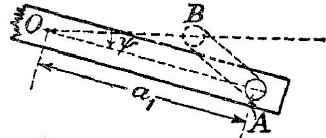
(*b*) **சமாந்தரமல்லா நாண்கள்.**—இவ்வெடுத்துக்காட்டில் படம் 7·27 (*c*) ஆனது அதனது நிலேயியற் சமநிலேத் தானத்தில் இருக்கின்ற ஆய்கருவியின் கிடைப்படம் ஆகுக ; ப. 160 இலுள்ள அதே குறிப்பீடானது இங்கும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. படம் 7·27 (*d*) யில் இருக்கின்றவாறு, சட்டமானது கோணம் ψ யாற் பெயர்க்கப்பட்டபோது சட்டத்தில் நிலேத்துள்ள நேர்கோடு L ஆனது கோணம் ψ யினூடாக அசையும் ; ஆனல் கம்பியின் திருகலேக் கம்பியச்சுககுச் செங்குததான தளத்தில் அளந்தால் அது ψ கோசை α ஆகும் ; இஙகு α எனபது நிலேக்குததுக் கோட்டுடன் கம்பியொன்று ஆக்கும சாய்வுக்கோணம் ஆகும். இதை நிலேநிறுத்தும் பொருட்டுத் தொங்குஞ் சட்டம் பெயர்க்கப்பட்டபோது

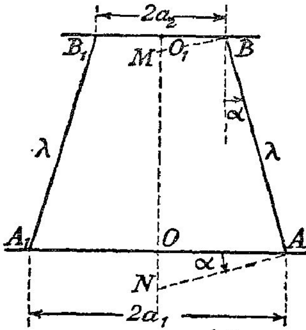
தாங்கும் கம்பிகள் திருகலுறுகின்றன மட்டுமன்றி அவற்றின் நுனிகளில் அவை சற்று வளைவுறுகின்றனவுங்கூட என்பது குறித்தற்பாலது. இவ் வளைவுடன் தொடர்புள்ள சக்தி முழு நிலைச் சக்தியைக் காட்டிலும் சிறிது

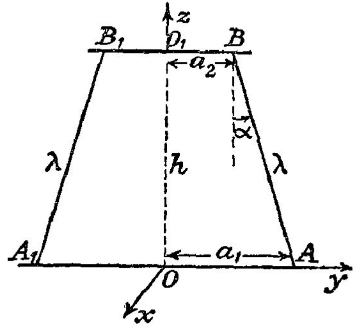












படம் 7·27. இருநூற்றெருங்கல் ; விறைப்பிற்குரிய திருத்தம்.

எனக் கொள்ளின், அப்பொழுது கம்பியின் நீளத்திற்குச் செங்குத்தான அச்சு AN ஐக் குறித்துக் கம்பி AB யின் நுனியைச் சுயாதீன முறையிற் சுழலுமாறு விடுகின்ற பிணைச்சலொன்றால் கம்பிகள் ஒவ்வொன்றும் சட்டம் AA_1 உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன என எடுத்துக் கொள்ளலாம், படம் 7·27 (e); அதுபோலவே கம்பிகள் B யிலும் B_1 இலும் பிணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன ; இங்கு AB யிற்குப் பொருத்தமான அச்சு BM ஆகும். அப்பொழுது கம்பி AB யிலுள்ள திருகற் கோணம் திசைகள் AN, BM என்பவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணம் ஆகும்; நடைமுறையில் BM சுழலமாட்டாது.

$AA_1 = 2a_1$ எனின், சட்டமானது கோணம் ψ யினூல் திரும்புமிடத்து ψ சிறிதாயிருந்தால், கடதாசித்தாளுக்குச் செங்குத்தாக A ஆனது தூரம் $a_1 \psi$ அசையும். எனவே நேர்கோடு AN எனபது கோணம்

$$\frac{a_1\psi}{AN} = \frac{a_1\psi}{a_1 \text{சீக}\, \alpha} = \psi \text{ கோசை } \alpha$$

அசையும்.

கம்பிகளின் விறைப்பாற் சட்டமீது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற இணை

$$2\left[\frac{\pi n a_0^4 \psi \text{ கோசை } \alpha}{2\lambda}\right] = \frac{\pi n a_0^4 \psi \text{ கோசை } \alpha}{\lambda}.$$

இயக்கச் சமன்பாட்டைப் பெறும்பொருட்டு அடிப்படைத் தத்துவங்களிலிருந்து தொடங்கித் தொகுதியின சக்தியைக் கருதுவோம். சட்டத்தின் பெயர்ச்சிகருமுன A யின ஆளகூறுகள் $(a_1, 0, 0)$ ஆகுக; கோணம் ψ யாற் பெயர்க்கப்பட்ட பின் அவை $(a_1 \text{ கோசை } \psi,\ a_1 \text{ சைன் } \psi,\ z)$ ஆகுக. இங்கு z எனபது சட்டத்தின் எநதப புள்ளியிலும் உள்ள சிறு நிலைக்குத்தான ஏற்றம் ஆகும. கம்பியொவவொனறின நீளமும் மாருது இருக்கின்றபடியால்,

$$\lambda^2 = h^2 + (a_1 - a_2)^2 = (h-z)^2 + (a_1 \text{கோசை}\, \psi - a_2)^2 + (a_1 \text{சைன்}\, \psi)^2;$$

இது
$$-2hz + z^2 - 2a_1 a_2 \text{கோசை } \psi + 2a_1 a_2 = 0$$

எனத் தருகிறது; அல்லது $z^2 \ll 2hz$ எனின, ψ சிறிது ஆதலால்

$$hz = a_1 a_2 (1 - \text{கோசை}\, \psi) = \tfrac{1}{2} a_1 a_2 \psi^2.$$

$$\therefore \text{ நிலைச் சகதி அதிகரிப்பு} = mgz = \frac{mga_1a_2}{2h}\psi^2.$$

இனி கம்பிகளின் மீள்தன்மைச் சக்தியானது

$$2[\tfrac{1}{2}\ (\text{இறுதி இணை}) \times (\text{இறுதித திருகல்})]$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi n a_0^4 \psi \text{ கோசை } \alpha}{2\lambda} \times \psi \text{ கோசை } \alpha\right]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\pi n a_0^4 \text{ கோசை}^2\, \alpha . \psi^2}{\lambda}.$$

எனவே கருதப்படுகின்ற கணத்தில் தொகுதி கொண்டிருக்கின்ற முழுச் சக்தியும்

$$\tfrac{1}{2} I \dot{\psi}^2 + \left[\frac{mga_1a_2}{2h} + \frac{1}{2}\frac{\pi n a_0^4 \text{கோசை}^2\, \alpha}{\lambda}\right]\psi^2$$

ஆகும்; இது மாருது. $\lambda = h \text{ சீக } \alpha$ ஆதலின், வகையிட,

$$m\kappa^2 \ddot{\psi} + 2\left[\frac{mga_1a_2}{2h} + \frac{\pi n a_0^4 \text{கோசை}^3\, \alpha}{2h}\right]\psi = 0$$

என்பதை இயக்கச் சமன்பாடாகப் பெறுகிறேம்.

$$\therefore\ \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m\kappa^2}{\frac{mga_1a_2}{h} + \frac{\pi n a_0^4\ \text{கோசை}^3\alpha}{h}}}$$

$$= 2\pi\kappa\sqrt{\frac{h}{ga_1a_2 + \frac{\pi}{m}\cdot n a_0^4\ \text{கோசை}^3\ \alpha}}.$$

கனவளவு மட்டும் நெருக்கத்தகவும்.—சமவியல்புடைய திரவியத்தா லான பொருளொன்றுமீது, ஒன்றிற்கொன்று செங்குத்தான, சமமான, மூன்று நெருக்கு தகைப்புக்கள் பிரயோகிக்கப்படின, பொருளில் எந்தத் தளமீதும் ஆற்றுகின்ற தகைப்பானது அத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைந்திருக்கும். அமுக்கம் p ஐப் பிரயோகிக்குமிடத்துச் சமவியல்புடைய திரவியத்தாலான பொருளொன்றின் கனவளவு V ஆகுக. அமுக்கம் $(p+\delta p)$ வரை ஏற்றப்பட்டவிடத்து மேற்படிப் பொருளின் கனவளவு $(\mathrm{V}+\delta\mathrm{V})$ ஆகுக. தகைப்பு ஏற்றம் δp யால் ஆகின்ற விகாரமானது $-\frac{\delta \mathrm{V}}{\mathrm{V}}$ ஆகும்; தகைப்பின் ஏற்றத்தின்போது கனவளவு குறைகிறபடியால் சயக்குறியானது தேவைப்படுகிறது. இவ்வெடுத்துக்காட்டிற் பொருத்தமான மீள்தன்மை மட்டு திரவியத்தின் **கனவளவு மட்டு** எனப்படும். அதை β ஆற் குறித்தால் அது

$$\beta = \frac{\text{தகைப்பு}}{\text{விகாரம்}} = \frac{\text{தகைப்பில் அதிகரிப்பு}}{\text{விகாரத்தில் அதிகரிப்பு}}$$

$$= \underset{\delta p\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{\delta p}{-\left(\frac{\delta \mathrm{V}}{\mathrm{V}}\right)} = -\mathrm{V}\left(\frac{\partial p}{\partial \mathrm{V}}\right)$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

[பொதுவாக v உட்பட வெப்பநிலை முதலியன போன்ற வேறு மாறி களைக் கொண்ட சார்பாகப் p இருக்கிறபடியால் இங்கு பகுதி வகையீட்டுக் குணகத்தைக் கண்டிப்பாய்ப் பயன்படுத்த வேண்டும்.]

பொருளொன்றின்மீது சீரான அமுக்க அதிகரிப்பைப் பிரயோகிக்கும் போது வழக்கமாக, இவ்வகையான விகாரம் உண்டாகின்றது.

திரவியமொன்றினது கனவளவு மட்டின் நிகர்மாற்றானது **நெருக்கத்தகவு** κ எனப்படும். பாயிகளினிடத்து இதைச் சற்று நேரல்லாத முறையாக அளக்க முடிகின்றது; திண்மப் பொருள்களினிடத்து, அண்மையில் நிறுவப்போகும் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி அப்பொருள்களின் நீட்டல் மட்டு, விறைப்பு மட்டு என்பவற்றிலிருந்து இதனைக் கணிப்பது வழக்கம்.

திண்மப் பொருள்களினிடத்துத் தகைப்பின மாற்றமானது சேறலில்லா முறையாகவும் புறமாற்று முறையாகவும் அல்லது மெதுவாகச் சமவெப்ப

முறையாகவும் நிகழ்கின்றபோது கனவளவு மட்டானது உணரத்தக்க வகையில் மாறுவதில்லை என அறிவோம் ; முந்திய முறை சமவெந்திரப்பி முறை எனவும் பிந்தியது சமவெப்பு முறை எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன ; ஆனால் வாயுக்கள், திரவங்கள் என்பவற்றினிடத்து தகைப்பு மாறறம் நேரிடும் நிலைமையைக் கண்டிப்பாய்ச் சரியாகக் குறித்தல்வேண்டும். [தொகுதி II ஐப் பார்க்க.]

வெப்பநிலையும் எந்திரப்பியும் மாறுது இருக்கின்றபோது இலட்சிய வாயுவின் கனவளவு மட்டுக்கள்.—(*a*) p யும் v யும் முறையே ஓர் அலகுத் திணிவுடைய வாயுவின் அமுக்கமும் கனவளவும் ஆகுக. அமுக்கம் $(p+\delta p)$ ஆகுமிடத்து கனவளவு $(v+\delta v)$ ஆகுக. வாயுவானது மாறு வெப்பநிலையில் பேணப்பட்ட இலட்சிய வாயு எனின், மேறபடி மாற்றங் களிடையேயுள்ள தொடர்பானது போயிலின விதிப்படி தரப்படும் ; அதாவது pv என்னும் பெருக்கமானது மாறுது இருக்கும். வகையிட,

$$p.\delta v+v.\delta p=0.$$

எனவே
$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T=-\frac{p}{v}.$$

எனவே கனவளவு மட்டானது

$$\beta_T=-v\cdot\frac{\partial p}{\partial v}=p,$$

அதாவது மாறு வெப்பநிலையில், இலட்சிய வாயுவின் கனவளவு மட்டானது அவ்வாயுமீது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற அமுக்கத்துக்குச் சமன என்பதே கருதது. [ந.கு. அமுக்கம் தனியான அல்லது ஈர்ப்பு அலகுகளிலேயே உணர்த்தப்படுதல் வேண்டும்.]

(*b*) இலட்சிய வாயுவின் புறமாற்றத்தக்க சேறலில் (அல்லது சமவெந் திரப்பி) விரியினிடத்துப் $pv^\gamma=$ மாறிலியாகும் ; இங்கு γ ஆனது வாயுவின் இரு பிரதான தன்வெப்பங்களின விகிதம் ஆகும். இதற்கு ஒத்த கனவளவு மட்டு β_S எனின்,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S=-\gamma\frac{p}{v},$$

அதாவது

$$\beta_S=-v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S=\gamma p.$$

சமவியல்பான திரவியமொன்றின் மீள்தன்மைக் குணகங்களிடையே யுள்ள தொடர்புகள்.—பௌதிகவியல், பிரயோகவியல்களாகிய எந்திரவியல், உலோகப் பிரிவியல் என்பவற்றில் E, n, β, σ என்னும் மீள்தன்மைக் குணகங்களிடையேயுள்ள பின்வரும் தொடர்புகள் மிகு முதன்மை வாய்ந்தவை ஆகும்.

(*a*) **தொடக்கநிலை ஆய்வு :** E, σ, n, β ஆகிய மீள்தன்மைக் குணகங் களுக்கு ஏறகெனவே வரைவிலக்கணம் கூறப்பட்டிருக்கிறது ; அடுத்துச் சமவியல்பான திரவியமொன்றிற்கு இக்குணகங்களுள் இரண்டு மட்டுமே சாராதவை எனக் காட்டுவோம் ; அதாவது இரண்டைத் தெரிந்திருந்தால் மற்றவையைக் கணிககலாம் எனறவாறு.

இத்திரவியத்தாலான சதுரமுகியொன்றைக் கருதுக. அதன் பக்கமொவ் வொனறினதும் இயலபான நீளம் c ஆகுக ; ஒவ்வொனறும் சதுர முகியின ஒரு சோடி முகங்களுக்குச் செங்குத்தான மூனறு சம இழு வைத் தகைபபுக்கள் p யினுல இச்சதுரமுகியானது தாக்கப்படுகிறது எனக் கொள்க. விகாரம் ϵ ஆகுக. அபபொழுது ϵ^2 ஐயும் அதற்கு மேலான வலுக்களையுங்கொண்ட உறுப்புக்களைப் புறக்கணிக்குமிடததுச் சதுரமுகியின் புதுக் கனவளவு $c^3(1+\epsilon)^3$ என்பது $c^3(1+3\epsilon)$ ஆகின்றது. எனவே கனவளவு விகாரம 3ϵ ஆகும் ; எனவே கனவளவு மட்டு β என்பது

$$\beta=\frac{p}{3\epsilon}, \quad \text{அல்லது} \quad p=3\beta\epsilon \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

பிரயோகிக்கப்படும் தகைப்பானது ஒரு சோடி எதிரான முகங்கள் மீது மட்டுந் தாக்கினுல் அம்முகங்களுக்குச் செங்குத்தான திசையில் விகாரம் $\frac{p}{E}$ ஆகும் ; இங்கு E ஆனது சதுரமுகித் திரவியத்திற்குரிய யங்கின் மட்டு ஆகும். எடுததுக்காட்டாக AB யிற்குச் சமாநதரமான தகைப்பொன்றுல், AB (அலலது AB யிற்குச் சமாந்தரமான எந்த நேர்கோடும்) வழியே ஆகின்ற விகாரம் இதுவே, **படம்** 7·28 (*a*). இருந்தாலும் மூன்று சோடி இழுவைத் தகைப்புக்கள எலலாம் செயலுறும் பொழுது AB யிலுள்ள விகாரத் தின் ஒரு பஙகு மற்றைத் தகைப்புச் சோடிகளால் ஆகினறது ; இவ்வதிகப் படியான தகைப்புக்கள் ஒவ்வொன்றும் AB யில் $-\sigma\frac{p}{E}$ அளவு விகாரத்தை ஆக்கும் ; இங்கு σ என்பது **பொய்சோன் விகிதம்** ஆகும், ப. 322. எனவே AB வழியே முழு நீட்சி விகாரமும்

$$\frac{p}{E}-2\sigma\frac{p}{E}=\frac{p}{E}(1-2\sigma)=\epsilon \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

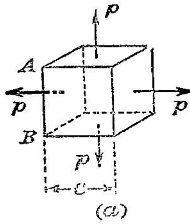
$\frac{p}{\epsilon}$ இற்குச் சமன்பாடுகள் (i) உம் (ii) உம் தரும் பெறுமானங்களைச் சமன்படுத்த,

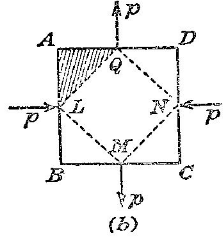
$$3\beta=\frac{E}{1-2\sigma}.$$

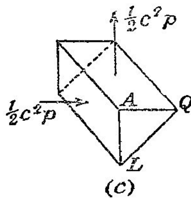
அடுத்து அதே சதுரமுகிக் கட்டையில், ஆக ஒருசோடி எதிரான முகங்கள் மீது சீரான இழுவைத் தகைப்பொன்றையும், அதற்குச் சமனான நெருக்கு தகைப்பொனறை வேறொரு முகமீதும், வேறெந்தத் தகைப்புக்களும் இன்றி பிரயோகிக்க. இவை படம் 7·27 (b) யில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. L, M, N, Q என்பவை முறையே பக்கங்கள் AB, BC, CD, DA எனபவற்றின மையப் புள்ளிகள் ஆகுக. சதுரமுகியில் ALQ ஐக் குறுக்கு வெட்டொன்றெனக் கொண்ட பாகத்தைக் கருதுக ; படங்கள் 7·27 (c) யையும் (d) யையும் பாாகக.

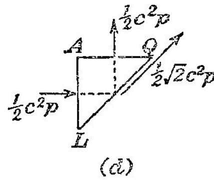
சதுரமுகியின் இப்பாகமீது தாக்குகின்ற புற விசைகள் (i) நிலைக்குத்து மேனோக்கி $\frac{1}{2}c^2p$ யும், (ii) வலப்பகக முகமாக $\frac{1}{2}c^2p$ யும், (iii) அதனமீது சதுரமுகியின் அது ஒழிந்த பாகம் பிரயோகிககினற விசையும் ஆகும. $\frac{1}{2}c^2p$ என்னும் முதல் இரு விசைகளின் விளையுள்

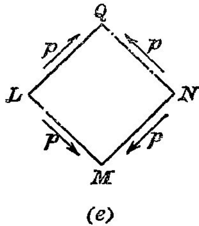
$$2\left(\tfrac{1}{2}c^2p\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,c^2p.$$

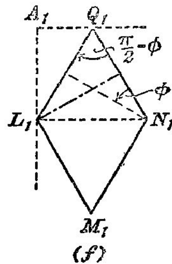












படம் 7·28. E, σ, n, β என்னும் மீள்தன்மைக் குணகங்களிடையேயுள்ள தொடர்புகள்.

இது LQ இற்குச் சமாநதரமாகத் தாக்குகிறது. எனவே சமநிலே யையிட்டுப் பாகம ALQ மீது சதுரமுகியின் எஞ்சிய பாகம் பிரயோகிக்கின்ற விசை $\frac{1}{2}\sqrt{2}c^2p$ யிறகுச சமனுகவும் திசை QL இற்குச் சமாந்தரமாகவும் இருத்தல் வேண்டும். ஆனுல் முகம் QL இன் பரப்பளவு $\frac{1}{2}c\sqrt{2}.c=\frac{1}{2}\sqrt{2}c^2$ ஆகும். எனவே, LQ விறகுக் குறுககே கொய் தகைப்பு p உளது.

சதுரமுகியின் பாகம LMNQ என்பதையும் அதன்மீது தாக்குகின்ற தகைப்புத தொகுதியையும படம் 7·28(e) காட்டுகிறது. இத்தகைப்புக்களின் விளைவாகப் படம் 7·28 (f) இல் காட்டியுள்ளவாறு சதுரம் LMNQ ஆனது சாய்சதுரம $L_1M_1N_1Q_1$ என ஆகினறது.

இனி $M_1Q_1=c\left[1+\frac{p}{E}+\sigma\frac{p}{E}\right]$; எனவே M_1Q_1 வழியேயுள்ள நீட்சி விகாரமானது $\frac{p}{E}(1+\sigma)$ ஆகும் ; அதுபோலவே L_1N_1 வழியே நெருக்கும் விகாரமொன்றுமுளது ; அதன் அளவு $\frac{p}{E}(1+\sigma)$ ஆகும்.

$\epsilon=\frac{p}{E}(1+\sigma)$ ஆகுக ; அப்பொழுது AB, BC களின் புது நீளங்கள் முறையே $c(1+\epsilon)$ உம $c(1-\epsilon)$ உம் ஆகும். $L_1\widehat{Q_1}N_1=\frac{\pi}{2}-\phi$ ஆகுக; இஙகு ϕ என்பது கொய்வுக கோணம் ஆகும்; $\Delta\ L_1N_1Q_1$ ஐக் கருதுக.

$$L_1N_1^2=(N_1Q_1-L_1Q_1\text{ சைன் }\phi)^2+(L_1Q_1\text{ கோசை }\phi)^2$$
$$=N_1Q_1^2+L_1Q_1^2-2N_1Q_1.L_1Q_1\text{ சைன் }\phi.$$
$$\therefore\ \text{சைன் }\phi=\frac{L_1Q_1^2+N_1Q_1^2-L_1N_1^2}{2L_1Q_1.N_1Q_1}=\frac{2L_1Q_1^2-L_1N_1^2}{2L_1Q_1^2}.$$

ஆனுல் $L_1Q_1^2=A_1L_1^2+A_1Q_1^2$; $L_1N_1^2=4A_1Q_1^2$.

$$\therefore\ 2L_1Q_1^2-L_1N_1^2=2[A_1L_1^2-A_1Q_1^2]$$
$$=2(A_1L_1-A_1Q_1)(A_1L_1+A_1Q_1)$$
$$=[c(1+\epsilon)-c(1-\epsilon)]\,[\tfrac{1}{2}c(1+\epsilon)+\tfrac{1}{2}c(1-\epsilon)]$$
$$=2c^2\epsilon.$$

$L_1Q_1^2\doteq\frac{1}{2}c^2$ ஆதலின,

$$\phi\doteq\text{சைன் }\phi=\frac{2c^2\epsilon}{c^2}=2\epsilon.$$

$$\therefore\ p=n\phi=2n\epsilon,$$

அதாவது $$\epsilon=\frac{p}{2n}.$$

ஆனுல் $\epsilon=\frac{p}{E}(1+\sigma)$; எனவே $2n=\frac{E}{1+\sigma}$.

$3\beta = \frac{E}{1-2\sigma}$ உம், $2n = \frac{E}{1+\sigma}$ உம் ஆதலின், இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும σ வை நீக்க,

$$\frac{3}{n} + \frac{1}{\beta} = \frac{9}{E}.$$

அதுபோலவே $$\sigma = \frac{E}{2n} - 1 = \frac{3\beta - 2n}{6\beta + 2n}$$

எனக் காட்டலாம்.

(*b*) **பகுப்புமுறை.**—சமவியல்புடைய திரவியத்தாலான கம்பியொன்று ஈர்ககபபடுமிடத்து, ஈாக்கும் விசைகள் தாஙகுகின்ற திசையில நீட்சியொன்றும் மேறபடி திசைககுச செஙகுததான எலலாத் திசைகளிலும் சுருக்கம் ஒனறும தோனறுகினறன எனக் காட்டப்பட்டிருககிறது. இனிச் சமவியல்புடைய திரவியமொன்ருலான அலகுச் சதுரமுகியொன்றைக கருதுக ; அதன ஓரஙகளுக்குச் சமாந்தரமான திசைகளில் தாககுகினற மூன்று தகைப்புக்களால் அச்சதுரமுகி தாக்கப்படுக. p_1, p_2, p_3 எனபன அத்தகைப்புக்களும், ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 எனபன அவற்றிற்கு ஒத்த விகாரங்களும் ஆகுக. தகைபபானது அது பிரயோகிக்கப்படும திசையில், பொருளை நீட்ட முயலுமாயின் அது நேரானது எனக் கருதபபடும் ; அதாவது இழுவைத் தகைபபு நேர் ஆகும். அப்பொழுது ϵ_1 ஆனது p_1 ஐச் சாரும். அதன் அமைப்பில் p_2 உம் p_3 உம் சமச்சீராக இருக்கும். எனவே

$$\epsilon_1 = \bar{\lambda} p_1 + \bar{\mu}(p_2 + p_3),$$
$$\epsilon_2 = \bar{\lambda} p_2 + \bar{\mu}(p_3 + p_1),$$
$$\epsilon_3 = \bar{\lambda} p_3 + \bar{\mu}(p_1 + p_2).$$

இங்கு $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ என்டன மாறிலிகள். ϵ களின் தொடர்பாகப் p களைத் தரும் தீர்வுகளை இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறலாம். எனவே

$$p_1 = \lambda\epsilon_1 + \mu(\epsilon_2 + \epsilon_3),$$
$$p_2 = \lambda\epsilon_2 + \mu(\epsilon_3 + \epsilon_1),$$
$$p_3 = \lambda\epsilon_3 + \mu(\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

என நாம் எழுதலாம். λ வும் μ வும் கருதப்படுகின்ற பொருளினது திரவியத்தின் இயல்பைப் பொறுத்துள்ளன.

(i) அலகுச் சதுரமுகி வடிவுடைய பொருளொன்று மீது தாக்கும் அமுக்கமானது p அளவு குறைக்கப்படுக ; இதனுல் பொருள் விரிகிறது. Δ என்பது பின்ன விரி ஆகுக ; அதாவது அது, தொடக்கக் கனவளவைக் குறித்துக் கனவளவு கூடுதலின் விகிதம் ஆகும். அப்பொழுது எல்லா விகாரங்களும் ஒன்றிற்கொன்று சமன் ஆதலின்,

$$p_1 = p_2 = p_3 = -p,$$

அத்துடன்
$$\Delta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$
$$= 3\epsilon.$$

மேற்படி விகாரத்தை ϵ என்க.

எனவே
$$-p = (\lambda + 2\mu)\epsilon = \tfrac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\Delta;$$

எனவே
$$\beta = -\frac{p}{\Delta} = \tfrac{1}{3}(\lambda + 2\mu) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

(ii) அடுத்து சதுரமுகியின் ஓரமொன்றிற்குச் சமாந்தரமான அச்சொன்று வழியே தாகதுமாறு தகைப்பு பிரயோகிக்கப்படுக, அதாவது $p_1 = p$ யும் $p_2 = p_3 = 0$ உம் ஆகும். இது ஓர் எளிய நெட்டாங்கு இழுப்புக்குரிய எடுத்துக்காட்டாகும்; இங்கு இழு திசையிலுள்ள நீட்சியொன்றுடன் அத்திசைக்குச் செங்குத்தான திசைகளில் சுருக்கம் தோன்றும்.

அப்பொழுது
$$p_1 = p = \lambda\epsilon_1 + \mu(\epsilon_2 + \epsilon_3),$$
$$0 = \lambda\epsilon_2 + \mu(\epsilon_3 + \epsilon_1),$$
$$0 = \lambda\epsilon_3 + \mu(\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

கடைசி இரு சமன்பாடுகளினதும் விளைவாக $\epsilon_2 = \epsilon_3$. எனவே
$$(\lambda + \mu)\epsilon_2 + \mu\epsilon_1 = 0;$$

எனவே பொய்சோனின் விகிதம் σ என்பது
$$\sigma = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$
என்பதால் தரப்படுகிறது.

இனி
$$p = \lambda\epsilon_1 + 2\mu\epsilon_2,$$

அத்துடன்
$$\epsilon_2 = -\sigma\epsilon_1.$$

எனவே
$$p = (\lambda - 2\sigma\mu)\epsilon_1;$$

ஆகவே யங்கின் மட்டு E,
$$\mathrm{E} = \frac{p}{\epsilon_1} = \lambda - 2\sigma\mu \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$
என்பதால் தரப்படுகிறது.

(iii) அடுத்து கொய்வுறும் அலகுச் சதுரமுகியொன்றைக் கருதுக இவ்வெடுத்துக்காட்டில் கொய் தகைப்புக்கள் $p_1 = -p_2 = p$ களாலும் $p_3 = 0$ ஆலும் தரப்படுகின்றன. அப்பொழுது
$$p = \lambda\epsilon_1 + \mu(\epsilon_2 + \epsilon_3),$$
$$-p = \lambda\epsilon_2 + \mu(\epsilon_3 + \epsilon_1),$$
$$0 = \lambda\epsilon_3 + \mu(\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

இச்சமன்பாடுகளுள் முதல் இரண்டையும் கூட்டினால்

$$0=(\lambda+\mu)(\epsilon_1+\epsilon_2)+2\mu\epsilon_3.$$

அவற்றுள் கடைசியானதைப் பயன்படுத்தி ஏற்கெனவே பெற்றுள்ளதிலிருந்து $(\epsilon_1+\epsilon_2)$ என்பதை நீக்க,

$$0=-(\lambda+\mu)\lambda\epsilon_3+2\mu^2\epsilon_3.$$

எனவே

$$\lambda^2+\mu\lambda-2\mu^2=0,$$

அதாவது $\lambda=\mu$ அல்லது $\lambda=-2\mu$ என்பன உண்மையாக இராவிட்டால் $\epsilon_3=0$; அப்பொழுது $\epsilon_1+\epsilon_2=0$; உடன வருகினற வகுப்பு காட்டுகிறபடி ஒன்றில் $n=0$ அலலது $\beta=0$ ஆனாலன்றி மேறபடி நிபந்தனையானது நடைமுறையில் தோனறுது. $\epsilon=\epsilon_1=-\epsilon_2$ என எழுதினால்,

$$p=(\lambda-\mu)\epsilon.$$

ஆனால் $\epsilon=\frac{1}{2}\phi$; இங்கு ϕ கொய்வு விகாரம். [ப. 304 இற்காண்க].

$$\therefore\ n=\frac{p}{\phi}=\frac{1}{2}(\lambda-\mu) \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

$3\beta=\lambda+2\mu$ எனவும்

$2n=\lambda-\mu$ எனவும்

ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

$$\therefore\ \mu=\beta-\tfrac{2}{3}n \text{ உம் } \lambda=\beta+\tfrac{4}{3}n \text{ உமாம்.}$$

$$\therefore\ \sigma=\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{\beta-\frac{2}{3}n}{2\beta+\frac{2}{3}n}=\frac{3\beta-2n}{6\beta+2n}; \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

மேலும் இங்கு λ, μ, σ என்பவற்றிறகு ஏற்கெனவே கண்டுகொண்ட அவற்றின பெறுமானங்களைப் பிரதியிட்டால்,

$$E=(\lambda-2\sigma\mu)=\frac{9\beta n}{3\beta+n} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(v)}$$

E இறகும் σ இற்கும் மேற்படிச் சூத்திரங்களை நிலைநிறுவியதற்குரிய காரணம் என்னவென்றால, λ வையும் μ வையும் மீள தன்மைக் குணகங்கள் β, n என்பவறறுடன தொடாபுபடுத்தும் சமன்பாடுகளிலிருந்து, அவற்றை உடனே பெறமுடிகின்றது எனபதேயாம். இனி நடைமுறையில் β, σ என்பவற்றைக் காட்டிலும் E, n எனபவையே வழக்கமாகப் பரிசோதனை முறைப்படி எளிதிற் காணப்படுகின்றன ; எனவே E, n எனபவை தொடர்பாக σ வையும் β வையும் எடுத்துக் கூறுதல் தேவைப்படுகிறது.

$$E=\lambda-2\sigma\mu=\lambda-\frac{2\mu^2}{\lambda+\mu} \text{ உம்}$$

$$2n = \lambda - \mu \text{ வும் ஆதலின்}$$

$$E - 2n = \mu\left[1 - \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\right] = \mu . \frac{\mu - \lambda}{\lambda+\mu}.$$

$$\therefore \frac{E-2n}{2n} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \sigma,$$

அதாவது $$\sigma = \left(\frac{E}{2n} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad (vi)$$

$E = \lambda - 2\sigma\mu$, $2n = \lambda - \mu$ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க,

$$\mu = \frac{E - 2n}{1 - 2\sigma} = \frac{(E-2n)n}{3n - E} \qquad \left[\because \sigma = \frac{E}{2n} - 1\right].$$

$$\therefore \lambda = 2n + \mu = \frac{4n^2 - nE}{3n - E},$$

$$\beta = \tfrac{1}{3}(\lambda + 2\mu) = \frac{En}{9n - 3E}. \quad . \quad . \quad . \quad (vii)$$

பொய்சோனின் விகிதத்தின் எல்லைப் பெறுமானங்கள். $\sigma = \dfrac{3\beta - 2n}{6\beta + 2n}$ என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டுளளது. n ஆனது தவிர்க்க முடியாதபடி நேர்ககணியமொன்றுகும் ; எனவே அதன் இழிவுப பெறுமானம் பூச்சியம் ஆகும். பொயசோன் விகிதத்தின் உயர்வுப் பெறுமானம் 0·5 ஆகும்; அது $n = 0$ ஆகுமிடத்துத் தோன்றும். மறறப்படி, $n = \infty$ ஆகுமிடத்து

$$[\sigma]_{n\to\infty} = \left[\frac{3\dfrac{\beta}{n} - 2}{6\dfrac{\beta}{n} + 2}\right]_{n\to\infty} = -1$$

எனப் பெறுகிறேம்.

எனவே $$-1 < \sigma < 0{\cdot}5.$$

இருந்தாலும் நடைமுறையில் σ ஒரு நேர் எண் ஆதல் வேண்டும்; எடுத்துக்காட்டாக, அது மறை எண்ணுய் இருக்குமாயின் அத்தகைய திரவியத்தாலான கம்பியொன்றை ஈர்க்கும் விசைகள் தாக்குமிடத்து அது ஈர்க்கப்படும் திசைக்குச் செங்குத்தான திசையில் விரியும். உலோகம் (அல்லது வேறெரு பொருள்) எதுவாகிலும் அது இவ்வாறு ஆற்றுது. எனவே, நடைமுறையில்

$$0 < \sigma < 0{\cdot}5.$$

மீள்தன்மைக் குணகங்களிடையேயுள்ள வேறுசில முதன்மையான தொடர்புகள்.—சமவியல்பான திரவியமொன்றைக் கருதுக; அதில் உள்ள தலைமையான தகைப்புக்கள் p_1, p_2, p_3 என்பவை ஆகுக. ஒவ்வொன்றும்

தனியளுகத் தாக்கிப் பிறப்பிக்கும் அதே விகாரத்தையே இப்பொழுதும் பிறப்பிக்கும். இனி இழுவைத் தகைப்பு p_1 இன் சொந்தத் திசையிலே விகாரம் ϵ_1 எனபது உடன்தோன்றும் ; அதன் பருமன்

$$\epsilon_1 = \frac{p_1}{E}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு E, தரப்பட்ட திரவியத்தினது யங்கின் மட்டு. மற்றை இரு தலைமைத் தகைப்புக்களின் திசைகளிலே, தலைமைத் தகைப்பு p_1 இனுல் ஆகும் விகாரங்கள்

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\sigma\epsilon_1 = -\frac{\sigma}{E} \cdot p_1.$$

எல்லா மூன்று தகைப்புக்களும் தொழிற்படும்போது

$$\epsilon_1 = \frac{p_1}{E} - \frac{\sigma}{E}(p_2 + p_3), \quad \epsilon_2 = \frac{p_2}{E} - \frac{\sigma}{E}(p_3 + p_1),$$

$$\epsilon_3 = \frac{p_3}{E} - \frac{\sigma}{E}(p_1 + p_2).$$

$p_1 = p_2 = p_3$ எனின், விகாரம் ஒரு மாறிலியாகும் ; அது

$$\epsilon = \frac{p}{E}(1 - 2\sigma)$$

இனுல் தரப்படுகிறது.

$$\therefore \ \beta = \frac{p}{\Delta} = \frac{p}{3\epsilon} = \frac{1}{3}\left[\frac{E}{1 - 2\sigma}\right].$$

எடுத்துக்காட்டு.—*பக்க விகாரம் முறறிலும் தடுக்கப்பட்ட முறையில் ஈர்க்கப்பட்ட சமவியல்பான திரவியமொனறுலான கோலொனறிலுளள விகாரங்களைக் கணிகக.*

ஏற்கெனவே நிலைநிறுத்தியுளள தொடர்புகளிலிருந்து

$$\epsilon_1 = \frac{p_1}{E} - \frac{\sigma}{E}(p_2 + p_3), \quad \epsilon_2 = 0 = \frac{p_2}{E} - \frac{\sigma}{E}(p_3 + p_1), \quad \epsilon_3 = 0 = \frac{p_3}{E} - \frac{\sigma}{E}(p_1 + p_2).$$

$$\therefore \ p_2 = p_3.$$

எனவே,

$$\epsilon_1 = \frac{p_1}{E} - \frac{2\sigma}{E} \cdot p_2,$$

$$0 = \frac{p_2}{E} - \frac{\sigma}{E}(p_2 + p_1).$$

$$\therefore \ p_2\left[\frac{1}{E} - \frac{\sigma}{E}\right] = \frac{\sigma}{E} \cdot p_1$$

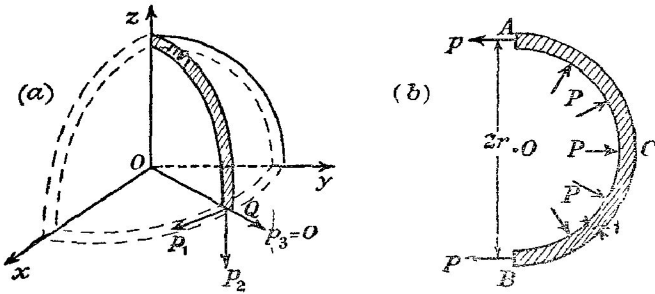
$$\therefore \ p_2 = p_1\left(\frac{\sigma}{1 - \sigma}\right).$$

$$\therefore \epsilon_1 = \frac{p_1}{E} - \frac{2\sigma}{E}\left(\frac{\sigma}{1 - \sigma}\right)p_1 = \frac{p_1}{E}\left[\frac{1 - \sigma - 2\sigma^2}{1 - \sigma}\right].$$

$\sigma = 0{\cdot}25$ எனின், $\epsilon_1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{p_1}{E}$;

அதாவது, நீட்சியானது, பிரயோகிக்கப்படும் இழுப்பின திசைக்குச் செங்குத்தான திசைகளில் அதே கோல சுருங்குமாறு விடப்பட்டு, முந்திய விசைகருச சமனுன விசையொனருல் ஈர்ககப்படுவதால் உணடாகும் நீடசியைக் காடடிலும் ஆறில ஒனறு சிறிது.

உள்ளமுக்கத்துக்கு உட்பட்ட மெல்லிய கோளவோடொன்றில் தகைப்புக்கள்.— கோளவோடொன்று அமுக்கமுறும் பாயியொன்றைக் கொண்டிருக்கும்பொழுது, அதன சுவாகளின புள்ளிகள ஒவ்வொன்றிலும் அச்சுவர்களுககுச் செங்குத்தான, சீரான, அதிகப்படியான, அமுக்கமொன்று உளது ; இஙகு பாயியின நிறை புறக்கணிக்கப்படுகிறது. இம் மேலதிகமான அமுக்கம் P ஆகுக. எனவே ஓட்டுத் திரவியம் தகைப்புறு



படம் 7·29. மெல்லிய கோளவோடொன்றில் தகைப்புக்கள்.

கிறது. படம் 7·29 (a) யைக் கருதுக ; இங்கு கோளவோட்டின் எட்டில் ஒன்று காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; அதிலிருந்து ஒருபகுதி அப்புறப்படுத்தப் பட்டிருக்கிறது. தளம் xOy யிலுள்ள ஓட்டுப் புள்ளி P யில் தாக்குகின்ற மூன்று தலைமைத் தகைப்புக்களைக் கருதி, ஓட்டிலுள்ள தகைப்புக்கள் பற்றிய எல்லாச் செய்திகளையும் பெறலாம். இத்தலைமைத் தகைப்புக்கள் p_1, p_2, p_3 ஆகும் ; அவை முறையே Q விலுள்ள வெட்டின் மூலகமொன்றிற்குச் செங்குத்தாகவும், zO விற்குச் சமாந்தரமாகவும், நீட்டிய OQ வழியேயும் தாக்குகின்றன. மெல்லிய ஓடுகளுக்கு ஆரைத் தகைப்பு p_3 பூச்சியம் எனக் கொள்ளலாம் ; மேலும் சமச்சீரையிட்டுப் $p_1=p_2=p$ (என்க); p **தொடலித் தகைப்பு** எனப்படும். p யை மதிப்பிடும்பொருட்டு, முழு ஓடும், விட்டத்தளம் AOB இனுல் இருசம பாகங்களாக வெட்டப்படுக, படம் 7·29 (b). தீட்டப்பட்ட பாகம் அப்புறப்படுத்தியும், ஆனுல் இருப்பு அரைக்கோளமீதுள்ள விசைகள் மாருமலும் இருக்கின்றன எனக் கற்பனை செய்வோம். இவ்வரைக்கோளத்தின் சமநிலையைக் கருதுவோம். ஓட்டின் தடிப்பு t ஆகுக ; அது ஆரை r ஐக் காட்டிலும் சிறிது எனக் கொள்ளப் படுகிறது ; பாகம் ACB மீது அப்புறப்படுத்தியுள்ள பாகத்தால் பிரயோகிக் கப்படுகின்ற விசைகள் விளையுள் $2\pi rt.p$ உடையன ; இது அரைக்கோளமீது உள்ளே இருக்கின்ற மேலதிகமான அமுக்கத்தாலாகும் விளையுள் விசை

$P.\pi r^2$ இற்குச் சமன். எனவே

$$2\pi rt.p = \pi r^2.P ;$$

ஆகவே
$$p = \frac{Pr}{2t}.$$

$p_1 = p_2$ ஆதலாலும், p_3 பூச்சியம் எனக் கொள்ள முடிகிறபடியாலும் ஒட்டுப் புள்ளிகள் யாவற்றிலும் தொடலி விகாரம் மாறுது இருக்கும் ; அது

$$\epsilon = \frac{p_1}{E} - \frac{\sigma}{E} \cdot p_2 \qquad \text{[ப. 354 இற் காண்க]}$$
$$= \frac{Pr}{2tE}(1 - \sigma)$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு கருதப்படும ஒட்டுத திரவியத்திற்கு E எனபது யங்கின் மட்டும, σ எனபது பொயசோனின விகிதமும ஆகும்.

உள்ளமுக்கத்தால் தாக்கப்படும் மெல்லிய உருளையோடொன்றில் தகைப்புக்கள்.—அமுககமுறும் பாயியைக் கொண்ட குழாய் அலலது கொதிகலம போனற மெலலிய உருளையோடொன்றுள் மேலதிகமான அமுககம் P ஆகுக. அப்பொழுது, பாயியின நிறைையைப் புறக்கணிக்குமிடத்து, அமுககம எங்கும் மாறுமலும சுவாகளுக்குச் செஙகுததாகவும அமைந்திருக்கும். தலைமைத் தகைபபுககள் (a) குறுக்கு வெட்டினது எல்லைக் கோட்டின தொடலித் திசையிலும் (b) உருளையச்சுககுச் சமாந்தரமான நோகோடொனறு வழியேயும் (c) கருதப்படும புளளியூடே செலலுகினற ஆரை வழியேயும் அமைந்திருக்குமாறு திரவியம் தகைப்புறும. இவை படம் 7·30(a) யில் காட்டபபட்டிருக்கினறன ; அவை முறையே **பரிதி** அலலது **வளையத் தகைப்பு** p_1 எனவும், **நெட்டாங்குத் தகைப்பு** p_2 எனவும், **ஆரைத் தகைப்பு** p_3 எனவும அழைக்கப்படுகினறன ; அவையே தலைமையான மூன்று தகைப்புக்கள். மெலலிய ஓடுகளினிடத்து, மறறை இரு தலைமைத் தகைப்புக்களைக் காட்டிலும் ஆரைத் தகைப்பு எபபொழுதும் சிறிதே.

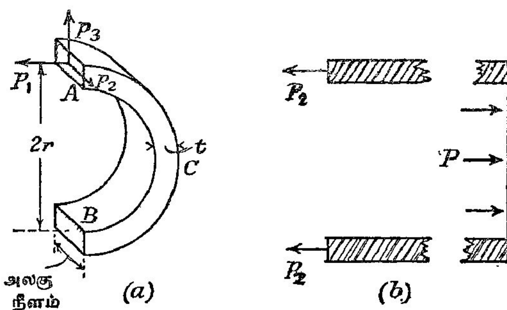
இடையீடு அலகுத்தூரமாகவும், ஓட்டின அச்சுக்குச் செங்குத்தாகவுமுளள, இரு தளங்களுக்கிடையேயுள்ள ஓட்டுப்பகுதியின் அரைவாசிமீது தாககுகின்ற விசைகளைக் கருதுக. $p_3 \to 0$; எனவே அத்தகைப்பு புறக்கணிக்கப்படுகிறது. p_1 இறகுப் பெறுமானமொனறைக் காணும்பொருட்டு, வெட்டின் அப்புறப்படுததியுள்ள பாகத்தால் ACB மீது A யிலும் B யிலும் தாககுகினற விசைகள் ABC மீது தாககுகின்ற விளையுள் விசையால சமமாக்கப்படுகிறது என்னுஞ் செய்தியைப் பயன்படுத்துகிறேம். விளையுள் விசையானது மாறுது இருக்கின்றது எனக் கொள்ளப்படுகிறது. A யில் (அல்லது B யில்) உள்ள விசையானது $p_1 t$ ஆகும் ; அதே நேரத்தில், பாயியின் மேலதிகமான அமுக்கத்தால் வளைபரப்புமீது தாக்குகின்ற விசை $(2r \times 1)$ P ஆகும். சமநிலையையிட்டு

$$2p_1 t = 2rP \quad \text{அல்லது} \quad p_1 = \frac{Pr}{t}.$$

நெட்டாங்குத் தகைப்பு p_2 ஐக் கணிக்கும் பொருட்டு, படம் 7·30 (b) யில் காட்டியுள்ளவாறு, உருளையின் பாகமொனறு அப்புறப்படுத்தப்பட்டுள்ளது எனக் கற்பனை செய்க ; எஞ்சியிருககினற பாகத்தின் சமநிலையைக் கருதுக. அப்பொழுது அப்புறப்படுததியுளள பாகததால் திரவியத்தில் பிரயோ கிக்கபபடும் விசையானது $2\pi rt.p_2$ ஆகும். முழுதும சமநிலையில் இருக்கு மாயின் இது உருளையின நுனிமீது தாககுகின்ற விசை $\pi r^2.\mathrm{P}$ யிற்குச் சமனாய இருத்தல் வேண்டும. எனவே

$$p_2 = \frac{\mathrm{P}r}{2t}.$$

எனவே பரிதித் தகைப்பானது நெட்டாஙகுத் தகைப்பின இரு மடங்காகும்.



படம் 7.30. மெல்லிய உருளையொன்றினுள் தகைப்புக்கள்.

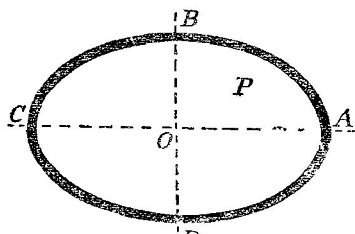
பரிதி விகாரமும், நெட்டாங்கு விகாரமும் முறையே ϵ_1, ϵ_2 ஆகுக. அப்பொழுது

$$\epsilon_1 = \frac{p_1}{\mathrm{E}} - \frac{\sigma}{\mathrm{E}}.p_2 = \frac{\mathrm{P}r}{\mathrm{E}t}(1 - \tfrac{1}{2}\sigma),$$

$$\epsilon_2 = \frac{p_2}{\mathrm{E}} - \frac{\sigma}{\mathrm{E}}.p_1 = \frac{\mathrm{P}r}{\mathrm{E}t}(\tfrac{1}{2} - \sigma).$$

மெல்லிய முட்டையுரு உருளை.—முட்டையுரு வெட்டுடைய மெல்லிய உருளைகளிடத்து, அதன எல்லைககோடு வழியே வளையத் தகைப்பானது புள்ளிகள்தோறும் மாறும் ; மேலும் முட்டையுரு வெட்டானது வட்ட வடிவததைக் கொள்ள முயல்கிறது. எனவே படம 7·31 இல் காட்டியுள்ள நீளவளையவுருளையொனறின குறுக்கு வெட்டைக் கருதுவோமாயின் B, D போன்ற இழிவு வளைவு உடைய புள்ளிகளின் அண்டையில் வளைவு கூடுமாறு கூனல் திருப்பம் தொழிறபடும் ; A யிலும் C யிலும் வளைவு ஓர் உயர்வாகும் ; எனவே அங்கு வளைவு சுருங்குமாறு கூனல் திருப் பங்கள் தொழிற்படும். A யில் அல்லது C யிலுள்ள வளையத் தகைப்பை முந்திய பந்திகளிற் செய்ததுபோல் இங்கும் கணித்துக் கொள்ளலாம் ;

அது



படம் 7·31. மெல்லிய முட்டையுரு உருளையினுள் தகைப்புக்கள்.

$$(p_1)_A = \frac{P.OA}{t}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

B யில் அல்லது D யில் வளையத் தகைப்பு $P.OB \div t$ ஆகும்.

அதுபோலவே நெட்டாங்குத் தகைப்பு

$$p_2 = \frac{P \times \text{குழாயின் உள்வெட்டுப்பரப்பு}}{t \times \text{குழாயின சுற்றளவு}}.$$

இந்தியா றப்பருக்குப் பொய்சோனின் விகிதத்தைப் பரிசோதனை முறைப்படி துணிதல்.—படம் 7·32 (a) யில், AB ஆனது நீளம கிட்டத்தட்ட ஒரு மீற்றரும், விட்டம் 2சமீ. உம், மெல்லிய சுவரும் கொண்ட இந்தியா றபபாக் குழாய்த் துணடொனறுகுக. மூடபபட்டிருககினற அதன கீழ் நுனியானது கொளுககியொனறைக் கொணடுளளது ; அககொளுக்கியிலிருந்து வெவவேறு சுமைகளைத் தொங்கவிடலாம். மேல்முனை A ஆனது மயிர்த்துளைக்குழாய் C ஐக் காவும் றபபர் அடைப்பானொனறால் மூடப்பட்டிருக்கிறது. றப்பர்க் குழாயும் C யின ஒரு பகுதியும் வளி அகற்றிய நீரால் நிரபபப்பட்டிருக்கிறது ; விறைபபான தாஙொன்றுல ஆய்கருவி தாங்கப் பட்டிருக்கிறது. றபபர்க் குழாய்மீது சுமையேற்றப்பட்டால் அது ஈர்ககப் படும் ; அதே நேரம் அதன உட்கனவளவு கூடி, C யில் பிறையுரு இறங்கும். பிறையுருவின் இறக்கத்திலிருந்து உட்கனவளவு மாற்றம் அறியப் படுகிறது ; மேலும் குழாய் AB யின் நீட்சி அளக்கப்படின் இந்தியா றப்பருக்குப் பொய்சோனின விகிதத்தின் பெறுமானத்தைக் காணலாம்.

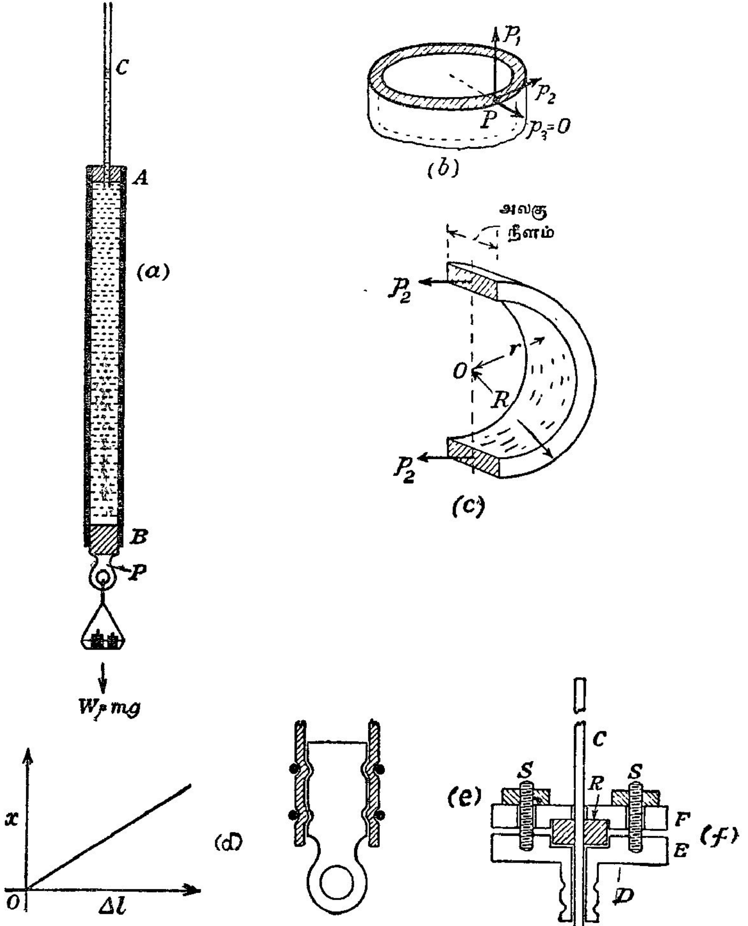
றப்பர்க் குழாயின் உட்கனவளவு v யும், நீளம் l உம், அதன் குறுக்கு வெட்டு உள்ளாரை r உம் ஆகுக. திணிவு m ஆற சுமையேற்றிய பின்னர் l உம் r உம் முறையே $l+\Delta l$ உம் $r+\Delta r$ உம் ஆகுக. அதே நேரம் உட்கனவளவு v எனபது $v+\Delta v$ ஆகுக.

$$v = \pi r^2 l \text{ ஆதலின் } \Delta v = \pi r^2 \Delta l + 2\pi r l \Delta r \text{ ஆகும்.}$$

பொய்சோனின் விகிதம் σ வுடன் இம்மாற்றங்களைத் தொடர்புபடுத்தும் பொருட்டுக் குழாய்ச் சுவர்களுள் இருக்கின்ற புள்ளி P யில் தாக்குகின்ற மூன்று தலைமைத் தகைப்புக்களைக் கருதுவோம். படம் 7·32 (b) யில் காட்டியுள்ளவாறு அவை p_1, p_2, p_3 ஆகும் ; p_1 ஆனது அச்சுத தகைப்பு; p_2 பரிதித் தகைப்பு, p_3 ஆரைத் தகைப்பு ; குழாய்ச் சுவர்கள் மெல்லியவை ஆதலின், கடைசித் தகைப்பைப் பூச்சியம் எனக் கொள்ளலாம். இனி

$$p_1 = \frac{mg}{\pi(R^2 - r^2)};$$

இங்கு R என்பது குழாயின் குறுக்குவெட்டின் வெளியாரை ஆகும். p_2 ஐக் காணும்பொருட்டுக் குழாயில் அலகு நீளமொன்றைக் கருதுக. அது இரு சமநெடட்டாஙகான கூறுகளாகப பிரிககப்படுக; அவறறுள்



படம் 7.32. இந்தியா றப்பருக்குப் பொய்சோனின் விகிதத்தைப் பரிசோதனை முறைப்படி துணிதல்.

ஒன்று படம் 7.32(c) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இவ்வெட்டின் தட்டையான செவ்வக நுனிகள் மீது குழாயின் அப்புறபபடுத்தப்பட்ட பாகத்தாலாகும்

விசைகளின் தொகை

$$2p_2[1 \times (R-r)]$$

ஆகும். குழாயுள் எங்கும் அமுக்கமானது வளிமண்டலவமுக்கம் எனின், வளைபரப்புக்கள் மீதுள்ள விளையுள விசை பூசசியமாகும் ; எனவே மேறபடி விசையும் பூச்சியம் ஆதலவேண்டும். இது குழாயிலுள்ள நீரால ஆகினற அமுக்கத்தின் புறக்கணிப்பை ஒத்திருக்கிறது. எனவே

$$p_2 = 0.$$

ϵ_1 ஆனது அச்சு அல்லது நெட்டாங்கு விகாரமும், E ஆனது இந்தியா றப்பரினது யங்கின் மட்டும் எனின,

$$\epsilon_1 = \frac{p_1}{E} - \frac{\sigma}{E}p_2 = \frac{p_1}{E}, \qquad [\because\ p_2 = 0]$$

ப. 354 இற் காண்க ; ஆனால் இது $\frac{\Delta l}{l}$ ஆகும்; எனவே E இற்குப் பெறுமானம் காணமுடியும்.

இனி $$\epsilon_2 = \frac{p_2}{E} - \frac{\sigma}{E}p_1 = -\frac{\sigma}{E}p_1 = -\sigma\epsilon_1.$$

ஆனால் $$\epsilon_2 = \frac{2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r}.$$

எனவே $$\sigma = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = -\frac{\Delta r}{r} \div \frac{\Delta l}{l}.$$

ஆனால் $$\frac{\Delta v}{\Delta l} = \pi r^2 + 2\pi r l\frac{\Delta r}{\Delta l}.$$

இதிலிருந்து $$\sigma = -\frac{l}{r}\left(\frac{\Delta v}{\Delta l} - \pi r^2\right)\frac{1}{2\pi r l} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\pi r^2}.\frac{\Delta v}{\Delta l}\right].$$

மயிர்த்துளைக் குழாயின் ஆரை a எனின்,

$$\Delta v = \pi a^2.\ \Delta x\ ;$$

இங்கு நீர்மட்ட இறக்கமானது v யின் ஏற்றத்தை ஒத்திருக்கிறபடியால், C யில் பிறையுருவினது மட்டத்தின் இறக்கம் Δx ஆகும்.

$$\therefore\quad \sigma = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{a^2}{r^2}.\frac{\Delta x}{\Delta l}\right].$$

எனவே ஒரு தொகையான சுமைகளைப் பயன்படுத்தி Δx, Δl என்பவற்றின், அதற்கு ஒதத பெறுமானத் தொடர்களைக் குறித்தால், அவ்வாறு கிடைத்த நேர்கோட்டின் சரிவைப் பயனபடுததி σ வின் பெறுமானத்தைக் காணமுடிகின்றது, படம் 7·32 (d).

நகரும் நுணுக்குக்காட்டியொன்றைப் பயன்படுத்தியே x, l என்பவற்றின் மாற்றஙகளை அளத்தல் வேண்டும ; செருகியில, P என்னும் இடத்தில், பொருததப்பட்டுள்ள ஊசி P ஐப் பயன்படுத்தி Δl ஐ அளக்கலாம்.

றப்பர்க குழாய்க்கும் ஆய்கருவியின எஞ்சிய பகுதிக்குமிடையேயுள்ள மூட்டுக்களில் பொசிவுகள் தோனருதவாறு கீழ்வரும் உபகரணங்கள் பயனபடுகின்றன. அதன வளைபரபடைபச் சுற்றி இரு தவாளிகள் உடையதும் அதன் கீழ் முனையிற் பித்தளை வளையமொனறு இணைக்கப்பட்டதுமான திண்மப் பித்தளைத துணடொனருல் முனை B அடைக்கப்பட்டுளளது ; வளையத்திலிருந்து தெரிந்த சுமையொனறைத் தொஙகவிடலாம். அடைப் பானை றபபர்க் குழாயின் கீழ் நுனியுட் செலுத்தி, அது இரும்புக் கம்பியால் உறுதிப்படுததப்பட்டிருக்கிறது, படம் 7·32 (e) ஐக் காண்க.

பயனபடுத்தப்படும் திரவம் நீர் ஆதலின், அதனுள் பிறையுரு சுயாதீன மாக இயஙகும் பொருட்டு மயிர்த்துளைக் குழாயானது துப்புரவாய் இருத்தல் வேண்டும். இதை எளிதிற செய்வதறகும அதே நேரம் பொசிவில்லா மூட்டொன்றைப் பெறுவதற்கும், பித்தளைத் தட்டு E உடன் திண்மப் பிததளைச் செருகி D பறருசு பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது, படம் 7·32 (f). தடடில் இரு திருகுகள் S உள ; இரண்டாவது பித்தளைத் தட்டொன்றூடே இத்திருகுகள செல்லுகின்றன. ஓர் உருளை வடிவான றப்பர்ச் செரு கியின அரைவாசியைக் கிட்டததட்டக கொளளுமாறு E யும் F உம் உட் குழிவாக்கப்பட்டிருககின்றன ; செருகி ஊடே கண்ணுடிக் குழாய் செல்லு கினறது ; கணணுடிக் குழாய் C இறகு இடஙகொடுககு முகமாகத் தட்டுக் களும் செருகியும் அமைந்திருககும பொழுது துளைக்கப்படுகின்றன. F அசையாதவாறு S இலுளள சுரைகள் அதைப் பிடிததிருக்கினறன ; மேலும அவை, மூட்டுப பொசியாதவாறு தட்டுக்கள றபபாச் செருகியை இறுககிப் பிடிப்பதறகும் உதவுகினறன. துப்புரவாக்கல் முதலியவற்றிற்கு முழு ஆய்கருவியும எளிதில் கழறறபபடுகிறது.

விகாரச் சக்தி.—மீள்தன்மைய பொருளொன்றை விகாரப்படுத்துகின்ற விசைகளின் திசையில அப்பொருள் இளகுகிறது ஆதலின், அப்பொருளை விகாரபபடுததுஙகாலே அவவிசைகள வேலை செய்கின்றன எனபது தெளிவு. பொருளின் மூலகமொவ்வொனறினமீதுஞ் செய்யப்பட்ட வேலை யைக் காணும்பொருட்டு அவ்வொவவொரு மூலகததையும் அதன் பரப்பு மீது தாக்குகினற விசைகளால தாககபபடும் தனிதத பொருளொன்று எனக கருதலாம். உளளே இருககின்ற மூலகமொனறினிடத்து, அதன் பரப்பில் தாங்குகின்ற விசைகள உளதகைபபுக்களிலிருநது உறபத்தியா கினறவையே ; ஆனல பொருளின பரபபிலுளள மூலகமொன்றிற்கு விகாரப்படுததும் விசைகள், பொருளில் அதறகு அடுததுள்ளதாய் இருக் கின்ற பாகஙகளின தாககம், அதன வெளியெலலைமீது பிரயோகிக்கபபடு கின்ற விசைகளின் தாக்கம் என்பவற்றல் ஆகினறன. பொருளின் எல்லா மூலகஙகள் மீதுஞ் செய்யபபடுகின்ற முழு வேலையும் அப்பொருளை விகாரப்

படுத்துமிடத்துச் செய்யப்படும் வேலை ஆகும். உள்விசைகள் சமனெதிர் ஆன உறுப்புக்களைக் கொண்ட சோடிகளாலேயே அமைக்கப்பட்டிருக்கிறபடியால் இவ்வாறு கணிக்கப்படுகின்ற முழு வேலையானது புற விசைகளாற் செய்யப் பட்ட வேலைக்குச் சமன்.

விகாரப்பட்ட பொருள் ஒன்றை விகாரப்படாத நிலைக்குத் திரும்பவும் மந்த மாக மீளுமாறு விட்டால், அப்பொருளானது பூரண மீள்தன்மை உடையதா யின், அதை விகாரப்படுத்தும் பொருள்கள் மீது விகாரம் கூடும்பொழுது இருந்த அதே விசைகளை அது இப்பொழுதும் பிரயோகிக்கும். எனவே விகாரப்பட்ட பொருளானது அதன் இயல்பான நிலையை மீளும்பொழுது செய்யும் வேலை அதை விகாரப்படுத்துவதற்கு புறப்பொருள்கள் செய்த வேலைக்குச் சமன். பூரண மீள்தன்மையுடைய பொருளொன்றுமீது செய்த வேலை முழுவதையும் அப்பொருள் திருப்பித் தரக்கூடும் என இக்கருத் துக்களிலிருந்து தெளிவாகிறது ; எனவே, இத்தகைய பொருளொன்றின் மீது செய்யப்பட்ட வேலையானது அதனுள் சக்தியாகச் சேமிக்கப்பட்டிருக் கின்றது எனக் கருதுதல் வசதியானது ; இது **மீள்தன்மைச் சக்தி** அல்லது **விகாரச் சக்தி** எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

ஈர்க்கப்பட்ட கம்பியொன்றில் விகாரச்சக்தி.—நுனியொன்றில் நிலையாக் கப்பட்ட கம்பியொன்று சீராக அதிகரிக்கின்ற விசை F இனால் ஈர்க்கப்படு கின்றது எனக் கருதுவோம். [உண்மையில் ஒவ்வொரு நுனியிலும் விசையொனறு என்றவாறு, கம்பி இரு எதிரான விசைகளால் தாக்கப்படு கிறது ; ஆனால் நுனியொன்று நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்ளப் படுகிறபடியால் ஒரு விசை மட்டுமே வேலை செய்கிறது.] l கம்பியின் இயல்பான நீளத்தையும், S அதன் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவையும் குறிக்க. விகாரம் ϵ உம் நீட்சித் தகைப்பு p யும் ஆகுக. அப்பொழுது மீள்தன்மை எல்லையை விஞ்சாத கம்பியின் நீட்சி $l\epsilon$ உம், கம்பியின் இந்நீட்சி $\delta(l\epsilon)$ ஆல் கூடும்பொழுது செய்யப்படும் வேலை

$$\delta W = (pS)\,\delta(l\epsilon) = pSl(\delta\epsilon).$$

∴ விகாரத்தை 0 இலிருந்து ϵ_0 வரை கூட்டிய பொழுது செய்யப்பட்ட முழு வேலையும்

$$W = \int_0^{\epsilon_0} pSl\,d\epsilon = SlE\int_0^{\epsilon_0} \epsilon\,d\epsilon \qquad \left[\because\ E = \frac{p}{\epsilon}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}SlE\epsilon_0^2.$$

பிரயோகிக்கப்பட்ட உயர்வுவிசை F_0 எனின்,

$$E = \frac{F_0}{S} \div \epsilon_0.$$

$$\therefore\quad W = \tfrac{1}{2}F_0 \times (l\epsilon_0)$$

$$= \tfrac{1}{2}F_0 \times \text{கம்பியின் நீட்சி}.$$

எனவே கம்பியின் அலகுக் கனவளவொன்றிற்கான விகாரச்சக்தி

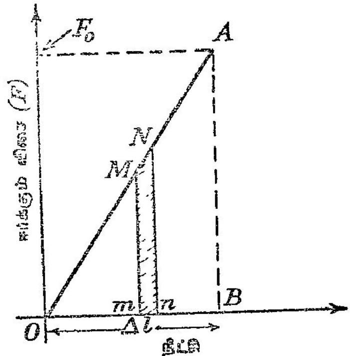
$$[\tfrac{1}{2}F_0 \times l\epsilon_0] \div Sl = \tfrac{1}{2}p_0\epsilon_0,$$

இங்கு p_0 என்பது உயரிழுவைத் தகைப்பாகும்.

மேற்படி தொடர்பை முறைமை சற்றுக் குறைந்த வழியொன்றால் கீழ் வருமாறு பெறமுடியும். படம் 7·33 இல், நேர்கோடு OA ஆனது, ஈர்க்கும் விசை F, கம்பியின் நீட்சி என்பவற்றிறகிடையேயுள்ள தொடர்பை எடுத்துக்காட்டுகிறது எனக்கொள்க; OA நேர்கோடாதலால் பூரணமீள் தன்மையெல்லையானது மீறப்பட்டிருக்க முடியாது. நீட்சி அதிகரிக்குங்காலே அது m இலிருந்து n வரை என்க, கம்பி அடைந்துள்ள நிலைச் சக்தி நயம் $Mm.mn$ ஆகும்; எனவே புள்ளி A யால் எடுத்துக் காட்டப்படும் நிலையை அடைந்த பொழுது கம்பியில் விகாரச்சக்தி

$$\tfrac{1}{2}OB.BA = \tfrac{1}{2}\Delta l.F_0$$

ஆகும்; இங்கு Δl என்பது, நீட்சி OB யும், F_0 அதற்கு ஒத்த விசையும் ஆகும்.



படம் 7·33. ஈர்க்கப்பட்ட கம்பியொன்றில் விகாரச்சக்தி.

கம்பியின் தொடக்க நீளம் l உம், அதன் குறுக்குவெட்டாரை r உம் எனின், அலகுக் கனவளவொன்றிற்குரிய விகாரச்சக்தி

$$\frac{\tfrac{1}{2}\Delta l.F_0}{\pi r^2.l} = \tfrac{1}{2}\ (\text{தகைப்பு} \times \text{விகாரம்})\ ;$$

இங்கு தகைப்பும் விகாரமும் புள்ளி A யிற்குப் பொருத்தமான பெறுமானங்களாகும்.

மாறுகின்ற இழுவைக்குக் கீழ்ப்பட்ட கோலொன்றில் விகாரச்சக்தி.— அடுத்து நீளம் l, குறுக்குவெட்டுப்பரபபு S கொண்டதும், படம் 7·34 இல் காட்டியுள்ளவாறு அதன் சொந்த நிறைக்குக் கீழ்ப்பட்டுத் தொங்குகின்றதுமான சீரான ஒரு கோலுடன தொடர்புளள விகாரச் சக்தியைக் கருதுவோம். தன் முழு நீளம் வழியே மாறுத் தகைப்பொன்றால் தாக்கப்பட்ட கம்பியொனறினிடத்தே விகாரச்சக்தியின் அடர்த்திக்கு $\tfrac{1}{2}p_0\epsilon_0$ என்னும் கோவை பெறப்பட்டுள்ளது. நாம் கருதும் எடுத்துக்காட்டில் இருப்பது போல, தகைப்பு மாறுகினறபோது, கோலைப் பிரித்துக் கிடைக்கின்ற மூலக மொவ்வொன்றினிடத்தும் மேற்படி கோவையானது இன்னும் சரியானது.

எனவே கோலில் நீளம் δx உடைய மூலகத்திற்கு

$$\delta W = \tfrac{1}{2}(p\epsilon)S\,\delta x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{p^2 S}{E}.\delta x \qquad \left[\because\ E = \frac{p}{\epsilon}\right].$$

படம் 7·34. மாறுகின்ற இழுவைக்குக் கீழ்ப்பட்ட கோலொன்றில் விகாரச் சக்தி.

ஆனால் p ஆனது கோலிற் கருதப்படும் மூலகத்திற்குக் கீழேயுள்ள பாகத்தின் நிறையால் ஆகிறது. எனவே ρ கோலினது திரவியத்தின் அடர்த்தியும், g புவியீர்ப்புச் செறிவும் ஆயின்

$$p = \frac{(xS\rho)}{S}g = x\rho g.$$

$$\therefore\ \delta W = \tfrac{1}{2}x^2\rho^2 g^2.\frac{S}{E}.\delta x.$$

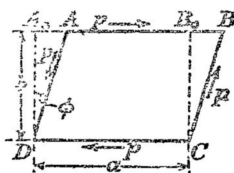
$$\therefore\ W = \tfrac{1}{2}\int_0^l x^2\rho^2 g^2\frac{S}{E}dx = \frac{1}{6}\frac{S}{E}.\rho^2 g^2 l^3.$$

தூய கொய்வு விகாரமொன்றுடன் தொடர்புள்ள விகாரச்சக்தி.—சமவியல்புடையதும் ஓரினமானதுமான சடத்தாலான, இயல்பாகச் செவ்வக வடிவமுடைய, கட்டையொன்று வரிப்படத் தளத்துக்குச் செங்குத்தான அதன் முகங்கள் மீது தாக்குகின்ற கொய்தகைப்புக்களால் தாக்கப்படுக. தொகுதி படம் 7·35 இற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. CD யை அடையாளமாகக் கொண்ட முகம் நிலையாக்கப்பட்டிருக்க ; மேல் முகம் A_0B_0 ஆல் வரையறுக்கப்பட்ட நிலையிலிருந்து AB யிற்கு இயங்குக ; ϕ கொய்வு விகாரம் ஆகும்.

AB ஐச் சுவடாகக் கொண்ட முகத்தின் பரப்பளவு S எனின், மேறபடி பெயர்ச்சியை யிட்டுச் செய்யப்பட்ட வேலையானது

$$\tfrac{1}{2}(pS)A_0A = \tfrac{1}{2}pS(b\phi). \quad [b = A_0D \text{ எனின்.}]$$

ஆனால் n ஆனது கட்டையினது திரவியத்தின் விறைப்புக் குணகம் எனின $p = n\phi$ ஆகும்.

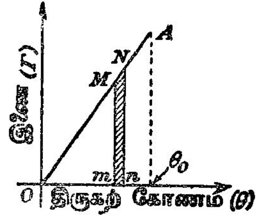


படம் 7·35. தூய கொய்வு விகாரமொன்றுடன் தொடர்புள்ள விகாரச்சக்தி.

$$\therefore\ \text{செய்யப்பட்ட வேலை} = \tfrac{1}{2}pS.\,b.\frac{p}{n}.$$

$$\therefore\ \text{அலகுக் கனவளவொன்றிற்குச் சேமித்துள்ள சக்தி} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{n} = \tfrac{1}{2}p\phi.$$

திருகிய கம்பியொன்றில் விகாரச்சக்தி.—அடுத்து அதன் முனையொன்று நிலையாக்கப்பட்டதும் மறுமுனை அங்கு பிரயோகிக்கப்படும் இணை Γ வினால் திருகியுள்ளதுமான கம்பியொன்றைக் கருதுக. கம்பியினது திரவியத்தின் பூரண மீள்தன்மையெல்லையானது மீறப்படாமல் இருக்கும்வரை Γ, கம்பியின் அசையக்கூடிய நுனியின் திருகற்கோணம் θ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு ஒருபடியானது ; இத்தொடர்பானது வரைபு முறைப்படிப் படம் 7·36 இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இணையானது Γ விலிருந்து $\Gamma+\delta\Gamma$ விற்கு உயர்த்தப்பட்டு அதனால் திருகற்கோணம் $\delta\theta$ உயாவதால மாதிரிமீது செய்யப்படும் வேலை $\Gamma\delta\theta$ ஆகும் ; இங்கு Γ எனபது இணையின் சராசரிப் பெறுமானம் ஆகும். இச்சக்தியானது கம்பியின விகாரச் சக்தியை அதிகரிக்கச் செய்கிறது. அது வரிப்படத்தில் MNnm என்னும் மூலகப பரப்பளவால் எடுத்துக் காட்டப்படுகிறது. எனவே நேர்கோடு OA யிறகுக் கீழேயுள்ள பரப்பளவு



படம் 7·36. திருகிய கம்பியொன்றில் விகாரச்சக்தி.

மாதிரி விகாரப்பட்டதால் இதிற் சேமித்திருக்கும் சக்தியை எடுத்துக்காட்டுகிறது. இணை அதனது உயாவுப் பெறுமானத்தை அடைந்தபொழுது திருகற்கோணம் θ_0 ஆய் இருந்தால், மீள்தன்மையெல்லையை மீறாதவிடத்து மாதிரியின் விகாரச்சக்தி

$$W=\int_0^{\theta_0}\Gamma d\theta.$$

ஆனால் கம்பியில் திருகல் θ வாக இருந்தால்,

$$\Gamma=\frac{\pi n\theta}{2l}.a^4. \qquad \text{[ப. 326 இற் காண்க]}$$

எனவே
$$W=\frac{\frac{1}{4}\pi n\theta_0^{\,2}}{l}.a^4=\tfrac{1}{2}\Gamma_0\theta_0=\frac{\Gamma_0^{\,2}l}{\pi na^4};$$

இங்கு Γ_0 என்பது கம்பிமீது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற உயர்வுப் புற இணை ஆகும்.

திருகிய கம்பியொன்றிலுள்ள விகாரச்சக்திக்குப் பிறிதொரு கோவையைப் பெறும் பொருட்டு, அலகுக் கனவளவொன்றுக்கு விகாரச்சக்தி

$$\tfrac{1}{2}p\phi=\frac{1}{2}\frac{p^2}{n}$$

ஆகும் என்னுஞ் செய்தியைப் பயன்படுத்தலாம் ; இங்கு குறியீடுகள் அவற்றின் வழக்கமான அர்த்தங்களை உடையன. இனி, கம்பியிலே ஆரைகள் r, $r+\delta r$ என்பவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட உருளைத்துண்டொன்றி

லுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் தகைப்பு மாறுதிருக்கும். ப. 329 ஐப் பார்க்க ; அதன் பெறுமானம்

$$\frac{r}{a}p_0$$

ஆகும்; இங்கு p_0 என்பது கம்பியிலுள்ள உயர்வுத் தகைப்பு ஆகும் கருதப்படுகின்ற மூலக உருளையின் கனவளவு $2\pi rl.\delta r$ ஆதலின், அதனுடன் தொடர்புள்ள சகதி

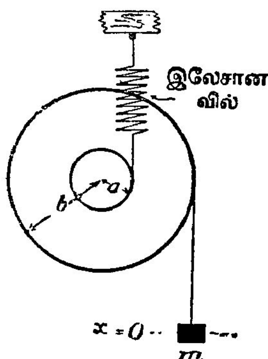
$$\delta W = \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{a^2}\cdot p_0^2\cdot\frac{1}{n}\cdot 2\pi rl.\,\delta r$$

$$= \frac{\pi l p_0^2}{na^2}\cdot r^3\,\delta r.$$

$$\therefore\ W = \frac{\pi l p_0^2}{na^2}\int_0^a r^3\,dr = \frac{\pi a^2 l}{4n}\cdot p_0^2\,;$$

இது எல்லா மூலகங்களும் உயர்வுப் பெறுமானம் p_0 வரை தகைப்புற்றிருக்குமிடத்துக் கம்பியிற் சேமிக்கப்பட்டிருக்க வேண்டிய சகதியின் அரைவாசி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு.—திணிவு m ஆனது கிடையான "சில்லுமச்சாணியு" மொன்றின் விளிம்பில் சுற்றியுள்ள, இலேசான, ஈாக்கமுடியாத நாண் ஒன்றால் தாங்கப்பட்டிருக்கிறது. அச்சாணிமீது சுற்றியுள்ள நாண் ஒன்றால் தொகுதி சமநிலையில் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது ; இந்நாணின் நுனியொன்று இலேசான சுரி வில்லொன்றின் கீழ் நுனியுடன் கட்டப்பட்டிருக்கிறது; வில்லின் மேன்முனை, படம் 7·37 இல் காட்டியுள்ளவாறு, நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது. அச்சாணியின் ஆரை a யும், சில்லின் ஆரை b யும், அதன் சுழற்சியச்சுப் பற்றிச் சில்லின் சடத்துவத் திருப்பம் I யும் எனின், தொகுதியின் சிற்றலைவுகளுக்கான காலத்தைக் காண்க.



படம் 7·47. இலேசான சுரி வில்லொன்றால் சமநிலையில் நிலைநிறுத்தியுள்ள சுமையேற்றிய சில்லுமச்சாணியும்.

நிலையியற் சமநிலையில் தொகுதி இருக்கும்பொழுது வில்லின் நீட்சி z ஆகுக; வில்லில் ஈர்க்கும் விசைக்கும் வில்லின் நீட்சிக்குமிடையேயுள்ள விகிதசமவியல்பு மாறிலி k ஆகுக. விசை kz ஆதலின், சமநிலையையிட்டு

$$mgb = kza$$

என இருத்தல் வேண்டும்; இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவு ஆகும். வில்லினகண் சேமிக்கப்பட்டுள்ள சக்தி

$$\tfrac{1}{2}\,(kz)\,z = \tfrac{1}{2}kz^2\ ;$$

இந்நிலையில் திணிவு m இருக்கும்பொழுது அதன் நிலைச்சகதி பூச்சியம் எனக் கருதப்படின், இதுவே தொகுதியின் நிலைச்சகதி.

அடுத்து நிலைக்குத்தான நேர்கோடொன்று வழியே m இயங்குமாறு தொகுதி குழப்பப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்க. அது தூரம் x ஏறியதும் வில்லின் நீட்சி $\left(\frac{a}{b}\right)x$ குறைந்து

விடும் ; எனவே தொகுதியின முழுச் சக்தியும்

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{b}\right)^2+\tfrac{1}{2}k\,(z-\frac{a}{b}x)^2+mgx\,;$$

இது m ஐ இயக்கிவைககுமுன் வில்லிற் சேமிக்கப்பட்டிருந்த சக்தி $\frac{1}{2}kz^2$ இற்குச் சமன் ஆதல வேணடும். எனவே

$$\tfrac{1}{2}\dot{x}^2\left\{m+\frac{I}{b^2}\right\}+x\left\{mg-\frac{a}{b}.kz\right\}+\tfrac{1}{2}x^2k\left(\frac{a}{b}\right)^2=0.$$

இக்கோவையில் இரண்டாவது அடைப்புக்களிலுள்ள உறுப்பு பூச்சியம் ஆதலின், இயக்கம் எளிய இசையானது என்பது தெளிவு ; அதன் ஆவாத்தன காலம்

$$T=2\pi\sqrt{\left(m+\frac{I}{b^2}\right)\div k\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$=2\pi\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1}{k}\left(m+\frac{I}{b^2}\right)}.$$

அதைப்புச் சக்தியும் அதிர்ச்சியும்.—பேச்சு முறையில் பிரயோகிக்கப்படும் விசைகள் நீக்கப்பட்டதும் அவற்ருல் விகாரப்பட்ட பொருளின் மீளுந்திறன் **அதைப்புச் சக்தி** என்னுஞ் சொல்லால் உணர்த்தப்படுகிறது ; தொழினுட்ப நூல்களில் மீள்தன்மையெல்லே மீறப்படாமல் இருக்குமிடத்து, பொருளொன்றை விகாரப்படுத்தும்பொழுது செய்யப்படும் வேலே அதைப்புச் சக்தி எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

எனவே நீளம் l கொண்ட சீரான கோலொன்றைக் கருதுக ; ஒரு சோடி ஈர்க்கும் விசைகள் F ஆல் அது தாக்கப்படுமிடத்து நீட்சி Δl உம் கோலுட் தகைப்பு p யும் ஆகுக. கோலினது திரவியத்தின் யங்கின் மட்டு E எனின்,

$$E=p\div\left(\frac{\Delta l}{l}\right)=\frac{F}{S}\cdot\frac{l}{\Delta l};$$

இங்கு S கோலின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பு. விகாரச்சக்தி U அல்லது மேற்படி நீட்சியை ஆக்குமிடத்துச் செய்யப்பட்ட வேலே

$$U=\tfrac{1}{2}\ (\text{தகைப்பு}\times\text{விகாரம்})\times\text{கனவளவு}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(p.\frac{p}{E}\right)\times\text{கனவளவு}$$

$$=\tfrac{1}{2}\ (\text{தகைப்பு})^2\times\text{கனவளவு}\div\text{யங்கின் மட்டு}.$$

எனவே அலகுக் கனவளவொன்றிற்கான அதைப்புச் சக்தி $\frac{1}{2}\frac{p^2}{E}$.

மீள்தன்மைப் பொருளொன்றின் அதைப்புச் சக்தியானது மோதுகை அல்லது பொறிமுறை அதிர்ச்சியொன்றின்போது, நிலேயான அமைப்பொன்றைப் பெருது அதை அதிர்ப்பதற்கு அப்பொருள் கொண்டிருக்கும் ஆற்றலேக் குறிக்கிறது.

சோதனை அதைப்புச்சக்தி.—அதை நிலையாய் விகாரப்படுத்தாமல், சடத் துண்டொனறின் அலகுக் கனவளவொன்றில் மிகப்பெருமளவில் சேமிக்கக் கூடிய சக்தியானது அச்சடத்தின் **சோதனையதைப்புச்சக்தி** எனப்படும். எனவே கம்பி வடிவமுடைய சடமொனறிற்கு மீள்தன்மையெல்லை p_0 எனின் அதனது சோதனையதைப்புச்சக்தி $\frac{1}{2}\cdot\frac{{p_0}^2}{E}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு.—நீளம் l உம் சராசரி ஆரை r உம உடைய, சீரான கோலொன்று படம் 7·28 இல் காட்டியுள்ளவாறு, நிலைகுத்தாகத் தொஙகவிடப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொளக. திணிவு m கொணட விழும சுமையொனறை ஏறறுக்கொள்ளும பொருட்டு அதன கீழ் நுனியில படடையொனறு அளிககபபடுக. வளையம R ஆல திணிவு எடுததுககாட்டப் பட்டிருககிறது. படடைமீது மோதுமுன வளையம, உயரம் h இனூடாக விழுகினறது எனவும் இம்மோதுகையாற கோல நீட்சி x ஐப பெறுகிறது எனவும் கொள்க.

விழும் வளையததின் நிலைச் சகதி நடடம், அதாவது $mg\,(h+x)$ எனபது, கோலின் ஈர்ப்பில செலவாகிறது. உயர்நீட்சியினபோது கோலிலுள்ள தகைபபானது p_0 எனின் மீள்தருவிசை $p_0\,(\pi r^2)$ ஆகும ; எனவே கோலை ஈாததலினுற் செயயபபடுகினற வேலை $\frac{1}{2}(p_0\pi r^2)\,x$ ஆகும. எனவே

$$mg\,(h+x)=\tfrac{1}{2}p_0\pi r^2 x.$$

ஆனல்

$$x=\frac{p_0^2 l}{E}.$$

$$\therefore\quad 2mg\left(h+\frac{p_0 l}{E}\right)=\frac{\pi r^2 p_0{}^2 l}{E}.$$

$$\therefore\quad p_0=\frac{2mg.\dfrac{l}{E}\pm\sqrt{4m^2g^2.\dfrac{l^2}{E^2}+8\dfrac{\pi r^2 l}{E}.\,mgh}}{\dfrac{2\pi r^2 l}{E}}$$

$$=\frac{mg}{\pi r^2}\pm\frac{\sqrt{m^2g^2l^2+2\pi r^2 l.\,mgh.\,E}}{\pi r^2 l}.$$

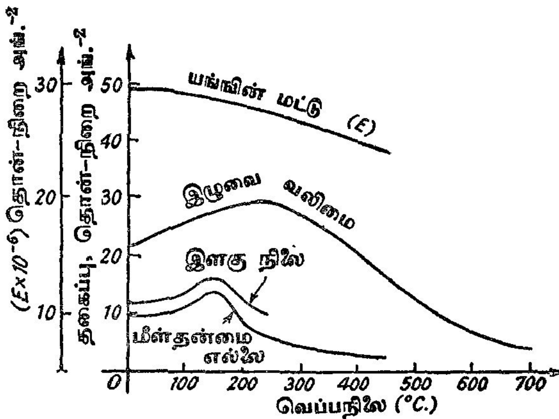
படம் 7·38.

$h\to 0$ எனின் $p_0\to\frac{mg}{\pi r^2}\pm\frac{mg}{\pi r^2}$, அதாவது $\frac{2mg}{\pi r^2}$ அலலது பூச்சியம்.

பூச்சியமான பெறுமானத்திற்குப் பௌதிகவியலில அர்த்தமில்லை. கோலொன்று திடீரென ஈர்ககப்படுமாறு சுமை பிரயோகிககப்படின், அப்பொழுது கோலின் உயாவு நீட்சிககுரிய தகைப்பு படிப்படியாகச் சுமையேற்றியவிடத்துத தகைபபின இருமடங்காகும் என மற்றைத் தீர்வு உணர்த்துகிறது.

இரும்பின் மீள்தன்மையியல்புகளில் வெப்பநிலையாலாகும் விளைவுகள்.—வெப்பநிலையுடன் (கிட்டத்தட்டத் தூய) இரும்பின் மீள்தன்மை இயல்புகள் மாறும் வகை படம் 7·39 இல் வளையிகளால் எடுத்துக்காட்டப்பட்டிருக் கின்றது. யங்கின மட்டானது வெப்பநிலை கூடும்பொழுது கிட்டத்தட்டச் சீராகக் குறைகிறது ; ஆனல் இழுவை வலு 250° ச. இல் கிட்டத்தட்ட 33 தொன். நிறை. அங் $^{-2}$. பெறுமானமுடைய உயர்வு ஒன்றைக் காட்டு கிறது. மீள்தன்மையெல்லை, இளகுநிலை என்பவற்றிற்கான வளையிகள்

ஒவ்வொன்றும் கிட்டத்தட்ட 150° ச. இல் உயர்வைக் காட்டுகின்றன ; ஆனால் உயர்வுகளைக் குறித்து வளையிகள் சமச்சீரானவையன்று.



படம் 7·39. (கிட்டத்தட்டத் தூய) இரும்பின் மீள்தன்மை இயல்புகளில் வெப்பநிலையாலாகும் விளைவுகள்.

அழுத்தமான கோளங்களின் மொத்தல் : நியூற்றனின் பரிசோதனை முறை விதி.—இரு கோளங்கள் நேராகச் சாடும்பொழுது, அதாவது இயக்கத்திசை மொததற் புள்ளியிலுள்ள பொதுச் செவ்வன் வழியே அமைந்திருக்கும் பொழுது, மொத்தல் நிகழ்ந்தவுடனே கோளங்கள் அவற்றின் மைய விணைக்கோடு வழியே கொண்டிருக்கின்ற தொடர்பு வேகமானது மொத்த லுககு முன் இருந்த தொடர்பு வேகத்தின் $-e$ மடங்கு எனப் பரிசோதனை முறைப்படி நியூற்றன் கண்டுபிடிததார் ; இங்கு e கோளங்களினது திரவியங்களின் இயல்பைப் பொறுததுள்ள மாறிலியொன்றுகும். உருக்கு, தந்தம் போன்ற வன் திரவியங்களுக்கு e கிட்டத்தட்ட 1 ஆகும் ; ஆனால் ஈயம் போன்ற மென் திரவியங்களினிடத்து அது சிறிதாம்.

கோளங்கள் சரிவாகச் சாடுமாயின், அம்மொத்தலின் கணத்தில் அவற் றின் பொதுச் செவ்வன வழியே, மொத்தலுக்குப்பின் இருக்கின்ற அவற் றின் தொடர்பு வேகக் கூறுனது மொத்தலுக்குமுன் அதே திசையிலி ருந்த தொடர்பு வேகத்தின் $-e$ மடஙகு ஆகும்.

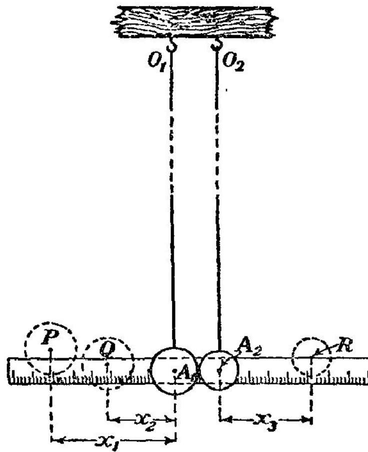
e எனனும் கணியம் கண்டிப்பாய் நேரானது ; அது **மீளமைவுக் குணகம் அல்லது அதைப்புச்சக்தி எனப்படும்.**

மொத்தலுக்கு முன்னர், மொத்தற் கணத்தில் அவற்றின் பொதுச் செவ்வன் வழியே, கோளங்களின் வேகக்கூறுகள் u_1, u_2 என்பனவும், மொத்தலுக்குப்பின் அதே திசையில் அவை v_1, v_2 என்பனவும் ஆயின் முன்னர் கூறியுள்ள விதியை

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2)$$

எனக் கோவைப்படுத்தலாம் ; அதாவது விலகு வேகம் அணுகு வேகத்தின் e மடங்கு.

கீழே கூறியுள்ளவாறு பரிசோதனையொன்றை நடாத்தி மேற்படி முடிவுக்கு நியூற்றன் வந்தார். இரு கோளங்கள் சமாந்தரமான நூல்கள் O_1A_1, O_2A_2 எனபவற்றால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன, படம் 7·40 ; கோளங்கள் சுயாதீனமாகத் தொங்கும்போது அவை ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டும், அவற்றின் மையங்கள் வரிப்படத் தளத்திலுள்ள கிடையான நேர்கோடொன்றில் அமைந்தும் இருக்குமாறு நூல்களின் நீளங்கள் செப்பஞ் செய்யப்படுகின்றன.



படம் 7·40. இரு அமுத்தமான கோளங்களின் மோதுகை.

அடுத்து கோளம் A_1 ஐ A_1 இற்கு மேலே உயரம் z_1 இல் இருக்கின்ற புள்ளி **P** இற்கு உயர்த்தி, நூல இறுக்கப்பட்டிருக்க அது விடுவிக்கப்படுகிறது. கோளம் A_2 ஐ மோதும்போது அதன கதி $+\sqrt{2gz_1}$ ஆகும். கணவோய்வு அடையுமுன் கோளங்கள் முறையே உயரங்கள் z_2, z_3 என்பவற்றை அடையுமாயின், மொத்தலுக்குப்பின் அவற்றின் கதிகள் முறையே $+\sqrt{2gz_2}$ உம் $+\sqrt{2gz_3}$ உம் ஆகும்.

கோளங்கள் பினனதைக்குமாயின் அவற்றின் விலகு வேகம்

$$\sqrt{2g}\,(\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3})$$

உம், அவற்றின் அணுகுவேகம் $\sqrt{2gz_1}$ உம் ஆகும். $\dfrac{\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{\sqrt{z_1}}$ என்பது z_1 ஐயும் மோதுங் கோளங்களின் திணிவுகளையும் சாரவில்லை என நியூற்றன் கண்டுகொண்டார். அது கோளஙகளின் இயல்பைச் சார்ந்தது.

கோளங்கள் பெயர்க்கப்படும் உயரங்களை அளப்பதைக் காட்டிலும் அவற்றின் கிடையான பெயர்ச்சிகள் x என்பவற்றை அளப்பது திருத்தம் மிக்கது. அப்பொழுது, z ஐக் காட்டிலும் தாங்கும் நூல்களின நீளம் பெரிதாயின, $x^2 = z(2l-z) \doteqdot 2zl$. ஆதலால், வேகமானது x இற்கு நேர்விகிதசமம் ; இங்கு l தாஙகும் நூலொன்றின் நீளம் ஆகும். ஆனல் $v^2 = 2gz$; எனவே

$$v^2 = \frac{g}{l}x^2$$

அல்லது v ஆனது x இற்கு நேர்விகிதசமம். எனவே வரிப்படத்தில் காட்டியுள்ள குறிப்பீட்டைப் பயனபடுததுவோமாயின்

$$e(x_1 - 0) = -(-x_2 - x_3)$$

அல்லது
$$e = \frac{x_2 + x_3}{x_1}.$$

$e = \frac{x_2 + x_3}{x_1}$ எனக் காட்டியபின், இனி கோளம் A_1 இன் திணிவு M உம் கோளம் A_2 இன் திணிவு m உம் ஆயின் உந்தச் சமன்பாட்டை

$$Mu_1 + m(0) = Mv_1 + mv_2$$

என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad Mx_1 = -Mx_2 + mx_3$$
$$= -M(ex_1 - x_3) + mx_3.$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{M+m}{M}\left(\frac{1}{1+e}\right)x_3.$$

$x = x_3$, $y = x_1$ என்றவாறு குறித்தால் சாய்வுவிகிதம் $\left(\frac{1}{1+e}\right)\frac{M+m}{M}$ உடைய நேர்கோடொன்றை நாம் பெறல்வேண்டும். இவ்வாறு மீளமைவுக் குணகத் திற்குப் பெறுமானத்தைப் பெறலாம்.

மொத்தலால் இயக்கச்சக்தி நட்டம்.—பொருள்கள் மோதுங்காலே, பொதுவாக அவற்றின் முழு இயக்கச் சகதியானது குறைகினறது. நேர் மொத்தலை மட்டும் கருதுதல் போதியதாகும் ; ஏனெனில் சரிவான மொத்தலினிடத்து மையக்கோடு வேகக்கூறுகள் மட்டுமே இயக்கச் சக்தி யில் மாற்றத்தை ஏற்படுத்தமுடியும் என்பதேயாம் ; மையகோடுக்குச் செங்குத்தான வேகக் கூறுகள் மாருமல் இருக்கின்றன ; அத்திசையில் கணத்தாக்கு இல்லாததால் எனக் கொள்க.

மோதுங் கோளங்களின் திணிவுகள் m_1 உம் m_2 உம் எனின், எற் கெனவே வரையறை செய்துள்ள குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்திஞல்,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \text{உம்}$$

$$v_1 - v_2 = -e(u_1 - u_2) \quad \text{உமாம்.}$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலுமிருந்து v_2 ஐ நீக்கும் பொருட்டு

$$v_2 = v_1 + e(u_1 - u_2)$$

என்றவாறு பயன்படுத்த,

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2[v_1 + eu_1 - (1+e)u_2].$$

ஆனல் $$m_2(u_1 - v_1) = m_2u_1 - m_2v_1\,;$$

எனவே இரு கடைசிச் சமன்பாடுகளேயும் கூட்ட,

$$u_1 - v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1+e)(u_1 - u_2).$$

இச்சமன்பாடானது இரு பொருள்களினதும் தொடக்க வேக வித்தியாசம் தொடர்பாக முதற் பொருளின் வேகமாற்றத்தைக் கோவைப்படுத்துகிறது.

சக்திநட்டம்

$$\tfrac{1}{2}m_1(u_1^2 - v_1^2) + \tfrac{1}{2}m_2(u_2^2 - v_2^2)$$

ஆகும் ; இதனே W எண்க.

$$\begin{aligned} \therefore \quad 2W &= m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) + m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2) \\ &= m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) - m_1(u_1 - v_1)(u_2 + v_2) \\ &= m_1(u_1 - v_1)(u_1 - u_2 + v_1 - v_2) \\ &= m_1(u_1 - v_1)(u_1 - u_2)(1-e) \\ &= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2)^2(1 - e^2), \end{aligned}$$

$(u_1 - v_1) = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}(1+e)(u_1 - u_2)$ ஆதலின்.

(ஈற்றில் வெப்பமாகத் தோன்றுகின்ற) இச்சக்தி நட்டமானது கண்டிப்பாய் நேரான மூன்று காரணிகளாலேயே கோவைப்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது. ஒன்றில் $e = 1$ ஆகுமிடத்து, அல்லது மோதுகை நிகழமுடியாத எடுத்துக் காட்டான $u_1 = u_2$ என்னுமிடத்துச் சக்திநட்டம் பூச்சியம் ஆகும். எனவே $0 < e < 1$ ஆதலின், சக்திநட்டம் எப்பொழுதும் நிகழும் எனப் பொதுவாகக் கூறலாம்.

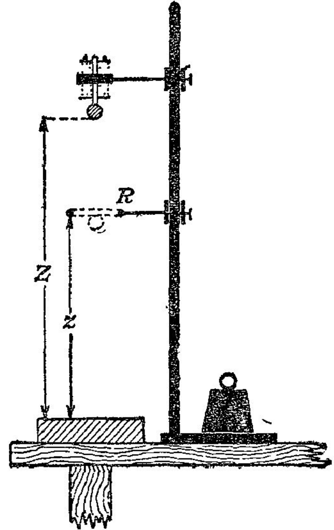
கிடையான தட்டைப் பரப்பொன்றின்மீது உருக்குக் கோளமொன்றின் மொத்தலைப் பரிசோதனை முறைப்படி ஆராய்தல்.—பரப்புக்கு மேலே சிறு மின்காந்தமொன்றல், உருக்காலான குண்டுப்போதிகையொன்று தாங்கப்பட்டிருக்கிறது. மின்னேட்டத்தை நிற்பாட்டியதும் [இருந்தாலும் ப. 694 இற் காண்க] குண்டு விழுகின்றது ; வாலேத்தாள் வளேயம் R இன்

மிகத்தாழ்ந்த தளத்தை பின்னதைக்குங் குண்டு சரியாக அடையுமாறு அவ்வளையததைச் செப்பஞ்செய்து அக்குண்டு அடையும் உயரத்தைத் துணிய முடியும். தூரஙகள் Z, z எனபவை அளக்கப்படுகின்றன ;

$$(v_1 - v_2) = -e(u_1 - u_2)$$

என்னும் கோவையிலிருந்து மீளமை வுக் குணகம் காணப்படுகிறது. இனி $u_2 = v_2 = 0$ உம $u_1 = +\sqrt{2gZ}$ உம் ஆகும் ; அதே நேரம் $v_1 = -\sqrt{2gz}$ ஆகும் ; எனவே

$$e = +\sqrt{\frac{z}{Z}}.$$



படம் 7·41. கிடைத் தளமொன்றில் உருக்குக் கோளமொன்றின் மொத்தல்.

உண்மை கூறுமிடத்து Z , z என்பவை குண்டினது புவியீர்ப்பு மையத்தின் இறக்கத்தையும அதற்கடுததுள்ள ஏற்றத்தையும் குறிக்கின்றன ; ஆனுல் வழக்கமாகப் பயனபடும் தூரஙகள் பெரிதாய இருக்கின்றமையால் அனேக மாக இதையிட்டுத் திருத்தம் வேண் டியதில்லை.

பரிசோதனையைத் திரும்பச் செய் தால், கருதப்படுகின்ற பரப்புக்களின் புதுப் பாகங்களுக்கிடையே தொடுகை நேரிடும்போதுதான் ஒற்றுமையான பேறுகளைப் பெறமுடியும் ; ஏனெனில் தொடுபரப்பைச் சுற்றித் தோறறியுள்ள விகாரம் முற்றிலும் மறையாமல் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு. சிறு கோளமொன்று, உயரம் z இலிருந்து அசையமுடியாத நிலைத்தள மொனறினமீது விழுகினறது. அதைப்புச் சகதிக் குணகம் e எனின, கோளத்தின அதைத்தல் முடிவடையும்வரை, கோளம் சென்றுள்ள முழுத்தூரம் $\frac{(1+e^2)}{(1-e^2)}z$ எனவும், கோளம விடுவிக் கப்பட்ட கணத்திலிருந்து நேரம் $\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2z}{g}}$ கழிந்தபின் அது நிலையான ஓயவு அடைகிறது எனவும் காட்டுக.

கோளமானது முதனமுதலாகத் தளம் மீது படும்பொழுது அதன் கீழ்முகமான வேகம் $v = \sqrt{2gz}$ ஆகும் ; பின்னதைவு வேகம் ev ஆகும் ; இதே வேகத்துடன் கோளம இரண்டாவது முறை தளத்தை மோதும் எனக் கொள்ளபபடுகிறது. எனவே பின்னதைவு வேகங்கள்

$$ev,\ e^2v,\ e^3v, \ldots$$

ஆகும் ; முதலாவது, இரண்டாவது, மூனருவது முதலிய பின்னதைவுகளுக்குப் பின் கோளம்

ஏறும் உயரங்கள முறையே

$$\frac{(ev)^2}{2g}, \frac{(e^2v)^2}{2g}, \frac{(e^3v)^2}{2g}, \ldots$$

அல்லது $e^2z, e^4z, e^6z, \ldots$

ஆகும்.

எனவே அது செனற முழுத்தூரம்

$$z + 2[e^2z + e^4z + \ldots] = z\frac{1+e^2}{1-e^2}.$$

இனி முதலாவது வீழசசி எடுத்த நேரம் $\sqrt{\frac{2z}{g}}$ ஆகும் ; ev, e^2v, ... முதலிய கதிகள் ஒவ்வொனறும் பூசசியமாவதற்கான நேரங்கள் முறையே

$$\frac{ev}{g}, \frac{e^2v}{g}, \ldots \text{ அலலது } e\sqrt{\frac{2z}{g}},\ e^2\sqrt{\frac{2z}{g}} \ldots$$

எனவே அதன் முழுப்பயணததிறகுச் செலவான நேரம்

$$\sqrt{\frac{2z}{g}} + 2\left[\sqrt{\frac{2z}{g}}\,(e + e^2 + e^3 + \ldots)\right] = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\sqrt{\frac{2z}{g}}.$$

பயிற்சி VII

7·01. படிப்படியாக உயர்த்தப்படும் சுமையொனறுல் ஈர்க்கப்படுகின்ற நிக்கற் கம்பியில் நிகழ்கின்றவற்றைச் சுருக்கிக கூறுக.

மீள்தன்மையெல்லே, பூரண மீள்தன்மை, பொய்சோனின் விகிதம் என்பவற்றிற்கு வரை விலககணங கூறுக.

றபபா நாண் ஒன்று ஈர்க்கப்படும் பொழுது அதன் வடிவமாற்றத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் அதன கனவளவு மாற்றம் புறககணிககத்தக்கது. றப்பாக்குப் பொய்சோனின விகிதம் 0·5 எனக் காட்டுக.

7·02. இயலபான நீளம் l உம் மீள்தனமை நீட்டல் மட்டு λ உம் உடைய இலேசான மீள் தனமை இழையொன்றின் நுனியிலிருநது திணிவு m கொண்ட துணிககையொனறு தொங்கு கிறது. இழையானது z அளவு ஈாககப்பட்ட நிலேயில புவியீாபபு, மீள்தன்மை வழிகளால் வரும மொதத நிலேசசகதி $\frac{\lambda z^2}{2l} - mgz +$ மாறிலி எனக் காட்டுக. இககோவையின் கணநிலேப் பெறுமானத்தைக் கருதி துணிக்கையின சமநிலேத்தானத்தைத் துணிக. $\left[z = mg\frac{l}{\lambda}\right]$

7·03. (*a*) நீளம் கிட்டத்தட்ட 20 சமீ., ஆரை கிட்டததட்ட 1 மிமீ. கொணட கம்பி (*b*) நீளம் கிட்டத்தட்ட 1 மீற்றர், செவ்வகக் குறுககுவெட்டு 2 சமீ. × 0·5 சமீ. உடைய கோல, வடிவத்தில இருக்கின்ற செம்பிற்கு எவ்வாறு யங்கின் மட்டைக் காணலாம் எனபதை விளககுக. இவ்விரு எடுத்துககாட்டுகளுக்கான பரிசோதனே விவரங்களேயும் அவற்றுள் ஒனறிறகான கொள்கையைப் பற்றிய உரையொனறையும தருக. (G)

7·04. விட்டம் 1·783 அங். உம் உயரிழுவைவலு உடையதுமான உருக்குச் சட்டமொன்று சோதிககும் உபகரணமொனறில் வைககப்பட்டது. 36 தொன திணிவுடைய சுமையொன்றிற் குரிய நீட்சி $6{\cdot}65 \times 10^{-3}$ அங். ஆம். நீட்சியானது 15·0 அங. நீளமுடைய துண்டொனறில் அளககபபட்டால் உருககிற்கு யங்கின மட்டின் பெறுமானத்தைக காண்க.

[$3{\cdot}25 \times 10^4$ தொன்–நிறை அங்.$^{-2}$]

7·05. இழுவையுறும் கயிறொன்று அழுத்தமான வளையியொன்றைச் சுற்றியிருக்கின்றது. அக்கயிறற்றால் ஆகும் உளமுகமான உதைப்புக்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

பக்கங்கள் $\frac{1}{8}$ அங். தடிப்பும் எல்லையிழுவை 40 தொன்-நிறை. அங்.$^{-2}$ தாங்கக் கூடியது மான திரவியத்தால் 3 அடி ஆரை கொண்ட உருளைக் கொதிகலமொன்று ஆக்கப்பட்டுள்ளது. கொதிகலனுள் எல்லையமுக்கத்தைக் கணிக்க. [42 வளி]

7·06. பறப்புச்சில்லொன்று வட்டவடிவமுடைய உருக்குத் தட்டொன்றின் ஓரத்தில் இணைக்கப்பட்ட சீரான ஈய விளிம்பாலானது. ஈயமானது அடர்த்தி 11·4 கி. சமீ.$^{-3}$ உம் இழுவை வலிமை $1 \cdot 60 \times 10^{8}$ தைன். சமீ.$^{-2}$ உம் உடையதாயின், உடைப்பு நிகழுமுன் விளிம்பின் மிகவுயர்ந்த வேகத்தைக் காண்க ; மேலும் விளிம்பின் விட்டம் 20 சமீ. ஆக இருக்கும் பொழுது செக்கனொன்றில் ஆற்றமுடியுமான மிகவுயர்ந்த சுழற்சியெண்ணிக்கையைக் காண்க. [188]

7·07. 2 சமீ. தடிப்பு உடைய இந்தியா றப்பராலான 10 சமீ. சதுரத் தாளொன்றின் முகமொன்று, நிலைக்குத்தான சுவரொன்றுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது ; அதன் மற்றை முகத்துடன் மரத்துண்டொன்று ஒட்டப்பட்டிருக்கிறது. மரத்துண்டிலிருந்து 30 கிகி. திணிவுடைய சுமையொன்று தொங்கவிடப்பட்டபோது ஈற்றில் துண்டானது 0·030 சமீ. இறங்கிறது எனத் தெரியவந்துள்ளது. றப்பரின் விறைப்பு மட்டையும் றப்பரில் க. சமீ. ஒவ்வொன்றுள்ளும் சேமிக்கப்பட்டிருக்கின்ற சக்தியையும் பெறுக.

[$1 \cdot 96 \times 10^{7}$ தைன். சமீ.$^{-2}$, $2 \cdot 21 \times 10^{3}$ எக. சமீ.$^{-3}$]

7·08. கொய் விகாரமொன்றை உண்டாக்கலுக்குரிய இரண்டு முறைகளை விவரித்துக்கூறி அவற்றை ஆய்க. இரு வெவ்வேறான விகார வகைகளைக் கருதிச் சமவியல்புடைய திண்மமொன்றில் அலகுக் கனவளவொன்றுட் சேமிக்கப்பட்டிருக்கின்ற விகாரச்சக்தி

$\frac{1}{2}$ (இறுதித் தகைப்பு × இறுதி விகாரம்)

எனக் காட்டுக.

தனது மேல் நுனியில் நிலையாக்கியுள்ள நிலைக்குத்தான றப்பர் நாண் ஒன்று, அதன் கீழ் நுனியிற் படிப்படியாகச் சுமையேற்றப்படும்போது, 10 சமீ. நீட்சியுறுகிறது. சுமை திடீரென ஏற்றப்படின் கணிப்புமுறையை விளக்கி நாணின் உயர்வு நீட்சியைக் காண்க.

[20 சமீ., 0·63 செக்.]

மேலும் பின்தொடர்கின்ற அலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க. (G)

7·09. கம்பி வடிவத்திலிருக்கின்ற உலோகமொன்றின் விறைப்பு மட்டிற்கு, அக்கம்பியின் அச்சுப் பற்றி ஆற்றப்படும் முறுக்கல் அலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலமும் வேறு கணியங்களும் தொடர்பாக, கோவையொன்றைப் பெறுக.

இம்முறையைப் பயன்படுத்தி உலோகத்தின் விறைப்பு மட்டைக் காணுமிடத்துள்ள வெவ்வேறு வழுக்களின் சார்முதன்மையை ஆய்க.

7·10. கண்ணாடியைச் சீரான சட்டவடிவத்தில் பயன்படுத்தி, எவ்வாறு அத்திரவியத்திற்கு யங்கின் மட்டு E, பொயசோனின் விகிதம் σ என்பவற்றிற்குப் பெறுமானங்கள் காணமுடியும் என்பதை விவரித்துக்கூறி விளக்குக.

கண்ணாடிக்கு $E = 7 \cdot 2 \times 10^{11}$ தைன். சமீ.$^{-2}$ உம், $\sigma = 0 \cdot 25$ உம் எனின், அத்திரவியம் சமவியல்பானது எனக் கருதி தேவைப்படுகின்ற சூத்திரத்தைப் பெற்று, அதற்கு விறைப்பு மட்டைக் கணிக்க. (S) [$2 \cdot 88 \times 10^{11}$ தைன். சமீ.$^{-2}$]

7·11. சமவியல்பான திண்மமொன்றின் விறைப்பு மட்டிற்கு வரைவிலக்கணம் கூறுக. அவ்வரைவிலக்கணத்திலிருந்து அதன் அச்சுப் பற்றிக் கம்பியொன்றைத் திருகுவதற்கான இணைக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறுக. நிலையான தாங்கியொன்றிலிருந்து நீளம் 50·2 சமீ. உம், விட்டம் 0·092 சமீ. உம் கொண்ட கம்பியொன்று நிலைக்குத்தாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கம்பியின் கீழ் நுனியில் விட்டம் 4·36 சமீ. உடைய சிறு உருளையொன்று நிலைக்குத்தாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருளையில் சுற்றப்பட்ட இரு நுண்ணிய இழைகள் கப்பிகள் மார்க்கமாகக் கிடையாகச் சென்று அவற்றின் சுயாதீன நுனிகளில் தராசுத் தட்டுக்களைத் தாங்கியுள்ளன. தராசுத்தட்டு ஒவ்வொன்றிலும் திணிவு 100 கி. உடைய சுமை

யொன்று வைக்கப்பட்டபோது கம்பியின் கீழ் நுனி 162° திருகப்பட்டுள்ளது எனத் தெரியவந்தது. கம்பியின் திரவியத்திற்கு விறைப்பு மட்டின் பெறுமானமொன்றைக் காண்க. [$2{\cdot}70 \times 10^{11}$ தைன் சமீ.$^{-2}$]

7·12. நீளம் l சமீ. உம், ஆரை a சமீ. உம் உடைய நிலைக்குத்தான சீரான கம்பியொன்றின் மேல் நுனியானது நிலையாக்கப்பட்டு, அதன் கீழ் நுனியில் திருப்பம் G தைன். சமீ. கொண்ட இணையொன்று பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளது. முதற் கோட்பாடுகளிலிருந்து, கீழ் நுனியில் திருகற் கோணத்தைக் காண்க. கம்பியினது திரவியத்தின் விறைப்பு மட்டு n தைன் சமீ.$^{-2}$ ஆகும்.

கம்பியின் விறைப்பு மட்டைத் துணிதலுக்கான முறையொன்றைக் கூறி, எவ்வாறு விளைவின் திருத்தமானது கம்பியின் நீளம், அதன் ஆரை ஆகியவற்றை அளக்கும்போது ஆகும் ஒரு சதவீத வழுக்களாற் பாதிக்கப்படுகிறது என்பதை ஆராய்க. (G)

7·13. ஆரை a கொண்ட கம்பியொன்றில், அலகு நீளமொன்றிற்குத் திருகற்கோணம் ϕ பெறும் பொருட்டு அதன் நுனிகளில் $\frac{1}{2}\pi n a^4 \phi$ என்னும் இணையைப் பிரயோகித்தல் வேண்டும் எனக் காட்டுக ; n, கம்பியினது திரவியத்தின் விறைப்புமட்டு.

விட்டம் 0·6 மிமீ. கொண்ட நிலைக்குத்துக் கம்பியொன்றின் நுனியில் ஏதோவொரு திணிவு இணைக்கப்பட்டபோது அதில் உண்டாகியுள்ள நீட்சி 1·12 மிமீ. ஆகவும், அதன் முறுக்கல் அலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலம் 15 செக். ஆகவும் இருந்தன. கம்பியின் அச்சுப் பற்றி அத்திணிவின் சுழிப்பாரை 3 சமீ. எனின் யங்கின் மட்டு, விறைப்பு மட்டு என்பவற்றின் விகிதத்தைக் காண்க. (G) [2·49]

7·14. வட்டவடிவக் குறுக்குவெட்டுடைய திண்மத் தண்டொன்றிற்குப் பதிலாக, தன் நுனிகளில் சமனெதிரான இணைகளின் பிரயோகத்தால் சமவளவில் திருகப்படக்கூடிய பொள் தண்டொன்றைப் பயன்படுத்த வேண்டியுள்ளது. பொள் தண்டின் வெளி விட்டமானது அதன் உள் விட்டத்தின் இருமடங்காயின், இம்மாற்றத்தால் மிச்சமாகும் திரவியத்தைப் பின்னத்திற் காண்க. [0·87]

7·15. கம்பியொன்றின் கீழ் நுனியில் பற்றுருப்படுத்தியுள்ள உலோகச் சட்டமொன்று முறுக்கலலைகள் ஆற்றுகிறது. (a) கம்பியின் நீட்டற் பரிமாணங்களை (b) உலோகச் சட்டத்தின் நீட்டற் பரிமாணங்களை (c) சட்டம், கம்பி ஆகிய இரண்டின் நீட்டற் பரிமாணங்களை அரைவாசியாக்குவதால் எவ்வாறு அலைவுக்காலம் மாற்றப்படும் ?

[(a) $2\sqrt{2}$ மடங்கு மிகும், (b) $4\sqrt{2}$ மடங்கு குறையும் (c) அரைவாசியாகும்.]

7·16. வட்டக் குறுக்குவெட்டுடைய உருக்குக் கோலொன்று அதன் நுனிகளில் சமனெதிர் இணைகளின் பிரயோகத்தால், அதன் அச்சுப் பற்றித் திருகப்படுகிறது. உருக்கின் விறைப்பு மட்டு $8{\cdot}5 \times 10^{11}$ தைன். சமீ.$^{-2}$ எனவும் உருக்கால் தாங்கக்கூடிய உயர்வுத் தகைப்பு $5{\cdot}5 \times 10^{9}$ தைன். சமீ.$^{-2}$ எனவும் கொண்டு உருக்கின் கன சதமமீற்றரொன்றுட் சேமித்து வைக்கக்கூடிய சராசரி உயர்வுச் சக்தியைக் கணிக்க. [உமது விடையைப் பொறியியல் அலகுகளினும் வெப்பவியல் அலகுகளினும் தருக].

[$1{\cdot}78 \times 10^{9}$ ஏக. சமீ.$^{-3}$, 0·42 கலோ. சமீ.$^{-3}$]

7·17. திண்மமொன்றின் கனவளவு மட்டை ஏனைய மீள்தன்மை மட்டுகள் தொடர்பாகக் கணிக்குமிடத்துப் பயன்படும் சூத்திரமொன்றைப் பெறுக. பித்தளையின் கனவளவு மட்டைத் துணிதலுக்கு நேரான பரிசோதனை முறையொன்றைச் சுருக்கமாகக் கூறுக.

7·18. $E = 2 \times 10^{12}$ தைன். சமீ.$^{-2}$ உம், $n = 1 \times 10^{12}$ தைன் சமீ.$^{-2}$ உம் கொண்ட உலோகம் ஒன்றிற்கு β வைக் காணுமிடத்து $\frac{1}{E} = \frac{1}{3n} + \frac{1}{9\beta}$ என்னுஞ் சூத்திரம் பயன்படுத்தப்பட்டால் E, n ஒவ்வொன்றும் 1 சதவீதத்துக்குள்ளான திருத்தம் உடையதாயின், β வின் கணித்த பெறுமானத்திலுள்ள வழுவைக் காண்க.

[$0{\cdot}67 \times 10^{12}$ தைன். சமீ.$^{-2}$, 0·050]

7·19. ஏனைய மீள்தன்மை மட்டுகள் தொடர்பாகச் சமவியல்புடைய திரவியமொன்றின் யங்கின் மட்டிற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக. பொய்சோனின விகிதததிற்கு வரை விலக்கணங் கூறிச சமவியல்புடைய திரவியங்களினிடத்து அதனது எல்லைப் பெறுமானஙகளை ஆய்க.

7·20. ஆரை a சமீ. உம் நீளம் l சமீ. உம் கொண்ட உருளைவடிவமான கோலொன்று அதன ஒரு நுனியில் நிலையாககப்பட்டு, அதன மறு நுனியில் பிரயோகிககப்படுகின்ற இணையொனறால் கோணம் ϕ திருகப்படுகிறது. கோலினது திரவியத்தின் விறைபபு மட்டிறகுக் கோவையொன்றைப் பெறுக. திரவியததினது யஙகின மட்டு தெரிநதிருநதால கனவளவு மட்டிற்குரிய பெறுமானமொன்றை எபபடிப பெறுவீர் ?

7·21. மீள்தன்மை மட்டுகள் மூன்றிறகும் பொய்சோனின விகிதத்திற்கும் வரைவிலக்கணங் கூறுக. E, β, n எனபன முறையே யஙகின் மட்டும், கனவளவு மட்டும், விறைபபு மட்டும் எனின அப்பொழுது

$$E = \frac{9n\beta}{3\beta + n}$$

எனக் காட்டுக.

வாாப்பிரும்பாலான பொளளுருளைக கம்பமொன்றின் வெளிவிட்டம் 10·0 அங். உம், உள்விட்டம் 8·0 அங். உம, நீளம 10·0 அடியும் ஆகும். அதன்மீது 60 தொன சுமை யொன்றைப பிரயோகிககுமிடத்து அது எவ்வளவு சுருஙகும.

[வார்ப்பிரும்பினது யஙகின மட்டை 8000 தொன்–நிறை. அங். $^{-2}$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.]

[0·032 அங்.]

7·22. சீரான கணணுடிக் குழாயொன்று அதனது நீளத்தில 2 மீற்றர் தாஙகிககுக் கீழே கிடககுமாறு விறைப்பான தாஙகியொனறிலிருந்து தொஙகவிடப்பட்டிருககிறது. குழாயின் மேறபடிப் பகுதியானது நீரால நிரபபபபடடிருககிறது. குழாய சுமையேறறபபட்டதும் தாஙகிககுக் கீழே இருக்கின்ற பாகம் 0·13 சமீ. விரிநதது ; அதே நேரம் நீரால் நிரப்பபபட்ட பாகத்தின் நீளம் ஆக 0·080 சமீ. தான விரிநதது. கணணுடியினது பொய்சோனின் விகிதத்தைக் காண்க. [0·19]

7·23. முறையே 0·4 சமீ., 0·6 சமீ. எனனும் முழு நீட்சிகளைத் தோற்றுவிககும் நிறைகளால நிலைக்குததான கம்பியொன்று சுமையேற்றப்படுகிறது. கம்பியினது திரவியத்தின் மீள்தனமையெலலை மீறப்படவில்லை எனக் கருதி, இவ்விரு நீட்சிகளைத் தோறறுவிக்கும் பொழுது செய்யபபட்ட வேலைகளை ஒப்பிடுக.

[1 : 2·25]

7·24. இயல்பான நீளம l கொண்ட, இலேசான, நிலைக்குததான, மீள்தனமை இழை யொன்றின் கீழ நுனியில இணைககப்பட்ட திணிவு m என்பது அவ்விழையில் நீட்சி a யைத் தோற்றுவிக்கிறது. ஓய்வாயிருககின்ற m ஐ நிலைகுத்தாகப் பெயாத்துப் பின் விடுவித்த போது திணிவின் அலைவுக்காலம் $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ எனக் காட்டுக.

m உடன் திணிவு μ ஐச் சேர்த்தபோது அலைவுக்காலம் 20 சதவீதம் கூடிற்று. திணிவுகள் μ, m எனபவற்றை ஒப்பிடுக.

[$\mu = 0·44\ m$]

7·25. உருக்காலான இரு உருளைத் தண்டுகள் அலகு நீளமொன்றிற்கு ஒரே திணிவு உடையன. ஒன்று திண்மமாக இருக்க, மறறையது பொள்ளானது ; இதன் வெளியாரை, உள்ளாரையின் இருமடங்கு. தண்டுகளின் முறுக்கல விறைப்பு மட்டுகளையும் அவறறில் சம திருகலிணைகளால் ஆக்கப்படும் உயர்வு விகாரங்களையும் ஒப்பிடுக.

[5 : 3, 5 : 3]

7·26. தொங்கலொன்று, நீளம் l உம் ஆரை a யும் கொண்ட கம்பியொன்றையும் அக கம்பிககுக் கீழே அதனுற காவப்படுகினறதும் நீளம் $l/10$ உம் ஆரை $10a$ யும் உடையது மான கமபியொனறையும கொண்டது. அவ்வொவவொனறிலும் திரவியம் ஒரே அளவினது. மேல்நுனி பிடிபூட்டப்பட்டுளளது ; நிலைகுததான அசசொனறு பறறிக கீழ நுனி திருகப் படுகிறது. (a) முழுத தொங்கலின் முறுககல் விறைப்பு மட்டை (b) தொங்கலின கூறுகள் ஒவ்வொன்றினதும் கீழ் நுனி திருகப்படும் கோணஙகளின விகிததததைக காண்க.

$$\left[(a)\ \frac{l}{2(1+10^{-5})}\cdot\frac{na^4}{l}\ ;\ (b)\ 10^5.\right]$$

7·27. மீள்மைவுக் குணகத்திற்கு வரைவிலக்கணம் கூறுக : (a) உருக்காலான இரு கோளஙகள (b) உலோகத்தாலான கிடைப் பரபபொனறின்மீது மோதுகின்ற உருக்குக் கோளம், எனபவற்றிற்கு எவவாறு இக்குணகததை நீா துணிவீர் என்பதை விவரித்துக் கூறுக.

200 கி. திணிவை உடைய உலோகக் குண்டொன்று 121 சமீ. உயரத்திலிருந்து கிடையான மாபிள் தரைமீது விழுநது முதனமுதலான பினனதைவால் உயரம 100 சமீ. எழும்புகிறது. (a) தரைமீது ஓயவுபெறும் வரை குணடு இயஙகிய முழுத்தூரம் (b) குணடு விடுவிககப்பட்ட நேரத்திலிருநது இது நடைபெறும்வரை செலவான முழுக் காலவளவு என்பவறறைக் கணிக்க. தரைமீதுற்ற முதல இரு மொத்தலாற் குணடு அனுபவிககும் சக்தி நட்டம் எவவளவு ஆகும். [(a) 1273 சமீ. (b) 10·4 செக., $7{\cdot}52\times10^6$ எக.]

7·28. நோகோடொனறில் வேகம u வுடன அசைகினற ஈலியம் அணுவொன்று ஓய்வாயி ருககினற ஐதரசன அணுவொனறுடன நேராக மொததுகிறது. இரு அணுககளும பூரண மீளதன்மையுடையதாய் (அதாவது $e=1$) நடநது கொளளுமிடத்து, (a) மோதுகைககுப் பின் ஐதரசன் அணுவின வேகம் (b) ஈலியம் அணுவின் பினனச் சகதி நட்டம் என்பவறறிற்குப் பெறுமானஙகள காணக. ஈலியம் அணுவின் திணிவு ஐதரசனினது அணுத திணிவின் நானகு மடஙகாகும். [(a) $\frac{8}{5}u$, (b) 0·64

7·29. ஓா அழுத்தமான கிடைத்தளததின புள்ளியொன்றிலிருநது, கிடைத்தளத்துடன் கோணம் θ வை ஆககும் திசையில் சிறுகோளமொனறு வேகம் u வுடன் எறியப்படுகிறது. மீளமைவுக குணகம் e எனின் பின்னதைவு முடிவடையும்வரை கோளமானது தளம் வழியே தூரம் $\frac{u^2}{g}\ \frac{\text{சைன் } 2\alpha}{1-e}$ ஐ அசைநதுவிடும் என நிறுவுக. பின்தொடர்ந்து யாது நிகழும் என்பதை ஆய்க.

7·30. ஒவவொனறும் திணிவு m ஐ உடையதும் மாறு வேகம u வுடன அசைகின்றதுமான துணிககைகள் கொண்ட அருவியொனறு அததுணிககைககளை நோககி உறுதிவேகம் u_0 உடன் அசைத்து வைக்கப்படுகின்ற தட்டொனறுமீது செஙகுத்தாகச் சாடுகிறது. மீளமைவுக் குணகம் e எனின துணிக்கையொவ்வொனறிறகும் இயககச சகதி மாற்றம்

$$\tfrac{1}{2}m(1+e)\left[u^2-u_0^2-e(u+u_0)^2\right]$$

ஆகும எனவும், அலகு நேரமொன்றில் அதன் மீது N துணிக்கைகள் மோதுமிடத்துத் தட்டின் உறுதியக்கத்தையிட்டு அதன்மீது $Nm(1+e)(u+u_0)$

என்னும் விசையைப் பிரயோகிக்க வேண்டும் எனவும் காட்டுக.

7·31. வல்லுருக்காலான குண்டொனறு 30 சமீ. உயரத்திலிருந்து ஒப்பமான கண்ணாடித் தட்டொன்றின்மீது போடப்படுகிறது ; பின்னதைவு 28·5 சமீ. ஆகும். (a) கண்ணாடியைக் குறித்து உருக்கின் மீளமைவுக் குணகம் (b) குண்டு விடுவித்தபின் அது தொடர்ந்து அதைத் துள்ள நேரம் (c) குண்டு செல்லும் முழுத் தூரம், என்பவறறிற்குப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

[(a) 0·975 (b) 19·3 செக். (c) 1170 சமீ.]

7·32. திணிவு $1{\cdot}66 \times 10^{-24}$ கி. உம், வேகம் 200 கிமீ. செக்.$^{-1}$ உம் உடைய அணுவொன்று திணிவு $6{\cdot}64 \times 10^{-24}$ கி. உடையதும் ஓய்வாயிருக்கின்றதுமான அணுவொன்றின் மீது நேராக மோதுகிறது. மோதுகை பூரண மீள்தன்மையானது எனக் கொண்டு அம்மோதுகைக்குப் பின் அணு ஒவ்வொன்றின் வேகத்தையும் அவ்வொவ்வோர் அணுவும் மாறுகின்ற சக்தி மாற்றத்தையும் காண்க. (a) எகுகளில் (b) இலத்திரன் வோல்ற்றுக்களில், மாற்றங்களைக் கூறுக. [இலத்திரனேற்றம் $-4{\cdot}80 \times 10^{-10}$ நி.மி.அ. எனவும், 300 வோல்ற்றுக்கள் 1 நி.மி.அ. அழுத்தம் ஆகும் எனவும் கொள்ளலாம்.]

[(அ) 80 கிமீ. செக.$^{-1}$, (ஐ)–120 கிமீ. செக்.$^{-1}$; $1{\cdot}62 \times 10^{-12}$ எக. அல்லது 132 இ. வோ]

7·33. நீளம் $2a$ ஐ உடைய சீரான, மெல்லிய, கிடையான கோலொன்று அதன் நுனிகளிலிருந்து ஒவ்வொன்றும் நீளம l ஐ உடைய இரு நாரகளால் தாங்கப்பட்டிருக்கிறது. அதனது புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாகச் செல்லுகின்ற நிலைக்குத்தச்சுப் பற்றி அக்கோலினது சிற்றலைவுகளின் மீடிறன் f ஐ, l உம் புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகல் வீதம் g உம் தொடர்பாகத் துணிக; அண்ணளவாக்கம் எதும் செய்தால அது சரியென்று காட்டுக.

(a) அதன் மையத்தில் செறிந்திருக்கின்ற சுமையொன்றைக் கோல் தாங்குமாயின் f^2 ஆனது சுமையின் எகபரிமாணச் சார்பு ஆகின்றது என்பதையும், (b) தாங்கும் நார்கள் முறுக்கல் விறைப்புடையதாயின் எவ்வாறு f இற்கான கோவை மாற்றம் அடைகிறது என்பதையும் காட்டுக. [நாரொன்றின் நுனி, அதனது மறுநுனியைக் குறித்துக் கோணம் ϕ யால் திருகப்பட்டிருப்பின் மீள்தரு இணை $b\phi$ ஆகும் எனக்கொள்ளலாம்; இங்கு b மாறிலியொன்றாகும்.] G (alt'd).

அதிகாரம் VIII

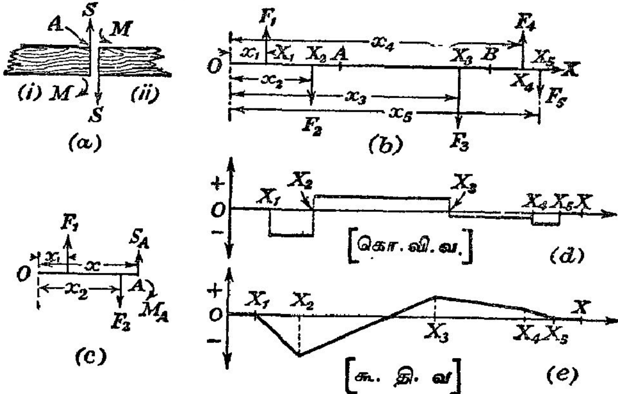
வளைகளின் கூனல், சுரி வில் என்பவை பற்றிய கொள்கை

சுமத்திய வளைகள். கூனல் திருப்பம்.—புறவிசைத் தொகுதியொன்றின் தாக்கத்தின்கீழ் சமநிலையில் இருக்கின்ற மீள்தன்மைப் பொருளொன்று எதேச்சையான இரு பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றது எனக் கருதுவோம். அப்பொழுது அவ்விரு பாகங்களுள் ஒன்றின்மீது தாக்குகின்ற புற விசைகளும் அதே பாகமீது மற்றைப் பாகத்தில் தாக்குகின்ற உள் விசைகளும் ஒன்றுசேர்ந்து சமநிலையில் இருத்தல் வேண்டும். புற விசைகளால் தாக்கப்படுகின்ற வளைகளின் சமநிலை பற்றிய ஆய்வு பின்தொடர்கின்றது ; அவ் ஆய்வானது விகாரங்கள் ஒழிந்த நிலையில், அவற்றின் நீளப்பக்க அச்சுக்கள் கிடையாக இருக்கின்ற சீரான வளைகளுக்கு மட்டுமே உரியதாகும். மேலும் வளைமீதுள்ள புற விசைகள் யாவும் நிலைக்குத்தாகவும், வளையின் சுமத்திய நிலையில் அவ்வளையிலுள்ள தகைப்புக்கள் மீள் தன்மையெல்லையை மீறாமலும் இருக்கின்றன எனக் கொள்ளப்படுகின்றது.

கிடையான வளையொன்றின் ஒரு துண்டு A யில் நிலைக்குத்தான தளமொன்றால் இரு பாகங்களாகப் பிரிந்திருப்பதைப் படம் 8·01 (a) எடுத்துக்காட்டுகிறது ; அத்துண்டுகள் முறையே (i) உம (ii) உம் எனக. அப்பொழுது வளையில், A யின் வலப்பக்கத்திலுள்ள பாகமானது இடப்பக்கத்துப் பாகமீது விசைத்தொகுதியொன்றைப் பிரயோகிக்கின்றது ; இத்தொகுதியும் அப்பாகமீது தாக்குகின்ற புறவிசைகளும் சமநிலையில் இருத்தல் வேண்டும் ; நிலைக்குத்தான ஒரு விசை, ஓர் இணை என்பனவற்றின் சேர்மானத்திற்கு விசைத்தொகுதி சுருங்குதல் வேண்டும். அதுபோலவே வளையின் இரண்டாவது பாகம், முதலாவது பாகத்தால் ஆகும் விசைத்தொகுதியொன்றை அனுபவித்தல் வேண்டும் ; இத்தொகுதியும் நிலைக்குத்தான ஒரு விசை, ஓர் இணை என்பவற்றின் சேர்மானத்திற்குச் சுருங்குதல் வேண்டும் ; விசை, இணை ஒவ்வொன்றும் முறையே வளையத்தின் முதலாவது பாகமீது தாக்குகின்றவற்றிற்குப் பருமனிற் சமனாகவும் திசையில் எதிராகவும் உள. இரண்டாவது பாகத்தின் தாக்கத்தால் பாகம் (i) ஆனது அனுபவிக்கும் விசைத்தொகுதியானது விசை S, இணை M என்பவற்றின் சேர்மானம் ஆகின், முழு வளையும் சமநிலையில் இருக்கிறதாதலின், பாகம் (ii) ஆனது விசை −S, இணை −M என்பவற்றின் சேர்மான விசைத்தொகுதியொன்றை அனுபவிக்கும். விசைகள் S **கொய் விசைகள்** எனப்படும் ; இணைகள் M என்பவை வளையிலே A யிலுள்ள குறுக்குவெட்டில் தாக்குகின்ற **கூனல் திருப்பங்கள்** எனப்படும். இவ்வதிகாரத்தின் முற்பகுதியில் எவ்வாறு S ஐயும் M ஐயும் காண்பதென வழிவகைகள் விரிவாகக் கூறப்படும்.

வளையில் கற்பனைப் பிரிப்புக்கோட்டிற்கு இடப்பக்கத்துள்ள பாகத்துக்கு உகந்த S, M என்பவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணித்தல் எப்பொழுதும் எமது வழக்காகும். படம் 8·01 (*a*) யில் காட்டியுள்ள திசைகளில் S, M என்பன தாக்கும்பொழுது அவை நேர் எனக் கருதப்படும்.

அலகு நீளமொன்றிற்குப் புறக்கணிக்கத்தக்க நிறையுடையதும் படம் 8·01 (*b*) யில் காட்டியுள்ள புறவிசைத் தொகுதியால் தாக்கப்படுகிறதுமான வளை OX ஐக் கருதுக. வளையில் குறுக்குவெட்டு A இல், கொய் விசையையும் கூனல் திருப்பத்தையும் காணவேண்டியிருக்கிறது எனக் கொள்க. படம் 8·01 (*c*) யில் காட்டியுள்ளவாறு வளையில், A யின் இடப்பக்கத்திலுள்ள பாகத்தைக கருதுக. வளையின் முனை O விலிருந்து A யின் தூரம் x என்க; இங்கு $x_2 \leqslant x \leqslant x_3$. S_A யும் M_A யும் முறையே கொய்விசையும் கூனல் திருப்பமும் ஆயின் வளையினது இப்பாகத்தின் சமநிலைக்குரிய நிபந்தனைகள்



படம் 8·01. கொய்விசைகளும் கூனல் திருப்பங்களும்.

$$F_1 + S_A = F_2 \qquad \text{உம்}$$

$$M_A + F_2 x_2 - F_1 x_1 - S_A x = 0 \qquad \text{உமாகும்.}$$

எனவே
$$S_A = F_2 - F_1,$$

அத்துடன்,
$$M_A = F_1(x_1 - x) - F_2(x_2 - x).$$

அதுபோலவே S_B யும் M_B யும் தூரம் O விலிருந்து x இல் இருக்கின்ற குறுக்கு வெட்டிலுள்ள கொய் விசையும் கூனல் திருப்பமும் எனின்

$$F_1 + S_B = F_2 + F_3.$$

$$\therefore \quad S_B = F_2 - F_1 + F_3$$

$$= S_A + F_3.$$

இங்கு $x_3 \leqslant x \leqslant x_4$.

எனவே வளையில் புற விசைகள் தாக்காத பாகமொன்றில், கொய்விசையானது மாருது இருக்கிறது ; ஆனல் புறவிசையொன்று பிரயோகிக்கப்படுகின்ற புள்ளியொன்றில் [அதாவது தாங்கும் புள்ளியொன்றில் அல்லது சுமத்தும் புள்ளியொன்றில்] அது தொடர்கின்றது. A யிருக்கின்ற பாகத்திலிருந்து B யிருக்கின்ற பாகத்திற்குச் செல்லுகின்றபோது கொய்விசையின் பெறுமானம் அடையும் மாற்றம் $S_B - S_A$ என்பது, வளையில A யிற்கும் B யிற்குமிடையேயுள்ள பாகமீது தாக்குகின்ற புற விசைகளுக்குச் சமன்.

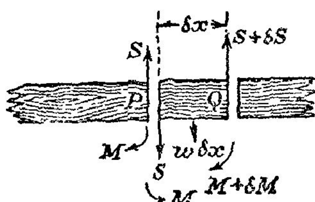
மேலும் B யில்

$$M_B + F_2x_2 + F_3x_3 - S_Bx - F_1x_1 = 0.$$

எனவே $[M_A]_{x=x_3} = [M_B]_{x=x_3}$ ஆதலின் M ஆனது தொடர்ச்சியானது.

மேற்படி வளையில் மிகப்பல குறுக்கு வெட்டுகளில் கொய்விசை, சூனல் திருப்பம் என்பவற்றின் பெறுமானங்கள் கணிக்கப்பட்டிருக்கின்றன எனக் கொள்க. வளையின் நீளத்தை எடுத்துக்காட்டும் அடிக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற பெறுமானங்களை அளவிடைக்கு வரைக. இவ்வண்ணம் கிடைக்கப் பெறுகின்ற வரைபுகள் முறையே **கொய்விசை வரிப்படம்** எனவும் **சூனல் திருப்ப மரிப்படம்** எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. கருதப்படும் வளையினிடத்து முந்தியது புற விசைகள் தாக்கும் புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியின்மையுடைய அடிக்கோட்டிற்குச் சமாந்தரமான நேர்கோடுகளாலான தொடையொன்றாகும் ; பிந்தியது வெவ்வேருன சரிவுடைய நேர்கோடுகளாலானது, படம் 8·01 (d) யையும் (e) யையும் காண்க.

எடுத்துக்காட்டுக்கள் மூலம் மேற்படி குறிப்புக்களை விளக்குமுன், ஓய்வாகவும் அதன் அச்சு கிடையான நிலையில் இருக்கின்றதுமான வளையொன்றைக் கருதுவோம். அதன் அலகு நீளமொன்றின் நிறை w ஆகுக ; அதாவது $w = \mu g$; இங்கு μ என்பது வளையின் அலகுநீளத் திணிவும் (நீட்டலடர்த்தி) g புவியீர்ப்புச் செறிவும் ஆகும். இவ்வளையிலே நீளம் δx கொண்ட சிறு மூலகமொன்றின் மீது தாக்குகின்ற விசைகளும் இணைகளும் படம் 8·02 இல் காட்டியுள்ளவாறு இருக்க. அவை மூலகத்தின் மையப்புள்ளி ஊடே கீழ்முகமாகத் தாக்குகின்ற அதன் நிறை $w\,\delta x$ உம், கொய்விசைகள் S உம் $(S + \delta S)$ உம், இணைகள் M உம் $(M + \delta M)$ உம் ஆகும். இம்மூலகத்தின் சமநிலையையிட்டு இரண்டாம் வரிசைச் சிறு



படம் 8·02. வளையின் மூலகமொன்றில் விசைகளும் இணைகளும்.

கணியங்களைப் புறக்கணித்தால்,

$$S+w\ \delta x=S+\delta S,$$

அதாவது
$$w=\frac{dS}{dx}$$

அத்துடன்,
$$M+\delta M-M+w\,\delta x\left(\frac{\delta x}{2}\right)-(S+\delta S)\delta x=0,$$

அதாவது
$$S=\frac{dM}{dx}$$

என நாம் பெறவேண்டும். எற்கெனவே நிலைநிறுத்தியுள்ள இரு சமன் பாடுகள்

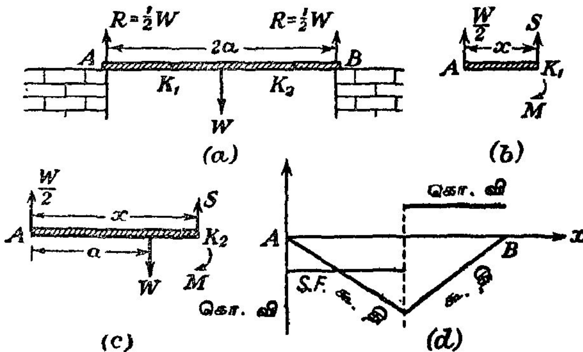
$$\frac{d^2M}{dx^2}=w$$

எனத் தரும்.

கீழ்த்தரப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டுக்கள் இவ்வுண்மைகளை விளக்கிவைக் கின்றன ; மேலும் எவ்வாறு வளையின பூரண கொய்விசை வரிப்படத்தை யும் [கொ.வி.வ.] கூனல் திருப்ப வரிப்படத்தையும் [கூ.தி.வ.] பாதிக் கிறது என்பதையும் அவை காட்டுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு. (*i*) தன் நுனியில தாங்கபபட்டதும அதன் மையத்தில நிறை W வை உடைய சுமையொன்றைக காவுகினறதுமான இலேசான, கிடை வளையொன்றைக் கருதுக.

தாங்கிகளால வளைமீதுள்ள தாககஙகள ஒவவொனறும் $\frac{W}{2}$ ஆகும் ; படம் 8·03 (*a*) யில் காட்டியுளளவாறு, அவை மேல்முகமாகத் தாக்குகினறன. முதல வளையில் நுனி A யிலிருந்து தூரம x இலுள்ள குறுக்குவெட்டு K_1 இல கொய் விசையையும் கூனல்



படம் 8·03. தனது மையத்தில் சுமை காவுகின்றதும் சுயாதீனமாகத் தாங்கப்பட்டதுமான இலேசான வளை.

திருப்பத்தையும் கருதுக ; இங்கு $0<x<a$ வளையின் பாகம் AK_1 ஐத் தாக்குகின்ற கொய் விசையும் இணையும் படம் 8·03 (*b*) யில் காட்டியுள்ளவாறு எனக. அப்பொழுது சமநிலைக்கான

நிபந்தனைகள்

$$\frac{W}{2}+S=0 \quad \text{உம்} \qquad M-Sx=0 \quad \text{உம் ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad S=-\frac{W}{2} \quad \text{உம} \qquad M=Sx=-\tfrac{1}{2}Wx \quad \text{உம் ஆகும்.}$$

எனவே K_1 என்னும் புள்ளியில, அப்புளளியின இடப் பககததிலுளள பாகமீது தாக்கு இனற கொய விசையானது கீழ்முகமாகவும், அதேநேரம் கூனல் திருப்பமானது இடஞ்சுழி யாகவும் அமைந்திருககினறன.

அதுபோலவே, K_2 எனபது A யிலிருநது தூரம் x, $a < x < 2a$ இலுள்ள குறுக்கு வெட்டொனறுயின் படம் 8·03 (c) யிற் காணக. சமநிலைக்கான நிபந்தனைகள

$$\frac{W}{2}+S=W, \text{ அதாவது } S=\frac{W}{2} \qquad \text{உம}$$

$$M+Wa-Sx=0, \quad \text{அதாவது } M=-Wa+\tfrac{1}{2}Wx \quad \text{உம}$$

ஆகும்.

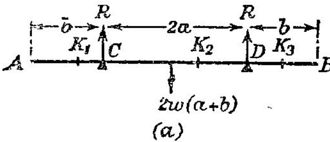
ஒவ்வோர் எடுததுக்காட்டிலும், முனனர் நிலைநிறுத்தியுளள சூததிரததிற்கு இணங்க

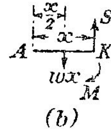
$$\frac{dM}{dx}=S \quad \text{உம்} \qquad \frac{d^2M}{dx^2}=0 \quad \text{உம்}$$

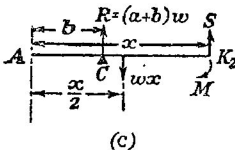
எனக் காணகிறோம.

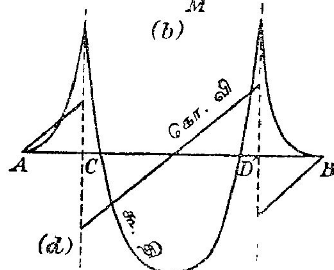
இபபயிறசிக்குப பொருத்தமான கொய்விசை வரிபபடமும கூனல் திருப்ப வரிப்படமும் படம் 8·03 (*d*) யில் சுட்டிக காட்டப்பட்டிருககினறன.

எடுத்துக்காட்டு (ii).—அலகு நீளமொனறிற்கு நிறை w வும நீளம் $2(a+b)$ யும கொண்ட சீரான வளையானது, ஒவ்வொனறும் அதறகு அணிததாயுள்ள நுனியிலிருந்து தூரம் b யில் இருககினற தாஙகிகளால் கிடையான நிலையில தாஙகப்பட்டிருககிறது. வளையில வெவ்வேறு குறுககுவெட்டுகளில கொய்விசை, கூனல திருப்பம் எனபவறறின பெறுமானஙகளை ஆராய்க.









படம் 8·04. சமச்சீராய் வைக்கப்பட்டுள்ள தாங்கிகள் மீது புறச் சுமையேற்றுத, பாரமுள்ள சீரான வளை.

படம் 8·04 (*a*) யில் காட்டியுள்ளதுபோலே தாங்கியொவ்வொனறிலும் தாக்கம் R ஆகுக. அப்பொழுது $R=(a+b)w$. பாகம AK_1 இன் சமநிலையைக் கருதுக, இங்கு, x என்பது

வளையின நுனி A யிலிருநது K_1 இன் தூரமும $0<x<b$ யும் ஆகும். படம் 8·04 (b) யில் காட்டியுள்ளவாறு S உம் M உம இருககடடும். அப்பொழுது சமநிலை நிபந்தனைகளுககு

$$S=wx \qquad \text{உம்}$$

$$M=Sx-wx(\tfrac{1}{2}x)=\tfrac{1}{2}wx^2 \qquad \text{உமாம்.}$$

அடுதது வளையின பாகம AK_2 ஐக கருதுக ; இஙகு A யிலிருந்து K_2 இன் தூரம் x ஆனது $b<x<(b+2a)$ எனபதறகேற்ப அமைநதிருககிறது. சமநிலையின பொருட்டுப் படம் 8·04 (c) யைக் காணக,

$$S+(a+b)w=wx \qquad \text{உம்}$$

$$M+R(x-b)-\tfrac{1}{2}wx^2=0 \qquad \text{உம}$$

ஆதல் வேணடும்.

$$\therefore \quad S=(x-a-b)\,w \qquad \text{உம்}$$

$$M=\tfrac{1}{2}wx^2-w(a+b)(x-b) \qquad \text{உமாம.}$$

முறைமையான ஆய்வை வளையில இரணடாவது தாஙகிக்கு அப்பாலிருககின்ற பாகத்திற்கு நடாத்த வேணடியதிலலை ; ஏனெனில B யிலிருநது தூரம் z, $b>z>0$ இலுளள புளளி K_3 இல தாககுகினற கொயவிசையும கூனல திருபபமும் A யிலிருநது தூரம $x=|z|$ இல் அவற்றிற்கு ஒததததாய தாககுகினற கணியஙகளுககுப பெறுமானததைப பொறுததமட்டில் சமனுகவும போககைப பொறுததமட்டில எதிராகவும உள. கொயவிசை, கூனல திருப்பம் என்பவறறிறகுரிய வரிபபடங்கள படம் 8·04 (d) யில காட்டியுள்ளவாறுகும்.

முனைநெம்பு.—முனைநெம்பு என்பது அதன் ஒரு நுனி சுவரொன்றிலோ வேறொரு விறைப்பான தாங்கியொனறிலோ நிலையாக்கிய நீளம் l ஐ உடைய சீரான கிடையான கோல AB இனுலானது, படம் 8·05 (a). அதன் சொந்த நிறை புறக்கணிக்கததக்கது எனவும அதன் சுயாதீன நுனியில் நிறை W ஐ அது காவுகினறது எனவும நாம் முதனமுதலிலே கொள்வோம். நிலைதத நுனியில் மேலமுகமான தாக்கம் R உம் கோல்மீது சுவர் பிரயோகிககின்ற இணை Z உம் ஆகுக.

முழுக்கோலினதுஞ் சமநிலையைக் கருதுமிடத்து :

$$R-W=0 \qquad \text{உம்}$$

$$Z+Wl=0 \qquad \text{உம்}$$

அல்லது

$$R=W \quad \text{உம்} \qquad Z=-Wl \quad \text{உமாம்.}$$

எனவே இங்கு ஏற்றுக்கொண்ட வழக்கின்படி இணை இடஞ்சுழியானது.

அடுத்து நெம்பின பாகம் AK இன் சமநிலையைக் கருதுக, இங்கு K ஆனது A யிலிருந்து தூரம் x இலுள்ள வெட்டாகும், $0<x<l$. நெம்பின் இபபாகமீது தாக்குகின்ற விசைகளும, இணைகளும் படம் 8·05 (b) யிற் காட்டியுள்ளவாறு அமைந்திருக்கின்றன. சமநிலைக்குரிய நிபந்தனைகளின்படி

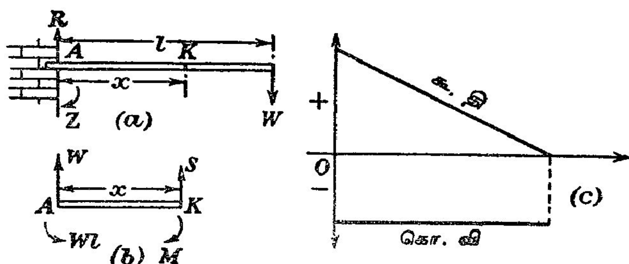
$$W+S=0 \quad \text{அல்லது} \quad S=-W \qquad \text{ஆகவும்}$$

$$M-Wl-Sx=0 \qquad \text{ஆகவும்}$$

வேண்டும் ; அதாவது

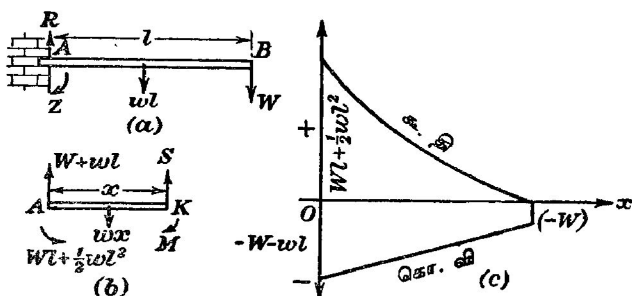
$$M=W(l-x).$$

எனவே கொய்விசை வரிப்படமும் கூனல் திருப்ப வரிப்படமும் படம் 8·05 (c) யில் காட்டியுள்ளவாறு அமைகின்றன.



படம் 8·05. புறக்கணிக்கத்தக்க நிறையையுடைய நெம்பு.

அடுத்து மேற்படி நெம்பானது அலகுநீளம் ஒன்றிற்கு நிறை w உடையது எனக் கொள்க. நிலைத்த நுனியில் நிலைக்குத்தான தாக்கம் R உம் கோல்மீது சுவர் தாக்கும் இணை Z உம் ஆகுக, படம் 8·06 (*a*).



படம் 8·06. அதன் சுயாதீன நுனியில் சுமையேற்றிய சீரான நெம்பு.

முழுநெம்பின் சமநிலையைக் கருதுவோம் ; அதற்கான நிபந்தனைகள்

$$R - wl - W = 0 \quad \text{உம்}$$

$$Z + Wl + \tfrac{1}{2}wl^2 = 0 \quad \text{உமாம்.}$$

எனவே

$$R = W + wl \quad \text{உம்}$$

$$Z = -Wl - \tfrac{1}{2}wl^2 \quad \text{உமாம்.}$$

அதாவது இவ்விணையானது பெறுமானம் $(Wl + \frac{1}{2}wl^2)$ உடையது ; அது இடஞ்சுழியாகத் தாக்குகிறது.

அடுத்து நிலைத்த நுனியிலிருந்து தூரம் x இலுள்ள குறுக்குவெட்டில் கொய்விசை S உம் கூனல் திருப்பம் M உம் ஆகுக ; இங்கு $0 < x < l$. அப்பொழுது நெம்பின் இப்பாகமீது தாக்குகின்ற விசைகளும், இணைகளும் படம் 8·06 (b) யில் காட்டியுள்ளவாறு அமைந்திருக்கின்றன. சமநிலையையிட்டு

$$W + wl + S = wx,$$

அதாவது $$S = -W - w(l - x)$$ எனவும்,

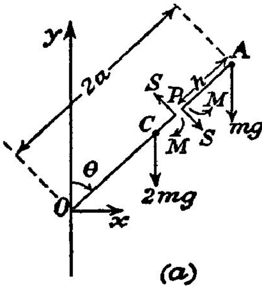
A ஐக் குறித்து விசைகளின் திருப்பங்களைக் கணித்து

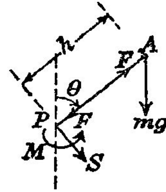
$$M + \tfrac{1}{2}wx^2 - Wl - \tfrac{1}{2}wl^2 - Sx = 0$$ எனவும்

பெறுகிறோம்.

$$\therefore \quad M = [-W - w(l - x)]x - \tfrac{1}{2}wx^2 + Wl + \tfrac{1}{2}wl^2$$
$$= W(l - x) + \tfrac{1}{2}w(l - x)^2.$$

எடுத்துக்காட்டு.—





படம் 8·07.

நிலைக்குத்தான தளமொன்றில் சுழலுமாறு, நீளம் $2a$ ஐ உடைய இலேசான ஆனால் விறைப்பான கோல் OA ஆனது நிலைத்த புள்ளி O வில் அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. கோலில் A என்னும் புள்ளியில், திணிவு m ஐ உடைய துணிக்கையொன்றும், அதன் மையம் C யில் திணிவு $2m$ ஐ உடைய இன்னுமொன்றும் விறைப்பாகப் பற்றப்பட்டிருக்கின்றன. கோலானது ஓய்வுநிலையில், மேல்முகமான நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் கோணம் α வை ஆக்கும்பொழுது விடுவிக்கப்படுகிறது. மேல்முகமான நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் அது கோணம் θ வை ஆக்குங்கால் அதன் கோணவேகம் $\dot{\theta}$,

$$3a\,\dot{\theta}^2 = 4g\,(\text{கோசை}\,\alpha - \text{கோசை}\,\theta)$$

என்பதால் தரப்படுகிறது எனக் காட்டுக.

மேலும் கோலின் கோண ஆர்முடுகலையும், A யிலிருந்து தூரம் $h(h < a)$ இலுள்ள குறுக்கு வெட்டில் கொய்விசை, கூனல் திருப்பம் என்பவற்றையும் துணிக. கோசை θ வின் எந்தப் பெறுமானங்களுக்குக் கோலின் மேலரைவாசி நெருக்கமுறுநிலையில் இருக்கிறது ?

Oy உடன் கோலானது கோணம் θ வை ஆக்கும்பொழுது கோலமீதுள்ள புற விசைகளாக, A யில mg யும் C யில் $2mg$ யும் O வில தாககமும உளளன. ஓய்வு நிலையிலிருநதே கோல விடுவிககபபட்டதால சகதித தத்துவம

$$\tfrac{1}{2}.2m.a^2\dot{\theta}^2+\tfrac{1}{2}.m.4a^2.\dot{\theta}^2+2mg.a\text{ கோசை }\theta+mg.2a\text{ கோசை }\theta$$
$$=2mg.a\text{ கோசை }\alpha+mg.2a\text{ கோசை}\alpha.$$

அதாவது $$3a\dot{\theta}^2=4g\,(\text{கோசை }\alpha-\text{கோசை }\theta)$$

எனவே $$\ddot{\theta}=\frac{2}{3}\cdot\frac{g}{a}\cdot\text{சைன் }\theta.$$

அடுதது குறுககுவெட்டு P யில கொயவிசைகள SS, கூனற்றிருபபஙகள MM எனபவற்றைக் கருதுக ; இஙகு PA $=h$; கோல விறைபபானதாதலால மீளதனமை பறறிய கருததுககள் எழமாட்டா, கீழே காணக. இனி A யின ஆர்முடுகலானது, OA யிறகுச் செஙகுததாக $2a\ddot{\theta}$ உம, AO வழியே $2a\dot{\theta}^2$ உம உடையதாகும. எனவே PA மீதுளள விசைகளைப் PA யிறகுச் செஙகுததாகத் துணிகக,

$$m(2a\ddot{\theta})=mg\text{ சைன் }\theta+\text{S}.$$

P பற்றி விசைகளின திருபபங்களைக கணிகக,

$$m(2a\ddot{\theta})h=mgh\text{ சைன }\theta-\text{M}.$$

$$\therefore\quad \text{S}=2am\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{g}{a}\text{ சைன் }\theta-mg\text{ சைன் }\theta,$$
$$=m[\tfrac{4}{3}g\text{ சைன }\theta-g\text{ சைன் }\theta]=\tfrac{1}{3}mg\text{ சைன் }\theta,$$

அத்துடன் $$\text{M}=-2am\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{g}{a}\cdot\text{சைன் }\theta\cdot h+mgh\text{ சைன் }\theta$$
$$=-\tfrac{1}{3}mgh\text{ சைன் }\theta.$$

இனி கோலின் பாகம் PA யில் உதைப்பு F எனக்கொள்க. A யிலுள்ள திணிவு m மீது தாக்குகின்ற விசைகள் படம் 8·07 (b) யில் காட்டியுள்ள வாறு அமைநதிருக்கின்றன. AP வழியே விசைகளைத் துணிகக,

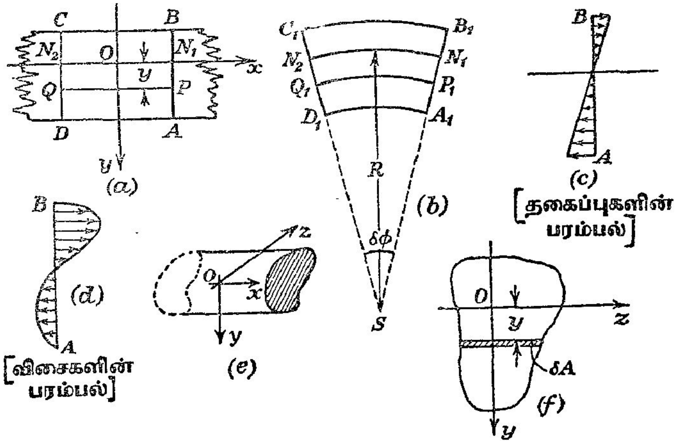
$$m(2a.\dot{\theta}^2)=mg\text{ கோசை }\theta-\text{F}.$$
$$\therefore\quad \text{F}=mg\text{ கோசை }\theta-2a\dot{\theta}^2.m$$
$$=mg\text{ கோசை }\theta-2am.\frac{4g}{3a}(\text{கோசை }\alpha-\text{கோசை }\theta)$$
$$=\tfrac{1}{3}mg[11\text{ கோசை }\theta-8\text{ கோசை }\alpha].$$

$\therefore\ \theta=\alpha$ ஆகுமிடத்து F நேராகும் ; θ கூடுங்கால் அது குறைகிறது ; கோசை $\theta=\frac{8}{11}$ கோசை α ஆகுமிடத்து அதன் குறி மாறுகிறது.

ஆகவே தொடக்கத்தில் F ஓர் அமுக்கம் ஆகும் ; கோசை $\theta<\frac{8}{11}$ கோசை α ஆகும்பொழுது அது ஓர் இழுவை ஆகிறது.

கூனலால் ஆகும் தகைப்புக்கள்.—படம் 8·08 (a) யில் விகாரப்படாத நிலையில் நேராக இருக்கின்ற கோலொன்றினது மூலகத்தின் நெட்டாங்கு வெட்டு ABCD ஆகுக ; இருந்தாலும் இனி கோல் விறைப்பானது

அன்று ; எனவே கீழே காட்டியுள்ளவாறு அதனது மீள்தன்மை மட்டைக் கருதவேண்டும். கோலின் சடம் சமவியல்புடையது எனவும் ஓரினமானது எனவும் கொள்ளப்படுகிறது. வரிப்படத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான குறுக்கு வெட்டின் வடிவம் இங்கு தொடர்பில்லாதது. இணையொன்றின் பிரயோகத்தால் வளையானது கூனப்பட்ட பின்னர் அதன் அதே மூலகத்தின் நெட்டாங்கு வெட்டைப் படம் 8·07 (b) காட்டுகிறது ; இவ்வண்ணம் கூனல் ஆக்கப்படும்பொழுது அது **தூய கூனல்** எனப்படும். வளையின் எந்தப் புள்ளியிலும் மீள்தன்மையெல்லை மீறப்படவில்லை எனக்



படம் 8·08. **இணையொன்றின் பிரயோகத்தால் கூனலுற்ற வளை. [தூய கூனல்.]**

கொள்ளப்படும். இந்நெட்டாங்கு வெட்டிலுள்ள எந்தப் புள்ளியின் நிலையும் செவ்வகவச்சுக்கள் Ox, Oy என்பவை தொடர்பாகக் குறிக்கப்படுக ; y யின் நேரான திசை கீழ்முகமானது என்பது குறித்தற்பாலது.

குறுக்குவெட்டு AB யில் கூனல் திருப்பம் M எனின், அப்பொழுது வளையின் மேற்பாகத்து இழைகள் ஈர்க்கப்பட்டும் அதன் கீழ்ப்பாகத்து இழைகள் அமுக்கப்பட்டும் இருப்பதைப் படம் 8·07 (b) எடுத்துக் காட்டுகிறது. வரையறுத்த பரப்பொன்றின்மீதுள்ள இழைகள் விகாரப்படமாட்டா ; அதுவே **நடுநிலைப் பரப்பு** ; அதன அடையாளம் N_1N_2 என்பது x ஆள்கூற்றச்சாக எடுக்கப்படுகிறது ; அவ்வடையாளமானது வழக்கமாக வளையின் **நடுநிலையச்சு** எனக் குறிக்கப்படுகிறது. P_1Q_1 வழியேயுள்ள விகாரமானது [அது x அதிகரிக்குந் திசையில் நேர் எனக் கருதப்படும்].

$$\frac{P_1Q_1 - PQ}{PQ} = \frac{(R-y)\,\delta\phi - R\,\delta\phi}{R\,\delta\phi} = -\frac{y}{R}.$$

இங்கு R என்பது N_1N_2 இலிருந்து B_1A_1 உம் C_1D_1 உம் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியின் தூரமும், $\delta\phi$ என்பது காட்டப்பட்ட கோணமும் ஆகும். தகைப்பு $-\frac{E}{R}y$ ஆகும் ; இங்கு E என்பது வளையின் திரவியத்து யங்கின் மட்டு ஆகும். இங்கு இழையொவ்வொன்றும் நெட்டாங்காக விரியவும் குறுக்குப்பக்கமாகச் சுருங்கவும் சுயாதீனமாய் முடியும் எனக் கொள்ளப்படுகிறது ; அதாவது தகைப்புறுங்காலே மற்றெல்லா அடுக்குகளிலிருந்து பிரிந்திருக்கிறதுபோல் அது தொழிற்படுகிறது. இல்லாவிடில் E, வளையின் திரவியத்து யங்கின மட்டு ஆகமாட்டாது ; அது வேறொரு மீள்தன்மைக் குணகம் ஆகும்.

எனவே தகைப்பானது நடுநிலைப் பரப்பிலிருந்து அது கருதப்படும் புள்ளியினது தூரத்தின் ஏகபரிமாணச் சார்பு ஆகும், படம் 8·08 (*c*) யைப் பார்க்க. இனி நாம் ஏற்றுக்கொண்ட வழக்கின்படி AB யின் புள்ளியொன்றிலுள்ள தகைப்பானது வளையில் AB இற்கு வலப்பக்கமாக இருக்கின்ற பாகத்தால் ஆனது ; எனவே AB மீது தாக்குகின்ற விசைத் தொகுதியின் திருப்பமானது கூனல் திருப்பம் M ஆய் இருத்தல் வேண்டும், படம் 8·08 (*d*) யைப் பார்க்க.

எமது x, y அச்சுக்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதும் மூன்றாவது, அதாவது z அச்சானது படம் 8·08 (*e*) யில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு அமைந்திருக்கும். படம் 8·08 (*f*) இல், δA என்பது வளையின் குறுக்குவெட்டிலுள்ள பரப்பின் மூலகமொன்று என்க ; அம்மூலகத்தின் நீளம் z அச்சுக்குச் சமாந்தரம்; அதன் அகலம் δy. இனி இப்பரப்பின் மூலகத்தினிடத்து x அதிகரிக்குந் திசையில், அதன் மீதுள்ள விசை $\left(-\frac{E}{R}y\right)\delta A$, எனவே குறுக்குவெட்டு AB மீதுள்ள முழு விசையும்

$$-\frac{E}{R}\int y\,dA.$$

கூனல் தூயது எனக் கொள்ளப்பட்டபடியால் இது பூச்சியமாகும். [தொகையீடானது கருதப்படும் குறுக்குவெட்டு முற்றிலும் செய்யப்படுகிறது.]

$$\therefore\ \int y\,dA=0.$$

ஆனால்

$$\int y\,dA=\bar{y}A\,;$$

இங்கு $\bar{y}$ ஆனது Oz இலிருந்து வெட்டினது மையப்போலியின் தூரம் ஆகும் ; அதாவது $\bar{y}=0$ அல்லது நடுநிலையச்சானது வெட்டினது மையப்போலியூடாகச் செல்லுகின்றது.

வலஞ்சுழித் திசையில் நடுநிலைப்பரப்பு **ஊடே செல்லுகின்ற நேர்கோடொன்று** பற்றி வெட்டு மீது தாக்குகின்ற **விசைகளின்** திருப்பமானது

$$-\left[-\frac{E}{R}\int y.y\,dA\right]=\frac{E}{R}\int y^2\,dA=\frac{EI}{R};$$

இங்கு I கருதப்படும் வெட்டின் சடத்துவத் திருப்பம் ஆகும். [அது திணிவைச் சார்ந்திராதபடியால் I எனபது உணமையான சடத்துவத் திருப்பம் அன்று என வறபுறுத்தப்படுகிறது ; $\int y^2\,dA$ ஐக் குறிக்குமுகமாக மட்டுமே I பயன்படுத்தப்படுகிறது ; முந்தியது நடுநிலையச்சுப் பற்றி **பரப்பின் இருபடித் திருப்பம்** ஆகும். சிலவேளைகளில் அது பரப்பின் **இரண்டாவது பரப்பளவுத் திருப்பம்** என அழைக்கப்படுகிறது. அதன் பெறுமானம், குறுககு வெட்டின் அளவு, வடிவம் என்பவற்றாலும் நடுநிலையச்சின் தானத்தாலும் மட்டுமே நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது].

R^{-1} இற்குப் பதிலாக $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐப் புகுத்தக்கூடிய அளவில் வளையின் கூனல் சிறிதாய் இருப்பதால்

$$M=\frac{EI}{R}=EI\frac{d^2y}{dx^2}.$$

[$\frac{d^2y}{dx^2}$ மறை எனின், வளைவாரையும் மறையாகும் ; அதாவது y யின் மறைப் பக்கத்துப் புள்ளியொன்றிலிருந்து பார்க்கும்பொழுது வளையின் அணித்தாயுள்ள பரப்பு குழிவுள்ளது.]

EI என்னும் காரணி வளையின் **வளைவு விறைப்பு** எனப்படும்.

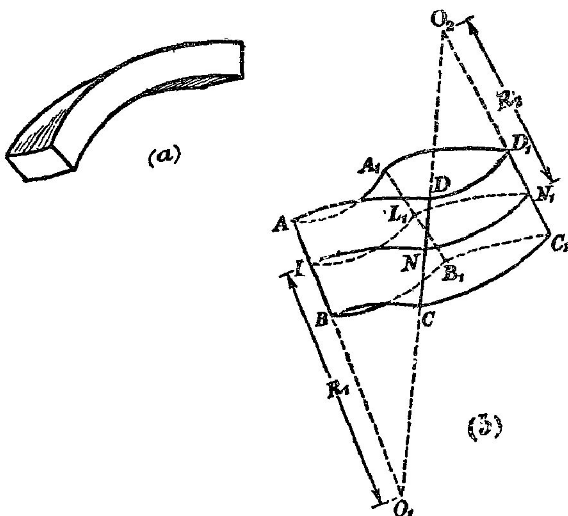
$|p|=\frac{E}{R}|y|$ ஆதலின் நெட்டாங்குத் தகைப்பானது நடுநிலைப் பரப்பிலிருந்து (வெட்டின்) மிகத்தூரமான எல்லையில் ஓர் உயர்வு ஆகும். $M=\frac{EI}{R}$ ஆதலின் $|p|=\frac{M}{I}|y|$ என்பது தெளிவாகும்.

சாதாரண கூனல்.—எளிய கூனல் பற்றிய ஆய்வொன்று ஏற்கெனவே தரப்பட்டிருக்கிறது ; அது கூனலுக்குரிய சிறப்பு எடுத்துக்காட்டொன்றுகும் ; அவ்வெடுத்துக்காட்டில் கொய்விசை இல்லை. பெரும்பாலும் நடைமுறையில், கூனலுடன் எப்பொழுதும் கொய்விசைகள் தோன்றுகின்றன ; அவை வளையின் குறுக்கு வெட்டுகளில நிலைக்குத்தான கொய்வொன்றை உண்டாக்க முயல்கின்றன. இது நிகழும்பொழுது பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, எந்த வெட்டின் குறுக்கேயும் தாக்கும் விசைகள் இணையொன்றையும் அக்குறுக்கு வெட்டிலுள்ள கொய் விசைகளையும் சமமாக்கல் வேண்டும் ; அதாவது நெட்டாஙகுத் தகைப்பும் தொடலித் தகைப்பொன்றும் உடன் தோன்றும். இருந்தாலும் நடைமுறையில் அமைப்பொன்றைத் திட்டமிடும்பொழுது வருகின்ற எடுத்துக்காட்டுக்களில் எளிய கூனலுக்கான கொள்கையைப் பயன்படுத்துதல் போதியதாகும் எனப் பௌதிக அறிஞரும்

எந்திரியும் முடிவு செய்துள்ளனர். ஆகையால் பின்தொடர்கின்றதில் முற்றிலும் நாம் நிலைநிறுத்தியுள்ள எளிய சூத்திரத்தாலேயே தகைப்புறும் வளையின் வளைவு கூனல் திருப்பத்துடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்வோம்.

குறுக்குக் கூனல் ; முரண் முறிவு வளைவு.—அதன் ஒவ்வோர் இழையும் அமுக்கும் அல்லது இழுக்குந் தகைப்பொன்றால் தாக்கப்படும்பொழுது அவ்விழை தடையினறி முறையே விரிய அல்லது சுருங்க முடியுமாயின், வளையொன்று நெட்டாங்காக அதாவது அதன நீளம் கிடக்கும் தளத்தில், கூனுவிக்கப்படுமிடத்து அக்கூனலுடன் எதிரான வளைவுள்ள குறுக்குக் கூன் ஒன்றும் தோன்றவேண்டும். படம் 8·08 இல கருதியுள்ள வளையி னிடத்து, நடுநிலைப் பரப்பிற்கு மேலேயுள்ள இழைகள் ஈர்க்கப்படுகின்றன ; எனவே அவவொவ்வொனறும் பக்கச் சுருஙகலுறல் வேண்டும் ; அதே நேரம் பககவிரிவுறுமாறு கீழ இழைகள் அமுககபபடுகினறன.

மேற்படி குறிப்புக்களைக் கீழ்வரும் எளிய பரிசோதனை தெளிவாக்கு கிறது. பரிமாணங்கள் கிட்டத்தட்ட 5 சமீ. × 3 சமீ. × 0·5 சமீ. கொண்ட இந்தியா றப்பாத் துணடொன்றின் நீளம் வட்டவில்லொன்றாக வளைக்கப் பட்டால் றப்பரால் ஏற்றுக்கொள்ளப்படும் வடிவம், படம் 8·09 (*a*) யில்



படம் 8·09. குறுக்குக் கூனல் : முரண் முறிவு வளைவு.

காட்டியுள்ளதுபோல் இருக்கும் ; நெட்டாங்கு நார்கள் மட்டுமன்றி அவற் றிற்குச் செங்குத்தான நார்களுங்கூட வட்ட விற்களாகக் கூனபபடுகிறது.

இந்தியா றப்பருக்குக் கீழேயுள்ள புள்ளியொன்றைக் குறித்துக் குழிவாக இருக்கும் வண்ணம் நெட்டாங்கு நார்கள் கூனப்படின், அப்பொழுது றப்பருக்கு மேலேயுள்ள புள்ளியொன்று பற்றிக் குறுக்கு நார்கள் குழிவாக இருக்கும். நெட்டாங்குத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான தளத்தில் ஆக்கப்படும் கூனலானது மாதிரிக்கு **முரண்–முறிவு வளைவு** ஒன்றை அளிக்கின்றது.

இனி செவ்வகக் குறுக்குவெட்டை உடைய வளையொன்று நடுநிலைப் பரப்பிற்கு மேலேயுள்ள இழைகள் ஈர்க்கப்படவும், அதற்குக் கீழேயுள்ள இழைகள அமுக்கப்படவும் எளிய கூனல் உறுகிறது எனக் கருதுக. படம் 8·09 (b) யில் ABCD என்பது கூனலுற்ற வளையின மூலகமொனறின் பக்கமொன்ருகுக ; இப்பக்கமானது கூனல் தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகும். LN என்னுங் கோடு வழியே இப்பக்கம் நடுநிலைப் பரப்பால் வெட்டப் படட்டும். மூலகத்தின் எதிர்ப்பக்கம் $A_1B_1C_1D_1$ ஆகுக ; அதை நடுநிலைப் பரப்பானது L_1N_1 வழியே வெட்டுகிறது. LN இன் வளைவாரை R_1, வளையினது திரவியத்தின் பொய்சோனின் குணகம் σ என்பன தொடர்பாக முரண் முறிவு வளைவாரை R_2, அதாவது LL_1 (அல்லது NN_1) இன் ஆரைக் குக் கோவையொன்றைப் பெற வேண்டும். நீட்டிய AB யும் DC யும் O_1 இற் சந்திக்க ; நீட்டிய CD யும் C_1D_1 உம் O_2 இற் சந்திக்க.

$LN=L_1N_1=a$ யும் $NN_1=LL_1=b$ யும் ஆகுக. அப்பொழுது AL முதலியன $=h$ எனின்

$$\frac{AD}{LN}=\frac{R_1+h}{R_1} \qquad \text{அதாவது } AD=a\left(1+\frac{h}{R_1}\right).$$

மேலும்

$$\frac{DD_1}{NN_1}=\frac{R_2-h}{R_2} \qquad \text{அதாவது } DD_1=b\left(1-\frac{h}{R_2}\right).$$

ஆனல் $\dfrac{AD-LN}{LN}=AD$ வழியேயுள்ள நெட்டாங்கு விகாரம் ;

மேலும்

$\dfrac{NN_1-DD_1}{NN_1}=DD_1$ வழியே அலகு அகலமொன்றிற்கான பக்கச் சுருங்கல்.

$$\therefore\ \sigma\left[\frac{AD}{a}-1\right]=\left[1-\frac{DD_1}{b}\right];$$

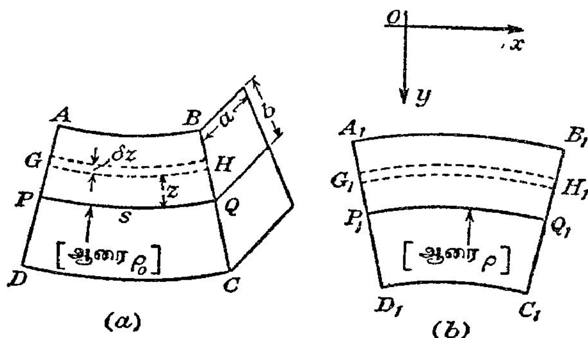
அதாவது

$$R_1=\sigma R_2.$$

தொடக்கத்திலே சரி நேரல்லாத வளையொன்றின் கூனல்.—படம் 8·10(a) யில், ABCD ஆனது சற்றுத் தொடக்கத்தில் கூனலுற்ற வளையொன்றின் மூலகமொன்ருகுக. PQ ஆனது நடுநிலைப் பரப்பு (உண்மையில் வரிப் படத் தளத்தில் அதன் அடையாளம்) ஆகுக. $PQ=s$ ஆனது

ஒரு சிறு முடிவுள்ள நீளம் எனின், அப்பொழுது $\mathrm{AB} = s - \Delta s_0$ என்க. எனவே வரிப்படத்தில் காட்டியுள்ள குறிபபீட்டைப் பயன்படுத்த,

$$\frac{s - \Delta s_0}{s} = \frac{\rho_0 - b}{\rho_0} \text{ அல்லது } \frac{\Delta s_0}{s} = \frac{b}{\rho_0}.$$



படம் 8·10. சிறு தொடக்க வளைவுற்றிருக்கின்ற வளையொன்றின் கூனல்.

கூனலை ஆக்கும் பொருட்டு வளைமீது தரப்பட்ட விசைத்தொகுதியொன்று பிரயோகிக்கபபட்ட பின்னர் AB ஆனது $\mathrm{A_1B_1}$ ஆகினுல், $\mathrm{A_1B_1} = s + \Delta s$ என்க. அப்பொழுது

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{b}{\rho};$$

இங்கு ρ, நடுநிலைப் பரப்பின் புது வளைவாரை ஆகும் ; எல்லாக் கணியங்களும் எண் கணியங்களாகவே கருதப்படுகின்றன. எனவே AB யின் நீளமானது $\Delta s + \Delta s_0 = sb\left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0}\right]$ என்பதால் கூடியிருக்கிறது.

அடுத்து, (புள்ளியிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ள) இழை GH ஐக் கருதுக ; அது PQ விற்கு மேலே உயரம் z இல் இருக்கிறது. இது $\mathrm{G_1H_1}$ ஆகும் பொழுது உண்டாகின்ற நீட்சி η,

$$\frac{\eta}{\Delta s + \Delta s_0} = \frac{z}{b}, \text{ அல்லது } \eta = zs\left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0}\right]$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

வளையினது திரவியத்தின் யங்கின் மட்டு E எனின் [வழக்கம்போல் வளை நெருக்கப்பட்டிருக்கும்போதுஞ் சரி அது ஈர்க்கப்பட்டிருக்கும்போதுஞ்

சரி E யின் பெறுமானம் அதுவே எனக் கொள்கிறோம்] அப்பொழுது

$$\mathrm{E}=\frac{\dfrac{\text{GH மீது அதற்கடுத்துள்ள இழைகளால் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற ஈர்க்கும் விசை}}{a\,\delta z}}{zs\left[\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{1}{\rho_0}\right]\div s\left]1-\dfrac{z}{\rho_0}\right]}$$

$$=\frac{\text{ஈர்க்கும்விசை}}{a\,\delta z}\div z\left[\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_0}\right],\quad \frac{z}{\rho_0}\rightarrow 0 \text{ எனின்.}$$

$$\therefore \text{ ஈர்க்கும் விசை}=a\,\mathrm{E}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_0}\right]z\,\delta z.$$

காட்டப்பட்ட மூலகத்தின் நுனியை நடுநிலைப் பரப்பு வெட்டும் புள்ளி Q ஊடே செல்லுகினற நேர்கோட்டைக குறித்து இவ்விசையின் திருப்பம்

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_0}\right]z^2\,\delta z$$

ஆகும்.

ஈர்க்கும் விசைமுழுவதும் பூச்சியம் ஆதலின், PQ என்பது மூலகத்தினது குறுக்குவெட்டின் திணிவுமையம் ஊடே செல்லுகின்ற தளமொன்றில் கிடக்கவேண்டும் ; எனவே முழுத்திருப்பம் M ஆனது

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_0}\right]\int az^2\,\delta z$$

ஆகும் ; இங்கு தொகையீடு வளையின் ஆழம் முற்றிலும் செய்யப்படுகிறது.

$$\therefore\ \mathrm{M}=\mathrm{EI}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_0}\right],\quad \mathrm{I}=\int az^2\,dz \text{ எனின்.}$$

உண்மை கூறுமிடத்து ρ நேர் எனின் ρ_0 மறையாகும்; எனவே மேற்படி சூத்திரத்தை

$$\mathrm{M}=\mathrm{EI}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}\right],$$

அதாவது M = EI × வளைவுமாற்றம் என எழுதினுல் அது சாலவும் நன்று.

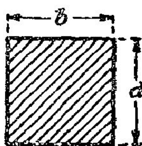
வேறுமுறை : வளையின் கருதப்படும் மூலகத்தை நேராக்கும் பொருட்டு $\mathrm{M}_0=\dfrac{\mathrm{EI}}{\rho_0}$ என்பதால் தரப்படும் கூனல் திருப்பம் M_0 ஐப் பிரயோகித்தாக வேண்டும். அதிகப்படியான வளைவை ஆக்கும்பொருட்டு $\dfrac{\mathrm{EI}}{\rho}$ விஞல் தரப்படும் கூனல் திருப்பம் அதிகப்படியாகத் தேவைப்படுகின்றது. எனவே வளைவை ρ_0 இலிருந்து ρ இற்கு மாற்றிவைக்கத் தேவைப்படுகின்ற முழுக் கூனல்

திருப்பம்

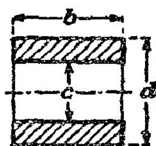
$$M = EI\left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0}\right]$$

$= EI \times$ *வளைவுமாற்றம்.*

இங்கு குறிகள் கணக்கில் சேர்க்கப்படவில்லை.



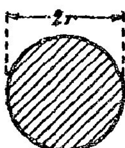
$I = \frac{1}{12} bd^3$



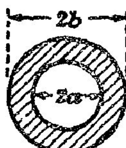
$I = \frac{1}{12} b(d^3 - c^3)$



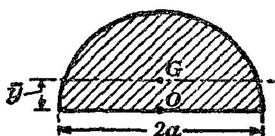
$I = \frac{1}{48} bd^3$



$I = \frac{1}{4}\pi r^4$



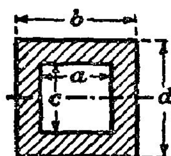
$I = \frac{1}{4}\pi(b^4 - a^4)$

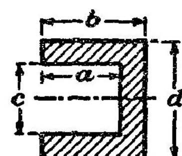


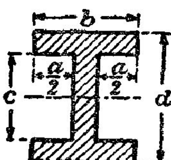
$\bar{y} = \frac{4a}{3\pi} = 0{\cdot}424a$

$I = \frac{1}{8}\pi a^4 - \pi a^2\left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2$

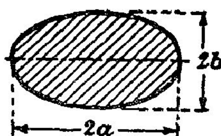
$= 0{\cdot}110a^4$



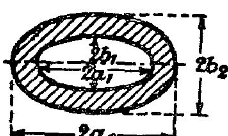




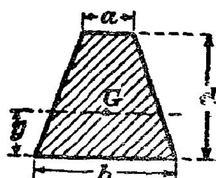
$I = \frac{1}{12}(bd^3 - ac^3)$



$I = \frac{\pi}{4} ab^3$



$I = \frac{\pi}{4}(a_2 b_2^3 - a_1 b_1^3)$

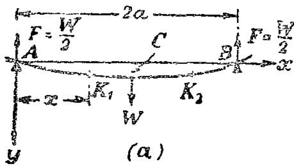


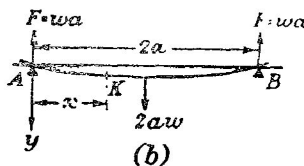
$\bar{y} = \frac{d(2a + b)}{3(a + b)}$

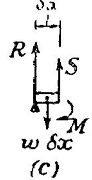
$I = \frac{(a^2 + 4ab + b^2)d^3}{36(a + b)}$

வெவ்வேறு குறுக்குவெட்டுகளுக்கான ''சடத்துவத் திருப்பங்கள்'' அல்லது இரண்டாவது பரப்பளவுத் திருப்பங்கள் என்பவற்றின் அட்டவணையில் ஒவ்வொரு பெறுமானமும் பரப்பளவின் '' புயியீர்ப்பு மையம் '' ஊடே செல்லுகின்ற கிடையச்சொன்று பற்றிப் பெற்றுள்ளதாகும்.

அதனது நுனிகளில் தாங்கப்பட்டதும் மையமான சுமையொன்றைக் காவுகின்றதுமான இலேசான வளை.—படம் 8·11 (a) யில், அதனது நுனிகளிலுள்ள தாங்கிகள் மீது, கிடையான நிலையில், ஓய்வாயிருக்கின்ற வளை AB ஆகுக. வளையின் நீளம் $2a$ ஆகுக ; அதன மையப் புள்ளியில் நிறை W வை உடைய சுமையொன்றை அது காவுகிறது எனக் கொள்க. வளை இலேசானது ; எனவே W உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்பொழுது அதன் சொந்த நிறை புறக்கணிக்கத்தக்கது. தாங்கிகளில தாக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும $\frac{1}{2}$W ஆகும் ; அவை மேனமுகமாகத் தாக்குகின்றன. அப்பொழுது வழக்கம்போலே, A யிலிருந்து தூரம் x இல் இருக்கின்ற







படம் 8·11. வளையொன்றில் (a) மாறுகின்ற, (b) சீரான சுமையேற்றுதல்.

புள்ளி K_1 இல் கொய்விசை S ஆனது $-\frac{1}{2}$W எனவும் அதேநேரம் கூனற்றிருப்பம் M ஆனது $M = -\frac{1}{2}Wx$ எனபதால் தரப்படுகினறது எனவும் காண்கிறோம் ; இங்கு $0 \leqslant x \leqslant a$.

எனவே

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = M = -\tfrac{1}{2}Wx \text{ அல்லது } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}.\frac{W}{EI}.x.$$

இச்சமன்பாட்டைத் தொகையிடும்போது

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}.\frac{W}{EI}.x^2 + A.$$

இங்கு A ஆனது தொகையீட்டு மாறிலியொன்றாகும். $x = a$ என்னும் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx}$ பூச்சியம் ஆதலின்,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = 0 = -\frac{1}{4}.\frac{W}{EI}.a^2 + A.$$

$$\therefore\ A = \frac{1}{4}.\frac{W}{EI}.a^2.$$

மீண்டும் தொகையிட,

$$y = -\frac{1}{12}.\frac{W}{EI}.x^3 + \frac{1}{4}.\frac{W}{EI}.a^2x.$$

$x = 0$ ஆகுமிடத்துக் கோணல் பூச்சியம் ஆதலின் இன்னுமொரு மாறிலியைச் சேர்க்கவேண்டியதில்லை.

எனவே வளையின் மையத்தில் கோணல்

$$[y]_{x=a}=\frac{1}{6}.\frac{W}{EI}.a^3$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

மேலும் தாங்கிகளில் வளையின் சரிவு, x பூச்சியமாகும்பொழுது $\frac{dy}{dx}$ இன் பெறுமானமே ஆகும். A யில் கிடைத்தளத்துடன் வளை ஆக்கும் கோணம் θ ஆயின்

$$\text{தான் } \theta=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\frac{1}{4}.\frac{W}{EI}.a^2.$$

இவ்வெடுத்துக்காட்டில் வளையின பாகம் CB எனபதிலுள்ள புள்ளி K_2 இல், தொகுதியின் சமச்சீரைக் கருதிக் கோணலை உடனே எழுதலாம். இருந்தாலும், இதனிலும் சிக்கலான எடுத்துக்காட்டுக்களில் கையாளப்படும் முறையை விளக்கும்பொருட்டு முழுத் தீர்வும் இத்துடன் தரப்படுகிறது. A யிலிருநது K_2 இன் தூரமானது x ஆகுக; இங்கு $a \leqslant x \leqslant 2a$. அப்பொழுது K_2 இல் கூனற்றிருப்பம்

$$M=-Wa+\frac{W}{2}.x.$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{W}{EI}.a+\frac{1}{2}.\frac{W}{EI}.x.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{W}{EI}.ax+\frac{1}{4}.\frac{W}{EI}.x^2+A_1;$$

இங்கு A_1 என்பது மாறிலியொன்றுகும். $x=a$ ஆகுமிடத்து $\frac{dy}{dx}$ பூச்சியமாகும் என்னும் செய்தியால் அது நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. எனவே

$$0=-\frac{W}{EI}.a^2+\frac{1}{4}.\frac{W}{EI}.a^2+A_1.$$

$$\therefore A_1=\frac{3}{4}.\frac{W}{EI}.a^2.$$

மீண்டும் தொகையிட,

$$y=-\frac{W}{2EI}.ax^2+\frac{1}{12}.\frac{W}{EI}.x^3+\frac{3}{4}.\frac{W}{EI}.a^2x+B_1.$$

B_1 ஒரு தொகையீட்டு மாறிலியாகும். $x=2a$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆதலின்

$$0=\frac{W}{EI}\left[-\tfrac{1}{2}a.4a^2+\tfrac{1}{12}.8a^3+\tfrac{3}{4}a^2.2a+B_1\right].$$

$$\therefore B_1=-\frac{Wa^3}{6EI}.$$

ஆகவே முன்போலவே $\left[Y\right]_{x=a}=\frac{1}{6}.\frac{W}{EI}.a^3.$

சீராகச் சுமையேற்றியுள்ள வளை.—அடுத்து அதனது நுனிகளில் தாங்கப பட்டதும் அலகு நீளமொன்றிற்கு நிறை w என்ற வீதத்தில் சீராகப் பரம்பிய சுமையொன்றைக் காவுகின்றதுமான கிடையான வளையொன்றைக் கருதுக ; இங்கு w இலே வளையின் அலகுநீளமொன்றின் நிறையும் அடங்கலாம் அல்லது அது இந்த நிறை மட்டுமேயாகவும் ஆகலாம். படம் 8·11 (b) யில நீளம் $2a$ ஐ உடைய வளை AB ஆகுக. வழக்கின்படி ஆள்கூற்று அச்சுக்களின் திசைகள் எடுக்கப்படுகின்றன. கூனற்றிருப்பம் தேவைப்படுகின்ற புள்ளி K இலுள்ள குறுக்குவெட்டின் தூரம் x ஆகுக. A யிலுள்ள **உதைப்பு** wa ஆகும். இனி வளையின் பாகம் AK இன் சமநிலையைக் கருதுக; K யில் கொய்விசையும் கூனற்றிருப்பமும் முறையே S உம் M உம் ஆகுக. அப்பொழுது

$$wa+\mathrm{S}=wx, \text{ அதாவது } \mathrm{S}=w(x-a) \qquad \text{உம்}$$

$$\mathrm{M}+\tfrac{1}{2}wx^2-\mathrm{S}x=0 \qquad \text{உமாம்.}$$

எனவே
$$\mathrm{M}=w\left(\frac{x^2}{2}-ax\right).$$

[ந. கு. S இன் பெறுமானமானது எங்களுக்குத் தேவைப்படுவதில்லை ; எனவே K யைக் குறித்து விசைகளின திருப்பங்களை எடுப்பதால் அதைத் துணிவது தவிர்க்கப்படுகிறது ; அப்பொழுது

$$wax+\mathrm{M}-\tfrac{1}{2}wx^2=0\,;$$

எனவே முன்போலவே
$$\mathrm{M}=w\left(\frac{x^2}{2}-ax\right).\ ]$$

எனவே
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left[\tfrac{1}{2}wx^2-wax\right].$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left[\tfrac{1}{6}wx^3-\tfrac{1}{2}wax^2\right]+\mathrm{A}\,;$$

இங்கு A தொகையீட்டு மாறிலி. ஆனால் அதனது மையப்புள்ளியில் வளையானது கிடையாய் இருக்கிறபடியால்

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}=0=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left[\tfrac{1}{6}wa^3-\tfrac{1}{2}wa^3\right]+\mathrm{A},$$

அதாவது
$$\mathrm{A}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\mathrm{EI}}\cdot wa^3.$$

மீண்டும் தொகையிட,

$$y=\frac{1}{\mathrm{EI}}\left[\tfrac{1}{24}wx^4-\tfrac{1}{6}wax^3+\tfrac{1}{3}wa^3x\right].$$

இங்கு $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆதலின் தொகையீட்டு மாறிலி மறைகிறது.

$$\therefore\ \Big[y\Big]_{x=a}=\frac{5}{24}\cdot\frac{wa^4}{\mathrm{EI}}.$$

15—RR19159 (66/11)

வளையால் காவப்படும் முழுச் சுமையின் நிறையை W_0 இனுற குறித்தால் அதாவது $W_0 = 2aw$ ஆனுல், வளையின் மையத்தில் கோணலானது

$$\frac{5}{48} \cdot \frac{W_0 a^3}{EI}.$$

சுமையொன்றை வளையின் மையத்தில் செறித்து வைக்காது, அதை அவ்வளைமீது சீராகப் பரப்பிவைத்தால், உயர்வுக் கோணலானது அதன் முந்திய பெறுமானத்தின் எட்டில் ஐந்திற்குக் குறைக்கப்படுகிறது.

வளையொன்றின் இறுக்கம்.—வளையொன்றின் இறுக்கமானது அவ்வளையின் பாவிற்கு அதன் உயர்வுக்கோணல் கொண்டிருக்கும் விகிதம் என வரைவிலக்கணம் கூறப் படுகிறது. இறுக்கமானது η^{-1} இனுல் குறிக்கபபட்டால், அப்பொழுது பெரிய பாவுடைய உருக்காலான தீராந்திகளிடத்து $1000 < \eta < 2000$. மரத்தாலான வளைகளிடத்து η ஆனது 400 இற்குக் குறையாமல் இருத்தல் வேண்டும்.

வளையொன்றின் கோணலைத் துணிதலுக்குரிய பொது முறை.—வளை களின் கூனல் தொடர்பாக இதுவரை ஆராயப்பட்டுள்ள எந்த எடுத்துக் காட்டிற்கான தீர்வும்

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

என்னும் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்த முடியும் என்னுஞ் செய்தியைப் பொறுத்துள்ளது ; ஏற்கெனவே தரப்பட்டுள்ள முறைகளால் M இன் பொதுப் பெறுமானம் கணிக்கப்பட்டுள்ளது. இனி மிகு சிக்கலான எடுத்துக் காட்டொன்றில் M ஐக் கணிக்குமுன் தாங்கிகளால் வளைமீதுள்ள உதைப்புக் களைத் துணிதல் வேணடும் ; ஆனுல் தாங்கிகளின் தொகை இரண்டை மீறினுல் அவ்வுதைப்புக்களை நிலையியல் முறைகளால் துணியமுடியாது ; எனவே தாங்கிகளின் தொகை இரண்டை மீருமல் இருக்கும்பொழுது மட்டுமே கூனற்றிருப்பத்தைக் கணிக்க முடிகின்றது. ஆனுல் [ப. 383 ஐப பார்க்க].

$$\frac{dS}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = w$$

என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; இங்கு w வளையின் அலகு நீளமொன்றின் நிறையாகும். எனவே வகையீட்டுச் சமன்பாடானது

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w$$

ஆகிறது ; இது

$$EIy^{IV} = w$$

என எழுதப்படும்.

இச்சமன்பாட்டின் தொகையீடானது நான்கு எதேச்சையான மாறிலி களைப் புகுத்துகின்றது ; எடுத்துக்காட்டின் எஞ்சிய நிபந்தனைகளைப் பயன் படுத்தி இவற்றைத் துணியலாம். அதன் நுனிகளில் உள்ள தாங்கிகள் மீது கிடையான நிலையில் இருக்கின்ற சீராகச் சுமையேற்றப்பட்டுள்ள வளை யொன்றின் கோணலை மீண்டும் கருதி, வளையொன்றின் கூனல் பற்றிய எடுத்துக்காட்டொன்றின் ஆய்வில் எவ்வாறு இம்முறை கையாளப்படுகிறது என்பதை விளக்குவோம். ஆனால் இதைச் செய்யுமுன் முதன்மையான தேற்றமொன்றை நாம் நிலைநிறுத்த வேண்டியதாகின்றது.

கொளு.—வளையொன்றின் தாங்கிய நுனியொன்றில் கூனற்றிருப்பம் பூச்சியம் ஆகும் என்பதை நிலைநிறுத்துதல்.

ஆள்கூறுகளின் உற்பத்தி என எடுக்கப்படுகின்ற நுனியில், வளைமீது தாங்கியால் ஆகும் உதைப்பு R எனக் கொள்க. வளையில் தாங்கியிலிருந்து தூரம் δx இலுள்ள குறுக்குவெட்டில் S உம் M உம முறையே கொய் விசையும் கூனற்றிருப்பமும் ஆகுக, படம் 8·11 (c) யைப் பார்க்க. வளையின் இம்மூலகத்தின் சமநிலையையிட்டு பின்வருகின்ற நிபந்தனைகள் நிறைவேற்றப்படவேண்டும்.

(a) நிலைக்குத்தாக விசைகளைத் துணித்தால்

$$S+R-w\,\delta x=0\,;$$

எனவே $\delta x\to 0$ ஆகுமிடத்து எல்லையில் $S=-R$.

(b) உற்பத்தி பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்தால்

$$M+w\,\delta x(\tfrac{1}{2}\delta x)-S\,\delta x=0.$$

இரண்டாம் வரிசையில் பெறப்படும் கணியங்களைப் புறக்கணித்தால்,

$$\begin{aligned} M&=S\,\delta x\\ &=0, \qquad [\delta x\to 0 \text{ ஆகுமிடத்து}]. \end{aligned}$$

எனவே தேற்றம் நிறுவப்பட்டுள்ளது.

அதன் நுனிகளில் தாங்கப்பட்டுள்ள சீராகச் சுமையேற்றிய வளை :— [வேறு முறை].

$$EIy^{IV}=w$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தொகையிட,

$$EIy'''=wx+A\,;$$

இங்கு A துணியவேண்டிய மாறிலியொன்றாகும். மீண்டும் தொகையிட

$$EIy''=\tfrac{1}{2}wx^2+Ax+B.$$

சுயாதீன நுனி $x=0$ இல் கூனற்றிருப்பம் எனவே y'' என்பது பூச்சியம் ஆதலால் மாறிலி B பூச்சியம் ஆகும்.

இன்னுமொருமுறை தொகையிட,

$$EIy' = \frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{2}Ax^2 + C;$$

$x = a$ ஆகுமிடத்து $y' = 0$ ஆதலால் மாறிலி C துணியப்படுகிறது. இது

$$C = -\frac{1}{6}wa^3 - \frac{1}{2}Aa^2$$

எனத் தருகிறது.

மீண்டும் தொகையிட,

$$EIy = \frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{6}Ax^3 - \frac{1}{6}wa^3x - \frac{1}{2}Aa^2x;$$

$x = 0$ என்னும் புள்ளியில் கோணல் பூச்சியம் ஆதலால் இங்கு தொகையீட்டு மாறிலி எதுவும் சேர்க்கப்படாது. $x = 2a$ ஆகுமிடத்தும் y பூச்சியம் ஆகும் என்னுஞ் செய்தியைப் பயன்படுத்தி A துணியப்படுகிறது. இது

$$EI[y]_{x=2a} = 0 = \frac{2}{3}wa^4 + \frac{4}{3}Aa^3 - \frac{1}{3}wa^4 - Aa^3$$

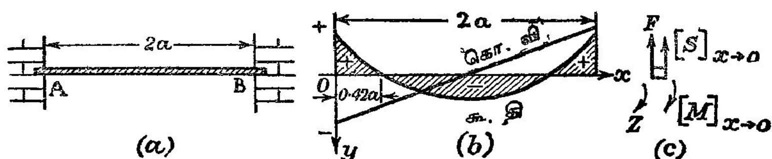
என்பதைத் தருகிறது.

$$\therefore\ A = -wa.$$

எனவே முன்போல

$$EIy = \frac{1}{24}wx^4 - \frac{1}{6}wax^3 - \frac{1}{6}wa^3x + \frac{1}{2}wa^3x$$
$$= \frac{1}{24}wx^4 - \frac{1}{6}wax^3 + \frac{1}{3}wa^3x.$$

நிரந்தரமாக அமைக்கப்பட்ட வளைகள்.—வளையொன்றின் நுனிகளில் சாய்வில் எந்த மாறலேயும் தாங்கிகள் தடுக்கும்வண்ணம் அத்துணை



படம் 8·12. நிரந்தரமாக அமைக்கப்பட்ட வளைகள்.

உறுதியாக அவ்வளையானது அதன நுனிகள் ஒவ்வொன்றிலும் நிலையாக்கப்பட்டிருந்தால், அது **நிரந்தரமாக அமைக்கப்பட்ட வளை** எனறு குறிக்கப்படுகிறது. அதன நுனிகள அதே கிடைத் தளத்தில் கிடக்கும் வண்ணம் அமைந்திருக்கினற வளையே இங்கு கருதப்படுகினறது. சீரான வளையொன்றை இவ்வண்ணம் தாபிப்பதால் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் கோணல் குறைக்கப்படுகிறது எனக் காண்போம்; அதாவது வளையிலே முறியும் இயல்பு குறையும்.

படம் 8·12 (a) யில், AB ஆனது நீளம் $2a$ யும் அலகுநீளம் ஒன்றிற்கு நிறை w வும் உடைய நிரந்தரமாக அமைக்கப்பட்ட சீரான வளையொனருகுக; அதன் நுனிகள் கிடைத் தளமொன்றில் நிலையாக்கப்பட்டு இருக்கின்றன.

அப்பொழுது

$$EIy^{IV}=w$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வானது வளையில் நடுநிலைப பரப்பின் வடிவத்தைத் தரும்; இங்கு காட்டியுள்ளவாறு ஆள்கூற்றச்சுக் கள் அமைந்திருக்கின்றன.

$$\therefore\quad EIy''=\tfrac{1}{2}wx^2+Ax+B \qquad \text{உம்}$$

$$EIy'=\tfrac{1}{6}wx^3+\tfrac{1}{2}Ax^2+Bx+C \qquad \text{உமாம்.}$$

இங்கு A யும் B யும் C யும் தொகையீட்டு மாறிலிகள்.

இனி $x=0$ ஆகுமிடத்தும் $x=2a$ ஆகுமிடத்தும் $y'=0$.

$$\therefore\quad C=0.$$

மேலும் $$EI[y']_{x=2a}=0=\tfrac{4}{3}wa^3+2Aa^2+2Ba.$$

$$\therefore\ EIy=\tfrac{1}{24}wx^4+\tfrac{1}{6}Ax^3+\tfrac{1}{2}Bx^2;$$

இங்கு $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆதலின், தொகையீட்டு மாறிலி பூச்சியப் ஆகின்றது.

$x=2a$ ஆகுமிடத்தும் கோணல் பூச்சியம் ஆகும் என்னுஞ் செய்தியை பயன்படுத்த,

$$EI[y]_{x=2a}=\tfrac{2}{3}wa^4+\tfrac{4}{3}Aa^3+2Ba^2=0.$$

A யிற்கும் B யிற்கும் உரிய சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகண்டால்,

$$A=-wa, \qquad B=\tfrac{1}{3}wa^2.$$

$$\therefore\ EIy=\tfrac{1}{24}wx^4-\tfrac{1}{6}wax^3+\tfrac{1}{6}wa^2x^2.$$

$x=a$ ஆகுமிடத்து வளையின் கோணல் ஓர் உயர்வு ஆகும். அது

$$EI\,[y]_{x=a}=\tfrac{1}{24}wa^4$$

என்பதால் தரப்படுகிறது; அதாவது அதே வளையானது நுனியிலுள்ள தாங்கிகள் மீது சுயாதீனமாக அமர்ந்திருந்தபோது அதன் மையத்தில் கிடைத்த கோணலின் ஐந்தில் ஒன்றே இப்பொழுது கிடைக்கிறது.

கிடையாக, நிரந்தரமாக அமைக்கப்பட்ட வளையின் எந்தப் புள்ளிக்கும் கூனற்றிருப்பம்

$$M=EIy''=\tfrac{1}{2}wx^2-wax+\tfrac{1}{3}wa^2.$$

இங்கு $x=0$ ஆக, $[M]_{x=0}=\tfrac{1}{3}wa^2$;

$x=a$ ஆக, $[M]_{x=a}=-\tfrac{1}{6}wa^2$;

கடைசியே $x=2a$ ஆக, $[M]_{x=2a}=\tfrac{1}{3}wa^2$.

மேலும் $x=a\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}=0\cdot42\,a$ அல்லது $1\cdot58\,a$ என்னுமிடங்களில் M பூச்சியம் ஆகும்.

கொய்விசை S ஆனது $S=\frac{dM}{dx}$ என்பதால் தரப்படுகிறபடியால் $S=w(x-a)$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே நிரந்தரமாக அமைக்கப்பட்ட வளையொன் றிற்குரிய கூனல் திருப்பம், கொய்விசை விளககப்படஙகள் படம் 8·12(b) யில் காட்டியுள்ளவாறு அமைந்திருக்கின்றன.

சுவரால், வளையின நுனிமீது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற நிலைக்குத்தான விசை F ஐயும் இணை Z ஐயும் துணியும்பொருட்டு நாம் பின்வருமாறு செய்யலாம். வளையில் $x=0$ என்னும் அணிததாய் இருக்கின்ற மூலகத் தின் சமநிலையைக் கருதுவோம், படம் 8·12 (c) யைப் பார்க்க.

$$F=-[S]_{x\to 0}=wa \quad \text{எனவும்} \quad Z=-[M]_{x\to 0}=-\tfrac{1}{2}wa^2 \quad \text{எனவும்}$$

பெறுகிறோம்; அதாவது Z ஆனது பருமன் $\frac{1}{2}wa^2$ ஐ உடையதும் இடஞ் சுழியாகத் தாங்குகினறதுமான இணையொன்ருகும்.

எடுத்துக்காட்டு.—பாவு l உம் புறக்கணிக்கத்தக்க நிறையும் உடைய வளையொன்று அதனது நுனியொவ்வொன்றிலும் கிடையாக நிலையாக்கப்பட்டிருககிறது. வளையின் நுனிகளிலிருந்து சம தூரங்கள் a யில் இரு சமமான சுமைகள் W ஏற்றப்பட்டிருக்கின்றன. வளையின் மையப் புள்ளியில் கோணிலை ஆராய்க.

வளையின நுனியொவ்வொன்றிலும் தாங்கியால் ஆகும தாககமானது மேல்முகமான விசை W ஆகும் என்பது உடனே தெளிவு; மேலும் சிலவேளை முறுக்கமும் இருக்கக்கூடும. $x=0$ என்னும் நுனியில, இம்முறுக்கம் Z ஆகுக; அதன் போக்கு இடஞ்சுழி எனக் கொள்க.

வளையில் நீளம் x ஐ உடைய பாகமொன்றின் சமநிலையைக் கருதுக; இங்கு $0 < x < a$. கொய் விசைகள் எங்கும் பூச்சியம் ஆகும். எனவே வழக்கமான குறிப்பீட்டைப் பயன் படுத்த,

$$EIy''=Z-Wx.$$

இதைத் தொகையிட்டால்

$$EIy'=Zx-\tfrac{1}{2}Wx^2$$

என்பது கிடைக்கிறது; $x=0$ ஆகுமிடத்து $y'=0$ ஆதலின் தொகையீட்டு மாறிலி பூச்சியம் ஆகும்.

மீண்டும் தொகையிட

$$EIy=\tfrac{1}{2}Zx^2-\tfrac{1}{6}Wx^3;$$

$x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆதலின் இங்கும் தொகையீட்டு மாறிலி பூச்சியம் ஆகும்.

அடுத்து வளையில் $a < x < \frac{l}{2}$ இனுல் வரையறுக்கப்பட்ட பாகமொன்றின் சமநிலையைக் கருதுக. அப்பொழுது,

$$EIy''=Z-Wa;$$

இதைத் தொகையிட

$$EIy'=(Z-Wa)x+A.$$

இங்கு A ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி. $x=\frac{l}{2}$ எனனுமிடத்து $y'=0$ ஆதலின்

$$A=-(Z-Wa)\frac{l}{2}.$$

எனவே $$EIy' = (Z - Wa)\left(x - \frac{l}{2}\right).$$

மீண்டும் தொகையிட

$$EIy = \tfrac{1}{2}(Z - Wa)\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + B;$$

இங்கு B ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி.

இதுவரை பெறறுள்ள சமனபாடுகளில் தெரியாக் கணியங்கள் Z உம் B யும் துணியப்பட வில்லை. Z ஐத துணியும் பொருட்டு $x = a$ ஆகுமிடத்து y' தொடருகின்றது என்னுஞ் செய்தியைப் பயன்படுத்துகிறோம் ; எனவே

$$Za - \tfrac{1}{2}Wa^2 = (Z - Wa)\left(a - \frac{l}{2}\right)$$

அலலது $$Z = \frac{Wa}{l}(l - a) = Wa\left[1 - \frac{a}{l}\right].$$

மேலும் $x = a$ ஆகுமிடத்து வளையில கருதப்படும் பாகம் எதுவாகிலும் கோணல் ஒரே பெறுமானம் உடையதாகும். எனவே

$$\tfrac{1}{2}(Z - Wa)\left(a - \frac{l}{2}\right)^2 + B = \tfrac{1}{2}Za^2 - \tfrac{1}{6}Wa^3;$$

$$B = \tfrac{1}{2}Wa^2\left[\frac{l}{4} - \frac{a}{3}\right]$$

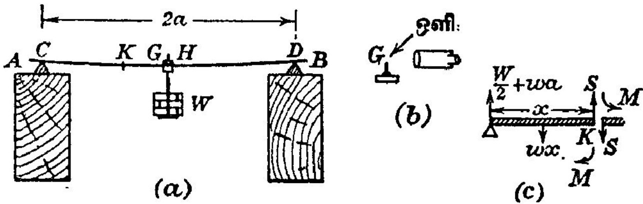
என இது தருகிறது.

இவ்வாறு வளையின் எந்தப் புள்ளியினும கோணல் தெரிந்ததே ; எனவே

$$\left[y\right]_{x=\frac{1}{2}l} = \frac{Wa^2}{EI}\left[\frac{l}{8} - \frac{a}{6}\right]$$

என உடனடியாகப் பெறுகிறோம்.

வளையொன்றின் மாறுகின்ற கூனலைப் பயன்படுத்திப் பரிசோதனைமுறைப் படி யங்கின் மட்டைத் துணிதல்.—படம் 8·13 (a) யில், AB ஆனது ஒரு



படம் 8·13. வளையொன்றின் மாறுகின்ற கூனலால் பரிசோதனைமுறைப்படி யங்கின் மட்டைத் துணிதல்.

சீரான வளை ஆகுக ; அதன் திரவியத்திற்கு யங்கின் மட்டைக் காணல் வேண்டும். கிடைத் தளமொன்றில் இரு உறுதிமிக்க தாங்கிகள் மீதுள்ள

கத்தியோரங்கள் C, D என்பவற்றில் அது ஓய்வாய் இருக்க. C யிற்கும் D யிற்கும் நடுவான புள்ளி H இல் தராசுத்தட்டு P ஆனது வளை யில் பற்றப்பட்டிருக்கிறது; தட்டிலிருக்கின்ற சுமையின் நிறை W வை மாற்றிவைக்கலாம். வளையின மையத்தில் கோணலை அளக்கும் பொருட்டுப் படம் 8·13 (b) யில் காட்டியுள்ளவாறு, வளையின மையத்தில உருக்காலான ஊசியொனறின் சிறு துண்டொனறை மெழுகால் பற்றி, அதன் கூர், ஒளியால் நன்கு துலக்கப்படுகிறது [பதிவுப்பனனி ஊசியானது சிறப்பாக இங்கு பயன்படுகிறது]. இடையான குறுக்குவெட்டு மயிரொன்று அளிக் கப்பட்டுள்ள பார்வைத்துண்டுடைய இடையான நுணுக்குக்காட்டியொனறு ஊசியின கூர்மீது குவியுமாறு செய்யப்படுகிறது; நுணுக்குக்காட்டி விறைப் பான தாளொன்றில் அமைக்கப்பட்டிருககிறது.

$2a$ ஆனது C யிற்கும் D யிற்கும் இடையேயுள்ள தூரமும், w ஆனது வளையின் அலகுநீளமொன்றின நிறையும் எனின், குறுக்குவெட்டு K யில் படம் 8·13 (c), கூனற்றிருபபம்,

$$M+\left(\frac{W}{2}+wa\right)x-wx\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது.

$$\therefore \quad M=-\frac{W}{2}x-wax+\tfrac{1}{2}wx^2.$$

$$\therefore \quad EIy''=-\frac{W}{2}x-wax+\tfrac{1}{2}wx^2.$$

$$\therefore \quad EIy'=-\frac{W}{4}x^2-\tfrac{1}{2}wax^2+\tfrac{1}{6}wx^3+A.$$

இங்கு A ஒரு மாறிலி ஆகும்; $x=a$ ஆகுமிடத்து $y'=0$ என்னுஞ் செய்தியைப் பயன்படுத்தி அதைத் துணியலாம். இது

$$0=-\frac{W}{4}a^2-\tfrac{1}{2}wa^3+\tfrac{1}{6}wa^3+A$$

என்பதைத் தருகிறது.

$$\therefore \quad A=\frac{W}{4}a^2+\tfrac{1}{3}wa^3.$$

$$\therefore \quad EIy'=-\frac{W}{4}x^2-\tfrac{1}{2}wax^2+\tfrac{1}{6}wx^3+\frac{W}{4}a^2+\tfrac{1}{3}wa^3.$$

$x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆதலின் தொகையீட்டு மாறிலி பூச்சியம் ஆதலால்

$$EIy=-\frac{W}{12}x^3-\tfrac{1}{6}wax^3+\tfrac{1}{24}wx^4+\frac{W}{4}a^2x+\tfrac{1}{3}wa^3x.$$

$x=a$ என்பதில் உயர்வுக் கோணல் தோற்றுகிறது; அதை ξ இனல் குறித்தால் அது

$$\mathrm{EI}\xi = -\frac{\mathrm{W}}{12}a^3 - \tfrac{1}{6}wa^4 + \tfrac{1}{24}wa^4 + \frac{\mathrm{W}}{4}a^3 + \tfrac{1}{3}wa^4$$

$$= \tfrac{1}{6}\mathrm{W}a^3 + \tfrac{5}{24}wa^4.$$

$$\therefore\ \xi = \frac{a^3}{6\mathrm{EI}}\mathrm{W} + \text{மாறிலி}$$

$$= \frac{a^3 g}{6\mathrm{EI}}(m+p) + \text{மாறிலி};$$

இங்கு தட்டின் திணிவு p யும், தட்டு காவும் திணிவு m உம், புவியீர்ப்புச் செறிவு g யும் ஆகும்.

$$\therefore\quad \xi = \frac{a^3 g}{6\mathrm{EI}}m + \text{மாறிலி}.$$

எனவே m, ξ என்பவற்றிற்கு ஒன்றிற்கொன்று ஒத்த பெறுமானத் தொடரொன்றைப் பெற்றபின, அவற்றை முறையே கிடைக்கூறுகளாகவும் நிலைக்கூறுகளாகவும் குறித்தால் சரிவு,

$$\frac{a^3 g}{6\mathrm{EI}}$$

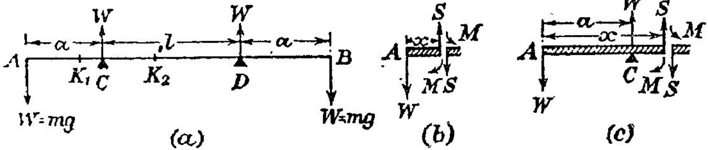
கொண்ட நேர்கோடொன்றை நாம் பெறவேண்டும்.

ஆரை r ஐ உடைய வட்டக் குறுக்குவெட்டுக் கொண்ட வளையொன்றிற்கு $\mathrm{I}=\frac{1}{4}\pi r^4$; அகலம் a யும், ஆழம b யும் உடைய செவ்வகக் குறுக்கு வெட்டுக் கொண்ட வளையொன்றிற்கு $\mathrm{I}=\frac{1}{12}ab^3$; கடைசியாக உள்ளாரை r_1 உம் வெளியாரை r_2 உம் உடைய குறுக்குவெட்டுக் கொண்ட குழாயொன் றிற்கு $\mathrm{I}=\frac{1}{4}\pi(r_2{}^4-r_1{}^4)$. எனவே ஆராயக்கூடிய எந்த வளையின் திரவியத் திற்கும் E யின் பெறுமானத்தைக் கணித்துக் கொள்ளலாம்.

வளையொன்று சீராகக் கூனலுற்றிருக்கும்போது யங்கின் மட்டைத் துணி தல்.—சமவியல்புடைய திரவியத்தாலான வளையொன்று சீராகக் கூனலுற்றி ருப்பதற்கு, அதாவது வளைவாரை மாருது இருப்பதற்கு, வேணடிய நிபந்தனைகளை ஆராய்வோம். $\mathrm{M}=\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{R}}$ ஆதலின அதன நடுநிலைப் பரப் பானது வட்டமொன்றின் பரிதியின பாகமொன்ருக அமையுமாறு கூனலுற்றிருக்கின்ற வளையின் எந்தப் பாகத்திலும் M மாருது இருத்தல் வேண்டும என்பது தெளிவு. நடைமுறையில இது கீழ்வருமாறு பெறப் படுகிறது.

படம் 8·14 (a) யில், AB ஆனது நீளம் $(l+2a)$ யை உடைய சீரான வளை ஆகுக; அது C யிலும் D யிலும் உள்ள தாங்கிகள் மீது இருக்கிறது; அவ்வொவ்வொன்றும் அதற்கு அடுத்தாயுள்ள வளை நுனியிலிருந்து

தூரம் a யில் இருக்கிறது. தாங்கும புள்ளிகள் இடைத் தளமொன்றில் இருக்க ; அதனது நுனியொவ்வொன்றிலும் நிறை W வை உடைய சுமையை வளை காவுகிறது எனக் கொள்க. அப்பொழுது சமச்சீரையிட்டு C யிலும் D யிலும் வளைமீதுள்ள உதைப்புக்கள சமனாகும்; அதனது அலகு நீளமொன்றின் நிறை புறக்கணிக்கத்தக்கது என்ற வகையில் வளை அத்துணை இலேசானதாயின் அவ்வுதைப்பு ஒவ்வொன்றும் W ஆகும்.



படம் 8·14. இலேசான வளையொன்றின் சீரான கூனலால் பரிசோதனை முறைப்படி யங்கின் மட்டைத் துணிதல்.

A என்பது செவ்வக ஆள்கூறறு உறபததி ஆகுக. அப்பொழுது A யிலிருந்து தூரம் x இல் $(0 \leqslant x \leqslant a)$ இருக்கின்ற புளளி K_1 இலுள்ள குறுக்கு வெட்டொன்றில் வழக்கம்போல், படம் 8·14 (b),

$$S = W \qquad \text{எனவும்}$$

$$M - Sx = 0 \qquad \text{எனவும்}$$

பெறுகிறோம்.

$$\therefore \quad M = Wx.$$

A யிலிருந்து தூரம் x இல், $a \leqslant x \leqslant (a+l)$ ஆக இருக்கின்ற புள்ளி K_2 இல், படம் 8·14 (c) யைப் பார்க்க,

$$S = 0.$$

எனவே C பறறி விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்துக் குறிப்பிட்ட எந்த எடுத்துக்காட்டிலும் W வும் a யும் மாறாமல் இருக்கின்றபடியால்

$$M = Wa = \text{மாறிலி}$$

ஆகும். எனவே வளையின் நடுப்பாவு சீராகக கூனலுற்றிருக்கிறது என்பது தெளிவாகும்; நுனி ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள சுமையின திணிவு m எனின், வளைவாரையானது

$$\frac{EI}{R} = Wa = mga$$

என்பதால் தரப்படும்.

மையப் புள்ளியில் எற்றம் h ஆகுக ; முந்திய பரிசோதனையில் செய்த வாறு அதை அளக்கலாம். இனி வட்டமொனறின் நனகு தெரிந்த இயல்பின்படி

$$(2R - h)h = \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

எல்லா நடைமுறை எடுத்துக்காட்டுக்களிலும் மீள்தன்மையெல்லை மீறுமல் இருக்குமிடத்து h சிறிது ஆதலால்,

$$R=\frac{l^2}{8h}.$$

$$\therefore \quad E=\frac{l^2}{8h}\cdot\frac{mga}{I}.$$

[ந.கு. வளையானது அலகு நீளமொன்றிற்குப் புறக்கணிக்க முடியாத அளவில் நிறையுடையதாய் இருக்குமாயின் வளையின் நடுப் பாவுக்குக் குறுக்கு வெட்டுகளில் கொய் விசையானது மறையாது ; எனவே பொது வாக

$$\frac{dM}{dx}=S$$

ஆதலாலும், இதன்படி M மாறுப் பெறுமானம் உடையதாயின் S பூச்சியம் ஆதல் வேண்டும் எனபதாலும், M மாருது இருக்கவே முடியாது.]

வேறுமுறை :

$$M=Wa$$

ஆதலின்

$$EIy''=Wa.$$

$$\therefore \quad EIy'=Wax+A\ ;$$

இங்கு A தொகையீட்டு மாறிலியாகும். இனி வளையின மையத்தில் (அது $x=b$ என்பதில் என்க) $y'=0$.

$$\therefore \quad EIy'=Wa(x-b).$$

$$\therefore \quad EIy=Wa\left(\tfrac{1}{2}x^2-bx\right)+B\ ;$$

இங்கு B தொகையீட்டு மாறிலி ; அது $x=a$ ஆகுமிடத்து $y=0$ எனனுஞ் செய்தியால் துணியப்படுகிறது.

$$\therefore \quad 0=Wa\left(\tfrac{1}{2}a^2-ab\right)+B.$$

$$\therefore \quad EIy=Wa\left[\tfrac{1}{2}x^2-bx-\tfrac{1}{2}a^2+ab\right].$$

அதாவது வளையின் மையத்தில் கோணலைப் பெறும்பொருட்டு $x=b$ எனப் புகுததுக.

$$\therefore \ EI[y]_{x=b}=-\tfrac{1}{2}Wa[b-a]^2=-\tfrac{1}{2}mag[b-a]^2=-\tfrac{1}{8}magl^2\ ;$$

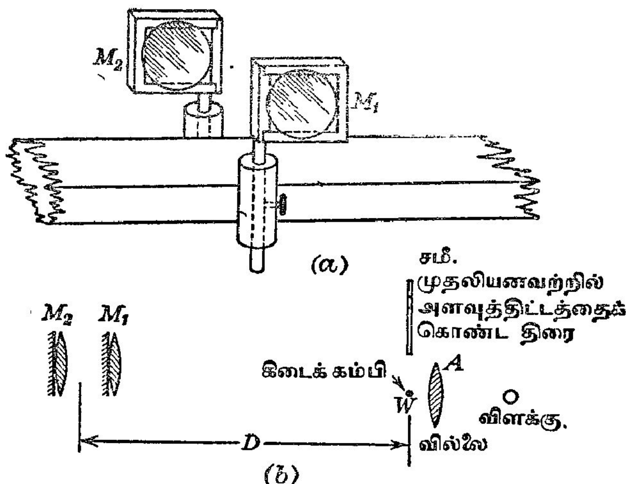
எனவே E, I ஒவ்வொன்றும் கண்டிப்பாய் நேர் ஆதலால் $[y]_{x=b}$ மறை ஆகும். $2L=3l$ ஆகுமிடத்து எழுப்பம் ஓர் உயர்வாகும். இங்கு வளையின் முழுநீளம் $L=2a+l$.

வளையொன்றின் திரவியத்திற்குப் பரிசோதனை முறைப்படிப் பொய்சோனின் விகிதத்தைத் துணிதல்.—சமவியல்புடைய திரவியத்தாலான வளையொன்று கூனலுற்றிருக்கும்பொழுது முரண்முறிவு வளைவாரைக்கு கூனற்றளத்து வளைவாரை கொண்டிருக்கும் விகிதமானது அவ்வளையினது

வியத்தின் பொய்சோனின் விகிதம் σ இற்குச் சமன் என ஏற்கெனவே காட்டப்படடிருக்கிறது. ப. 394 இற் காணக. சட்டமொன்றினிடத்து இவ் வளைவாரைகளையும், அத்துடன σ இற்குப் பெறுமானமொன்றையும் துணியும் பொருட்டுப் படம் 8·14 (a) யில் காட்டியுள்ளவாறு சட்டத்திற சுமையேற்றப் படுக ; சட்டம் இரும்பாலானது என்க; வளையினது அலகு நீளமொன்றின நிறை சிறிது என்னும் நிபந்தனையின் பேரில் வளையின நடுப்பாகத்துக் குறுக்கு வெட்டுகள எல்லாவற்றிலும் கூனற்றிருப்பம் மாறாமல் இருக்கிற படியால அப்பாகத்தில் பாவானது சீராகக் கூனலுற்றிருக்கும. கத்தி யோரங்கள் C, D என்பவற்றின இடைத்தூரத்தை நேராகவும், சுமை யேற்றப்பட்டபோது சட்டத்தின் முறபக்கத்து ஓரத்தின் மையப்புள்ளியின் ஏற்றத்தை நகரு நுணுக்குக்காட்டியொன்றைப பயன்படுத்தியும், அளந்து நடுநிலைப் பரப்பின் வளைவாரை எளிதில் துணியப்படுகிறது. முரணமுறிவு வளைவின் ஆரையைத் துணிவது சிக்கல்மிக்கது. இதன்பொருட்டுச் சில வேளைகளில் சட்டத்தின ஓரங்களில், அவற்றின் மையப் புள்ளிகளில, பித்தளையாலான இணைத் திருகுகள பற்றாசால் ஒட்டப்பட்டிருக்கின்றன. இத்தகைய இணைத் திருகுகள மின்னியலில அடிக்கடி பயன்படுத்தப் படுகின்றன ; ஆனால் இங்கு அவற்றைப் பிடிகருவிகள என அழைப்போம். அவற்றின அச்சுக்கள சட்டத்தின மேல் முகத்துக்குச் செங்குத்தாக இருத்தல் வேண்டும். ஒவ்வொன்றும் சற்றேறக்குறைய 40 சமீ. நீள முடைய ஈர் ஊசிகள் இறுக்கிகளால உறுதியாகப் பிடிக்கப்பட்டிருக் கின்றன. ஊசிகள் நேராக இருத்தல் வேண்டும் என்பது கட்டாயம அன்று ; ஊசிகளுள் ஒன்று அதன் சுயாதீன நுனியில மிமீ. இல அளவுகோடிட்ட அளவிடையொன்றைக் காவுகிறது; இரண்டாவது ஊசியின சுயாதீன நுனி இவ்வளவிடையைத் தொட்டும் தொடாததுமாகச் சாய்ந் திருக்கிறது. சட்டம் வளைவுற்றபோது ஈர் ஊசிகளும் கிடையான அச்சுக் களைக் குறித்து ஒன்றையொன்று நோக்கிச் சுழல்கின்றன ; ஊசியொன்றின் நுனியைக் குறித்து மற்றை ஊசியினது நுனியின தொடர்புப பெயர்ச்சியை மிமீ. அளவிடையில நேராகத் துணியலாம். சட்டத்தின நடுநிலைப் பரப்பிற்கு மேலே ஊசி நீளம் எவ்வளவு உளது என்பதும், சட்டத்தின் அகலமும் தெரிந்திருந்தால் முரணமுறிவு வளைவாரையை உடனே பெறமுடிகின்றது. வசதியான பருமனுடைய இருட்புச் சட்டங்களுக்கு மீளதன்மையெல்லை மீறப்படாமல் இருக்க வேண்டுமாயின தொடாபசைவானது 3 அல்லது 4 மிமீ. ஐ மீறமாட்டாது ; எனவே திருத்தமான பேறுகள் தேவைப்படின் நுணுக்குக்காட்டியொன்றைப பயனபடுத்தியே இப்பெயர்ச்சியை அளத்தல் வேண்டும்.

கீழ்வரும் ஒழுங்குமுறையானது வசதியானதும் திருத்தமானதும் என இந்நூலாசிரியர் கண்டார். ஊசிகளுக்குப் பதிலாக இரு சிறுதளவாடிகள M_1, M_2 என்பன பிரதியிடப்பட்டுள்ளன. படம் 8·15 (a) ; இறுக்கியிற சரியாகப் பொருந்தியிருக்கின்ற தடிப்பான சிறு செப்புக் கம்பித் துண்டு களுடன் பற்றாசு பிடிக்கப்பட்ட செம்புச் சட்டங்களால் அவ்வாடிகள்

தாங்கப்படுகின்றன. ஆடிகள் ஒன்றிற்கொன்று சமாந்தரமாக அல்லது கிட்டத்தட்டச் சமாந்தரமாக இருக்கும் வண்ணம் இச்செம்புக் கம்பிகள் சற்று கூனப்பட்டுள்ளன. ஆடி ஒவ்வொன்றிற்கும் எதிரே இரு மீற்றர் குவியத் தூரம் உடைய ஒருங்குவில்லையொன்று நிலையாக்கபபட்டுள்ளது. இழை விளக்கொன்றிலிருந்து கிடையான ஒளிக்கற்றை ஆடிகள் மீது படுமாறு செலுத்தப்படுகிறது, படம் 8·15 (*b*) யைப் பார்க்க. ஒருங்கு



படம் 8·15. சிராகக் கூனலுற்ற வளையை நோக்கிப் பொய்சோனின் விகிதத்தைப் பரிசோதனைமுறையாகத் துணிதல்.

வில்லை A யைப் பயன்படுத்தி இது செய்யப்படுகிறது ; இவ்வில்லைக்கு எதிரே நேரான நுண்கம்பி W ஈர்க்கப்பட்டிருக்கிறது. ஒவ்வோர் ஆடியும் அத்துடன் கூடியிருக்கின்ற வில்லையும், கம்பிக்கு அணித்தாக வைக்கப்பட்ட நிலைக்குத்தான ஒளிக்கசிவுடைய திரையொன்றுமீது அக்கம்பியின் இரு விம்பங்களை ஆக்குகினறன. நீண்ட குவியத் தூரம் உடைய ஒருங்கு வில்லையொன்றின பெரிய குவிய ஆழம காரணமாக இதைச் செய்ய முடிகிறது. வளையில் சுமையேற்றப்பட்டபொழுது கம்பியின் விம்பங்கள் பெயர்க்கப்பட்டுள்ளன ; இப்பெயர்ச்சிகள அளவிடையிலிருந்து ஆடிகளின் இடைத் தூரம் எனபவற்றைப் பயன்படுத்தி ஆடிகளின் சாய்வு மாறல் களைக் கணித்துக் கொள்ளமுடிகிறது. வளையின் அகலம் தெரிந்திருந்தால் முரண்முறிவு வளைவாரையை உடனே துணியமுடிகிறது.

விம்பங்களினது பெயர்ச்சிகளின் கூட்டுத்தொகை *d* யும், அளவிடைக் கும் ஆடிகளுக்கும் இடையேயுள்ள இடைத்தூரம் D யும் ஆயின், சுமை

யேற்றிய வளையினிடத்துச் சாய்வுமாறலானது

$$\phi = \frac{d}{2D}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; ஆடியொவ்வொன்றும் இக்கோணத்தின் அரை வாசியளவிற்கு அசைகிறது. சட்டத்தின் அகலம் b எனின்,

$$R_2 = \text{முரண்முறிவு வளைவாரை} = \frac{b}{\phi} = \frac{2bD}{d}.$$

சட்டத்தின் மையத்தில் ஏற்றம் y_m எனின், அப்பொழுது கூனலுறு தளத்திலுள்ள வளைவாரை R_1 ஆனது

$$2R_1 y_m = \tfrac{1}{4} l^2$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது. இங்கு l என்பது கத்தியோரங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் ஆகும். ஆனால்

$\sigma R_2 = R_1$.

அதாவது $$\frac{2\sigma bD}{d} = \frac{l^2}{8y_m},$$

அல்லது $$y_m = \frac{l^2}{16\sigma bD} d.$$

எனவே சட்டத்தில் சுமைத்தொடரொன்றைப் பிரயோகித்து $y_m = y$, $d = x$ என்றவாறு குறித்தால் சரிவு $\frac{l^2}{16\sigma bD}$ ஐயுடைய நேர்கோடொன்று கிடைத்தல் வேண்டும். இச்சரிவிலிருந்து சட்டத்தில் திரவியத்திற்குப் பொய்சோனின் விகிதத்தின பெறுமானமொனறைக் கணிக்கலாம்.

இரும்பிற்கு யங்கின் மட்டின் பெறுமானமொனறைக் கணிக்கும்பொருட்டு பக்கம் 409 இல் பெற்றுள்ள சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

முனைநெம்பொன்றின் திரவியத்திற்குப் பரிசோதனைமுறைப்படி யங்கின் மட்டைத் துணிதல்.—முனைநெம்பானது அதனது நுனியொன்றில் நிலையாக்கப்பட்டுள்ள, இடையான சீரான வளையொனருகும ; அலகு நீள மொன்றிற்கு நிறை w உடைய முனைநெம்பு ஒன்று அதனது சுயாதீன நுனியில் நிறை W கொண்ட சுமையொன்றைக் காவுமிடத்து, அச்சுயாதீன நுனியிலிருந்து தூரம் x இல் கூனற்றிருப்பம்,

$$EIy'' = M = W(l-x) + \tfrac{1}{2} w (l-x)^2$$

என்பதால் தரப்படுகிறது என [பக்கம் 386 இற் காண்க] காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad EIy' = -\tfrac{1}{2} W (l-x)^2 - \tfrac{1}{6} w (l-x)^3 + \tfrac{1}{2} Wl^2 + \tfrac{1}{6} wl^3.$$

இங்கு தொகையீட்டு மாறிலியானது $x = 0$ ஆகுமிடதது $y' = 0$ என்னும் நிபந்தனையைப் பயனபடுத்திப் பெறப்பட்டுள்ளது.

மீண்டும் தொகையிட,

$$EIy = \tfrac{1}{6} W (l-x)^3 + \tfrac{1}{24} w (l-x)^4 + \tfrac{1}{2} Wl^2 x + \tfrac{1}{6} wl^3 x + C.$$

இங்கு C ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி; $x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆதலின்

$$C=-\tfrac{1}{6}Wl^3-\tfrac{1}{24}wl^4.$$

$$\therefore\ EIy=\tfrac{1}{2}Wlx^2-\tfrac{1}{6}Wx^3+\tfrac{1}{24}w(l-x)^4+\tfrac{1}{6}wl^3x-\tfrac{1}{24}wl^4.$$

$$\therefore\ EI[y]_{x=l}=\tfrac{1}{3}Wl^3+\tfrac{1}{8}wl^4.$$

$$\therefore\ [y]_{x=l}=\xi=\frac{l^3}{3EI}[W+\tfrac{3}{8}W_0].$$

இங்கு W_0 வளையின் முழுநிறை wl ஆகும்.

(a) நிலையியல் முறை.—எனவே முனைநெம்பொன்றின் நுனியில் தெரிந்த சுமைத் தொடரொன்றைப் பிரயோகித்து, அததொடரின் ஒவ் வொரு சுமைக்கும ஒத்த கோணல் ξ ஐ அளந்து, W தொடர்பாக ξ ஐக் குறித்தால், கிடைக்கின்ற வரைபானது $\frac{l^3}{3EI}$ கொண்ட நேர் கோடொன்றுகும்; எனவே, முனைநெம்பின் திரவியத்திற்கு யங்கின் மட்டைக் காணலாம். உண்மை கூறுமிடத்து முனைநெம்பின நிலைத்த நுனியூடே செல்லுகின்ற கிடைத் தளத்துக்குக் கீழே, அதன் சுயாதீன நுனியின பெயர்ச்சி ξ ஐ அளப்பதில்லை; அதறகுப் பதிலாகச் சுமை யேற்றப்படும்பொழுது சுயாதீன நுனியின் நிலைமாறல் χ ஐயே அளக்கி றேம். இருநதாலும் $\chi+\alpha=\xi$ ஆதலின், W தொடர்பாக χ யைக் குறித்து வரும் வரைபின் சரிவு இப்பொழுதும் $\frac{l^3}{3EI}$ ஆகும்; இங்கு α ஒரு மாறிலி ஆகும்.

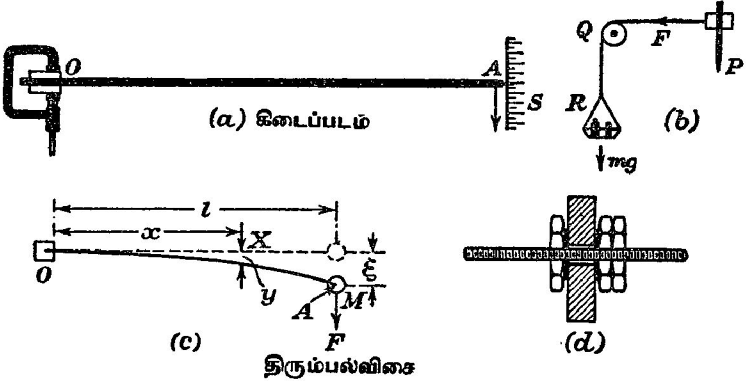
150 சமீ. நீளம், 0·5 சமீ. தடிப்பு, 2·5 சமீ. அகலம் கொண்ட மரத்தா லான வரிச்சுப்போன்ற நீண்ட முனைநெமபொன்றினிடத்து வளையின் தொடக்கக் கோணலானது நியாயமான அளவில் இருக்கும; எனவே இவ்வதிகாரத்தில் கோணலையிட்டு விவரிததுள்ள கொளகையானது பொருந் தாது. கிடைத் தளமொனறில் கோணலுறுமாறு நெம்பு OA ஐத் தாபித் தால் இத்தொல்லை தீர்க்கப்படுகிறது, படம 8·16(a); அப்பொழுது நெம்பின் நிறை கணிப்பில் சேராது. இவவண்ணம் தாபிததுள்ள நெம்பினது கோணலின் பொருட்டு நெம்பின சுயாதீன நுனியில இணைக்கப்பட்டுள்ள இலேசான இழையொன்று, படம் 8·15 (b), இலேசான குறைந்தது 5 சமீ. விட்டமுடைய கப்பியொனறுமீது† சென்று தராசுத் தட்டொன்றைக் காவு கிறது. தட்டிற் சுமையேற்றப்பட்டதும் வளை கோணலுறுகிறது; தட்டில் முதற் சுமைகூடும்பொழுதும் பின்னர் அது குறையும்பொழுதும் கோணல் களை அளக்க முடியும். மேலும், பிரயோக விசையின திசையைப் புறமாற்றி, திருமபல் விசையிலே அலகு மாற்றத்திற்கான கோணலிலுள்ள மாற்றத் திற்கு நம்பததக்க சராசரிப் பெறுமானமொன்றைப் பெறலாம.

† கிடையுடன 45° இற சாயநதுள்ள தளமொனறிலே தங்குகினற ஓர் இலேசான அலுமினியக் குழாயை உபயோகிப்பது நனறு; ப. 431, படம் 8·23 (b) ஐயும் **இடைநிலைப் பௌதிகவியல்** (பாகம் 4), ப. 97 ஐயும பார்க்க.

கப்பியில் சிறு உராய்வு விசைகள் உள ; முனைநெம்பினது சமநிலையின் இருபக்கங்களிலும் அவதானிப்புகளை எடுப்பதால் அவை நீக்கப்படாது ; அவற்றிற்கான திருத்தத்தையிட்டு

$$\xi = \frac{mg+\beta}{\mathrm{EI}} \cdot \frac{l^3}{3}$$

என எழுதலாம் ; இங்கு $mg = \mathrm{W}$, β ஒரு மாறிலி ; β ஆனது தெரியாமல் இருக்கின்றபோதிலும், ஏற்கெனவே குறித்துள்ள வரைபு முறையைப் பயன்படுத்தி E யைக் காணலாம்.



படம் 8·16. முனைநெம்பு : அதனது திரவியத்திற்குப் பரிசோதனை முறைப்படி யங்கின் மட்டைத் துணிதல்.

(b) இயக்கவியல் முறை.—முனைநெம்பொன்றின் மேற்படி ஒழுங்குமுறையைப் பயன்படுத்தி அந்நெம்பின் நுனியில் வெவ்வேறு திணிவுகளை ஏற்றி அதன் அதிர்வுகாலங்கண்டு, அதனது திரவியத்தின் யங்கின் மட்டிற்குப் பெறுமானம் காணலாம். இங்கு குறிப்பிட்டுள்ள முனைநெம்பினிடத்து தொடர்பு முறையாக இயக்கம் மெதுவாகவே இருக்கிறது ; எனவே மாட்டேற்றுப் புள்ளியொன்றின் குறுக்காக நெம்பினது நுனியின் கடப்பை நோக்க முடிகிறது ; ஆவர்த்தனகாலம் T ஐக் காணும்பொருட்டுச் சுழனிலைகாட்டி முறை வேண்டியதில்லை. நிலையியல் முறையை நெம்பின் திணிவு பாதிப்பதில்லை ; இருந்தாலும் இவ்வெடுத்துக்காட்டில் அதைப் புறக்கணித்தலாகாது ; அதன விளைவைப் பின்வருமாறு ஆராயலாம்.

[கிடைத் தளமொன்றில] நெம்பின் நுனியில கோணச்செய்யும் விசையின் கணநிலைப் பெறுமானம் F ஆகுக. அப்பொழுது நிலைத்த நுனியிலிருந்து தூரம் x இலுள்ள புள்ளி X இல், கணநிலைக் கோணல் y எனின், படம் 8·15(c),

$$\mathrm{EI}y = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}lx^2 - \tfrac{1}{6}\mathrm{F}x^3.$$

மேலும்,

$$\mathrm{EI}y'' = \mathrm{M} = \mathrm{F}(l-x)$$

ஆதலின், பக்கம் 385 இற் காண்க, இதை எளிதில் மெய்ப்பித்துக் காட்டலாம் ; இங்கு W இற்குப் பதிலாக F எழுதப்படுகிறது.

$x = l$ ஆகுமிடத்து கணநிலேக் கோணல் ξ,

$$EI\xi = \tfrac{1}{3}Fl^3$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; எனவே,

$$y = \left[\frac{3}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{l^3}\right]\xi.$$

எனவே நிலேதத நுனியிலிருந்து தூரம் x இல் வளேயின் துணிக்கையொன்றின் கணநிலே வேகம்

$$\dot{y} = \left[\frac{3}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{l^3}\right]\dot{\xi}.$$

மூனெநெம்பில் அலகுநீளமொன்றின் திணிவு μ எனின், நெம்பின் இயக்கச் சக்தி

$$\int_0^l \tfrac{1}{2}\mu\left[\frac{3}{2}\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{l^3}\right]^2\dot{\xi}^2\,dx = \frac{33}{280}\mu l\dot{\xi}^2.$$

நெம்பின் நுனியிற காவப்படும் திணிவு M இன் இயக்கச் சக்தி $\tfrac{1}{2}M\dot{\xi}^2$ ஆகும்.

அதன் நிலே எதுவாகிலும் வளேயின நிலேச் சக்தியானது அந்நிலேயை வளே அடையும்பொருட்டுச் செய்யப்படும் வேலேக்குச் சமன். எனவே கருதப் படும் நிலேயில் அது

$$\int_0^{\xi} F\,d\xi = \int_0^{\xi}\frac{3EI}{l^3}\xi\,d\xi = \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3}\xi^2.$$

முழு இயக்கச் சக்தி + நிலேச் சக்தி மாறிலியாதலின்

$$\left(\tfrac{1}{2}M + \frac{33}{280}\mu l\right)\dot{\xi}^2 + \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3}\xi^2 = \text{மாறிலி};$$

எனவே t தொடர்பாக வகையிட்டு

$$\left(\tfrac{1}{2}M + \frac{33}{280}\mu l\right)\ddot{\xi} + \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3}\xi = 0$$

என்பதை இயக்கச் சமன்பாடாகப் பெறுகிரேம். எனவே இயக்கம் எளிய இசையானது ; அதன் ஆவர்த்தன காலம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M + \frac{33}{140}\mu l)\,l^3}{3EI}}$$

எனபதால் தரப்படுகிறது.

மீண்டும் M தொடர்பாக T^2 ஐக் குறிக்கும் வரைபு முறையொன்றே E யையும் μ வையும் துணியப் பயன்படுகிறது. அதிரும் வளேயிற்கு இக்கொள்கையானது ஒருவேளே முற்றிலும் பூரணமானதொன்று; எனவே

இம்முறையைப் பயன்படுத்தி μ வைக் காண்பது விரும்பற்பாலதன்று. $\frac{33}{140}\mu l$ என்னும் உறுப்பை ஒரு மாறிலியெனக் கருதலாம்; ஏற்கெனவே காட்டியுள்ள வரைபு முறையைப் பயன்படுத்தி இவவெடுகோளைச் சோதிக் கலாம்.

வேறுமுறை.—முனைநெம்பின் சுயாதீன நுனியில் சுமை M ஐ ஏற்றி அம்முனையை இனனும் χ என்னும் ஓர் அளவினுற பெயர்த்தால், அதனது சமநிலையை மீள்தரு விசையொன்று தாகரும். இவ்விசையானது χ இற்கு நேரடி விகிதசமன்; நெம்பானது விடுவிக்கப்பட்டதும் அதனது சமநிலையைக் குறித்து எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுமாறு இம்மீள்தரு விசை M ஐத் தூண்டும்.

திணிவு m உடைய சுமையொன்றினிடத்துப் பெயர்ச்சி ξ ஆனது

$$\xi = \frac{mgl^3}{3\mathrm{EI}}$$

எனபதால் தரப்படுகிறது; எனவே அலகுப் பெயர்ச்சியொனறிற்கான மீள்தரு விசை

$$\frac{mg}{\xi} = \frac{3\mathrm{EI}}{l^3}.$$

எனவே திணிவு M இன் சமநிலையிலிருந்து பெயர்ச்சி χ இறகு மீள்தரு விசை $\frac{3\mathrm{EI}}{l^3}\chi$ ஆகும்; இது திணிவு M மீதும் முனைநெம்பு மீதும் ஆறறு கினறது.

எனவே சுமை M இன் இயக்கம்,

$$(\mathrm{M}+m_0)\ddot{\chi} + \frac{3\mathrm{EI}}{l^3}\chi = 0$$

என்னுஞ் சமனபாட்டால் தரப்படுகிறது; இங்கு m_0 என்பது திருத்தவுறுப் பொனறுகும்; நெம்பின் திணிவையிட்டு அது ஒரு மாறிலி எனக் கொள்ளப் படுகிறது. எனவே ஆவர்த்தன காலம்

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{(\mathrm{M}+m_0)\,l^3}{3\mathrm{EI}}}.$$

எனவே M, T என்பவற்றின் ஒத்த பெறுமானத தொடரொன்றைப் பெற்று, T^2 தொடாபாக M ஐக் குறித்தால், வரைபின சரிவு ஒரு மாறிலி ஆகும்; எமது ஆய்விற் கையாண்ட எடுகோள்கள் சரி எனின் அது $\frac{4\pi^2 l^3}{3\mathrm{EI}}$ ஆகும். இவ்வண்ணம், முனைநெம்பினது திரவியத்திற்கு யங்கின் மட்டி னது பெறுமானம் காணலாம்.

இயக்கவியல் முறையில் முனைநெம்புமீது தராசுத்தட்டைச் சுமையேற்ற முடியாது; எனவே நெம்பின் சுயாதீன நுனியூடே பித்தளைத் திருகொன்று புகுத்தப்பட்டுச் சுரைகளால் நிலையாக்கப்படுகிறது (படம் 8·16 (d) யிற்

காண்க). நெம்பால் காவப்படும் திணிவைக் கூட்டுமுகமாகப் பித்தளைத் திருகில் தெரிந்த திணிவுடைய தட்டுக்கள் கோக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவதானிப்புகள் வரைபு முறைப்படி கருதப்படின் பித்தளைத் திருகு, நிலையாக்கும் சுரைகள் என்பவற்றின் திணிவை அறிய வேண்டியதில்லை.

[முனைநெம்பின் திணிவு புறக்கணிக்கத்தக்கதாயின்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ml^3}{3EI}};$$

மேலும் திணிவு M உடைய சுமையாலாகும் பெயர்ச்சி

$$\xi = \frac{1}{3}\frac{Mgl^3}{EI}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது. ஆதலின்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\xi}{g}}.$$

இவ்வாறு புவியீர்ப்புச் செறிவுக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறலாம். இச்செய்தியானது குறித்தற்பாலது.]

நுண்கம்பியொன்றை முனைநெம்பாகப் பயன்படுத்தி அதன் விட்டம் துணிதல்.—பக்கம் 413 இற பெற்றுள்ள சமன்பாடுகளிலிருந்து, சுமை யேற்றுத முனைநெம்பொனறின் கோணல்

$$\xi = \frac{1}{8}\,\frac{l^3}{EI}\,W_0 = \frac{1}{8}\,\frac{l^3}{EI}M_0g = \frac{1}{8}\,\frac{l^3}{EI}(\pi r^2\rho_0 l)g$$

என்பதால் தரப்படுகிறது எனக் காண்கிறோம்; இங்கு W_0 நெம்பின் நிறை, M_0 அதன் திணிவு, r அதன் குறுக்குவெட்டு ஆரை, ρ_0 அதன் திரவியத்தின் அடர்த்தி ஆகும். அடர்த்தி ρ உடைய திரவமொன்றில் நெம்பு அமிழ்ந்திருக்கும்பொழுது கோணல் ξ_ρ ஆனது

$$\xi_\rho = \frac{1}{8}\,\frac{l^3}{EI}(\pi r^2 lg)(\rho_0 - \rho)$$

என்பதால் தரப்படுகிறது. இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து

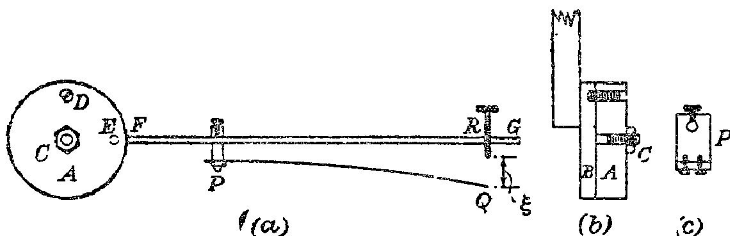
$$\frac{\xi_\rho}{\xi} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

எனப் பெறுகிறோம்; எனவே ρ ஆனது தெரிந்திருந்தால் ρ_0 இற்குப் பெறுமானமொன்றைக் காணமுடியும். E தெரிந்திருந்தால் கம்பியின் ஆரையைத் துணியமுடியும்.

நூலாசிரியரால் இத்தகைய பரிசோதனையொன்றிற்கெனத் திட்டமிட்ட ஆய்கருவியொன்று படம் 8·17 (a)–(b) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. திருகு, சுரை C என்பவறறுற் பித்தளைத்தட்டு A இரண்டாவது பித்தளைத்தட்டு B யுடன் இறுகப் பற்றப்பட்டிருக்கிறது. B யுடன் கோலொன்று பற்றுசு

பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது; எனவே ஆய்கருவியை இறுக்கியொன்றில் நிலையாக்கலாம். FG என்பது A யுடன் பற்றுசு பிடிக்கப்பட்ட பித்தளைக் கோலொன்றாகும்; திருகு D காட்டியுள்ள நிலையில் இருக்கும்பொழுது கோல் கிடைநிலையில் இருக்கும். D பின்வாங்கும்பொழுது கோல் FG ஆனது இட்டத்தட்ட நிலைக்குத்தான தானத்தில் விழும்; அது அப்பொழுது சரியாக நிலைக்குத்துத் தானத்தில் இருக்குமாறு D, E என்பவற்றின் மையங்கள் தட்டு B யின மையத்தில் கோணம் $\frac{1}{2}\pi$ ஐ எதிரமைக்கும்படி செய்தபின் B யிலுள்ள துவாரம் E யில் திருகு D புகுத்தப்படுகிறது.

சோதிக்கப்படும் கம்பியின் நுனியொன்று சிறு இறுக்கி P யில் நிலையாக்கப்படுகிறது. P யின் அமைப்பைப் பற்றிய விபரங்களையிட்டுப் படம் 8·17 (c) யைப் பார்க்க. [வெவ்வேறான நீளங்கள் உடைய கம்பிகளை ஏற்றுக்கொள்ளும்பொழுது FG வழியே P யை அசைத்து வைக்கலாம்.] FG யும் கம்பியும் நிலைக்குத்துக் கீழாகச் சுட்டியிருக்கும்பொழுது FG யின் நுனியில் இருக்கின்ற ஊசி R ஆனது, அதனது கூர் கம்பியின் நுனியைத் தொடும்வரை செப்பஞ் செய்யப்படுகிறது. FG ஆனது கிடையாக



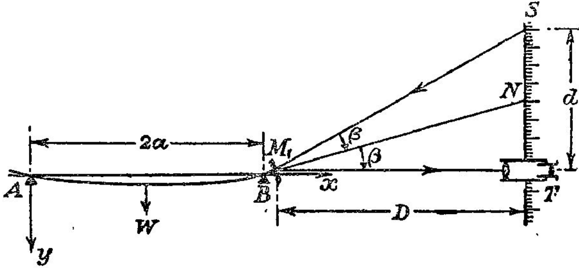
படம் 8·17. நுண்கம்பியொன்றினது திரவியத்தின் அடர்த்தியைத் துணிதல்.

இருக்கும்பொழுது, புவியீர்ப்பில்லாதபோது அது இருக்கவேண்டிய கிடைநிலையிலிருந்து கம்பி கோணலுறுகிறது; நகரும் நுணுக்குக்காட்டியொன்றைப் பயன்படுத்தி இடப்பெயர்ச்சி ξ ஐ அளக்கலாம்.

அடர்த்திதெரிந்த உப நீர்க்கரைசலை நிலைக்குத்தான கண்ணாடிப் பக்கங்கள் உடைய தொட்டியொனறில் வாாத்துப் பரிசோதனை மீண்டும் செய்யப்படுகிறது; எனவே ξ_ρ பெறப்படுகிறது. E தெரிந்திருந்தால் ஏற்கெனவே காட்டியுள்ள முறைப்படி கம்பியினது குறுக்குவெட்டு ஆரையின் பெறுமானத்தைக் காணலாம.

ஒளியியல் முறைப்படி வளையொன்றின் கோணலைத் துணிதல்.—படம் 8·18 இல், AB ஆனது நீளம் $2a$ ஆனுல் அலகு நீளமொன்றிற்குப் பறக்கணிக்கத்தக்க நிறையுடையதும், அதே கிடைத் தளத்தில் இரு கத்தியோரங்கள் மீது சமச்சீரான நிலையில் இருக்கின்றதுமான ஒரு வளையாகுக.

M_1 வளையின் நுனியொன்றில் விறைப்பாகப் பற்றப்பட்ட ஒரு சிறு தளவாடி யாகுக. S சதமமீற்றர்களில கோடிட்ட நிலைக்குத்தான அளவுச்சட்டமொன் றுகும்; அது வளையைக் கொளளும் நிலைக்குத்துத தளத்தில், M_1 இலி ருந்து தூரம் D யில் இருக்கிறது; தெறிப்பால் தளவாடியில் உண்டாகினற



படம் 8·18. மாறும் கூனலுற்ற வளையொன்றினது நுனியின் சாய்வை ஒளியியல் முறைப்படி துணிதல்.

அதன விம்பம் நிலைதத தொலைகாட்டி T ஊடே நோக்கப்படுகிறது. வளை யானது அதன் மையபபுள்ளியில நிறை W உடைய சுமையொன்றைக காவுமிடததுக் கிடைத் தளததுடன் வளையின சாய்வு, காட்டியுளளவாறு, β ஆகுக. வளை சுமையேறறபபடாதபோதும், பின்னர் அது சுமையேறறப் பட்டபோதும் தொலைகாட்டியின குறுக்குக் கம்பிகளில முறையே காணப்படும் அளவுச்சட்ட வாசிபபுகளின வித்தியாசம் d எனின அப்பொழுது β சிறிது ஆதலால்,

$$\text{தான் } 2\beta = \frac{d}{D} \quad \text{அல்லது} \quad \text{தான } \beta = \frac{d}{2D}.$$

வளையில் A யிலிருந்து தூரம் x இலுள்ள குறுககு வெட்டு K யில் கூனறறிருப்பம் M எனின், வழக்கம்போல்

$$\frac{W}{2}.x + M - W(x-a) = 0$$

ஆகும்; இங்கு $a \leqslant x \leqslant 2a$.

$$\therefore\ EIy'' = W\left(\frac{x}{2} - a\right).$$

$$\therefore\ EIy' = W\left(\frac{x^2}{4} - ax\right) + A;$$

இங்கு, A ஒரு மாறிலி; $x = a$ ஆகுமிடத்து $y' = 0$ என்னும் உண்மை யைக் கொண்டு இதன பெறுமதி நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. இது

$$A = \tfrac{3}{4}a^2W$$

எனத் தருகிறது.

$x=2a$ ஆகுமிடத்தில் சாய்வு தான் $(\pi-\beta)$ ஆகும் ; அது

$$\text{EI தான் } (\pi-\beta) = \text{W}\left[a^2 - 2a^2 + \tfrac{3}{4}a^2\right] = -\frac{\text{W}a^2}{4}.$$

$$\therefore \text{ தான் } \beta = \frac{\text{W}a^2}{4\text{EI}}.$$

எனவே
$$d = \frac{ga^2\text{D}}{2\text{EI}}m;$$

இங்கு m சுமையின் திணிவும், g புவியீர்ப்புச் செறிவும் ஆகும்.

பரிசோதனையின்போது வளையின் மையப் புள்ளியில் பற்றப்பட்டிருக்கின்ற தராசுத் தட்டில் பல சுமைகளை ஏற்றி, m, d என்பவற்றின் ஒத்த பெறுமானங்கள் முறையே கிடைக்கூறுகளாகவும் நிலைக்கூறுகளாகவும் குறிக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற புள்ளிகள் ஊடே வரைந்துள்ள மிகச் சிறந்த நேர்கோட்டின் சாய்வானது $\dfrac{g\text{D}a^2}{2\text{EI}}$ இற்கு இடைப் பெறுமானமொன்றைத் தருகிறது. E யைக் காண்பதற்கு இப்பெறுமானம் மேலுள்ள சூத்திரத்திற் பயன்படுகிறது.

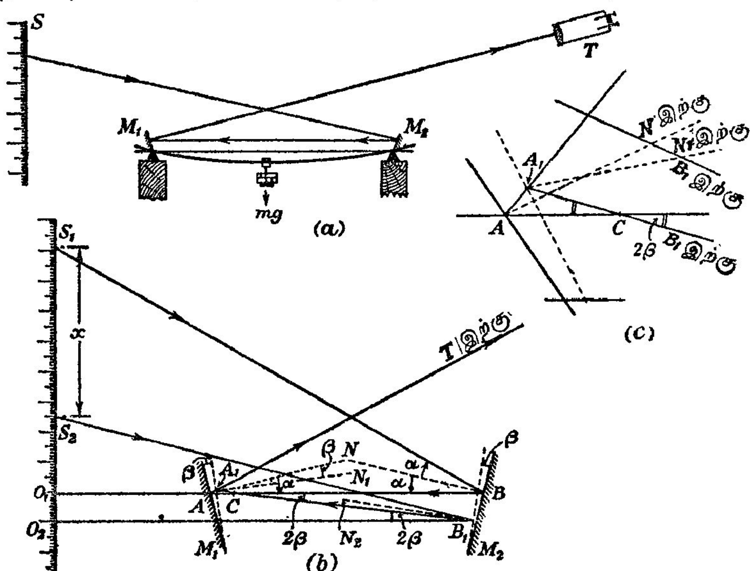
மேற்படி நிறுவலில் வளையின் நுனிக்கு அணித்தாய் ஆடி M_1 இருக்கிறது எனக் கொள்ளப்படுகிறது-இல்லாவிடில் அது சுழற்சியொன்றுடன் பெயர்வொன்றையும் அனுபவிக்கும். இம்முறையின் திருத்தத்தைப் பெரிதாக்கும் பொருட்டு வளையின மற்றை நுனியில் இரண்டாவது ஆடியொன்றைத் தாபிக்கலாம் ; இன்னுமொரு தொலைகாட்டியைப் பயன்படுத்தி அங்குள்ள சாய்வு காணப்படுகிறது.

[வளையினது முதலாவது அரையின் சமநிலையைக் கருதியும் அதற்கான வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைப் போட்டும், நுனி $x=0$ இற்குரிய தான் β என்னும் சரிவைக் கணித்தும் நாம் பெற்ற சூத்திரத்தைப் பெறமுடியும்.]

ஒரு சீரான வளையினது திரவியத்திற்குக் கூனிக்கின் முறையால் யங்கின் மட்டைத் துணிதல்.—இம்முறையானது கூனிக்† (König) என்பவரால் 1885 இல் திட்டமிடப்பட்டது ; ஏற்கெனவே விவரித்துக் கூறப்பட்டது இதன எளிதாக்கம் ஒன்றாகும். கூனிக் முறையின் நயம் யாதெனில், வளையின் ஒவ்வொரு நுனியிலும் உண்டாகின்ற சாய்வு மாறல்கள் ஒரே காலத்திற் பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பதேயாம். ஆய்கருவியானது வரிப்பட முறைப்படி படம் 8·19 (a) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. M_1, M_2 என்னும் இரு தளவாடிகள் சோதிக்கப்படும் வளையில், வளையைத் தாங்கும் கத்தியோரங்களுக்குச் சற்று அப்பால், விறைப்பாகப் பற்றப்பட்டிருக்கின்றன ; வளையின் சுமையேற்றப்படாத நிலையில் ஆடிகள் ஒவ்வொன்றின் செவ்வனும் கிடையுடன் கோணம் α ஆக்குகிறது. ஆய்கருவியைக் கொண்டிருக்கும் தளத்தில் அமைந்திருக்கிற நிலைக்குத்தான அளவுச்சட்டம் S இன் பிரிப்புக்களின் விம்பங்கள் தொலைகாட்டி T ஊடே நோக்கப்படுகின்றன.

† கூனிக், *Berlin Phys. Ges. Verh.*, 1885.

வளையின் மையத்தில் திணிவு m சுமையேற்றப்பட்டால் வளையின் ஒவ்வொரு நுனியிலும் கிடையுடன் அதன் சாய்வு β ஆகுக ; அப்பொழுது, ஆடியொவ்வொன்றும் கோணம் β வினூடாகச் சுழலும். T ஊடே நோக்கியுள்ள அளவுச்சட்ட வாசிப்புமாறல் x எனக் கொள்க ; அதாவது



படம் 8·19. வளையொன்றினது திரவியத்திற்குக் கூனிக்கின் (ஒளியியல்) முறையால் யங்கின் மட்டைத் துணிதல்.

முதலிலே வளை சுமையேற்றப்படாதபோதும், அடுத்து அது சுமையேற்றப்பட்டபோதும், T யில் முறையே காணப்படும் விம்பங்களுக்குச் சட்டம் S இல் ஒத்ததாய் உள்ள பிரிப்புக்களின் இடைத்தூரம் x ஆகும்.

ஒளிக்கதிர் ஒன்று தொலைகாட்டியிலிருந்து புறப்பட்டு, அதன் அச்சு வழியே சென்று, ஒவ்வோர் ஆடியிலும் அடுத்தடுத்துத் தெறிக்கப்பட்டுச் சட்டத்தை அடைகிறது எனக் கற்பனை செய்க. இக்கதிரானது A யில் M_1 மீது பட்டு, படம் 8·19(b), பின் B யில் M_2 மீது படுமாறு AB மார்க்கமாகச் செல்லுக. பின்னர் அது BS_1 வழியே தெறிக்கப்படுகிறது. நீட்டிய BA ஆனது சட்டத்தை O_1 இல் வெட்டுக. $BO_1 = D$, $AB = d$ என்க. இனி s, d, D என்பவற்றை β வுடன் தொடர்புபடுத்த வேண்டியதாகின்றது. AN உம் BN உம் ஆடிகளுக்கு முறையே A யிலும் B யிலும் இருக்கின்ற செவ்வன்கள் ஆகுக. கிடையுடன் ஆடி ஒவ்வொன்றிற்கும் படுகைப்புள்ளியில் வரைந்துள்ள செவ்வனுனது கோணம் α ஆக்குமாயின், அப்பொழுது

$$S_1O_1 = D \text{ தான் } 2\alpha.$$

M_1 ஆனது கோணம் β வினூடாக அசையும்போது T யிலிருந்து வருகின்ற கதிரானது முதல் ஆடிமீது A_1 இற் பட்டு A_1B_1 வழியே தெறிக்கப்படுக ; இங்கு B ஆனது இரண்டாவது ஆடியில் படுகைப்புள்ளியாகும். AB யும் A_1B_1 உம் ஒன்றையொன்று C யில் வெட்டுமாயின்

$$\widehat{ACA_1} = \widehat{BCB_1} = 2\beta$$

படம் 8·19 (c) ஐப் பார்க்க; சம்பந்தப்பட்ட கதிர்கள் அங்கு மிக விவரமாகக் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

இனி B_1 இலிருந்த ஆடி M_2 இன் செவ்வன B_1N_2 அதே ஆடியின் நிலை B யிற்குரிய செவ்வனேக் கோணம் β வில் வெட்டுகிறது. எனவே B_1 இலுள்ள செவ்வன கிடையுடன கோணம் $(\alpha-\beta)$ ஆக்குகிறது.

$$\therefore\ \widehat{CB_1N_2} = (\alpha-\beta) - \widehat{CB_1O_2} = \alpha - 3\beta.$$ [B_1O_2 ஆனது AB யிற்குச் சமாந்தரமாதலின]

இனி
$$\widehat{O_2B_1S_2} = \widehat{CB_1O_2} + 2.\widehat{N_2B_1C_1} = 2\beta + 2(\alpha - 3\beta) = 2\alpha - 4\beta.$$

மேலும்
$$\frac{S_1O_1}{D} = \text{தான் } 2\alpha = 2\alpha, \qquad \alpha \text{ சிறிதாயின்.}$$

அன்றியும்
$$\frac{S_2O_2}{D} = \text{தான் } (2\alpha - 4\beta) = 2\alpha - 4\beta, \qquad \beta \text{ சிறிதாயின.}$$

சட்டத்திலிருந்து B யும் B_1 உம் சம தூரங்களில் இருக்கின்றன என இச்சமனபாடுகளிற் கொள்ளப்படுகிறது.

இனி
$$\begin{aligned} x = S_1S_2 &= O_1S_1 - O_1S_2 \\ &= O_1S_1 - [O_2S_2 - O_2O_1] \\ &= 2\alpha\,(D) - (2\alpha - 4\beta)\,D + 2\beta\,(d) \\ &= 4\beta D + 2\beta d. \end{aligned}$$

$$\therefore\ \beta = \frac{x}{4D + 2d}.$$

ஆனல் பக்கம் 420 ஐப் பார்க்க, தான் $\beta = \frac{1}{4}\frac{W}{EI}a^2$; இங்கு $d = 2a$; எனவே E யிற்குப் பெறுமானத்தைப் பெறலாம்.

நாம் பயன்படுத்தியுள்ள அண்ணளவுகள் நடைமுறையில் நிறைவேற்றப்படுகின்றன என்பதை உறுதிப்படுத்தும் பொருட்டு, ஆடிகளிலிருந்து நியாயமான தூரத்திற் சட்டத்தை வைத்து, ஒளிக்கதிர்கள் கணக்காக ஆடிகளுக்கு மேலாகச் செல்லுமாறு தொலைகாட்டி ஒழுங்குபடுத்தப்படுகிறது.

வளையொன்றின் திரவியத்திற்கு யங்கின் மட்டைத் துணிதலிற் பயன் படுத்தப்படும் இம்முறையானது மையத்தில் இறககம் அளக்கப்படும் முறை யைக் காட்டிலும் திருத்தமிக்கது; ஏனெனில் இறக்கத்தைக் காட்டிலும் கோணம் β வையே மிகு திருத்தத்துடன் அளக்கமுடியும்; மேலும், சுமை கூடும்பொழுது வளையுட் கததியோரங்கள் புகுமாயின் அது இறக்கத்தை நுணுக்குக்காட்டியொன்றால் நேரே நோக்கிக் கிடைக்கும் வாசிப்புகளைப் பாதிப்பதைப்போல் இங்கு பாதிக்கமாட்டாது. அன்றியும் சிறிய சுமைகளை இங்கு பயன்படுத்த முடிகின்றபடியால் திரவியத்தின மீள்தன்மையெல்லை மீறி வளைக்குச் சேதம் உண்டாவதற்கு அவ்வளவு இடமிராது.

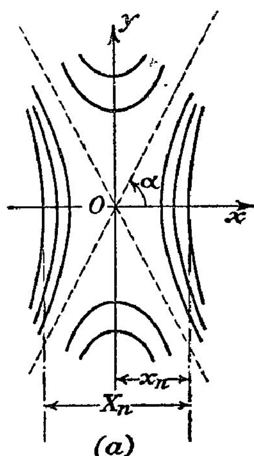
கண்ணடிக்குக் கோனுவின் முறையால் மீள்தன்மை மாறிலிகளைத் துணி தல்.—ஒரு சீரான கூனற்றிருப்பத்திறகு உட்படும் செவ்வகக் கண்ணடித் தகடொன்றினது மேற்பரபபின் வடிவழிவை ஒளியியல் முறைப்படி நோக்கிக் கண்ணடியின் மீள்தன்மை மாறிலிகளைத் துணியும் முறையொன் றைப் பற்றிய கட்டுரையைக் கோனு† எனபார் 1869 இல் வெளியிட் டார். கிடைத் தளமொன்றிற் கிடக்கின்ற இரு கத்தியோரங்கள் மீது தட்டைத் தாங்கி அதன் நுனிகளிலிருந்து நிறைகளைத் தொங்கவிட்டு, மேற் பரப்பிற்கு வளைவு கொடுக்கபபட்டது; கத்தியோரங்கள வளையின் அச்சுக்குச் செஙகுத்தாக இருநதன. வளைமீது தட்டைக்கண்ணடி மூடிததுண்டொனறு இருந்தது. இத்தொகுதியானது சோடியவொளியால் தக்கவாறு ஒளிர்ப் பிக்கப்படுகின்றபோது மூடித் துண்டிற்கும் வளைக்கும் இடையில் ஓரிடமாக் கப்பட்ட தலையீட்டு விளிம்புகள் கிடைக்கப்பெறறன. தலையீட்டு மாதிரி யானது வரிப்பட முறைப்படி படம் 8·20 (a) யிற் காட்டியுள்ளவாறு அதிபரவளைவுகளின ஈரிணைத தொகுதிகளாலானது. வளை வழியேயும் குறுக்காகவும் விளிம்புகளை அளந்து நெட்டாங்கு, குறுக்கு வளைவுகள் பெறப்பட்டன; எனவே புவசோனின் விகிதத்தை உடனே கணிக்க முடிகிறது. வழக்கம்போல், நீள்பக்க வளைவிலிருந்து கண்ணடிக்கு யங்கின் மட்டின பெறுமானம் கணிக்கப்பட்டது. இருந்தாலும் வளையின் அகலத்துடன் ஒப்பிடில் கத்தியோரங்களின் இடையீடு சிறிதாய் இருந்தபடி யால் அவருடைய விளைவுகளுட் சில பிழையாகவே இருந்தன எனத் தெரிகிறது. அவ்வாறு இருந்தால் வளை வடிவமாற்றம் அடையும்பொழுது கத்தியோரங்கள் மீதுளள உதைப்பின் பரம்பல் மாறுகிறது.

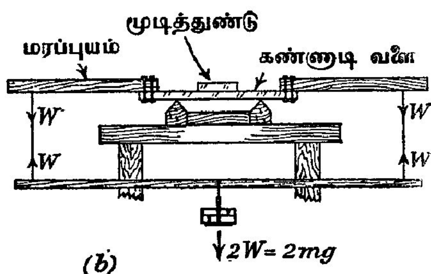
யெசப்‡ (Jessop) என்பவர், கோனுவின் முறையைப் பயன்படுத்தி, 1921 இல், கண்ணடியின் மீள்தனமை மாறிலிகளையிட்டுக் கவனத்துடன் அளவீட்டுத் தொடரொன்றைப் பெறறுர்; ஏற்கெனவே கூறியுள்ள குழப்பஙகள் விளையாதவாறு கவனமாக நடந்துகொண்டார். கண்ணடி வளையை இரு கத்தியோரங்கள் மீது வைத்து, படம 8·20 (b) யிற் காட்டி யுள்ளவாறு, வளையின் நுனிகளில் இறுக்கிய இரு மரப் புயங்களிலிருந்து தொங்கும் திணிவுகள் மூலம் சுமையேறறப்பட்டது. இவ்வண்ணம்,

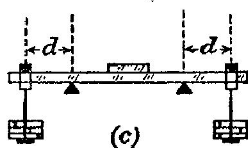
† கோனு, *Compt. Rend.*, **69**, 33, 1869.

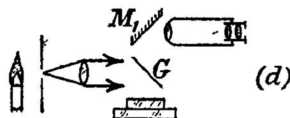
‡ யெசப், *Phil. Mag.*, **42**, 551, 1921

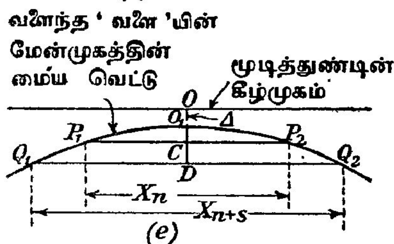
கத்தியோரங்கள் மீது மிதமிஞ்சிய உதைப்புக்களைப் பிரயோகியாது, பெரிய கூனற்றிருப்பத்தைப் பிரயோகிக்க முடிந்தது; இதனால் குழப்பும் மூனை விளைவுகளின் தாக்கம் குறைக்கப்பட்டுள்ளது. வளை, கண்ணாடி மூடித்துண்டு என்பவற்றின் மேற்பரப்பில் பூரண தட்டையின்மையால் ஆகும் விளைவுகளை

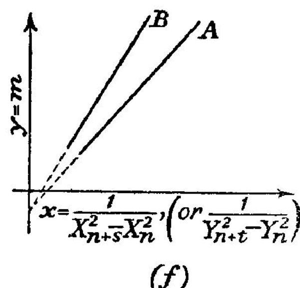












படம் 8·20. கண்ணாடிக்கு E யையும் σ வையும் துணிதற்குரிய கோனுவின் தலையீட்டு முறை.

நீக்கும்பொருட்டு வளையைத் திருப்பிவைத்து முன்னர் போல் இணை பிரயோகிக்கப்பட்டது. ஆனால் இந்த எடுத்துக்காட்டில் வளைக்குக் கீழே கண்ணாடி மூடித்துண்டை வைத்து, பிந்தியதைத் தாங்குகின்ற 3 மட்ட

மாக்கும் திருகுகளைப் பயன்படுத்தி மேற்பரப்புக்களைச் சேர்த்துவைக்க வேண்டியதாயிற்று. இவ்வாறு உண்மையாக இணையை நேர்மாறுக்கி அதே விளைவைப் பெறும்போதுள்ள பொறிமுறைத் தொல்லைகள் தவிர்க் கப்படுகின்றன. இச்செயன்முறையால் வளை, கண்ணுடி மூடித்துண்டு என்ப வற்றின பரப்பு ஒழுங்கின்மைகளின் விளைவுகள் நீக்கப்படுகிறதற்குக் காரணம் யாதெனில், கூனற்றிருப்பத்தின் பருமன் மாருதிருக்க, அதன் திசை நேர் மாருக்கப்பட்டால் வளையினது பரப்பின் அறிமுறை வளைவுகள் அதே பருமன் ஆனல் மறைக் குறிகள் உடையனவாய் இருக்க பரப்பு ஒழுங் கின்மைகள் இணை ஒரு திசையில் ஆற்றும்பொழுது குறிப்பிட்டவொரு வளைவு கூடவும், இணை நேர்மாருக்கப்பட்டபோது அது குறையவும் செய்கிறது என்பதேயாம். எனவே வளையின இடை வளைவு மேற்படி ஒழுங்கின்மைகளைச் சாராது.

பயிற்சியினபொருட்டு இபபரிசோதனையானது ஆய்கூடத்தில் நடாத்தப்படும் பொழுது படம் 8·20 (c) யிற் காட்டியுள்ள எளிமைமிக்க வடிவத்தை ஆயகருவிக்கு அளிக்கலாம். d ஆனது திணிவு m உடைய நிறையின் தொங்கற் புள்ளிக்கும் அதற்கு அணித்தாயுள்ள கத்தியோரத்திற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் எனின், மையப் பாவின் எல்லாக் குறுக்குவெட்டுக் களிலும் கூனற்றிருப்பம் mgd ஆகும் ; இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவாகும். விளிம்புகளைப் பெறும்பொருட்டுச் சோடியச் சுவாலையொன்று காலும் ஒளி ($\lambda = 5{\cdot}90 \times 10^{-5}$சமீ.) கிடையுடன் கிட்டத்தட்டக் கோணம் 45° ஐ ஆக்கும் கண்ணுடித் துண்டு G ஆல தெறிக்கப்பட்டுக் கண்ணுடிமூடி, வளை என்பவற்றின் மீது படுகிறது. தொகுதிக்கு மேலே இருக்கின்ற நகரும் நுணுக்குக்காட்டியூடே கண்ணுடிவளையின் மேற்பரப்பிற்கும் கண்ணுடி மூடித்துண்டிற்கும் இடையே உண்டாகியுள்ள விளிம்புகளை நோக்கலாம். இருந்தாலும் படம் 8·20 (d) யிற் காட்டியுள்ளவாறு, கிடையுடன் கிட்டத் தட்டக் கோணம் 45° ஆக்குமுகமாகத் தக்கவாறு ஒழுங்குபடுத்தியுள்ள ஒரு தளவாடி M_1 ஐப் பயன்படுத்திக் கிடையான அச்சுடைய ஒரு நுணுக்குக் காட்டியால் விளிம்புகளை அளப்பது வசதிமிக்கதாம். கருவியின் கிடையான அசைவைப் பயன்படுத்தி வளையின் நெட்டாங்கச்சுக்குச் சமாந்தரமான திசையில் விளிம்புகளின் விட்டங்களை அளக்கலாம் ; நிலைக்குத்தான அசைவைப் பயன்படுத்தி மேற்படி திசைக்குச் செங்குத்தானதும் விளிம்புத் தொகுதியூடே செல்கின்றதுமான திசையில் விளிம்புகளின் விட்டங்களை அளக்கலாம். மேற்படி திசைகளுக்குரிய அளவீடுகள் முறையே A, B என்ப வற்ருற் குறிக்கப்படும். தாழ்வலு நுணுக்குக்காட்டியொன்றினிடத்தும் விளிம்புகள் குவியாதபடியால் அதற்கு அணித்தாயுள்ள பொருள்களைச் சரியாக நோக்கும் தொலைகாட்டியொன்ருக நுணுக்குக்காட்டியை மாற்றி அமைத்தல் வேண்டும். இதன் பொருட்டுப் பொருள்வில்லைக்குப் பதிலாகக் கிட்டத்தட்ட 20 சமீ. குவியத்தூரம் உடைய நிறந்தராத ஒருங்குவில்லை யொன்று பயன்படுத்தப்படுகிறது ; பித்தளையாலான விரிதுண்டொன்றுந் தேவைப்படக்கூடும்.

அடுத்து சுமை m இற்கு நான்கு வெவ்வேறான பெறுமானங்களைப் பயன்படுத்தி, அவ்வொவ்வொன்றிற்கும் "கிடையான" விளிம்புகள் "நிலைக் குத்தான" விளிம்புகள் ஆகியவற்றின் விட்டங்கள் அளக்கப்படுகின்றன, சுமைகள் 0·5 முதல் 2 கிகி. வரை இருக்கலாம்.

கூனற்றிருப்பம் M, அதாவது mgd ஆக இருக்கும்பொழுது நெட்டாங்கு வளைவாரை R_1 ஆனது

$$\frac{EI}{R_1} = M = mgd$$

என்பதால் தரப்படுகிறது; இங்கு, E வளையினது திரவியத்தின யங்கின மட்டையும், I கூனற்றளத்துக்குச் செங்குத்தானதும அதன திணிவு மையம் ஊடே செல்கின்றதுமான அச்சொன்று பற்றி தட்டின குறுக்கு வெட்டொன் றின் "சடத்துவத திருப்பம்" உம் ஆகும. பிந்தியது $I = \frac{1}{12}ab^3$ என்பதால் தரப்படுகிறது; இங்கு a வளையின் அகலமும், b அதன தடிப்பும் ஆகும்.

கண்ணாடி வளையின் வளைவு முரணமுறிவு ஆதலாலும், மூடித் துண்டு தடடையாதலாலும, பிந்தியது விளிம்புத் தொகுதியின மையம் O_1 இல் வளையைத் தொடமாட்டாது; இவ்விடததில தொடலித்தளம் மூடித்துண் டிற்குச் சமாந்தரமாக இருககிறது. ஆனால் விளிம்புத்தொகுதியின் வடிவ மும் நிலையும் அததொகுதியினது மையத்தின் நிலையைச் சாராது. இதை நிறுவும் பொருட்டு A, B ஆகிய திசைகளில விளிம்புகளின் விட்டங்கள் அளக்கப்பட்டிருக்கின்றன எனக் கொளவோம. A யாகிய திசையில் மையத்தி லிருந்து எண்ணிக் கொண்டுபோக n ஆவதாகத் தோற்றும் விளிம்புச் சோடியின் நிலைகளைப் P_1 உம் P_2 உம், படம் 8·20(e), குறிக்குமாயின் நடுநிலைப் பரபபின் வளைவாரை R_1 ஆனது

$$2R_1.O_1C = \left(\frac{X_n}{2}\right)^2$$

என்பதால் தரப்படுகிறது; இங்கு $X_n = P_1P_2$. [$2R_1$ ஐக் காட்டிலும O_1C சிறிதே; எனவே $2R_1 - O_1C$ என்னும் உறுப்பில் அது புறக் கணிக்கப்படுகிறது.] Q_1 உம் Q_2 உம் $(n+s)$ ஆம் விளிம்புச சோடி எனின்,

$$2R_1.O_1D = \left(\frac{X_{n+s}}{2}\right)^2.$$

$$\therefore\ 2R_1(O_1D - O_1C) = \tfrac{1}{4}(X_{n+s}^2 - X_n^2).$$

ஆனால் $(O_1D - O_1C) = s\left(\frac{\lambda}{2}\right)$; இங்கு λ பயன்படுத்தப்படும் ஒளியின் அலைநீளம் ஆகும்.

$$\therefore\ R_1 = \frac{1}{4\lambda s}(X_{n+s}^2 - X_n^2).$$

அதுபோலவே Y_{n+t} யும் Y_n உம் வளைக்குக் குறுக்கான திசையிலுள்ள விளிம்புகளையும் R_2 ஆனது முரண் முறிவு வளைவாரையையும் குறிக்குமாயின்,

$$R_2 = \frac{1}{4\lambda t}(Y_{n+t}^2 - Y_n^2).$$

அதனது சேர்ந்த நிறை காரணமாக வளையானது தொடக்க வளைவாரை R_0 உடையது எனக் கொள்க. அப்பொழுது பொதுவாக [பக்கம் 395 ஐப் பார்கக],

$$EI\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right] = mgd.$$

இதை
$$\frac{EI}{R_1} = mgd + \beta$$

என எழுதலாம்; இங்கு, β ஒரு மாறிலி. R_1 இற்கு ஏற்கெனவே கிடைததுள்ள பெறுமானத்தைப பயன்படுத்த,

$$\frac{4EI\lambda s}{X_{n+s}^2 - X_n^2} = mgd + \beta.$$

m ஐ மாற்றி அதன் ஒவவொரு பெறுமானத்திற்கும் $(X_{n+s}^2 - X_n^2)$ இன் ஒத்த பெறுமானத்தைப் பெறறு, $m = y$ எனவும் $\frac{1}{X_{n+s}^2 - X_n^2} = x$ எனவும் எழுதினல்,

$$\frac{4EI\lambda s}{gd}x = y + \frac{\beta}{gd}.$$

இச்சமன்பாடானது படம் 8·19 (f) இலுள்ள நேர்கோடு A யைக் குறிக்கிறது; அதன் சரிவு $\frac{4EI\lambda s}{gd}$ ஆகும்; எனவே, சரிவு துணியப்பட்டதும் E யைக் கணிககலாம்.

அதுபோலவே

$$\frac{1}{4\lambda t}(Y_{n+t}^2 - Y_n^2) = R_2 = \frac{1}{\sigma} . R_1 = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{EI}{mgd + \beta};$$

இங்கு σ ஆனது கண்ணுடியின் புவசோன் விகிதம் ஆகும்.

$$\therefore \frac{4\lambda t}{\sigma}\left[\frac{EI}{Y_{n+t}^2 - Y_n^2}\right] = mgd + \beta.$$

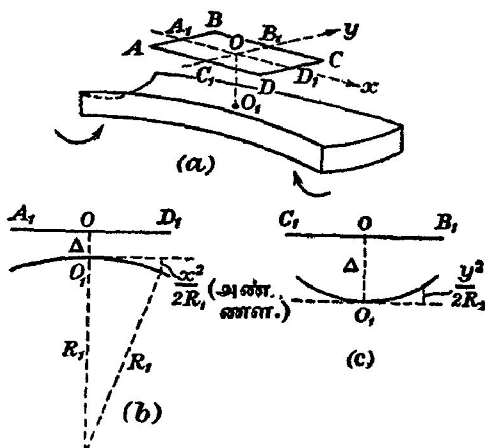
எனவே நாம் $m = y$ ஐயும் $\frac{1}{Y_{n+t}^2 - Y_n^2} = x$ ஐயும் குறித்தால், A யின் சரிவின் $\frac{1}{\sigma}$ மடங்கு சரிவுடைய நேர்கோடு B யைப் பெறல் வேண்டும் [படம் 8·19 (f)].

$$\therefore \sigma = \frac{\text{A யின் சரிவு}}{\text{B யின சரிவு}}.$$

கோணுவின் விளிம்புகளின் வடிவம் பற்றிய குறிப்பு.—கோணுவின் முறையைப் பயன்படுத்திக் கண்ணுடியின் மீள்தன்மை மாறிலிகளைப் பரிசோதனையால் துணியும்பொழுது தலையீட்டு விளிம்புகளின் வடிவத்தைக் கருதவேண்டியதேயில்லை ; இருந்தாலும் அதைப் பற்றிய ஆய்வானது ஓரளவு விரும்பற்பாலது.

படம் 8·21(a) யில், ABCD ஆனது தட்டைக் கண்ணுடித் தகடொன்றின் கீழ்ப் பரப்பு ஆகுக. மீள்தன்மை மாறிலிகள் காணவேண்டிய வளையின் மேற்பரப்பின் இடையான தொடலித் தளமானது அமமேற்பரப்பை O_1 இல் தொடுக ; இத்தொடலித் தளம் ABCD யிற்குச் சமாந்தரமாக இருக்கிறது. OO_1 ஆனது ABCD யிறகுச் செங்குத்தாக அமையுமாறு O ஆனது ABCD யின் ஒரு புள்ளியாகும். $OO_1 = \Delta$ ஆகுக.

Ox என்பது பிரயோகிக்கப்படும் இணைகளின் தளத்துக்குச் சமாந்தரமாகவும், Oy அத்தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும, ABCD யில் செவ்வக அச்சுக்களை எடுக்க. இணைகளின் தளத்தில் வளைவாரை R_1 உம், அதற்குச் செங்குத்தான தளத்தில் அது R_2 உம் ஆகுக. அப்பொழுது ABCD யின்



படம் 8·21. கோணுவின் தலையீட்டு விளிம்புகளின் வடிவம்.

எந்தப் புள்ளி (x, y) யிலிருந்தும் கூனலுற்ற வளையின் மேலான முகத்துக்கு OO_1 என்பதற்குச் சமாந்தரமாக, படங்கள் 8·21 (b) யிலும் (c) யிலும் காட்டியுள்ளவாறு வரையப்பட்ட நேர்கோட்டின் நீளத்தை $\Delta + \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2}$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். குறிக்கப்பட்ட எந்த

விளிம்புக்கும் இத்தூரம் மாறுது இருக்கும். எனவே

$$\frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} = \kappa \text{ (என்க)},$$

அல்லது
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

இங்கு $a^2 = 2R_1\kappa$ உம் $b^2 = 2R_2\kappa$ உம் ஆகும்; எனவே விளிம்புகள் அதிபரவளைவுகள் ஆகும்.

அச்சு Ox இற்கும் அணுகுகோடுகளுக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் α ஆகுக. அப்பொழுது புவசோன் விகிதம் σ,

$$\sigma = \frac{R_1}{R_2} = \frac{a^2}{b_2} = \text{கோதா}^2\alpha$$

என்பதால் தரப்படுகிறது. மேலும் வளிப்படலத்தின் தடிப்பானது $(x_n, 0)$ என்னும் புள்ளியில் $\Delta + \frac{x_n{}^2}{2R_1}$ உம் $(x_{n+m}, 0)$ என்னும் புள்ளியில் $\Delta + \frac{x_{n+m}^2}{2R_1}$ உம் ஆகும்.

ஒவ்வோர் எடுத்துக்காட்டிலும் பாதை வித்தியாசமானது இதன் இருமடங் காகும்; எனவே x_n, x_{n+m} என்பவற்றால் வரையறுத்த தானங்களுக்குப் பாதை வித்தியாச மாறலானது

$$2\left[\frac{x_{n+m}^2 - x_n{}^2}{2R_1}\right] = m\lambda$$

ஆகும்; இங்கு λ ஆனது பயன்படுத்தியுள்ள ஒளியின் அலைநீளம் ஆகும். நடைமுறையில் செய்வதுபோல் விட்டங்கள் அளக்கப்பட்டால்,

$$X_n = 2x_n$$

எனவே
$$R_1 = \frac{X_{n+m}^2 - X_n{}^2}{4m\lambda}.$$

அதுபோலவே
$$R_2 = \frac{Y_{n+m}^2 - Y_n{}^2}{4m\lambda}.$$

$$\therefore \sigma = \frac{R_1}{R_2} = \frac{X_{n+m}^2 - X_n{}^2}{Y_{n+m}^2 - Y_n{}^2}.$$

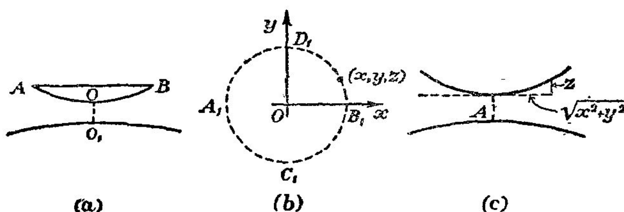
கண்ணாடித் தகடொன்றிற்குப் பதிலாக நீண்ட குவியத்தூரம் உடைய ஒருங்குவில்லையொன்றை வளைமீது வைத்துக்கொள்ளலாம். கூனலுற்ற வளையின் மேற்பரப்பிற்கு அடுத்துள்ள வில்லையின் முகத்தின் வளைவாரை r ஆகுக. படம் 8·22 (a) யில், வில்லையின் இம்முகத்திலுள்ள மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி O, செவ்வக ஆள்கூற்றுத் தொகுதியொன்றின் உற்பத்தி யாகுக; (x, y) தளமானது கிடையாக O ஊடே செல்லுகிறது Oz நிலைக் குத்தாக அமைந்திருக்கிறது. அப்பொழுது வில்லையின் மேற்பரப்பில்

யாதுமொரு புள்ளி (x, y, z) இலும், r சிறிதன்று ஆதலின்,

$$(x^2+y^2)=2rz\,;$$

படங்கள் 8·22 (b) யையும் (c) யையும் பார்க்க.

எனவே
$$z=\frac{x^2+y^2}{2r}.$$



படம் 8·22. கூனலுற்ற வளையொன்றுமீது கோளப் பரப்பொன்று இருக்கும்பொழுது விளிம்புகளின் வடிவம்.

எனவே முந்திய எடுத்துக்காட்டில் இருந்ததுபோல, (x, y, z) இடக்கும் விளிம்பிறகு

$$\Delta+\frac{x^2}{2R_1}-\frac{y^2}{2R_2}+\frac{x^2+y^2}{2r}=\kappa.$$

$A=\kappa-\Delta$ எனின் இச்சமன்பாட்டை

$$\frac{x^2}{A}\left[\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2r}\right]-\frac{y^2}{A}\left[\frac{1}{2R_2}-\frac{1}{2r}\right]=1$$

என எழுதலாம்; $\frac{1}{2r}>$ அல்லது $<\frac{1}{2R_2}$ என்னும் நிபந்தனைகளுக்கேற்ப இது நீள்வளையம் அல்லது அதிபரவளைவொன்றின் சமன்பாடாகும். இனி வழக்கமாக r ஐக் காட்டிலும் R_2 பெரிதாகும்; ஆகவே விளிம்புகள் வழக்கமாக நீள்வளையங்கள் ஆகும்.

முனைநெம்பொன்றின் சுயாதீன நுனியில் ஒளியியல் முறைப்படி கோண விலகலைத் துணிதல்.—முன்னர் கூறியுள்ளவாறு இடைத் தளமொன்றில் மட்டும் கோணலுறக்கூடிய வகையில் சீரான சட்டமொன்று அதனது நுனியொன்றில் நிலையாக்கப்பட்டிருந்தால், பக்கம் 412 ஐப் பார்க்க, அது எத்தகைய கூனலையுற்றாலும் அதில் அதனது சொந்த நிறையாற் சேரும் பங்கு புறக்கணிக்கத்தக்கதாகும். எனவே நிலையாக்கப்பட்ட நுனியிலிருந்து தூரம் x இலுள்ள குறுக்குவெட்டில கூனற்றிருப்பமானது

$$EIy''=M=W(l-x)$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு குறியீடுகள் அவற்றின் வழக்கமான அர்த்தம் உடையன. $x=0$ ஆகுமிடதது கோணவிலகல் பூச்சியமாதலால் இது

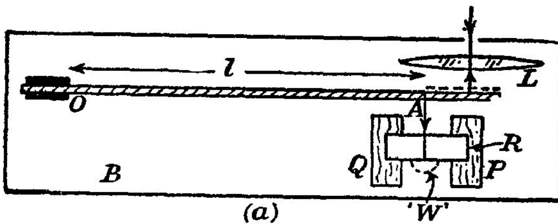
$$EIy' = -\tfrac{1}{2}W(l-x)^2 + \tfrac{1}{2}Wl^2$$

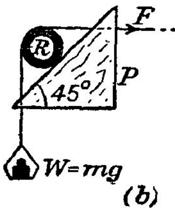
என உடனே தருகிறது. நெம்பின சுயாதீன நுனியில், கோண விலகல் α ஆனது

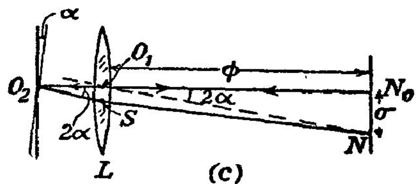
$$EI\alpha = EI[y']_{x=l} = \tfrac{1}{2}Wl^2$$

எனபதால் தரப்படுகிறது.

α வை அளக்கும்பொருட்டு வரிப்படமுறைப்படி படம் 8·23(a) யிற் காட்டியுள்ள ஆய்கருவியானது நூலாசிரியரால் திட்டமிடப்பட்டது. நெம்பு **OA** ஒரு மெல்லிய கணணுடித்துண்டாகும். அதன் முகங்கள் நிலைக் குத்தான தளங்களிற கிடக்குமாறு அது கிடையான நிலையில் நிலையாக்கப் படுகிறது ; அல்லது அது நிலைக்குத்துக் கீழ்முகமாகவுந் தொங்கலாம். நெம்பின் சுயாதீன நுனி வெள்ளிமுலாம் பூசப்பட்டிருக்கிறது ; அதறகுச் சற்று முன்னுலே இரண்டுமீற்றர் குவியத்தூரம் உடைய ஒருங்கு வில்லை







படம் 8.23. முனைநெம்பொன்றின் சுயாதீன நுனியினது கோண விலகலை ஒளியியல் முறைப்படி அளத்தல்.

L ஆனது நிறுவப்பட்டிருக்கிறது ; முழுத்தொகுதியும் தக்க அடித்தளம் **B** யில் தாபிக்கப்பட்டிருக்கிறது. புள்ளி **A** யில், அதாவது நிலையாக்கியுள்ள நுனியிலிருந்து தூரம் l இல் நெம்பிற்குச் செங்குத்தாகக் **கிடையான** விசை **F** பிரயோகிக்கப்படுகிறது ; அப்பொழுது α வை அளக்குமிடத்து வெள்ளிமுலாம் பூசியுள்ள பாகத்தை ஆடியாகப் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம்.

F இன் பிரயோகத்தையிட்டுக் கிடைத்தளத்துடன் கோணம் 45° ஐ ஆக்குகின்ற தளமொன்றின்மேல், இலேசான அலுமினியக் குழாய் R ஓய்வாய், அதன அச்சு கிடையாக இருக்குமாறு விடப்படுகிறது; நெம்பின் புள்ளி A யில் இணைக்கப்பட்ட இலேசான நாணொன்று உருளைமேற் செல்கிறது ; நெம்பிற்கும் உருளைக்கும் இடையில் நாண் கிடையாக இருத்தல் வேண்டும். அதனது மற்றை நுனியில் நாணனது தெரிந்த நிறை W வைக் காவுகிறது. சாய்தளப் பரப்புமீது குழாயானது தடையின்றி உருள முடியும் ஆதலால், நாணிலுள்ள இழுவை கிட்டத்தட்ட W ஆகும், இடைநிலைப் பௌதிகவியல் (பாகம் 4), ப. 97 ஐப் பார்க்க. அது எதுவாகிலும் $F=W-f$ என நாம் எழுதலாம் ; இங்கு f ஆனது W வைக் காவுகின்ற கடதாசியின் நிறையை உள்ளடக்கிய சிறிய திருத்தவுறுப்பாகும். அப்பொழுது

$$EI\alpha=\tfrac{1}{2}(W-f)l^2;$$

எனவே W, α என்பவற்றின் ஒத்த பெறுமானங்களின் தொடரொன்றைப் பெற்றால், வரைபு முறையொன்றைப் பயன்படுத்தி EI யிற்கு இடைப் பெறுமானமொன்றைப் பெறலாம் ; அதிலிருந்து E யைக் கணித்துக் கொள்ளலாம்.

ϕ ஆனது வில்லையிலிருந்து அளவிடைத் தூரமும் (அதாவது வில்லையின் குவியத்தூரமும்) σ ஒளிப்புள்ளியின் விலகலும் ஆயின், அப்பொழுது

$$\alpha=\frac{\sigma}{2\phi}$$

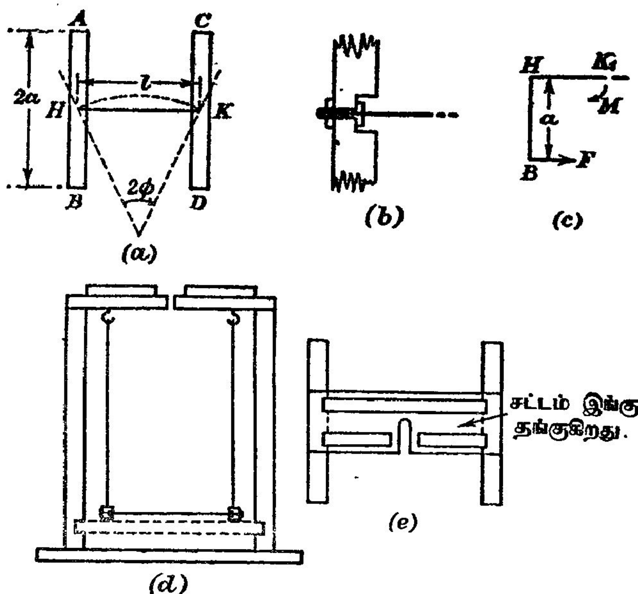
என படம் 8·23 (c) காட்டுகிறது.

[ந.கு. O_1N ஆனது கதிர் O_2S இற்குச் சமாந்தரமான துணையச்சாகும்.]

கம்பியொன்றின் திரவியத்திற்கு யங்கின் மட்டுகளைத் துணிதல் ; சேளின் ஆய்கருவி. விவரித்துக்கூற இருககின்ற முறையானது சேள்† என்பவரால் ஆனது. திண்மமொன்றின் மீள்தன்மைக் குணகங்களின் துணிதலுக்கான கிட்டத்தட்ட மற்றை எல்லா முறைகளைப்போல் இதையும் சமவியல்புடைய திரவியங்களுக்கு மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும், என அவரது ஆராய்ச்சி வெளியீட்டில் சுட்டிக்காட்டப்பட்டிருக்கிறது. படம் 8·24 (a) யில், AB யும் CD யும் சதுர அல்லது வட்டக் குறுக்குவெட்டுடைய இரு சமனுன பித்தளைச் சட்டங்கள் ஆகும். சோதனைக்கான கம்பியின் நுனிகள் சட்டங்களின் மையப்புள்ளிகள் H, K என்பவற்றில் உறுதியாகப் பற்றப்பட்டிருக்கின்றன— விவரங்களுக்குப் படம் 8·24 (b) யைப் பார்க்க. கம்பியின் நீளம் ஒருசில சதமமீற்றர் ஆக இருந்தாற போதும். ஆகும் சட்டத்தில் H, K என்பவற்றிற்குச் சரிமேலான புள்ளிகளில், அதாவது சிறுக்கும் திருகுகளிறகுத் துளைக்கப்பட்ட சட்டத்து முகங்களுக்குச் செங்குத்தான முகங்களில், இரு சிறு கொளுக்கிகள் திருகப்பட்டிருக்கின்றன. ஒவ்வொன்றும் ஒருமீற்றர்

†சேள், *Phil. Mag.*, 99, 193, 1900.

நீளமுடைய சமாந்தரமான இருநூற்றுண்டுகளால் தொகுதியைத் தொங்க வைப்பதற்கு மேற்படி கொளுக்கிகள் இடங்கொடுக்கின்றன ; எனவே மேற்படி நூற்றுண்டுகளிலுள்ள முறுக்கலால் ஆகும் இணையானது தொகுதி மீது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற மற்றை எல்லா இணைகளைக் காட்டிலும் சிறிதாகும். அப்பொழுது சட்டம் ஒவ்வொன்றும் அதே கிடைத் தளத்தில்



படம் 8·24. கம்பியின் திரவியத்திற்கு E, n, β, σ களைத் தீர்மானிப்பதற்குரிய சேளின் முறை.

அலையமுடியும் ; மேலும் கொளுக்கிகளில் நூல்களைப் பிடிக்கும் நுனிகள் கிட்டத்தட்ட நான்கு சதமமீற்றர் சட்டத்து முகங்களுக்கு மேலே இருக்கிற படியால் தொகுதியின் கிடைநிலை உறுதியானது.

சட்டங்களின் நுனிகள் B யையும் D யையும் ஒன்றையொன்று அணுகுமாறு செய்தால் நுனியொவ்வொன்றின் இடப்பெயர்ச்சியும் அதே பெறுமானமுடையதாகும் ; அவை விடுவிக்கப்பட்டபோது சட்டம் ஒவ்வொன் றும் கிடைத் தளமொன்றில் அதிரும். புள்ளிகள் H, K என்பவற்றின் அசைவுகள் முதல் வரிசைச் சிறுகணியங்கள் ஆகும் ; எனவே அவை நிலையானவை ; கம்பியின் எல்லாக் குறுக்கு வெட்டுக்களிலும் கூனற் றிருப்பம் மாறாது இருக்கிறது. இதை நிறுவும்பொருட்டு ஒவ்வொரு

சட்டத்திலும் பிரயோகிக்கப்படும் விசை F ஆகுக. தொகுதியின் பாகம் BHK_1 இன் சமநிலையைக் கருதுக. AB யின் அச்சுக்கு F செங்குத்தாக வும், AB யின் அரைநீளம் a யுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் K_1 இன் இடப் பெயர்ச்சி சிறிதாயும் இருக்குமாறு B யின் இடப்பெயர்ச்சி அத்துணைச் சிறிதாயின

$$S=0,$$

$$M-Fa=0$$

என நாம் வழக்கின்படி பெறுகிறோம் ; எனவே கூனல் திருப்பம் மாறுது இருக்கிறது ; ஆகவே

$$M=\frac{EI}{R}$$

ஆதலின் கூனற்றளத்தில் கம்பிக்கான நடுநிலைப் பரப்பின் சுவடானது ஆரை R உடைய வட்டமொன்றின் வில்லாகும் ; இங்கு E கம்பி யினது திரவியத்தின் யங்ஙின் மட்டு, I கம்பியினது வெட்டுப்பரப்பின் "புவியீர்ப்பு மையம்" ஊடேயும் கூனற்றளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் செல்கின்ற அச்சொன்றைக் குறித்து அப்பரப்பின் "சடத்துவத் திருப் பம்" ஆகும்.

சட்டம் ஒவ்வொன்றும் இடப்பெயர்ச்சியுற்ற கோணம் ϕ எனின்,

$$R=\frac{l}{2\phi}$$

ஆகும் ; இங்கு l கம்பியின் நீளம் ஆகும். சட்டங்கள் மீது பிரயோ கிக்கப்படுகின்ற விசைகள் நீக்கப்பட்டதும் சட்டம் ஒவ்வொன்றினதும் இயக்கச் சமன்பாடானது

$$J\ddot{\phi}+M=0$$

அல்லது
$$J\ddot{\phi}+\frac{2EI}{l}.\,\phi=0$$

ஆகும் ; இங்கு J என்பது அதனது சுழற்சியச்சுப் பற்றிச் சட்டமொன்றின் சடத்துவத் திருப்பமாகும். எனவே ஆவர்த்தன காலம் T_1 ஆனது

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{Jl}{2EI}}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது. வட்டக் கம்பியொன்றினிடத்து $I=\frac{1}{4}\pi r^4$; இங்கு r அதன் ஆரை ஆகும் ; எனவே

$$E=\frac{8\pi Jl}{T_1^{\,2}r^4}.$$

அடுத்து சட்டங்கள் கொளுக்கிகளினின்றும் நீக்கப்பட்டு அவற்றுள் ஒன்று இறுக்கியொன்றால் நிலைக்குத்தாக இறுக்கப்பட்டு, மற்றையது கிடைத் தள

மொன்றிற் சுயாதீனமாக அதிரமுடிகிறது எனக் கொள்க. அதனது ஆவர்த்தன காலம் T_2,

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2Jl}{\pi n r^4}}$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் எடுத்துரைக்கப்படுகிறது; இங்கு n கம்பியினது திரவியத்தின் விறைப்பு மட்டு [பக்கம் 333 ஐப் பார்க்க.]

$$\therefore\ n = \frac{8\pi Jl}{T_2^2 r^4}.$$

எனவே $$\frac{E}{n} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$$ உம்

அத்துடன் $$\sigma = \frac{E}{2n} - 1$$ உமாம்.

பக்கம் 350 ஐப் பார்க்க ; இங்கு σ ஆனது புவசோனின் விகிதம் ஆகும். எனவே இம்முறையால் E, n, σ என்பன எளிதில் துணியப்படுகின்றன.

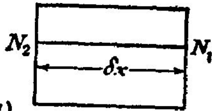
[ந.கு. $\frac{E}{n}$, σ ஆகிய இரண்டும் ஆவர்த்தன காலங்களினது வர்க்கங்களின் விகிதத்தை மட்டுமே சார்ந்திருக்கிறபடியால், கம்பியின் பரிமாணங்கள் முதலியன தேவைப்படமாட்டா. மேலும் $0 < \sigma < 0{\cdot}5$ ஆதலின், $\sigma = 0$ ஆகுமிடத்து $2n = E$ யும் $\sigma = 0{\cdot}5$ ஆகுமிடத்து $3n = E$ யும் ஆகும் என்பது குறித்தற்பாலது.]

இவ்வாய்கருவியைப் பயன்படுத்திச் சிறந்த பேறுகளைப் பெறும் பொருட்டுச் சட்டங்களின் அதிர்வு வீச்சமானது சிறிதாய் இருத்தல் வேண்டும்; அப்பொழுதுதான் கூனற்றிருப்பம் மாருது இருக்கும் ; எனவே இயக்கமானது எளிய இசையாகும். சேளின் சில பரிசோதனைகளில் $1°$ யை மீருத வீச்சங்களைப் பயன்படுத்தியுள்ளபோதிலும் 100 அதிர்வுகளை நேரங்காண முடிந்தது.

சட்டங்களினிடத்து எவ்விதமான பெயர்வியக்க அளிப்பையுந் தவிர்க்கும் பொருட்டு நூற்றடமொன்ருல் அவற்றின் நுனிகள் ஒன்றையொன்று சற்று அணுகுமாறு கொண்டு வரப்பட்டுள்ளன ; முழுத்தொகுதி ஓய்வடைந்ததும் நூல் எரிக்கப்பட்டது. அடுத்து ஆவர்த்தன காலம் நோக்கப்பட்டுள்ளது ; மாட்டேற்றுக் குறியை மறத்தலாகாது !

ஆய்கருவியை அமைக்குமிடத்து, கம்பி விகாரப்படாமல் இருக்கும் பொருட்டுக் கம்பியானது ஒருபோதும் பெரிய கூனற்றிருப்பத்திற்கு ஆளாகாமல் இருப்பதற்குக் கம்பியைக் காவும்பொழுது இரு கைகளையும் பயன்படுத்துதல் வேண்டும் ; மேலும் கொளுக்கிகளில் நூல்களை மாட்டும்பொழுது பலகையொன்றின்மீது சட்டங்களை ஓய்வாய் இருத்திப் பின்னர் பலகை அப்புறப்படுத்தப்படுகிறது. பரிசோதனையின் இரு பகுதிகளிலும் ஆய்கருவியின் தாங்கலுக்கான தக்க மரச்சட்டமொன்றின் நிலை, கிடைப் படங்கள் படங்கள் 8·24 (d), (e) இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

கூனலுற்ற வளையொன்றின் விகாரச்சக்தி.—*இனி, சமவியல்புடைய, ஓரினமான திரவியமொன்ருல் ஆனதும், தொடக்கத்தில் நேரானதுமான சீரான வளையொன்றின் கூனலாற் பிறப்பிக்கப்படுகின்ற விகாரச் சக்தியைக் கருதுவோம். எமது உடனடியான தேவையையிட்டு வளையின் குறுக்குவெட்டு வடிவத்தைப் பொருட்படுத்த வேண்டியதேயில்லை. படம் 8·25 (a) யில், அதனது விகாரப்படுத்தாத நிலையில் வளையின் சிறுபாகமொன்று காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இணையொன்ருலேயே கூனல் உண்டாக்கப்பட்டால், அதாவது அது தனிக் கூனல் ஆனுல், வளையின கருதப்படுகின்ற பாகமானது படம் 8·25 (b) யிற காட்டியுள்ள வடிவத்தைப் பெறுக. நடுநிலையச்சு N_1N_2 இன் நீளம் δx மாருது இருக்கும். நடுநிலையச்சுக்கு மேலே உயரம் z இல், மூலகமொனறைக் கருதுக. R என்பது நடுநிலையச்சின் வளைவாரையும் δA என்பது வரிப்படத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான தளத்தில் மூலகத்தின குறுக்குவெட்டுப் பரப்பும், δz எனபது வரிப்படத் தளத்தில் மூலகத்தின் தடிப்பும் ஆகுக. $\delta\theta$ என்பது காட்டப்பட்டுள்ள கோணம் எனின், சிறப்பாகக் கருதப்படுகின்ற மூலகத்தில் விகாரம்,*



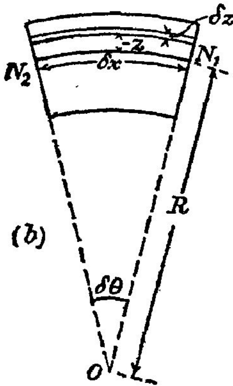
$$\epsilon=\frac{(R+z)\,\delta\theta-R\,\delta\theta}{R\,\delta\theta}=\frac{z}{R}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

எனவே $p=\epsilon E$ ஆதலின், கருதப்படுகின்ற மூலகத்துடன் தொடர்புள்ள விகாரச் சக்தி

$$\delta W=\tfrac{1}{2}p\epsilon\,(\delta A.\delta x)=\tfrac{1}{2}E.\frac{z^2}{R^2}.\,\delta A.\delta x$$

என்பதால் தரப்படுகிறது. பக்கம் 361 ஐப் பார்க்க.



படம் 8·25. கூனலுற்ற வளையொன்றில் விகாரச் சக்தி.

குறுக்குவெட்டு முற்றிலும் தொகையிட்டுக் கோலில் நடுநிலையச்சு N_1N_2 உடைய பாகத்தில் விகாரச் சக்தியானது

$$\delta W=\tfrac{1}{2}\,\delta x.\frac{E}{R^2}\int z^2\,dA=\tfrac{1}{2}\,\delta x.\frac{EI}{R^2}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது எனக் காண்கிருேம்; இங்கு I ஆனது கருதப்படுகின்ற குறுக்குவெட்டின் "சடத்துவத் திருப்பம்" ஆகும். $\tfrac{1}{2}M\delta\theta$ என, அல்லது இங்கு இன்னும் வசதியாக $M=\frac{EI}{R}$ ஆதலின், மேற்படி கோவையை $\frac{M^2}{2\,EI}.\delta x$ என எழுதலாம்.

$$\therefore\quad W=\frac{1}{2E}\int_0^l\frac{M^2}{I}\,dx.$$

ஒரு சீரான கோலினிடத்து இது

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2\,dx$$

என ஆகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு.—(*a*) நுனியொன்றில் நிலையாக்கப்பட்டதும், மறுநுனியில் சுயாதீனமான தும், நீளம் l உம் அலகு நீளமொன்றிற்கு நிறை w வும் உடையதுமான சீரான வளை யொன்றினிடத்து, நிலையாக்கியுள்ள நுனியிலிருந்து தூரம் x இல் கூனற்திருப்பம்

$$M = \tfrac{1}{2}w(l-x)^2$$

எனபதால் தரப்படுகிறது, பக்கம் 387 ஐப் பார்க்க.

∴ வளையிற் சேமித்துள்ள சக்தி,

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2\,dx = \frac{1}{2EI}\int \tfrac{1}{4}w^2(l-x)^4\,dx$$

$$= \frac{w^2}{40\,EI}\Big[-(l-x)^5\Big]_0^l = \frac{w^2l^5}{40\,EI}.$$

(*b*) உள்ளமைக்கப்பட்ட வளையொன்றுக்கு, வளையின் நீளம் $2a$ எனின்

$$M = \tfrac{1}{2}wx^2 - wax + \tfrac{1}{3}wa^2,$$

பக்கம் 403 ஐப் பார்க்க.

$$\therefore\quad W = \frac{1}{2EI}\int_0^{2a}\left(\tfrac{1}{2}wx^2 - wax + \tfrac{1}{3}wa^2\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{45}\cdot\frac{w^2a^5}{EI}.$$

(*c*) நீளம் l உடையதும் அதன் சுயாதீன நுனியில் சுமை W_0 ஐக் காவுகின்றதுமான இலேசான முனைநெம்பொனறினிடத்து

$$M = W_0(l-x),$$ பக்கம் 385 ஐப் பாாக்க.

$$\therefore\quad W = \frac{1}{2EI}\int_0^l W_0^2(l-x)^2\,dx = \frac{1}{6EI}.W_0^2l^3.$$

(*d*) எடுத்துக்காட்டு (*a*) யை மீண்டும் கருதி, அடிப்படைத் தத்துவங்களிலிருந்து விகாரச் சக்தியைக் கணிப்போம். இவ்வெடுத்துக்காட்டில்

$$EIy = \tfrac{1}{24}w(l-x)^4 + \tfrac{1}{6}wl^3x - \tfrac{1}{24}wl^4$$

ஆதலின், பக்கம் 412 ஐப பாாககு, வளையை விகாரப்படுத்துமிடத்துச் செய்யப்படும் வேலை

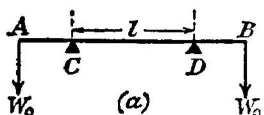
$$\tfrac{1}{2}\int_0^l wy\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{w^2}{EI}\left[-\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{24}(l-x)^5 + \tfrac{1}{12}l^3x^2 - \tfrac{1}{24}l^4x\right]_0^l = \frac{w^2l^5}{40\,EI}.$$

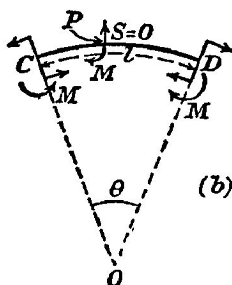
(*e*) கடைசியாக, சீராகக் கூனலுற்ற வளையில் விகாரச் சக்தியைக் கருதுவோம். l என்பது வளையிலே சீராகக் கூனலுற்ற பாகத்தின் நீளம் எனின், படம் 8·26 (*a*) யைப் பார்க்க, அந்தப் பாகத்தில் விகாரச் சக்தியானது

$$W = \frac{1}{2EI}\cdot\int_0^l M^2\,dx = \frac{M^2}{2EI}.\,l$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

அடிப்படைத் தத்துவங்களிலிருந்து இக்கோவையைப் பெறும் பொருட்டு நாம் பின்வருமாறு செய்யலாம். படம் 8·26 (*b*) யில், இடைத்தூரம் CD யிலே எந்தக் குறுக்குவெட்டு P யிலும் கூனற்றிருப்பம் M ஆனது மாறுது இருக்கிறது; அது வலஞ்சுழியானது. இடைத்தூரத்தின் நுனிகளிலுள்ள புற இணைகள் ஒவ்வொன்றும் பருமன் M உடையன; ஆனால், C யிலுள்ளது இடஞ்சுழியாகவும் D யிலுள்ளது வலஞ்சுழியாகவும் அமைந்திருக்கின்றன. எனவே மீள்தன்மையெல்லை மீறப்படலாகாது என்னும் வழக்கமான நிபந்தனைக்கிணங்குமுகமாக வளையை விகாரப்படுத்தியபோது, செய்யப்பட்ட வேலையானது முன்போலவே





படம் 8·26. சீராகக் கூனலுற்ற வளையில் விகாரச் சக்தி.

$$2[\tfrac{1}{2}M(\tfrac{1}{2}\theta)] = \tfrac{1}{2}M\theta = \tfrac{1}{2}M.\frac{l}{R} = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}\cdot l.$$

கூனலுற்ற வளைகளின் அதைப்பு.—செறிசுமை W வைத் தாங்குகின்ற கிடையான வளையானது எவ்வகையாயினும் கோணலுறும்பொழுது செய்யப்படும் வேலை

$$\tfrac{1}{2}W \times (\text{சுமையினிடத்திற் கோணல்})$$

ஆதலின், இதே கோவை வளையின் அதைப்பையும் அளக்கிறது, பக்கம் 367 ஐப் பார்க்க.

இனி, நீளம் $2a$, அகலம் b, ஆழம் d உடையதும் அதன் இரு நுனிகளிலும் தாங்கப்பட்டதுமான இலேசான வளையொன்று செறிசுமை W ஐக் காவுமாயின், அதன் மையத்தில் கோணல் $\frac{1}{6}\cdot\frac{W}{EI}\cdot a^3$ ஆகும்; பக்கம் 398 ஐப் பார்க்க.

$$\therefore \text{ அதைப்பு } = \tfrac{1}{2}W\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{W}{EI}\cdot a^3$$

$$= \frac{W^2a^3}{Ebd^3} \qquad [\because I = \tfrac{1}{12}bd^3].$$

கிடையான எந்த வளையினதும் அதைப்புக்குக் கோவையொன்றைப் பெறும்பொருட்டு, δx வளையின் சிறு துண்டொன்றின் நீளமும், M அம்மூலகத்தின் எந்தக் குறுக்குவெட்டிலுமுள்ள கூனற்றிருப்பமும், $\delta\beta$ அதன் முனைகளிலுள்ள சரிவுகளின் வித்தியாசமும் ஆகுக. அப்பொழுது வளையின் இப்பாகத்திற்கான விகாரச் சக்தியானது $\tfrac{1}{2}M.\delta\beta$ ஆகும். எனவே வளையின் முடிவுள்ள பாகத்திற்கான விகாரச்சக்தி

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{M}.d\beta$$

ஆகும் ; வழக்கமான குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி இதை

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{M}.\frac{d\beta}{dx}.dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{M}\frac{d^2y}{dx^2}dx \quad = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{EI}}dx$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{EI}}\int \mathrm{M}^2\, dx$$

என எழுதிக் கொள்ளலாம் ; இங்கு, வளைவுவிறைப்பு EI மாறிலி எனக் கொளளப்படுகிறது.

எந்த வளையினதும் கூனற்றிருப்ப வரிப்படம் கிடைக்குமாயின், மேற்படி சமனபாட்டைப் பயன்படுதது அதன் அதைப்பைக் கணிக்கலாம்.

அதைப்பிலிருந்து வளையின் கோணலைக் கணித்தல்.—நீளம் $(a+b)$ உடைய இலேசான கிடை வளையொன்று $x=a$ என்னும் புள்ளியிற் செறிசுமை W ஐக் காவுக. அப்பொழுது $x=0$ இல் தாக்கம் $\mathrm{W}\left(\frac{b}{a+b}\right)$ ஆதலால், $0 < x < a$ எனனும் வீச்சிலுள்ள எந்த வெட்டிலும் கூனற்றிருப்பம்

$$\mathrm{W}\left(\frac{b}{a+b}\right)x + \mathrm{M} = 0$$

அல்லது
$$\mathrm{M} = -\frac{b\mathrm{W}}{(a+b)}.x$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

வளையின் இப்பாகத்தில் விகாரச்சக்தி

$$\frac{1}{2\mathrm{EI}}\int_0^a\left(\frac{b\mathrm{W}}{a+b}.x\right)^2 dx = \frac{1}{6\mathrm{EI}}\left(\frac{b\mathrm{W}}{a+b}\right)^2.a^3.$$

எனவே முழுவளையிலும் விகாரச்சக்தி அல்லது அதைப்பு

$$\frac{1}{6\mathrm{EI}}\left(\frac{\mathrm{W}}{a+b}\right)^2.(b^2a^3+a^2b^3) = \frac{1}{6\mathrm{EI}}.\frac{\mathrm{W}^2a^2b^2}{(a+b)}.$$

ஆனால் அது $\frac{1}{2}(y_{x=a}).\mathrm{W}$ என்பதாலும் தரப்படுகிறது.

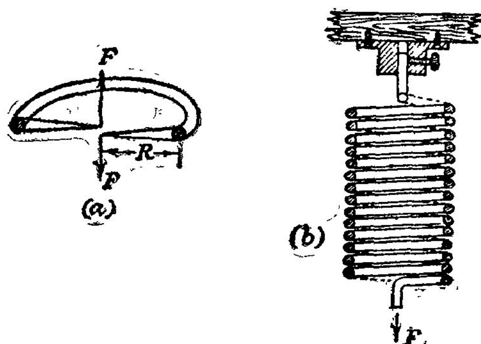
$$\therefore\ y_{x=a} = \frac{\mathrm{W}a^2b^2}{3\mathrm{EI}}.\frac{1}{(a+b)}.$$

[கோணல்களின் கணிப்பில் வழக்கமாகப் பயன்படுத்தப்படும் முறையால் இப்பேற்றை மெய்ப்பித்தல் வேண்டும் ; அப்பொழுதுதான் அதைப்பு முறையின் நயம் நன்கு உணரப்படும்.]

கூனலுற்ற வளையொன்றினது திரவியத்தின் சோதனையதைப்பு.—கம்பியொன்றின் திரவியத்தில் தகைப்பு எங்கும் மாறலின்றி இருக்கும்பொழுது,

அத்திரவியத்திற்கான சோதனை அதைப்பு $\frac{1}{2}\frac{p_0^2}{E}$ ஆகும் எனக் காட்டப் பட்டிருக்கிறது, பக்கம் 368 இற் காண்க. வளைகளினிடத்துச் சோதனை அதைப்பு $\alpha.\frac{p_0^2}{E}$ ஆகும்; இங்கு $0 < \alpha < 0{\cdot}5$. குணகம் α ஆனது எவ்வாறு வளைமீது சுமை ஏற்றப்பட்டிருக்கிறது என்பதைப் பொறுத்துள்ளது; நடுநிலையச்சிற் பூச்சியமாய் இருக்கிற தகைப்பானது வளர்ந்து அதனது மிக உயர்ந்த பெறுமானத்தை வளையின் மேற்பரப்பில் அல்லது கீழ்ப்பரப் பிற் பெறுகிறதாதலால் மீள்தன்மையெல்லையானது வளையின் பாகங்களில் மட்டுந்தான் அடையப்படும்.

நெருக்கமாகச் சுற்றிய சுரி அல்லது உருளை விற்கள்.—சமவியல்புடைய திரவியமொன்ருலான சீரான கம்பியொன்று அதன் அச்சானது ஆரை



படம் 8·27. நெருக்கமாகச் சுற்றிய சுரிவில்.

R உடைய ஓர் அரை வட்டமாகுமாறு வளைக்கப்படுகிறது எனக் கொள்க; படம் 8·27 (a) யிற் காட்டியுள்ளவாறு அதன் நுனிகளில் நீளம் R உடைய இரு புயங்கள் இணைக்கப்பட்டிருக்க; புயங்களின் நுனிகளில் சமனன விசைகள் F பிரயோகிக்கப்படுக. இவ்விசைகள், கம்பியொரு பாகமாக இருக்கின்ற வட்டத்தின் மையம் ஊடாகக் கம்பியைக் கொண்டி ருக்கும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக, ஒன்றிற்கொன்று முரணுகத் தாக்கு கின்றன. அப்பொழுது முறுக்கம் FR ஆகும்; கம்பியின் நீளம் πR ஆதலின், புயங்களினிடையேயான தொடர்புக் கோணப்பெயர்ச்சி θ ஆனது

$$\frac{\pi n a^4 \theta}{2l} = \mathrm{FR} \quad \text{என்பதால் [பக்கம் 326 இற் காண்க]}$$

அல்லது
$$\theta = \frac{2\,\mathrm{FR}^2}{na^4} \quad \text{என்பதால்}$$

தரப்படுகிறது ; இங்கு $2a$ கம்பியின் விட்டம் ஆகும். எனவே நிலைக்குத்துத் திசையிலே புயங்களின் முனைகளிடையேயான தொடர்பு இடப்பெயர்ச்சி Δz என்பது

$$\Delta z = R\theta = \frac{2\,FR^3}{na^4}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

இனி, N முழுச் சுற்றுக்கள் உள எனவும், முழுதும் நெருக்கமாகச் சுற்றியுள்ள சுரிவில் எனப்படுவதை ஆக்குமுகமாக அடுத்திருக்கின்ற சுற்றுக்கள் நெருங்கியிருக்கின்றன எனவும் கொள்க. அப்பொழுது

$$z = 2N.\Delta z = \cdot\frac{4NFR^3}{na^4}$$

என்பதற்கு இணங்குமுகமாக முழுவில்லின் நீட்சி z என்பது இருக்கும்.

நிலைக்குத்தான நிலையில், அதன் நுனியொன்று விறைப்பாக நிலையாக்கப்பட்டு அதன் மற்றைமுனையில் திணிவு M என்னும் சுமையால் வில்லானது ஈர்க்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$$F = Mg.$$

எனவே

$$\frac{Mg}{z} = \frac{na^4}{4NR^3}.$$

$\frac{M}{z}$ ஐத் துணிந்தால் கம்பியின் திரவியத்திற்கு விறைப்பின் பெறுமானத்தைப் பெறமுடியும் என மேற்படி சமன்பாடு தெளிவாக்குகிறது. இங்கு வரைபுமுறையே விரும்பற்பாலது.

$\frac{Mg}{z}$ இற்குரிய கோவையானது வில் காவுகின்ற சுமையின் அலகு இறக்கத்துக்கான விசையைத் தருகிறது ; அது f ஆற் குறிக்கப்படுக.

அதனது கீழான நுனியில் சுமையேற்றப்பட்ட இலேசான சுரிவில்லொன்றினது மேலும் கீழுமான அலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தை நோக்கியும் விறைப்பைத் துணியலாம். சுமையேற்றிய வில் ஓய்வாய் இருக்கும்பொழுது அதன் கீழ் நுனி ஏதேனுமொரு வரையறுத்த நிலையில் இருக்கும். வில்லில் அதிகப்படியான நீட்சியொன்றை ஆக்கும் பொருட்டு அந்நீட்சியின் f மடங்குக்குச் சமனான நிலைக்குத்து விசையொன்றைப் பிரயோகித்தல் வேண்டும். இவ்விசை நீக்கப்பட்டதும் சுமையானது அதன் நிலையியற் சமநிலைக்கு மீளமுயலும். எந்தவொரு கணத்திலும் இந்நிலையிலிருந்து இடப்பெயர்ச்சி ξ ஆயின், வில் ஈர்க்கப்பட்டிருப்பதாற் சுமைமீது மேல்முகமாகத் தாங்குகின்ற விசை $(Mg + f\xi)$ ஆகும் ; அதே நேரம் கீழ்முகமான இழுப்பு Mg ஆகும். இவ்விசைகளின் விளையுள் $f\xi$ ஆகும் ; அது மேல்முகமாகத் தாக்கிச் சுமையை

அதனது சமநிலைத் தானத்தை மீளுமாறு முயலும். எனவே M மீது தாக்குகின்ற விசையானது M இன் ஓய்வுநிலையிலிருந்து அதன் இடப் பெயர்ச்சிக்கு நேரடி விகிதசமமாகவும், எப்பொழுதும் அந்நிலை முகமாக வும் அமையும். எனவே அலைவுகள் எளிய இசையானவை ; வில்லின் திணிவு புறக்கணிக்கப்படுமிடத்து அவை $M\ddot{\xi}+f\xi=0$ என்பதால் உணர்த் தப்படுகின்றன. எனவே இந்நிலைக்குத்தான இடப்பெயர்ச்சிகளின் ஆவர்த் தன காலம் T_1,

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{M}{f}}\quad=2\pi\sqrt{\frac{M.4NR^3}{na^4}}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

சுரி விற்கள் ; வில்லின் திணிவுக்கான திருத்தம்.—சுரி வில்லொன்றின் சுயாதீன நுனியில் இணைக்கப்பட்ட பொருளொன்றின் இயக்கத்தைப் பற்றி இதுவரை நடாத்தியுள்ள ஆய்வில் வில்லின் திணிவானது புறக் கணிக்கத்தக்கது எனக் கருதப்பட்டுள்ளது. அது அவ்வாறு இராதபோது அண்ணளவான திருத்தமொன்றைப் பின்வருமாறு பெற்றுக்கொள்ள லாம்.

முதலாவதாகத் தொகுதியின் இயக்கச் சக்தியைக் கருதுக. சுமையின் திணிவு M ஆகுக ; குறிப்பிட்டவொரு கணத்தில் அதன் நிலையியற் சம நிலைத் தானத்திலிருந்து தூரம் ξ இல் அது இருக்கிறது எனக் கொள்க. வில்லின் சுருள்களில் இருக்கின்ற கம்பியின் முழு நீளமும் l ஆகுக. அப்பொழுது வில்லின் நிலைத்த நுனியிலிருந்து தூரம் x இலுள்ள புள்ளியின் பெயர்ச்சி $\left(\frac{x}{l}\right)\xi$ ஆகும் ; எனவே, அதன் வேகம் $\left(\frac{x}{l}\right)\dot{\xi}$ ஆகும். வில்லில், அலகு நீளமொன்றின் திணிவு μ எனின், வில்லின் கீழான முனையிற் பெயர்ச்சியானது ξ ஆய் இருக்கும்பொழுது வில்லின் சிறுமூல கம் δx இன் இயக்கச் சக்தி $\frac{1}{2}\mu\ \delta x\left[\left(\frac{x}{l}\right)\dot{\xi}\right]^2$ ஆகும்.

வில்லின் விட்டமும் திரவியமும் சீராக இருக்குமாயின் இங்கு $m=\mu l$ என எழுதினால், அதாவது m வில்லின் திணிவு ஆனால் சுமை, வில் என்பவற்றின் முழு இயக்கச் சக்தி W ஆனது

$$W=\tfrac{1}{2}M\dot{\xi}^2+\tfrac{1}{2}\frac{\mu}{l^2}\dot{\xi}^2\int_0^l x^2\,dx=\tfrac{1}{2}(M+\tfrac{1}{3}m)\dot{\xi}^2$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

அடுத்து, தொகுதியின் நிலைச் சக்தியைக் கருதுக ; வில் சுமையேற்றப் பட்டு அதன் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்திலிருக்கும்பொழுது இது பூச்சியம் எனக் கொள்ளப்படுகிறது. அதன் பெயர்க்கப்பட்ட தானத்தில் தொகுதியின் நிலைச் சக்தி

$V = -Mg\xi - \frac{1}{2} mg\xi +$ வில்லில் அதிகப்படியாகச் சேமிக்கப்பட்டிருக்கிற சக்தி ; விலலின் திணிவு மையம் தூரம் $\frac{1}{2}\xi$ இறங்குகிறபடியால் m ஐக் கொண்ட உறுப்பானது தோற்றுகிறது.

சுமை M ஆனது ஏற்றப்பட்டபொழுது வில்லின கீழான நுனியின் பெயர்ச்சி z_0 ஆகுக. வில்லிற் சேமிதது்ள்ள சக்தி

$$\int_0^{z_0} fz\,dz = \tfrac{1}{2} f z_0^2.$$

நீட்சி $z_0 + \xi$ ஆனபோது அதிகப்படியாகச் சேமிக்கப்பட்டிருக்கினற சக்தி

$$\tfrac{1}{2} f (z_0+\xi)^2 - \tfrac{1}{2} f z_0^2 = f z_0 \xi + \tfrac{1}{2} f \xi^2$$
$$= Mg\xi + \tfrac{1}{2} f\xi^2, \qquad \because \quad Mg/z_0 = f.$$

மேற்படி சக்தியளவின் கணிப்பில் வில்லின் திணிவு புறக்கணிக்கப் பட்டுள்ளது. அதன் சொந்த நிறையால் வில்லானது ஈர்க்கப்படுகிறது ; இதனால் ஆகும் நீட்சியானது வில்லுடன் இணைக்கப்பட்ட திணிவு m ஆல் ஆகும் நீட்சியின் அரைவாசி என எடுக்கலாம் ; அதாவது, அதிகபபடியாகச் சேமிக்கப்பட்டுளள சக்தியைப் பொறுத்தமட்டில் பயன் படும் நிறை $(M + \frac{1}{2} m)$ ஆகும்.

∴ நீட்சி ξ ஆக இருக்கும்பொழுது வில்லில் அதிகப்படியாகச் சேமித் துள்ள சக்தி

$$(M + \tfrac{1}{2} m) g\xi + \tfrac{1}{2} f\xi^2.$$

அதிரும் தொகுதியின் முழுச்சக்தி மாறாது இருக்கிறபடியால்

$W - Mg\xi - \frac{1}{2} mg\xi +$ அதிகப்படியாகச் சேமித்துள்ள சக்தி $=$ மாறிலி ;

அதாவது $\frac{1}{2}(M + \frac{1}{3}m)\dot{\xi}^2 - (M + \frac{1}{2}m) g\xi + (M + \frac{1}{2} m) g\xi + \frac{1}{2} f\xi^2 =$ மாறிலி.

நேரம் தொடர்பாக வகையிட,

$$(M + \tfrac{1}{3} m)\ddot{\xi} + f\xi = 0.$$

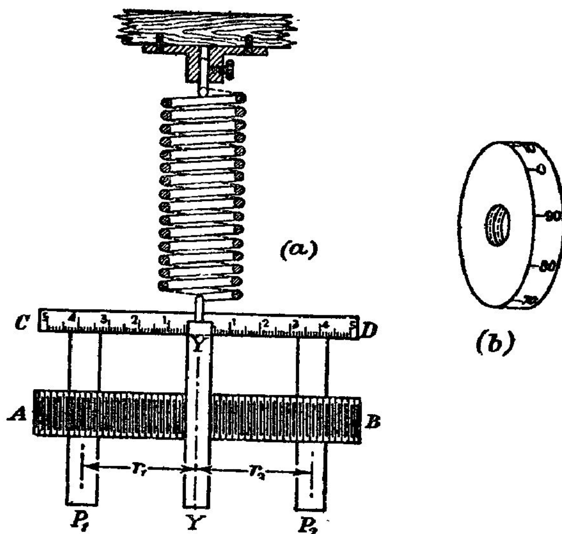
எனவே இயக்கம் எளிய இசையானது ; அதன் ஆவர்த்தன காலம்

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{1}{3} m}{f}} = 2\pi \sqrt{\frac{(M + \frac{1}{3} m) 4NR^3}{na^4}}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

நெருங்கிச் சுற்றியுள்ள சுரிவில்லொன்றின் அச்சுப் பற்றி மாறுகின்ற சடத்துவத் திருப்பம் கொண்ட சட்டமொன்றைத் தாங்குகின்ற அவ்வில்லைப் பற்றிய பரிசோதனை ஆய்வு.—படம் 8·28(a) ஆனது நெருக்கமாகச் சுற்றி யுள்ள சுரிவில்லொனறைக் காட்டுகிறது ; அதனது மேல் நுனியில் அது விறைப்பாக நிலையாக்கப்பட்டுள்ளது ; அதனது கீழ் நுனியிற் கிடையான திருகு AB யை அது காவுகிறது. பித்தளையாலான இரு சமமான தடிப்பான உருளைவடிவத் தட்டுக்களை அத்திருகு வழியே அசைத்து வைக்க

லாம். தட்டுக்களுள் ஒன்று படம் 8·28 (*b*) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. திருகுப் புரியிடை 1 மிமீ. ஆகும்; வில்லின் நிலைக்குத்தான அச்சைக் குறித்துத் தட்டுக்களின் நிலைகளைக் குறிப்பிடும் பொருட்டுத் தட்டுக்கள்



படம் 8·28. மாறுகின்ற சடத்துவத் திருப்பத்தையுடைய தொகுதியைத் தாங்கும் சுரிவில்.

ஒவ்வொன்றின் விளிம்பும் நூறு சம பிரிப்புகளாகக் கோடிடப்பட்டிருக்கிறது; சமீ. முதலியனவற்றிற் குறியிடப்பட்ட இடையான அளவுச்சட்டமொன்றைக் குறித்தே மேற்படி நிலைகள் கூறப்படுகின்றன.

(*a*) நிலைக்குத்தான அலைவுகள்.—இந்த எடுத்துக்காட்டில், பித்தளைத் தட்டுக்களின் எல்லாச் சமச்சீரான நிலைகளிலும் தொகுதியின் நிலைக்குத்தான அலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலம் T_1 என்பது சமமாகும்; T_1 இற்குப் பெறுமானமொன்றைப் பரிசோதனை முறைப்படி துணிந்தால் கம்பியினது திரவியத்தின் விறைப்பு n இற்குப் பெறுமானமொன்றைக் காணமுடியும்.

(*b*) கோண அலைவுகள்.—சுருள், தொங்கிய தொகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் என்பவற்றினூடே செல்கின்ற நிலைக்குத்தச்சுப் பற்றி **AB**, அளவுச்சட்டம் CD, AB யும் CD யும் பற்றுசு பிடிக்கப்பட்ட உலோகத்தட்டு **YY** என்பவற்றின் சடத்துவத் திருப்பம் I_0 ஆகுக. m_1, m_2 என்பன தட்டுக்கள் P_1, P_2 என்பவற்றின் திணிவுகளும் I_1, I_2 என்பன அத்

தட்டுக்களின் புவியீர்ப்பு மையங்களூடே செல்கின்ற நிலேக்குத்தச்சுக்கள் பற்றி அவற்றின் சடத்துவத் திருப்பங்களும் ஆகுக. அப்பொழுது சமாந்தர அச்சுத் தேற்றத்தின்படி [பக்கம் 78 ஐப் பார்க்க] சுழற்சியச்சுப்பற்றி தொங்கிய பொருளின் சடத்துவத் திருப்பம் J ஆனது,

$$J = I_0 + (I_1 + m_1 r_1^2) + (I_2 + m_2 r_2^2)$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு r_1, r_2 என்பன சுழற்சியச்சிலிருந்து தட்டுக்களினது புவியீர்ப்பு மையங்களின் தூரங்கள் ஆகும். தட்டுக்கள் செப்பமாகச் செய்யப்பட்டிருந்தால் $m_1 = m_2 = m$ (என்க) ; மேலும் $r_1 = r_2 = r$ (என்க) ; எனவே, $I_1 = I_2 = I$ (என்க). ஆகவே

$$J = I_0 + 2(I + mr^2).$$

வில்லின் முடிவுள்ள திணிவையிட்டுத் திருத்தம் α வைப் பிரயோகித்தால், சிறு கோண அலேவுகளுக்கு அதன் ஆவர்த்தன காலம் T_2 ஆனது

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2(I + mr^2) + \alpha}{b_2}}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு b_2 ஆனது வில்லின் கீழ் நுனியில் அலகுத் திருகல (ஓர் ஆரையன்) இற்கான இணே ஆகும். மேற்படி சமன்பாட்டை

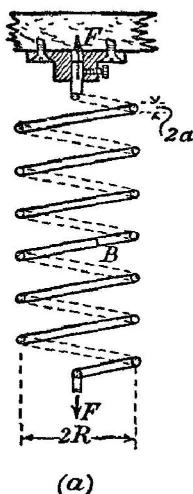
$$T_2^2 = 4\pi^2(J_0 + \beta r^2) \div b_2$$

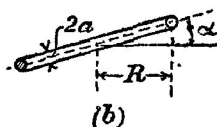
என எழுதலாம் ; இங்கு J_0 உம் β உம் மாறிலிகள் ஆகும். இவற்றின் பெறுமானங்கள் உடனடியாய் வெளிப்படையாக உள்ளன ; எனவே r ஐ மாறச்செய்து அவ்வப்பொழுது அலேவுக் காலத்தைக் கண்டு, r^2, T_2^2 என்பவற்றின் ஒத்த பெறுமானங்களேக் குறித்தால் சரிவு $(4\pi^2\beta \div b_2)$ உம் y அச்சில் வெட்டுத்துண்டு $(4\pi^2 J_0 \div b_2)$ உம் உடைய நேர்கோடொன்று பெறப்படும். இவை அளக்கப்பட்டால் J_0 ஐயும் b_2 ஐயும் காணலாம். ஆனல்† $b_2 = \pi E a^4 \div 4l$; இங்கு $2a$ கம்பியின் விட்டம் ஆகும் ; எனவே வில்லின் ஆக்கலுக்குப் பயன்படுத்தியுள்ள கம்பியின் பரிமாணங்கள் தெரிநதிருந்தால், கம்பியினது திரவியத்தின் யங்கின் மட்டுக்குப் பெறுமானமொன்றைக் கணிக்கலாம்.

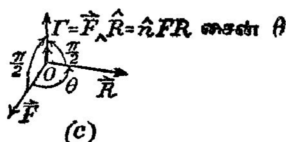
(நெருக்கமாகச் சுற்றப்படாத) அச்சு வழி இழுப்புறுகின்ற சுரிவில்.— சீரான குறுக்குவெட்டுப் பரப்பு πa^2 உடைய கம்பியாலான சுரிவில்லொன்று படம் 8·29 (a) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; வில்மீது அச்சுவழி இழுப்பு F பிரயோகிக்கப்படுகிறது ; வில்லில் ஒவ்வொன்றும் விட்டம் 2R உடைய N சுற்றுக்கள் உள. சுருள்கள் உருளேயொன்றின்மீது அமைந்திருக்கின்றன எனக் கற்பனே செய்க ; அப்பொழுது சுருள்களின் அச்சானது உருளேயின் வட்டமான குறுக்கு வெட்டுகளுடன் கோணம் α ஆக்குக, படம் 8·29(b) யிற் காண்க. சுருளின் வெட்டு B யில் தகைப்புக்களேத் துணியும்பொருட்டு,

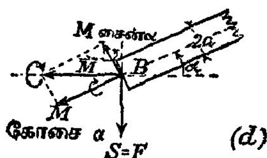
†வில்வஃபோஸ் (Wilberforce), *Phil. Mag.*, 38, 386, 1894.

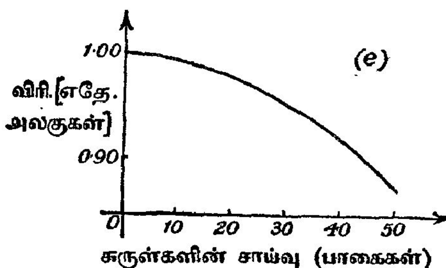
S ஆனது கீழ்முகமான விசையும் M ஆனது சுருளில B யிற்கு மேலேயுள்ள பாகமீது அதற்குக் கீழேயுள்ள பாகம உஞற்றும் இணையும் ஆகுக.











படம் 8·29. (நெருக்கமாகச் சுற்றப்படாத) அச்சுவழி இழுப்புறுகின்ற சுரிவில்.

இணை M ஆனது காவி $\vec{M}$ ஆற் குறிக்கப்படுகிறது ; அக்காவியானது புள்ளி B யிலுள்ள கம்பியச்சு ஊடே செல்லுகின்ற நிலைக்குத்துத் தளத்திற் கிடக்கிறது. [இணையொன்றின் கூறுகளுக்கும் அவ்விணையைக் குறிக்கும் காவிக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பானது படம் 8·29 (c) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; இங்கு

$$\vec{M}=\vec{F}\wedge\vec{R}.]$$

சமநிலையையிட்டு

S=F உம், FR=M உம் ஆகும்.

எனவே கம்பியின் எல்லாக் குறுக்கு வெட்டுகளிலும் $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ மாருது இருக்கும் ; மேலும் கம்பியச்சு வழியேயும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ ஐக் கூறுகளாகத் துணிக்கமுடியும் ; அவை படம் 8·29 (d) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன ; அவற்றின் பருமன்கள் முறையே M கோசை α வும் M சைன் α வும் ஆகும். முதலாவது கூறு M கோசை α என்பது கம்பியில் திருகல் ஒன்றை உண்டாக்குகிறது ; அதேநேரம் இரண்டாவது M சைன் α எனபது கூனறறிருப்பம் ஆகும்.

பூச்சியத் தகைப்புநிலையிலிருந்து அது இருக்கிற நிலைக்கு வில் மாறும் பொழுது ஈர்க்கும் விசைகளாற் செயயப்படும் வேலை W ஆகுக. அப்பொழுது

$$\mathrm{W}=\int_0^z \mathrm{F}\,dz \text{ ஆகும் ;}$$

இங்கு z என்பது வில்லின் கீழ் நுனி இறஙகும் நிலைக்குத்துத் தூரம், அதாவது வில்லின் நீட்சி, ஆகும். இச்சக்தியானது வில்லிற சேமிக்கப் பட்டிருக்கிறது ; $\left[\dfrac{\Gamma}{\theta}=\dfrac{\pi n a^4}{2l}\right.$ ஆதலாலும், இணையொன்றுற் செய்யப்படும் வேலை $\left.\int \Gamma\, d\theta \text{ ஆதலாலும்}\right]$ அதன் அளவு, பக்கஙகள் 436 ஐயும் 365 ஐயும் பார்க்க,

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{EI}}\,ds+\int \frac{\Gamma^2}{\pi n a^4}\,ds$$

ஆகும் ; இங்கு δs என்பது வில்லின் ஒரு மூலகம் ; வில்லின் நீளம் வழியே தொகையிடபபடுகிறது. M உம் Γ உம் மாருது இருக்கின்றபடியால்,

$$\int_0^z \mathrm{F}\,dz=\tfrac{1}{2}\,\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{EI}}\,l+\frac{\Gamma^2}{\pi n a^4}\,l$$

எனப் பெறுகிருேம் ; இங்கு l ஆனது வில்லில் இருக்கின்ற கம்பியின் முழு நீளம் ஆகும் ; அதாவது $l=2\pi\mathrm{NR}$.

$\mathrm{M}=\mathrm{FR}$ சைன் α என்பதையும், $\Gamma=\mathrm{FR}$ கோசை α என்பதையும் பயன் படுத்திஞல் கடைசிச் சமன்பாடு

$$\int_0^z \mathrm{F}\,dz=\tfrac{1}{2}\,\frac{\mathrm{F}^2\mathrm{R}^2 l \text{ சைன}^2\,\alpha}{\mathrm{EI}}+\frac{\mathrm{F}^2\mathrm{R}^2 l \text{ கோசை}^2\,\alpha}{\pi n a^4}.$$

F ஐச் சார்ந்த z தொடர்பாக இரு பக்கங்களேயும் வகையிட

$$\mathrm{F}=\left[\frac{\mathrm{FR}^2 l \text{ சைன}^2\,\alpha}{\mathrm{EI}}+2\,\frac{\mathrm{FR}^2 l \text{ கோசை}^2\,\alpha}{\pi n a^4}\right]\frac{d\mathrm{F}}{dz}.$$

$$\therefore\ \frac{dz}{d\mathrm{F}}=\mathrm{R}^2 l\left[\frac{\text{சைன்}^2\,\alpha}{\mathrm{EI}}+\frac{2 \text{ கோசை}^2\,\alpha}{\pi n a^4}\right].$$

α மாறிலியெனக் கொண்டால், $\mathbf{F}=0$ ஆகுமிடத்து $z=0$ ஆதலால், தொகையிட

$$z=\mathbf{FR}^2 l\left[\frac{\text{சைன்}^2\,\alpha}{\mathbf{EI}}+\frac{2\ \text{கோசை}^2\,\alpha}{\pi n a^4}\right]$$

$$=\frac{\mathbf{FR}^2 l}{\pi a^4}\left[\frac{4\ \text{சைன்}^2\,\alpha}{\mathbf{E}}+\frac{2\ \text{கோசை}^2\,\alpha}{n}\right]\quad[\because\ \mathbf{I}=\tfrac{1}{4}\pi a^4].$$

இவ்வண்ணம் கணிக்கப்பட்டுள்ள நீட்சியானது கம்பியின் கூனலாலும் திருகுதலாலும் ஆகிறது ; கமபியிலே தகைப்பு விசைகளால் ஆகும் நீட்சியானது புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளது ; மெல்லிய கம்பிகளிடததுக் கம்பியின திருகுதலால் ஆகும் நீட்சியுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் தகைப்பு விசைகளால் ஆகும் நீட்சியானது புறக்கணிக்கத்தக்கது என ஓரளவு கடினமான கணிப்புகள் காட்டுகின்றன.

$\frac{\mathbf{E}}{n}=\frac{5}{2}$ என்னும் விகிதம் பல உலோகங்களுக்கு எடுத்துக்காட்டாகவுள்ளன. அவ்வாறுயின்,

$$z=\frac{\mathbf{FR}^2 l}{\pi a^4 n}\left[\frac{8\ \text{சைன்}^2\,\alpha}{5}+2\ \text{கோசை}^2\,\alpha\right]$$

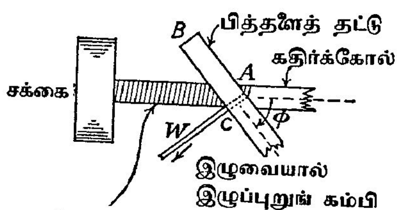
$$=\frac{\mathbf{FR}^2 l}{\pi a^4\mathbf{E}}[4\ \text{சைன்}^2\,\alpha+5\ \text{கோசை}^2\,\alpha]$$

$$=\frac{\mathbf{FR}^2 l}{\pi a^4\mathbf{E}}[4+\text{கோசை}^2\,\alpha].$$

எவ்வாறு $2\mathbf{E}=5n$ என்பதற்கு இணங்கும் திரவியத்தாலான சுரிவில்லொன்றின் நீட்சியானது சுருளகளின் சாய்வு α வுடன் மாறுகின்றது என்பதைப் படம் 8·29 (e) யிலுள்ள வளையி எடுத்துக்காட்டுகிறது. $\alpha=0$ ஆகுமிடத்து நீட்சி 1 ஆகும் எனக் கொள்ளப்படுகிறது ; அதாவது உண்மையில் வளையியானது

$$y=[4+\text{கோசை}^2\,x].$$

பூச்சிய நீளமுடைய விற்கள்.—அதன் நீட்சியானது அது இணைக்கப்பட்டிருக்கும் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்திற்குச் சமனுக இருக்கும் வண்ணம் சுரிவில்லொன்று சுற்றப்பட்டால், பூச்சிய நீளமுடைய வில்லொன்றைப் பெறுவோம் ; இங்கு, தொடக்க நீளமானது உண்மையான பௌதிக நீளம் சய நீட்சி என வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகிறது.



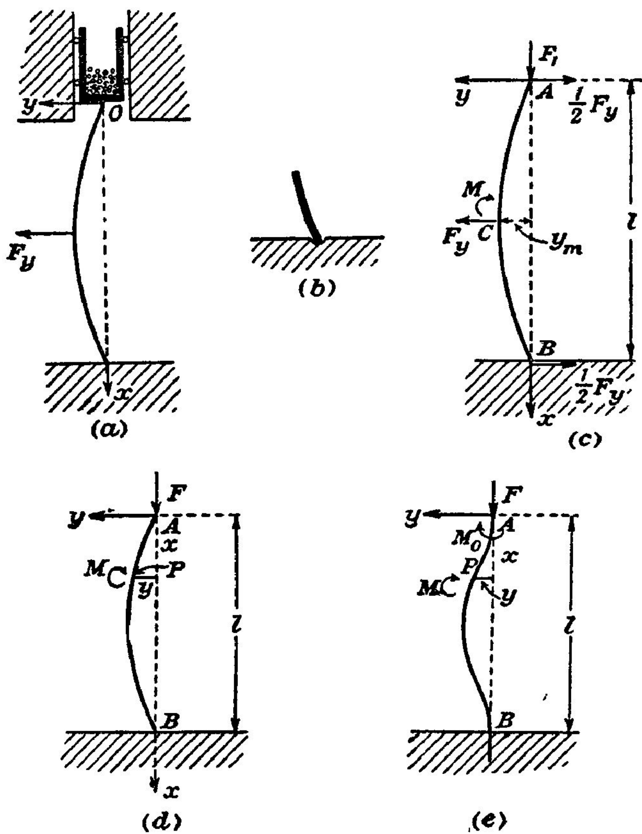
படம் 8·30. பூச்சிய நீளமுடைய வில்.

இத்தகைய வில்லொன்றைப் பற்றி ஏற்கெனவே கூறப்பட்டுள்ளது, பக்கம் 218 இற் காண்க. அதன் சுற்றுதலுக்கான முறையொன்று படம் 8·30 இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. B பித்தளையாலான ஒரு தட்டைச் சட்டம் ஆகும்; அது ஊடே C யில் துவாரம் ஒன்று துளைக்கப்பட்டிருக்கிறது. வில்லின் ஆக்கலுக்கான கம்பியானது மாறு இழுவைக்கு ஆளாகியுளளது; மெதுவான இயக்கமுடைய கடைச்சலெந்திரமொன்றின் சக்கையால் கௌவப்பட்டிருக்கின்ற கதிர் ஒனறில் வில்லைச் சுற்றும்பொருட்டுக் கம்பி மேற்படி துவாரம் ஊடே செல்லுகிறது. B ஆனது வில்மீது பிடிக்கப்படுகிறது. கதிரின் அச்சுடன் அது கோணம் ϕ ஐ ஆக்குகிறது. A யிலுள்ள துவாரம் வழியாகக் கம்பி வெளியேறும்பொழுது, வில்லின் மற்றைச் சுற்றுக்களுடன் அது வரிசையாக அமையுமாறு கம்பி கூனுதல் வேண்டும். இதன் விளைவாக வில்லிற் சுற்றுக்கள் ஒன்ருேடொன்று அமுக்கப்பட்டு வில்லில் வேண்டிய இயல்பை அளிக்கும்; கம்பியின் இழுவையையும் கோணம் ϕ யின் பெறுமானத்தையும் பரீட்சித்துப் பார்த்துத்தான் காண முடியும்.

நடைமுறையில் இத்தகைய விற்கள் மறையான நீளம் உடையனவாக இருக்குமாறு சுற்றப்படுகின்றன; பின்பு, வில்லின் ஆரம்ப நீளத்தைப் பூச்சியத்திற்குக் கொண்டு வருவதற்கெனச் சிறு நேரான கம்பித்துண்டொன்று சேர்க்கப்படுகிறது.

நீண்ட நிரல்களின் கூனல்; அவதிச் சுமையின் உண்மை.—சமவியலபுடைய திரவியத்தாலான நீண்ட நிலைக்குத்தான நிரலொன்றின் உறுதிப்பாட்டைப் பற்றி ஆராயுமுன் கீழ்வருகின்ற பரிசோதனையைக் கருதினுல் அது பயன்படும். நீண்ட நேரான உருக்குத் துண்டொன்று நிலைக்குத்தாக நிறுவப்பட்டு அதன்மீது சுமையேற்றப்படுகிறது. சுமையானது நிலைக்குத்தாக இறங்கும் பொருட்டு அது படம் 8·31 (a) யிற் காட்டியுள்ளவாறு செலுத்திகள் இடையில் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. [இரும்பு வாளியொன்றில் ஈயச்சன்னம் அல்லது இரசத்தை வைத்துச் சுமையை மாறச் செய்யலாம்.] துண்டானது தடையின்றிக் கூனுமாறு அதன் நுனிகள் அழுத்தமாக்கப்பட்டுத் தவாளிகளிலே தாங்கப்பட்டிருக்கின்றது. தொடக்கச் சுமையானது உருக்குத்துண்டை வளைக்கப் போதியதன்று எனவும் துண்டில் வரையறுத்த கோணல் ஒன்றை உண்டாக்கும்பொருட்டு அதன் மையத்திற் பக்கவிசை F_y பிரயோகிக்கப்படுகிறது எனவும் கொள்க. இக்கிடையான விசை நீக்கப்பட்டதும் துண்டு மீண்டும் நேராகிறது. பக்கவிசை நீக்கப்பட்ட போதிலும் துண்டு கோணலுற்று இருக்கும் கட்டம் வரும்வரை சுமையைப் படிப்படியாகக் கூடச்செய்து முன்போலவே பரிசோதனை தொடர்ந்து நடாத்தப்படுகிறது. இக்கட்டத்தில், கோணலைக் கூடச் செய்தபோதிலும் மேலே இருக்கின்ற சுமையின் அதே பெறுமானத்திற்கும் துண்டு கூனலுற்றிருக்கும் என்பதும் தெரியவரும். பூரண மீள்தன்மையெல்லை மீறப்படவில்லை எனக் கொள்ளப்படுகிறது. இந்நிகழ்ச்சிக்குரிய சுமை

அவதிச் சுமை எனப்படும். இதற்கப்பாற் சுமையைக் கூடச் செய்தால் கோணல் கூடும் ; துண்டானது நிலையான அமைப்பைப் பெறும் அல்லது தெறிக்கும்.



படம் 8·31. நீண்ட நிரலொன்றின் கூனல் ; அவதிச் சுமையின் உண்மை.

அவதிச் சுமையின் உண்மையை விளக்கிவைக்கும் பொருட்டுத் துண்டு அல்லது நிரல் AB மீது அதன் மையப்புள்ளியில் பக்கவிசை F_y யுடன் நிலைகுத்தான விசை F_1 பிரயோகிக்கப்படுக, படம் 8·31 (c). l நிரலின நீளமும், y_m மையம் C யிற் கோணலும் எனக் கொள்க ; ஆள்கூற்றச்சுக்களின திசைகள் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. நிரலின் சம நிலைக்கான நிபந்தனைகளுள் ஒன்றின்படி விசை F_y ஆனது காட்டியுள்ள

வாறு தாங்குகின்ற இரு கிடையான விசைகள் $\frac{1}{2}F_y$ என்பவற்றுற் சமப்படுத்தப்படவேண்டும். C யிற் கூனறறிருப்பம் **M** ஆகுக. C யில் தாக்குகின்ற கொய்வு விசையின் பெறுமானம் தேவைப்படாத வண்ணம், அதே புள்ளிபற்றி விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்தால், நிரலின் பாகம் AC யின் சமநிலையையிட்டு

$$F_1y_m+\frac{F_y}{2}.\frac{l}{2}+M=0,$$

அதாவது $$F_1y_m+\tfrac{1}{4}F_yl+EI[y'']_{x=l/2}=0$$

என்பது நிறைவேற்றப்பட வேண்டும் எனக் காண்போம்.

F_y படிப்படியாகப் பூச்சியம் வரை குறையவும் F_1 அவதிச் சுமை F வரை கூடவும் செய்தால், மேற்படி சமன்பாடு

$$Fy_m+EI[y'']_{x=l/2}=0$$

என ஆகிறது.

அடுத்து, மேலான நுனியில் விசை $(F+f)$ பிரயோகிக்கப்படுமாறு சுமை அதிகரிக்கப்படுகிறது எனக் கொள்க; இங்கு f நேராகும். கோணல் y_m ஐ நிலையாக்கும பொருட்டு C யில், பக்கவிசை Z பிரயோகிக்கப்படுக. Z ஆனது F_y இன் அதே திசையில் தாக்குமாயின் அது நேர் எனக் கருதப்படும். அப்பொழுது

$$(F+f)\,y_m+\tfrac{1}{4}Zl+EI[y'']_{x=l/2}=0.$$

ஆனால் $$Fy_m+EI[y'']_{x=l/2}=0.$$

எனவே கழிக்க

$$fy_m+\tfrac{1}{4}Zl=0\;;$$

இதிலிருந்து Z மறை எனத் தெளிவாகும். எனவே Z தாக்காமல் இருக்கும்பொழுது வளையின் கோணல் அதிகரிக்கும்.

மீண்டும், நிலைக்குத்தான விசை ஆனது $(F+f)$ ஆகின், மையத்திலே கோணல் $\bar{y}_m$ ஆகும் எனக் கொள்வோம்; இங்கு $\bar{y}_m>y_m$; எனவே மையத்தில், கூனல் அதிகரிக்கிறது. அப்பொழுது

$$(F+f)\,\bar{y}_m+EI[\bar{y}'']_{x=l/4}=0,$$

$$\therefore\; f\bar{y}_m+EI[\bar{y}''-y'']_{x=l/2}=0.$$

ஆனால் $[\bar{y}''-y'']$ உம் இச்சமனபாட்டிலுள்ள மற்றைக் கணியங்களும் நேர் ஆதலின் இது நிகழக்கூடியதன்று. எனவே வளையானது தொடர்ந்து வளைந்து ஈற்றில் முறியும்.

ஆகவே இப்பந்தியின் தொடக்கத்தில் விவரித்துக் கூறியுள்ள பரிசோதனை யால் வெளிப்படுத்தியுள்ள செய்திகளை இக்கொள்கை ஆதரிக்கிறது.

நீண்ட நிரல்களின் கூனல் ; ஒயிலரின் கொள்கை.—சமவியல்புடைய திரவியத்தாலான நிலைக்குத்து நிரலொன்றைக் கருதுக ; அதன் நீளம் அதற்குச் செங்குத்தான திசைகளிலுள்ள பரிமாணங்களைக் காட்டிலும் மிகப் பெரிதாகும். நிரலின் குறுக்குவெட்டு சீரானது எனக் கொள்க ; அது தொடக்கத்தில் நிலைக்குத்தாக இருக்கிறது. அதன் நீளம் முற்றிலும் அதன் தடையில்லாக் கூனலையிட்டு அதன் நுனிகள் மழுங்கலாக்கப்பட்டுள் ளன எனக் கொள்வோம். அவதிச சுமை F இற்குச் சமனுன நிலைக்குத்துச் சுமையொன்று நிரலின் மேலான முனைமீது பிரயோகிக்கப்படுகிறது எனவும், நிரல் சற்று வளைவுற்றிருககிறது எனவும் கொள்க, படம் 8·31 (d) யிற காண்க. அப்பொழுது நிரலின் குறுக்குவெட்டு ஒவ்வொன்றிலும் வரையறுத்த கூனற்றிருப்பம் இருத்தல் வேண்டும். நிரலின் பாகம் AP யின் சமநிலையைக் கருதுவோம் ; இங்கு P ஆனது A யிலிருந்து தூரம் x இல் இருக்கிறது ; P யிலே கோணல் y ஆகுக. P பறறி விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்தால்,

$$\mathrm{EI}y'' + \mathrm{F}y = 0.$$

$$\therefore\ y = \mathrm{A}\ \text{கோசை}\left[\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}\,x + \alpha\right];$$

இங்கு A யும் α வும் துணியவேண்டிய மாறிலிகள் ஆகும். இனி $x = 0$ ஆகுமிடத்து $y = 0$.

$$\therefore\ [y]_{x=0} = 0 = \mathrm{A}\ \text{கோசை}\ \alpha.$$

$$\therefore\ \alpha = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{அல்லது} \quad \mathrm{A} = 0.$$

[மற்றை இடங்களைப்போல இங்கும் α வின் மற்றைய பெறுமானங்களை விலக்குவோம் ; ஏனெனில் அவை வளையில் உள்ள விபத்திப் புள்ளிகளை ஒத்தவை.] நிரல் கூனலுற்றிருக்கின்றது எனக் கொள்ளப்பட்டபடியால் A = 0 என்னும் நிபந்தனை பொருந்தாது.

மேலும் $x = l/2$ ஆகுமிடத்து y' பூச்சியம் ஆகும். எனவே

$$y' = -\mathrm{A}\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}\ \text{சைன்}\left[\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}\,x + \alpha\right]$$

ஆதலால்,

$$[y']_{x=l/2} = 0 = -\mathrm{A}\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}\ \text{சைன்}\left[\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}\cdot\frac{l}{2} + \alpha\right].$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}\cdot\frac{l}{2} = -\alpha.$$

ஆனல்

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi.$$

$$\therefore\ \mathrm{F} = \frac{\pi^2\mathrm{EI}}{l^2}.$$

தொடக்க வளைவு உண்டாக்கப்பட்டபின் வளையை கூனல் நிலையில் வைத் திருப்பதற்குத் தேவையான முனைச்சுமையை இது தருகிறது. சுமையால் ஆகும் நிலைக்குத்து விசையானது அவதிச் சுமை F ஐ மீறுமாயின் நிரலிற் சேதம் உண்டாகும். என்றாலும் நிரலானது நீளமாகவும் ஒடுக்கமாகவும் அதன் திரவியம சமவியல்புடையதாகவும், சுமையேற்றல் அச்சு முகமாக வும் இருக்கும்பொழுது மட்டுமே அவதிச் சுமைக்கான கோவை சரியானது என்பதை வற்புறுத்திக் கூறல் வேண்டும்.

[$x=l$ ஆகுமிடத்துக் கோணல் பூச்சியம் ஆகும் என்னும் உண்மையைப் பயனபடுத்தியும் F இற்குப் பெறுமானம் காண முடியும்.]

அடுத்து, நிரலின் முனைகளில் நிரலுக்கு வரைந்துள்ள தொடலிகள் எப்பொழுதும் நிலைக்குத்தாக இருக்கும்வண்ணம், அம்முனைகள் நிலை யாக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்க, படம் 8·31(e) யிற் காண்க. அவதிச் சுமை F பிரயோகிக்கப்படுமிடத்து, நிரலின் மேலான முனையிலே தொடலி நிலைக்குத்தாக இருத்தல் வேண்டும் என்னும் நிபந்தனையின் நிறை வேற்றலையிட்டு அம்முனையில் புற இணை M_0 ஆனது பிரயோகிக்கப்படுக. [கீழ் முனையில் இதற்குச் சமனெதிராக இணையொன்று தாக்குதல் வேண்டும்.]

$$EIy''+Fy+M_0=0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வானது நடுநிலைப் பரப்பின் வடிவத்தைத் தரவேண்டும்.

வளையிலே கூனற்றிருப்பம் M அல்லது EIy'' ஆக இருக்கின்ற புள்ளி P யைக் குறித்து விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்தால் இது பெறப்படுகிறது; இங்கு P ஆனது புள்ளி (x, y) ஆகும். மேற்படி சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$y=A\left\{\text{கோசை}\left[\sqrt{\frac{F}{EI}}\,x+\alpha\right]\right\}-\frac{M_0}{F}$$

ஆகும் ; இங்கு A யும் α வும் துணிய வேண்டிய மாறிலிகள் ஆகும்.

$x=0$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆகும்.

$$\therefore\ 0=\{A\ \text{கோசை}\ \alpha\}-\frac{M_0}{F}.$$

$$\therefore\ \text{கோசை}\ \alpha=\frac{M_0}{AF}.$$

$x=l$ ஆகுமிடத்து $y=0$ ஆகும்.

$$\therefore\ 0=A\left\{\text{கோசை}\left[\sqrt{\frac{F}{EI}}\,l+\alpha\right]\right\}-\frac{M_0}{F}.$$

$$\therefore\ \text{கோசை}\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}\,l+\alpha\right)=\frac{M_0}{FA}=\text{கோசை}\ \alpha.$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{F}{EI}}\,l=2\pi\ \text{அல்லது}\ F=\frac{4\pi^2EI}{l^2}\ ;$$

அதாவது முந்திய எடுத்துக்காட்டில் இருந்ததைக் காட்டிலும் இப்பொழுது அவதிச் சுமையானது நான்குமடங்கு பெரிது ; அல்லது நிரலின உதைப்புத் தாங்கும் திறன் நாணகுமடங்கு ஆயிறறு. உதையொனறு அதனது இரு முனைகளிலும் நிலையாக்கபபட்டிருநதால் அது கூறுமல தாங்கக்கூடிய சுமையும் அதன் அரைநீளம் உடைய, ஆனல் இரு முனைகளிலும் பிணைக்கப்பட்ட உதையொனறிற்கான சுமையும அதுவேயாம் என மேற்படி கோவை உணர்த்துகிறது.

இனி $x=\frac{1}{2}l$ ஆகுமிடத்து $y'=0$,

$$\therefore\ 0=-A\sqrt{\frac{F}{EI}}\ \text{சைன்}\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}\frac{l}{2}+\alpha\right).$$

$$\therefore\ \alpha=-\sqrt{\frac{F}{EI}}\frac{l}{2}=-\pi.$$

எனவே $$M_0=FA\ \text{கோசை}\ \alpha=-FA.$$

எனவே நடுநிலைப் பரப்பின் சமன்பாடு

$$y=A\left[\left\{\text{கோசை}\left(\frac{2\pi}{l}x-\pi\right)\right\}+1\right].$$

$x=l/2$ ஆகுமிடத்து கோணல் உயர்வானதாகும ; அதாவது அது y_m ஆகும்.

$$\therefore\ [y]_{x=l/2}=y_m=2A.$$

$$\therefore\ A=\tfrac{1}{2}y_m.$$

இனி விபத்திப் புள்ளியொன்றில் $y''=0$. இவ்வெடுத்துக்காட்டில அது $x=l/4$ ஆகுமிடத்தில் தோற்றுகிறது ; சமசீரையிட்டு $x=\frac{3}{4}l$ ஆகுமிடத்தும் விபத்திப் புள்ளியொனறு தோற்றுதல் வேண்டும்.

நிரல் அல்லது மரமொன்றின் உயர்வுயரம்.—அதன் உச்சியிற் காவப்படும் சுமையானது குறிப்பிட்ட அவதிப் பெறுமானமொண்றை மீறுமபொழுது நிரல ஒனறு வளைவுற்றுச் சேதப்படுகிறபடியால் குறிப்பிட்ட குறுக்குவெட்டொன்றுடைய ஒரு கோல், அது போதிய உயரம் உடையதாயின் அதன் சொந்த நிறை காரணமாகச் சேதப்படக்கூடும் ; அதாவது கோலொன்றின உயரம எல்லையுடையது ; அவதிப் பெறுமானமானது வளையின தாங்கல் முறையைப் பொறுத்துள்ளது ; நிரலின் உயரம் கூடும்போது அதன் பெறுமானம் குறைகிறது. அதேபோல் மரம் ஒன்றின் உயரமும் எல்லையுடையது எனக் காட்டலாம் ; ஆனல் கொள்கையில் மரம் கூம்புகிறது என்னும் உண்மையைக் கவனித்தல் வேண்டும் ; இததகைய எடுத்துக்காட்டில் வருகிற வகையீட்டுச் சமன்பாட்டின் தீர்வில் பெசலின் சார்புகளைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும் ; அது இந்நூலின் நோக்குக்கு அப்பாற்பட்டது. சீரான நிரல் அல்லது கோலொன்றின் உயர்வுயரத்தைப் பின்வருமாறு துணியலாம்.

நிரலொன்றின் கீழ் முனை நிலையாக்கப்பட்டு அதனது சுயாதீன மேல் முனையில சுமையேற்றபபடுக; உறுதியின்மை தோற்றும்போது சுமை W ஆகுக. சுமையேறறிய நிரலானது படம் 8·32 இற் காட்டப்பட்டி ருககிறது; சுயாதீன முனையின் பெயர்ச்சி a ஆகுக. அப்பொழுது W அதன் சொந்த வளைவுதடுக்கும் விசைகள், தாங்கிய முனையிலுள்ள தாக்கங்கள் என்பவற்ருல் தாக்கப்பட்டு நிரலானது சமநிலையில் இருக்கும். வரிப்படத் திற் குறிப்பிட்டுள்ளவாறு தரையில் தாக்கம் ஆனது மேல்முகமான விசை W வும், இடஞ்சுழித் திருப்பம் Wa உடைய இணையொன்றும் ஆகும்; P யிலே கூனற்றிருப்பம் $M+Wy=Wa$, அதாவது $EIy''-W(a-y)=0$ என்பதால் தரப்படுகிறது. $z=a-y$ என அழைத்தால் $z'=-y'$ எனவும் $z''=-y''$ எனவும் பெறுவோம்; எனவே மேற்படி சமன்பாடானது $EIz''+Wz=0$ ஆகின்றது. இச்சமன்பாட்டின் தீர்வானது கூனலுற்ற நிரலின் வடிவத்தைத் தரும்.

$$z=A\ \text{கோசை}\left(\sqrt{\frac{W}{EI}}\,x+\alpha\right)$$

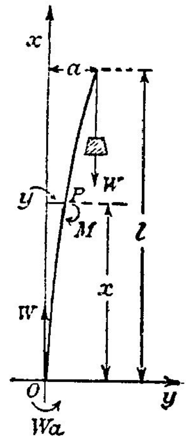
என நாம் உடனே பெறுகிறேம்; இங்கு A யும் α வும் மாறிலிகள் ஆகும்.

இனி $x=0$ ஆகுமிடத்து $y'=0=z'$, அதாவது $\alpha=0$. $x=l$ ஆகுமிடத்து $y=a$ அதாவது $z=0$. எனவே

$$\text{கோசை}\left(\sqrt{\frac{W}{EI}}\,l\right)=0.$$

$$\therefore\quad \sqrt{\frac{W}{EI}}\,l=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\ \text{முதலியன.}$$

இவற்றுள் முதலாவது பெறுமானத்தை எடுத்தால் $W=\dfrac{\pi^2 EI}{4l^2}$ எனப் பெறுவோம். இது வளை மடியும் படி செய்யக்கூடிய தாழ்ந்த சுமையின் நிறையைத் தருகிறது; நீண்ட நிரலொனறினிடத்து இச்சுமை பிறப்பிக்கும் அமுக்குவிசையானது அத்தகைய விசைகளுக்குரிய மீள்தன்மையெல்லையைக் காட்டிலும் மிகவும் தாழ்ந் தது.



படம் 8·32.
நீண்ட நிரலொன்றின் கூனல்.

நிரலின குறுக்குவெட்டானது ஆரை r உடைய ஒரு வட்டமாயின் $I=\frac{1}{4}\pi r^4$ ஆகும். எனவே உறுதியின்மை தோற்ருவண்ணம் நிலைக்குத்து நிரலொன்று தாஙகக்கூடிய சுமையின் நிறையானது ஆரையின் நான்காம் வலுவுக்கு நேர்விகிதசமமாகவும், நிரலினது நீளத்தின் வர்க்கத்துக்கு நேர்மாறு விகிதசமமாகவும் இருக்கும்.

A யிற்குப் பெறுமானம் காண்பது மட்டுமே எஞ்சியிருக்கிறது. $x=0$, $z=a$ என்னும் முனை நிபந்தனையிலிருந்தும் a பூச்சியம் என ஏற்கெனவே நிறுவியுள்ள உண்மையைப் பயன்படுத்தியும் $a=\mathrm{A}$ எனப் பெறுகிறோம். எனவே

$$z=a \text{ கோசை } \sqrt{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{EI}}}\,x$$

அல்லது
$$y=a\left[1-\text{கோசை } \sqrt{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{EI}}}\,x\right].$$

சற்றுக் கூனலுற்ற நிரலொன்றின் வடிவம் சைன்வளையி போன்றுள்ளது என இது காட்டுகிறது.

குறிப்பிட்ட பெறுமானமொன்றை மீறும் நிறையுடைய சுமையொன்றை நிரலொன்று தாங்கமுடியாதபடியாலும் நிரலின் நீளம் கூடும்பொழுது இந்நிறை குறைகிறபடியாலும், தரப்பட்ட குறுக்குவெட்டுடைய நிரல் அல்லது கோலொன்று போதிய உயரம் உடையதாயின் தன் சொந்த நிறையால் அது வளைவுறும் என்பது தெளிவாம். அச் சுமையானது W எனின்

$$\mathrm{W}=\frac{\pi^2\mathrm{EI}}{4(l/2)^2}=\frac{\pi^2\mathrm{EI}}{l^2}$$

ஆகுமிடத்து கூனல் தொடங்கும் ; இவ்வெடுத்துக்காட்டும் முதல் அண்ணளவில், நிரலின் மையத்தில் நிறை பிரயோகிக்கப்படுகிறது என்பதும் அதுவேயாம் எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

இவ்வெடுத்துக்காட்டை விளக்கும்பொருட்டு, சீரான வட்டவெட்டுடைய சிந்தூரமரமொன்றைக் கருதுவோம் ; அதன் ஆரை 8 சமீ. அப்பொழுது $\mathrm{E}=1{\cdot}3\times10^{11}$ தைன். சமீ.$^{-2}$; சிந்தூரத்தின் அடர்த்தி 0·8 கி. சமீ.$^{-3}$ என எடுக்கலாம். அப்பொழுது $\mathrm{W}=g\,\rho l\mathrm{A}$; எனவே ($\pi^2=10$ உம் $g=1000$ சமீ. செக்.$^{-2}$ உம் என எடுத்தால்)

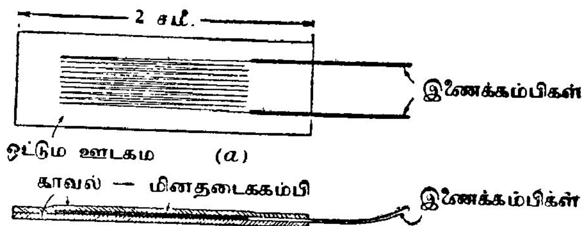
$$1000\times0{\cdot}8\times l\times\mathrm{A}=\frac{10\times1{\cdot}3\times10^{11}\times\mathrm{A}\times8^2}{4l^2}.$$

எனவே மிகப் பெரிய உயரம்

$$l=\sqrt[3]{2{\cdot}6\times10^{10}} \text{ சமீ.} \doteq 30 \text{ மீற்றர் ஆகும்.}$$

மின்தடை விகாரமானிகள்.—மின்தடை விகாரமானியானது தட்டையான அல்லது வளைந்த பொருள்களில் ஆழமில் விகாரங்களை அளக்கும் ஓர் உபகரணமாகும். சிறிய பருமன், பிரயோகத்தில் எளிமை, மெதுவான அல்லது வேகமான விகாரமாற்றங்களை உணரும் ஆற்றல் என்பவை அதைச் சிறப்பிக்கின்றன. மின்தடை விகாரமானிகள் வழக்கில் வருமுன் பெரும்பாலும் சோதனைக்கோல்களினிடத்து மட்டுமே ஆழமில் விகார அளவீடுகள் நடாத்தப்பட்டுள்ளன ; பல வகைகளில் அவ்வளவீடுகள் பயன்பட்டபோதிலும் முழுப்பொருள்களிலும் அமைப்புக்களிலும் உண்மையான ஆழமில் விகாரங்களை அளப்பதற்கு அவை சிறிதளவில்தான் பயன்பட்டுள்ளன.

1939 இல் சிமன்ஸ் ரூகர் (Simmons & Ruge) என்பவர்களால் ஆக்கப் பட்டதும் பின்னர் தேசிய பௌதிக ஆய்கூடத்தில் விருத்தி செய்யப்பட்டது மான மின்தடை விகாரமானியின் தத்துவம் பின்வருமாறு : உலோகக் கம்பியொன்று ஈர்க்கப்பட்டால் அல்லது நெருக்கப்பட்டால் அதன் மின்தடை மாறும். அம்மாற்றத்திற்கும் கம்பியின் நீளமாற்றத்திற்கும் இடையே வரையறுத்த தொடர்பொன்று உளது. வழக்கமான மின்தடை விகார



படம் 8·33. எடுத்துக்காட்டான மின்தடை விகாரமானி.

மானியானது மிகவும் மெல்லிய மின்தடைக் கம்பியொன்றால் ஆனது ; படம் 8·33 (a) யிற் காட்டியுள்ளவாறு கம்பியானது நெய்யரிவடிவமுடைய, வளைந்து வளைந்து செல்கின்ற சமாந்தரமான துண்டுகளின் தொடரொன் றைத் தருமாறு நெருக்கமாகச் சுறறப்பட்டிருக்கிறது. கம்பி திசுத்தாள் களிடையே வைக்கப்பட்டு அம்முழுதும் மின்காவலூடகமொனறால் நிறை விக்கப்படுகிறது. இவ்வண்ணம் ஆக்கப்பட்ட மூலப்பொருளானது சோதிக்கப் படும் பரப்புடன் ஒட்டப்படுகிறது, படம் 8·33 (b) யைப் பார்க்க. இதைத் திருப்திகரமாகச் செய்யும்பொருட்டு மானியின் கீழ்ப்பக்கம் சீராகச் செலு லோசுச் சாயம்பூசி, அசற்றேனால் ஈரமாக்கப்பட்டு மானியானது தாமதமின்றிச் சோதனைப் பரப்பிற் பிரயோகிக்கப்படுகிறது ; சோதனைப் பரப்பானது சற்றுக் கரடுமுரடாக்கப்பட்டும் நெய்க்கறையின்றியும் இருத்தல்வேண்டும். மானியை அதன் தானத்தில் ஏற்றிச் சில நாட்கள் சென்ற பின்னர்தான் அதைப் பயன்படுத்தலாம்.

தடைத்திறன் χ உடைய திரவியமொன்றுற் கம்பியொன்று ஆக்கப் பட்டிருப்பின், அப்பொழுது அதன் மின்தடை R என்பது

$$R=\chi\left(\frac{l}{\pi a^2}\right)$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு l நீளமும் a அதன் குறுக்குவெட்டு ஆரையும் ஆகும். χ ஒரு மாறிலியானால், மடக்கை வகையீடு செய்து,

$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{\Delta l}{l}-2\left(\frac{\Delta a}{a}\right)$$

எனப் பெறுகிறோம்.

ஆனல், பொய்சோனின் விகிதம் σ ஆனது

$$-\left(\frac{\Delta a}{a}\right) \div \frac{\Delta l}{l}$$

ஆகும் ; எனவே

$$\frac{\Delta R}{R} = (1+2\sigma)\frac{\Delta l}{l}.$$

விகாரவுணர்திறன் அல்லது மானிக் காரணி எனபது

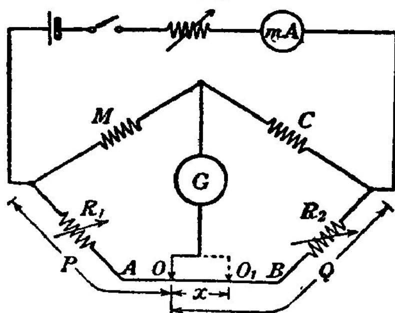
$$\frac{\Delta R}{R} \div \frac{\Delta l}{l} = 1+2\sigma \doteq 1{\cdot}6 \qquad [\because \ \sigma \to 0{\cdot}3]$$

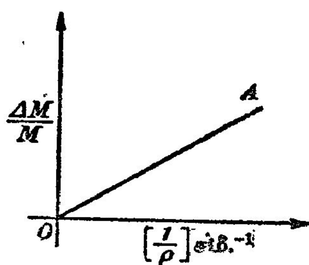
என வரைவிலக்கணம் செய்யப்படுகிறது. திரவியத்தின் தடைத்திறனனது தகைப்பைப் பொறுத்திருக்கிறபடியால் நடைமுறையில் இக்காரணி கிட்டத் தட்ட 2·1 ஆகும் என அறிவோம். மேற்படி சமன்பாட்டை

$$\text{விகாரம்} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta R}{R} \times \frac{1}{\text{மானியின் விகாரவுணர்திறன்}}$$

என எழுதலாம்.

வெப்பநிலையைச் சாராவண்ணம் விகாரமானியொன்றின் தடையை ஆக்க முடியாது என்பது வருந்தத்தக்கது ; எனவே மானியொவ்வொன் றுடனும் ஈடுசெய் மானியொன்றைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும். இதன் ஏற்றுகையும் சோதனைப் பரப்பின் ஏற்றுகையும் அதுவே ; எனவே இது விகாரமின்றி இருக்கும் ; ஆனல் இரண்டும் அதே வெப்பநிலை மாறல் களுக்கு ஆளாகும். வீற்ஸ்ற்றன் சுற்றெுன்றின் அடுத்துள்ள புயங்களில் இரு மானிகளையும் தொடுத்து வெப்பநிலை மாறல்களால் ஆகின்ற தடை மாறல் ஈடுசெய்யப்படுகிறது.





படம் 8·34. விகாரமானியொன்றிற்கான பாலம்.

வசதியான பாலச்சுற்றெுன்று படம் 8·34 (a) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. நூல் விளைவையிட்டு மானிகள் ஊடே செல்கினற ஓட்டம் 5 மிஅ. ஐப்

பொதுவில் மீறலாகாது. M முதன்மையான மானியும் C ஈடுசெய் மானியும் ஆகும்; பாலம் சமமாக்கப்பட்ட நிலையில் மானியொவ்வொன் றிலும் அதே ஓட்டம் இருக்குமாறு ஒழுங்கு செய்யப்படுகிறது. R_1 உம் R_2 உம் நியமத் தடைகள் ஆகும்; படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு அவை வழுக்கிக் கம்பித்தடை AB யுடன் தொடுத்து அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. G ஆனது உணர்ச்சியுள்ள ஒரு கல்வனோமானி. பாலத்தின் சமமாக்கப் பட்ட நிலையில் M விகாரமின்றி இருக்கும்பொழுது, வழுக்கித்தொடுகை O வில் இருக்கிறது எனக் கொள்க. R_1, பாலக்கம்பியின் பாகம் AO என்பவற்றின் தடை P ஆகுக; R_2, பாகம் BO என்பவற்றின் தடை Q ஆகுக. அப்பொழுது M உம் C யும் அம்மானிகளின் தடைகள் எனின்

$$\frac{M}{C}=\frac{P}{Q}.$$

M விகாரமுறும்போது அதன் தடை $M+\Delta M$ ஆகுக; பாலத்தின் சமமாக்கத்தையிட்டு வழுக்கித் தொடுகை O_1 என்னும் நிலைக்குச் செலுத் தப்படுக; இங்கு $OO_1=x$ என்க. பாலக்கம்பியினது அலகு நீள மொன்றின் தடை r எனின்

$$\frac{M+\Delta M}{C}=\frac{P+rx}{Q-rx};$$

அதாவது
$$\frac{M+\Delta M}{M}=\frac{1+\frac{rx}{P}}{1-\frac{rx}{Q}}.$$

மேலும், P, Q என்பவற்றுடன் ஒப்பிடுமிடத்து rx சிறிதாயின் இச் சமன்பாடு

$$\frac{\Delta M}{M}=rx\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}\right)$$

என்பதைத் தருகிறது.

எனவே $\frac{\Delta M}{M}$ என்பது x இற்கு விகிதசமமாகும்; அதாவது, போதிய திருத்தத்துடன் வழுக்கிக்கம்பிக்கு விகாரம்×விகாரவுணர்திறன் என்பதைக் குறித்து ஒருபடியளவுகோடு இடமுடிகின்றது.

சில பிரயோகங்களில், ஈடுசெய்மானியிலுள்ள விகாரம் தலைமைமானியி லுள்ளதற்குச் சமமாகவும் குறியில் எதிராகவும் இருக்குமாறு ஒழுங்கு செய்து பயன்படு உணர்திறனை இரு மடங்காக்க முடிகிறது.

மின்தடை விகாரமானிகளைப் பயன்படுத்திப் பொய்சோனின் விகிதத்தைத் துணிதல்.—இப்பரிசோதனையில் மூன்று மானிகள் தேவைப்படுகின்றன; ஒன்று ஈடுசெய்கருவியாகப் பயன்படுகிறது; மற்றை இரண்டும், அவற்றின்

கம்பிகள் சீரான சட்டமொன்றின் நீளத்திற்கு முறையே சமாந்தர மாகவும் செங்குத்தாகவும் தாபிக்கப்படுகின்றன. இவ்வண்ணம் அவ்விரு திசைகளிலுள்ள விகாரங்களை ஒப்பிடலாம். சட்டம் சீராகவே கூனலுற வேண்டும், (பக்கம் 407 ஐப் பார்க்க). அப்பொழுதுதான் சட்டத்தின் மையத்திலுள்ள கோணல் முதலியவற்றின் அளவீடுகளிலிருந்து கூனற் றளத்தில் வளைவாரையைக் கணிக்கமுடியும்.

நடுநிலையச்சின வளைவாரை ρ ஆகுக ; மாணிக்கும் நடுநிலையச்சுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் z ஆகுக. இச்சூழலில், சட்டத்தின் பரப்பிலுள்ள நீளம் l ஆனது $l+\Delta l$ ஆனால்

$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{z}{\rho}$$ [ப. 394 ஐப் பார்க்க.]

கருதப்படுகின்ற மாணியின் தடை $\dot{M}$ இல் உண்டாகும் மாற்றம் Δ M எனின்,

$$\frac{\Delta M}{M}=k\left(\frac{z}{\rho}\right);$$

இங்கு k ஒரு மாறிலி எனவே $\frac{\Delta M}{M}$ ஆனது வளைவு $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ இன் ஏக பரிமாணச் சார்பு ஆகும். இத்தொடர்பானது OA எனனும் நேர்கோட்டாற் காட்டப்படுகிறது, படம 8·34 (b). கூனல் தளத்தில் எடுக்கப்படுகின்ற நோக்கல்களைப் பயன்படுத்தி இவ்வரைபை வரையலாம்.

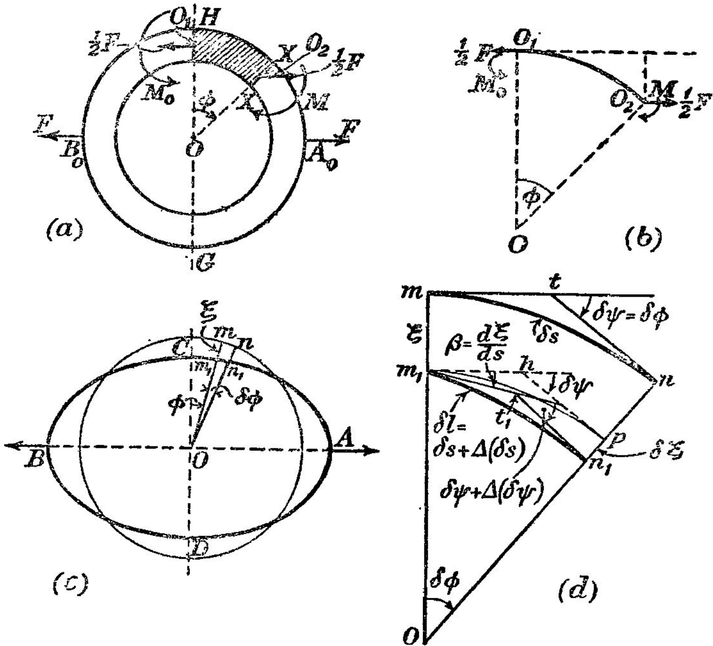
முரண் முறிவு வளைவின் ஆரையைத் துணிதலையிட்டு அதற்கான மாணி யில் அளவீடுகள எடுக்கப்படுகின்றன ; மற்றை மாணியிலிருககிறதுபோல இம்மாணியினிடததும் தடையின் பின்னமாற்றம் வளைவுடன் அதே சமன் பாட்டால் தொடர்புபட்டுள்ளது என வழக்கமாகக் கொள்ளப்படுகிறது. இனி வழககம்போல், பொய்சோணின் விகிதத்திற்கு இடைப் பெறுமான மொன்று காணப்படுகிறது.

ஒரு நெட்டாங்கு இழுப்பிற்கு ஆளாகும் மெல்லிய வட்ட வளைய மொன்றின் மீள்தன்மை வடிவ அழிவு.—அண்ணளவான கொள்கை. அதனது மையம் ஊடே தாக்குகினற இழுப்பு (அல்லது உதைப்பு) ஒன்றுககு ஆளாகும் மெல்லிய வட்ட வளையமொன்றின் எந்த ஆரைக்குறுக்கு வெட்டிலும் கூனறறிருப்பமும் கொய் விசையும் நேரிழுப்பு (அல்லது உதைப்பு) உம் உள. கூனறறிருப்பத்தை மதிபபிடுமிடத்து வளையத்தின் வளைவானது புறக்கணிக்கப்படும் ; தொடக்கத்தில் நேரான வளைகளுக்கு மட்டுமே உரிய விதிகள் இங்கும் பயன்படுத்தப்படும்.

படம் 8·35 (a) ஆனது ஆரை R உடைய வட்ட வளையமொன்றை எடுத்துக் காட்டுகிறது ; A_0B_0 வழியே உள்ள இழுப்பு F ஆல் அது தாக்கப்படுகிறது ; வெவ்வேறான குறுக்கு வெட்டுக்களில் கூனல் இருக்கிற போதிலும், சமச்சீரிலிருந்து A_0, H, B_0, G எனனும் நான்கு குறுக்கு வெட்டுக்களின் அடையாளங்கள் இழுப்புப் பிரயோகிக்கப்பட்டதும் மையம்

O ஊடே செல்லுகின்றன என்பது தெளிவாம்; எனவே எடுத்துக் காட்டாக H இற்கும் A_0 இற்கும் இடையேயுள்ள முழுக் கூனலும் பூச்சியம் ஆகும்.

ஆகவே கோணம் ϕ ஆல் வரையறுக்கப்பட்ட குறுக்குவெட்டு XX ஐக் கருதுக. இக்குறுக்குவெட்டில் கூனற்றிருப்பம் M உம் H ஊடே உள்ள நிலைக்குத்து வெட்டுமுகத்தில் கூனற்றிருப்பம் M_0 உம் ஆகுக. அடுத்து வளையத்தில் H இற்கும் X இற்கும் இடையேயுள்ள பாகத்தைக் கருதுக. வரிப்படத்திற காட்டியுள்ளவாறு இதன்மீது வளையத்தின் எஞ்சிய பாகத்தால் ஆகும் புற விசைகள் $\frac{1}{2}$F உம் $\frac{1}{2}$F உம் ஆகும்; அவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் முறையே H இலும் X இலுமுள்ள குறுக்கு வெட்டுகளின



படம் 8·35. வட்டவளையமொன்றில் அச்சுவழி இழுப்பால் ஆகும் வடிவழிவு.

மையங்கள் O_1 இற்கும் O_2 இற்கும் ஊடே செல்கின்றன. O_2 பற்றி விசைகளின் திருப்பங்களை எடுத்து

$$\frac{1}{2}FR\,(1 - \text{கோசை}\ \phi) + M_0 = M$$

என நாம் பெறுகிறோம்; படம் 8·35 (b) யைப் பார்க்க.

வளையின் மூலகமொன்றின் அச்சு நீளம் δs உம், அதன் முனை களிலுள்ள தொடலிகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் $\delta\psi$ யும் ஆயின் வளை யத்தை நேரான வளை எனக் கருதி $\frac{d\psi}{ds}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}$ எனப் பெறுகிறோம்; இங்கு **E** ஆனது அதன திரவியத்தின் யங்கின் மட்டும், **I** ஆனது குறுக்குவெட்டின இரண்டாவது பரப்புத் திருப்பமும் ஆகும். **H** இற்கும் A_0 இற்கும் இடையில் முழுக் கூனல் பூச்சியம் ஆதலால்,

$$0=\int_{\phi=0}^{\phi=\frac{1}{2}\pi}d\psi=\frac{1}{4}\oint\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}.ds=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}.\mathrm{R}d\phi$$

$$=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{EI}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}[\mathrm{M}_0+\tfrac{1}{2}\mathrm{FR}\,(1-\text{கோசை }\phi)]d\phi.$$

$$\therefore\ 0=\tfrac{1}{2}\pi\mathrm{M}_0+\tfrac{1}{2}\mathrm{FR}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\text{ அல்லது }\mathrm{M}_0=\frac{\mathrm{FR}}{\pi}\,(1-\tfrac{1}{2}\pi).$$

$$\therefore\ \mathrm{M}=\mathrm{FR}\left[\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}\text{ கோசை }\phi\right].$$

அடுத்து படம் 8·35 (c) யில், வளையத்தின வடிவ அழிவுக்குப் பின் மையக்கோடு **ACBD** ஆகுக. கூனலால், இக்கோட்டில் ஆகும் வளைவு மாறலைப் பெறும்பொருட்டு நாம் பின்வருமாறு செல்வோம். வளையத்தில் mn என்பது நீளம் δs உடையதும் **O** வில் கோணம் $\delta\phi$ எதிரமைக் கின்றதுமான ஒரு மூலகமெனக் கொள்க; இம்மூலகம் பெயர்க்கப்பட்ட போது வடிவ அழிவுற்ற வளையத்தில் ஆரைகள் $\mathrm{O}m$, $\mathrm{O}n$ என்பவற்றால் வரையறுதத மூலகம் m_1n_1 இன் அதே வளைவு உடையதாகிறது எனக் கொள்ளப்படுகிறது. m இன் ஆரைப் பெயர்ச்சி ξ, அதாவது mm_1 எனின், n இன் பெயர்ச்சி $\xi+\delta\xi$ ஆகும். கருதப்படும் மூலகத்தின் தொடக்க வளைவு

$$\text{எல்}.\ \frac{\delta\psi}{\delta s}=\frac{1}{\mathrm{R}}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

கூனலுக்குப்பின் அதே மூலகத்தின் வளைவாரை ρ என்பது

$$\frac{1}{\rho}=\text{எல்}.\ \frac{\delta\psi+\Delta(\delta\psi)}{\delta s+\Delta(\delta s)}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது; இங்கு $\delta\psi+\Delta(\delta\psi)$ ஆனது வடிவ அழிவுற்ற சட்டத்தில் m_1, n_1 எனபவறறில் இருக்கினற குறுக்குவெட்டுக்களிடையே யுள்ள கோணத்தைக் குறிக்கிறது; மேலும் $\delta s+\Delta(\delta s)=m_1n_1$.

இப்பின்னத்தை மதிப்பிடும் பொருட்டு **O** வை மையமாகவும், $\mathrm{O}m_1$ ஐ ஆரையாகவும், $\mathrm{O}n$ ஐ p யில் வெட்டுமாறும் வட்டவில்லொன்றை வரைக, படம் 8·35 (d). m_1h உம் ph உம் முறையே m, n என்பவற்றில்

வரைந்துள்ள தொடலிகள் mt, nt என்பவற்றிற்குச் சமாந்தரமாக இருக்க. $\beta = h\hat{m}_1 t_1$ ஆகுக ; இதுவே விற்கள் $m_1 p$, $m_1 n_1$ என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோணம் ஆகும் ; இது $p\hat{m}_1 n_1$ இற்குக் கிட்டத்தட்டச் சமன் ஆகும். (படத்தில் காட்டப்படாத) $\Delta p m_1 n_1$ இலிருந்து $m_1 \hat{p} n_1 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\delta\phi$ எனப் பெறுகிறோம் ; எனவே

$$\frac{\text{சைன் } \beta}{\delta\xi} = \frac{\text{சைன் } m_1 \hat{p} n_1}{\delta l} ;$$

இங்கு $\delta l = \delta s + \Delta(\delta s)$. β சிறிதாதலின்

$$\beta = \frac{d\xi}{dl} \text{ கோசை } \tfrac{1}{2}\delta\phi = \frac{d\xi}{dl} \simeq \frac{d\xi}{ds}.$$

அடுத்து நாற்பக்கல் $m_1 t_1 n_1 O$ வின் வெளிக் கோணங்களைக் கருதுக.

$$\left[\tfrac{1}{2}\pi + \frac{d\xi}{ds}\right] + [\delta\psi + \Delta\delta\psi] + \left[\tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{d\xi}{ds} + \frac{d^2\xi}{ds^2}\delta s\right)\right] + [\pi - \delta\phi] = 2\pi$$

எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, $\delta\phi = \delta\psi$ ஆதலின்,

$$\Delta(\delta\psi) = \frac{d^2\xi}{ds^2}(\delta s).$$

மேலும் வரிப்படத்தின்படி $m_1 n_1$ ஆனது $m_1 p$ யிற்குச் சமன் எனக் கருதப்படும் அளவிற்கு,

$$\frac{\delta s}{R} \doteq \frac{\delta s + \Delta(\delta s)}{R - \xi} = \frac{\Delta(\delta s)}{-\xi}.$$

$$\therefore\ \Delta(\delta s) = -\frac{\xi}{R}\delta s = -\xi\,\delta\phi.$$

எனவே $$\frac{1}{\rho} = \text{எல்.}\frac{\delta\phi + \frac{d^2\xi}{ds^2}\delta s}{\delta s\left(1 - \frac{\xi}{R}\right)} \simeq \frac{d\phi}{ds}\left(1 + \frac{\xi}{R}\right) + \frac{d^2\xi}{ds^2}.$$

இனி $\frac{\delta\phi}{ds} = \frac{1}{R}$ உம், $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$ (பக்கம் 395 ஐப் பார்க்க) உம் ஆகும் ; இங்கு

$$M = FR\left[\frac{1}{\pi} - \tfrac{1}{2} \text{ கோசை } \phi\right].$$

எனவே $$\frac{1}{R^2}\frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \frac{\xi}{R^2} = \frac{FR}{2EI}\left[\frac{2}{\pi} - \text{கோசை } \phi\right].$$

இச்சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு

$$\xi = \text{A கோசை } \phi + \text{B சைன் } \phi + \frac{FR^3}{\pi EI} - \frac{FR^3}{4EI} \cdot \phi \text{ சைன் } \phi$$

என்பது ஆகும்.

சமச்சீர் நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி மாறிலிகள் A யும் B யும் துணியப்படும் ; அதாவது

$$\phi = 0 \text{ இற்கும் } \phi = \tfrac{1}{2}\pi \text{ யிற்கும் } \frac{d\xi}{d\phi} = 0.$$

$$\therefore \ B = 0 \text{ உம் } A = -\frac{FR^3}{4EI} \text{ உம் ஆகும்.}$$

$$\therefore \ \xi = \frac{FR^3}{4EI}\left[\frac{4}{\pi} - \phi \text{ சைன் } \phi - \text{கோசை } \phi\right].$$

ξ நேராய் இருக்கும்பொழுது ஆரைக்காவியொன்றின் நீளத்தில் குறைப்பு ஏற்படுகிறபடியால்,

(*a*) நிலைக்குத்தான விட்டத்தில் குறைப்பு $= 2\,[\xi]_{=0\phi} = \frac{FR^3}{2EI}\left[\frac{4}{\pi} - 1\right]$ எனவும்,

(*b*) கிடையான விட்டத்தில் கூடுதல் $= -2\,[\xi]_{\phi=\frac{1}{2}\pi} = -\frac{FR^3}{2EI}\left[\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{2}\right]$ எனவும் பெறுகிறோம்.

வளையத்துப் புள்ளியொன்றில் தொடலி திரும்பும் கோணமானது, அண்ணளவின் முதல் வரிசையில்

$$\psi = \frac{1}{R}\frac{d\xi}{d\phi} = \frac{FR^2}{4EI}\,(-\phi \text{ கோசை } \phi)$$

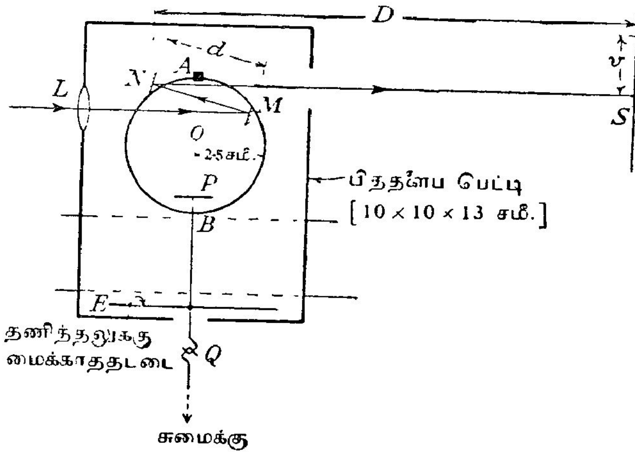
என்பதால் தரப்படுகிறது. சயக்குறியைப் புறக்கணித்தால் $\phi =$ கோதா ϕ, அதாவது $\phi = 49^\circ$ ஆகுமிடத்து இது ஓர் உயர்வு ஆகும்.

அப்பொழுது $$[\psi]_{\phi=49^\circ} = \frac{0{\cdot}561FR^2}{4EI}.$$

மாறுகின்ற சிறு விசைகளின் விரைவான துணிதலுக்குச் சக்சிமிதின் வளையம்–தராசு முறை.—இம்முறையானது முதன்முதலாக வன்காந்தப் புலமொன்றிற் கிடக்கின்ற இருமபில் திரவியமொன்றுமீதுள்ள விசையின் அளத்தலையிட்டு சக்சிமித் (Sucksmith)† எனபவரால் திட்டமிடப்பட்டுள்ளது.

† *Phil. Mag.*, 8, 158, 1929.

பொசுபர் வெண்கலத்துண்டொன்றுலான வட்டவளையமொன்று, அதன் விட்டம் வழியே, ஓர் இழுப்புக்கு ஆளாகும்பொழுது அனுபவிக்கின்ற வடிவ அழிவில் இம்முறையானது பொறுத்துள்ளது ; நிலைக்குத்தான தளமொன் றிற் கிடக்கின்ற அவ்வளையமானது அதன் மிகவுயர்ந்த புள்ளி A யில் நிலை யாக்கப்பட்டுள்ளது, படம் 8·36. கோணவிலகல்கள் உயர்வுகளாக இருக்



படம் 8·36. மாறுகின்ற சிறு விசைகளை விரைவாகத் துணிதலுக்குச் சக்சிமிதின் வளையம்-தராசு.

கின்ற வளையத்துப் புள்ளிகளில் M, N என்னும் இரு சிறு தளவாடிகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன ; மேலே காண்க. L ஆனது குழிவில்லையொன் றுகும ; அதன ஊடே செல்லுகின்ற ஒளியானது ஆடிகளில் தெறிக்கப்பட்டு அளவிடை S மீது குவிகிறது. d யும் D யும் மேலே காட்டியுள்ள தூரங்கள் ஆயின், S இல் ஒளிப்புள்ளியின் விலகல் v ஆனது

$$v = \psi_m [4D + 2d] \quad \text{[பக்கம் 422 இற் காண்க]}$$

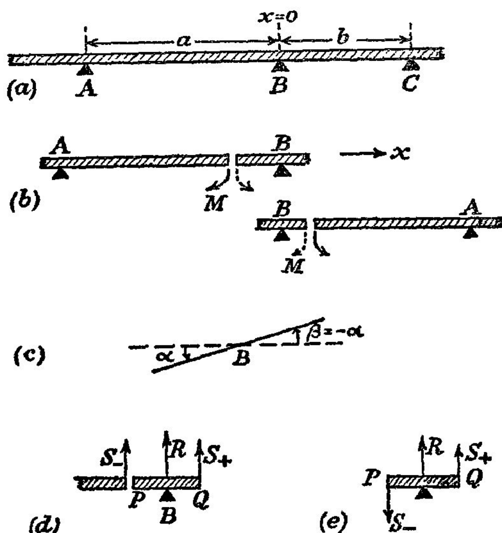
என்பதால் தரப்படுகிறது ;

இங்கு $$\psi_m = [\psi]_{\phi = 49^\circ} = \frac{0{\cdot}561FR^2}{4EI}.$$

விசை F இன் பெறுமானங்களைக் காண்பதற்கு இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தாது வளையத்துடன் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டிருக்கிற தரா சுத்தட்டு P யில் நியமத்திணிவுகளை ஒனறன்பின் ஒன்றுக இட்டு, தராசை அளவுகோடிடலாம் ; எமது கொள்கை உணர்த்துகிறவாறு பெயர்ச்சி யானது சுமையின் ஏகபரிமாணச் சார்பு எனத் தெரியவருகிறது.

வளையமும் ஆடிகளும் கொண்ட முழுத்தொகுதியும் பித்தளைப் பெட்டியொன்றினுள் அடைக்கப்பட்டிருக்கிறது ; பெட்டி மாறு வெப்பநிலையைப் பாகப் பயன்படுகிறது ; மெதுவாக மாறுகின்ற சிறு விசைகளின் அளத்தலையிட்டு வளையத்தின இயக்கம் மைக்காவேன் E யால் தணிக்கப்படுகிறது. Q ஒரு கொளுக்கி ஆகும் ; தராசில் ஏற்றப்படும் சுமையை அது தாங்கும். பக்கம் 542 இல் ஓர் எடுத்துக்காட்டாக இத்தராசைப் பயன்படுத்தும் முறை தரப்பட்டிருக்கிறது.

தொடர்ந்த வளைகள் ; கிளப்பீரனின் முத்திருப்பத் தேற்றம்.—இத் தேற்றமானது கிளப்பீரன் என்பவரால் தரப்பட்டுள்ளது (1875), அது அதே மட்டத்திலுள்ள தாங்கித் தொகுதியொன்றுமீது ஓய்வாய் இருக்கின்ற



படம் 8·37. தொடர்ந்த வளைகள். கிளப்பீரனின் முத்திருப்பத் தேற்றம்.

தும் சீராகச் சுமையேற்றியதுமான தொடர்ந்த வளையொன்றைப் பற்றியது. **A, B, C** போன்ற எந்த மூன்று தொடர்ச்சியான தாங்கிகளிலுமுள்ள சூனற்றிருப்பங்களின் பெறுமானங்களுக்கிடையே இருக்கின்ற தொடர்பை அது தருகிறது, படம் 8·37(a).

$AB = a$ யும், $BC = b$ யும் ஆகுக ; உற்பத்தியை B யிலும் x இன் நேர்த்திசையை BC வழியேயும் எடுக்க. அப்பொழுது வழக்கமான குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி, துண்டம் BC யில் $EIy^{IV} = w$ எனப் பெறுகிறேம் ; எனவே

$$M = EIy'' = \tfrac{1}{2}wx^2 + Ax + M_B \; ; \qquad \text{(i)}$$

இங்கு M_B ஆனது B யிலுள்ள கூனற்றிருப்பமும், A துணியவேண்டிய ஒரு தொகையீட்டு மாறிலியுமாகும். எனவே

$$EIy' = \tfrac{1}{6}wx^3 + \tfrac{1}{2}Ax^2 + M_Bx + EI\alpha. \qquad \text{(ii)}$$

இங்கு α ஆனது $[y']_{x=0}$ இன் பெறுமானம் ஆகும். மீண்டும் தொகையிட,

$$EIy = \tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{6}Ax^3 + \tfrac{1}{2}M_Bx^2 + EI\alpha x \qquad \text{(iii)}$$

எனப் பெறுகிறோம்; இங்கு தொகையீட்டு மாறிலி பூச்சியம் ஆகும்.

C யில், அதாவது $x = b$ யில் உள்ள நிபந்தனைகள்

$$M_C = EI[y'']_{x=b} = \tfrac{1}{2}wb^2 + Ab + M_B \qquad \text{(iv)}$$

எனத் தருகின்றன; C யில் விலகல் பூச்சியம் ஆதலின்,

$$0 = \tfrac{1}{24}wb^4 + \tfrac{1}{6}Ab^3 + \tfrac{1}{2}M_Bb^2 + EI\alpha b$$

அதாவது $$0 = \tfrac{1}{24}wb^3 + \tfrac{1}{6}Ab^2 + \tfrac{1}{2}M_Bb + EI\alpha. \qquad \text{(v)}$$

சமன்பாடுகள் (iv) இலும் (v) இலும் இருந்து A யை நீக்க,

$$bM_C + 2bM_B - \tfrac{1}{4}wb^3 = -6EI\alpha \qquad \text{(vi)}$$

இனி, துண்டம் BA யைக் கருதுக; இப்பொழுது உற்பத்தி B யில் இருக்க, x இன் நேர்த்திசையானது புறமாற்றப்படுகிறது. படம் 8·37 (b) ஆனது, புறமாற்றலுக்கு முன்னரும் அதற்குப் பின்னரும், துண்டத்தின் குறுக்குவெட்டொன்றிலுள்ள கூனற்றிருப்பங்களைக் காட்டுகிறது. கூனற்றிருப்பம் M இன் குறி மாறாது இருக்கிறது; B யில் வளையின் சரிவு β எனின்,

$$aM_A + 2aM_B - \tfrac{1}{4}wa^3 = -6EI\beta \qquad \text{(vii)}$$

எனக் காண்கிறோம்.

ஆனால் $\beta = -\alpha$; எனவே சமனபாடுகள் (vi) ஐயும் (vii) ஐயும் கூட்ட,

$$aM_A + 2(a+b)M_B + bM_C = \tfrac{1}{4}w(a^3 + b^3)$$

எனக் காண்கிறோம்; இது **கிளப்பீரனின் முக்கூனற்றிருப்பத் தேற்றத்தை** எடுத்துரைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாகத் தாங்கி B யில், வளை மீதுள்ள உதைப்பைக் காணும் பொருட்டு நாம் பின்வருமாறு செல்லலாம். B யிலே தாக்கம் R ஆகுக; வளையின் மூலகம் PQ மீதுள்ள விசைகளைக் கருதுக, படம் 8·37 (d); இங்கு தொடக்க ஆள்கூற்றுத் தொகுதியைக் குறித்து P ஆனது B யின் மறைப் பககத்திலும், Q ஆனது B யின் நேர்ப் பக்கத்திலும் அமைந் திருக்கின்றன. B யின் வலப்பக்கத்தில் அதற்கு மிக நெருங்கிய புள்ளி, அதாவது Q வில், கொய்விசை S_+ ஆகுக; அப்பொழுது B யின் இடது பக்கத்தில் அதற்கு மிக நெருங்கிய குறுக்குவெட்டொன்றில் கொய்விசை S_- ஆகும். எனவே மூலகம் PQ மீதுள்ள விசைகள் படம் 8·37(e) யிற் காட்டியுள்ளவாறே.

$$\therefore R = S_- - S_+.$$

இனி, பக்கம் 383 ஐப் பார்க்க, $S=\frac{dM}{dx}$. எனவே சமன்பாடு (i) இலிருந்து

$$S_{+}=(wx+A)_{x=0}=A$$

$$=\frac{M_C-M_B}{b}-\tfrac{1}{2}wb. \qquad \text{[(iv) ஐ ஒப்.]}$$

S_{-} ஐக் காணும்பொருட்டு, B ஊடே செல்கின்ற நிலைக்குத்தச்சொன்று பற்றி வளையானது திருப்பப்பட்டிருக்கிறது எனக் கற்பனை செய்வோம்; அதாவது P இப்பொழுது B யின் நேர்ப்பக்கத்தில் இருக்கிறது. எனவே P யில் கொய்விசை S ஆனது

$$S=\frac{M_A-M_B}{a}-\tfrac{1}{2}wa$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

ஆனால் எமது குறிவழக்கின்படி $S=-S_{-}$; எனவே,

$$S_{-}=\tfrac{1}{2}wa-\frac{M_A-M_B}{a}.$$

$$\therefore R=S_{-}-S_{+}=\tfrac{1}{2}w(a+b)+M_B\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\frac{M_A}{a}-\frac{M_C}{b}.$$

பயிற்சி VIII

8·01. நீளம் 100 சமீ. உம் உள்விட்டம 1·20 சமீ. உம், வெளிவிட்டம 1·60 சமீ. உம் உடைய பொள்ளான உலோகக குழாயொன்று அதன நுனிகளில தாங்கப்பட்டும அதன் மையத்தில 10·0 கிகி. சுமை ஏற்றப்பட்டும் இருக்கிறது. மையத்தில தொய்யல் 0·496 சமீ. எனின், குழாய ஆக்கப்பட்ட திரவியத்தின யங்கின மட்டிற்குப பெறுமானமொன்றைக் காணக.
[$1{\cdot}87\times10^{12}$ தைன. சமீ.$^{-2}$]

8·02. வளையொன்றின கூனற்றிருப்பத்திற்குரிய கோவையொன்றைப் பெறுக.

நிறை W வும நீளம l உம் உடைய ஒரு சீரான வளையானது அதனது நுனியொன்றிற் கிடையாக நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது. சுயாதீன நுனியிலுள்ள இறக்கத்திற்குக கோவையொன்றைப பெறுக.

அதுபோன்ற, ஆனால் புறக்கணிக்கத்தக்க நிறையுடைய, வளையொன்றினிடத்து அதே இறக்கத்தைப பெறுமபொருட்டு அதன் சுயாதீன நுனியில ஏற்றவேண்டிய நிறை யாது? (G)
[$\frac{3}{8}$W]

8·03. விட்டம் $2a$ உடைய உருளை வடிவமுடைய மரமொன்றிலிருந்து செவ்வக வளையொன்றை வெட்ட விரும்பப்படுகிறது. வளையானது மையமான சுமையொன்றைக் காவுதல் வேண்டும்; அதன சொந்த நிறை புறக்கணிக்கத்தக்கது. வளையின அகலம் $2a\div\sqrt{3}$ எனின், வளையில உயாவுத தகைப்பு ஓர் இழிவு ஆகும எனக் காட்டுக.

8·04. 1 மீற்றர் நீளமும், 2 சமீ.$\times$0·2 சமீ. செவ்வக வெட்டும உடைய கணணாடித் துண்டொன்றிற்கு எவ்வாறு நீர் யங்கின மட்டைக் காண்பீர் என்பதை விவரித்து விளக்குக. கணிப்பில பயன்படும சூத்திரத்தைப பெறுக. (G)

8·05. ஆரை R உடைய வட்டவில் வடிவமாகக் கூனலுறச்செய்த வளையொன்றின் கூனற்றிருப்பத்திற்கான கோவையைப் பெறுக.

இலேசான கோலொன்று அதன் நுனியொன்றில் நிலையாக்கப்பட்டு அதன் மற்றை நுனியில் சுமையொன்றைக் காவுகிறது. அதன் குறுக்குவெட்டு மாறுகின்ற ஆரையுடைய வட்டமானது. சுமை, குறுக்குவெட்டின் ஆரை r, சுமையேறிய நுனியிலிருந்து தூரம் d என்பவை தொடர்பாகக் கோலின் பரப்பில், தகைப்புக்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

r ஆனது $d^{\frac{1}{3}}$ இற்கு விகிதசமமாக இருக்குமாயின், கோலவழியே எங்கும் இப்பரப்புத் தகைப்பானது மாறாது இருக்கும் எனக் காட்டி, இச்செய்தி பயனளிக்கக்கூடிய எடுத்துக் காட்டொன்றை ஆய்க. (G)

8·06. கூனலுறுகின்ற வளையொன்றின் எந்தக் குறுக்குவெட்டிலும் தகைப்பின் பெறுமானம் $p=\frac{M}{I}z$ எனக் காட்டுக; இங்கு z ஆனது நடுநிலையச்சிலிருந்து கருதப்படும் சிறு மூலகத்தின் தூரம் ஆகும்.

வட்டக் குறுக்குவெட்டுடைய கோலொன்றினிடத்து, ஆரை a உடைய குறிப்பிட்ட குறுக்கு வெட்டொன்றில் உயர்வு நெட்டாங்குத் தகைப்பு

$$p_{\text{உயர்.}}=\frac{4\,M}{\pi a^3}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது எனக் காட்டுக.

குறுக்குவெட்டு வளையம் போன்றதாயின், உயர்வுத் தகைப்பு

$$\frac{32\,MD}{\pi(D^4-d^4)}$$

ஆகும் எனக் காட்டுக; இங்கு வெளிவிட்டமும் உள்விட்டமும் முறையே D யும் d யும் ஆகும்.

8·07. 20 அடி நீளமான வளையொன்று அதன் நுனியொவ்வொன்றிலுமிருந்து 5 அடி தூரத்தில் கிடையாகத் தாங்கப்பட்டிருக்கிறது; ஒவ்வொன்றும் திணிவு 1 தொன் உடைய இரு சுமைகளை இடக்கை நுனியிலிருந்து தூரங்கள் முறையே 4 அடி, 12 அடி என்பவற்றில் வளை காவுகிறது.

$E=12\times10^3$ தொன். – நிறை. அங். $^{-2}$ எனவும் $I=200$ அங். ^{4} எனவும் கொண்டு வளையின் நுனிகளிலும் அதன் மையத்திலும் கோணலகளைக் கணிக்க; மேலும், தாங்கிகளில் வளையின் சரிவைக் காண்க.

8·08. 10 அடி நீளமும் 1 அடி ஆழமும் 4 அங். அகலமும் உடைய கிடையான வளையொன்று அதனது நுனிகளில் தாங்கிகள் மீது ஓய்வாய் இருக்கிறது; அதன் மையத்தில் திணிவொன்றை அது காவுகிறது. வளையினது திரவியத்தின் யங்கின் மட்டு

$$2\times10^6 \text{ இரு.-நிறை. அங்.}^{-2}$$

என எடுக்கலாம். வளையின் உயர்வுக் கோணல் $\frac{1}{8}$ அங். எனின், வளையுள் உயர்வுநெட்டாங்குத் தகைப்பின் பெறுமானத்தைக் காண்க. [வளையின் நிறையைப் புறக்கணிக்க.]

[55·6 இரு.-நிறை அங். $^{-2}$.]

8·09. **இரண்டாவது பரப்புத் திருப்பம்** என்பதை விளக்குக.

கிடையான முனைநெம்பொன்றின் சுயாதீன நுனியில் சுமை W ஏற்றப்படுகிறது. வளையின் நிறை புறக்கணிக்கத்தக்கது எனக் கொண்டு சுயாதீன நுனியில், கோணலுக்குக் கோவை யொன்றைப் பெறுக.

வளையின் குறுக்குவெட்டு, பக்க நீளங்கள் a யும் b யும் உடைய செவ்வகமும், a யும் b யும் நிலைக்குத்தாக இருக்கும்பொழுது தரப்பட்ட சுமையொன்றிற்கு வளையின் நுனியில

உயர்வுக் கோணல்கள் முறையே y_a யும் y_b யும் ஆயின்

$$\frac{y_a}{y_b}=\frac{b^2}{a^2}$$

எனக் காட்டுக. $a=2\cdot0$ சமீ., $b=0\cdot50$ சமீ. ஆனல் 500 கி. திணிவாற் சுமையேற்றிய 50 சமீ நீளமுடைய சட்டமொன்றிற்கு y_a, y_b என்பவற்றைக் கணிக்க. திரவியத்தின யங்கின் மட்டு 21×10^{11} தைன். சமீ. $^{-2}$ ஆகும. [0·029 சமீ., 0·47 சமீ.]

8·10. மெனனுருக்காலான நிலைக்குத்துக் குழாயொன்றின் வெளி விட்டம் 20 சமீ. உம், சுவர்களின் தடிப்பு 2·0 சமீ. உம் ஆகும் ; அதன் யங்கின மட்டை 2×10^{12} தைன். சமீ. $^{-2}$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். தரைகருமேல் அதன் உயரம் 4·0 மீறறர் ஆகும் ; அதன் மேலான நுனியில் 500 கிகி. நிறை ஆன கிடை இழுபபு ஒன்று தாக்குகிறது. தரை மட்டத்தில் உயாவு நெட்டாங்குத் தகைபபையும உச்சியிற் கோணலையும் காணக.

[$1\cdot36\times10^3$ கிகி.–நிறை சமீ. $^{-2}$, 3·54 சமீ.]

8·11. மீள்தன்மை மட்டு எனபதற்கு வரைவிலக்கணம் கூறி எடுததுக்காட்டுகள தருக.

அதன நுனியொனறில் சுமையேறறப்பட்டு, மறு நுனியில கிடையாக்கபபட்டிருககின்ற வளை யொனறின உயர்விறககததிற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

ஆரை 0·50 சமீ. உம் நீளம் 25 சமீ. உம உடைய இரும்பாலான உருளைககோல AB என்பது, அதன அசசு கிடையாக இருககுமாறு A யில் நிலையாக்கப்பட்டிருககிறது. (*a*) B யில், (*b*) A யிறகும் B யிற்கும் நடுவான புள்ளியில, 3 கிகி.–நிறை உடைய விசையொன்று பிரயோகிக்கப்படுமிடதது, கோலின சுயாதீன நுனியில கோணலகளைக கணிகக.

[இரும்பிற்கு யங்கின மட்டு $21\cdot0\times10^{11}$ தைன். சமீ. $^{-2}$ எனக் கொளக.]

[(*a*) 0·467 சமீ., (*b*) 0·145 சமீ.]

8·12. இலேசான வளையொன்று அதன நுனியொனறில் கிடையாக நிலையாக்கபபட்டிருக கிறது. மற்றை நுனியிற சுமையேறறபபட்டால், அதன மையததின இறககத்திற்குக் கோவை யொனறைப் பெறுக. அதன நுனிகளில அதே வளை கிடையாகக ஈததியோரஙகளால தாஙகபபட்டு, அதன மையததில அதே சுமையைத தொங்கவிட்டால இறககம் எவ்வளவு இருக்கும் ?

8·13. மையச் சுமையொனறின பிரயோகத்தால, 100 சமீ. பாவில் சீரான குறுக்கு வெட்டுடைய இலேசான வளையொனறு கோணலுறுமாயின நுனியொவ்வொனறிலும் வளையின் சரிவு எவவளவு ?

[$3\cdot0\times10^{-2}$ ஆரையன.]

8·14. இலேசான சீரான செவவக வளையொனறு அதன நுனியொனறிற கிடையாகவும் விறைப்பாகவும நிலையாககபபட்டிருககிறது. வளையின் சுயாதீன நுனியிலே சுமையொனறைத் தொஙகவிட்டால் அஙகுளள இறககத்திறகுக கோவையொனறைப் பெறுக. வளையின நீட்டற பரிமாணஙகள் அரைவாசியாககப்படின, சுயாதீன நுனியில அதே இறககததை நிலைநிறுததும் பொருட்டுச் சுமையில தேவைபபடும மாறறம் யாது?

[அரைவாசியாகக வேணடும.]

8·15. அதனது பாவு முறறிலும் சீராகப் பரம்பியுளள சுமையொன்றைக காவுகின்ற வளையொனறினிடதது கூனறறகைபபு 12 தொன.–நிறை. அங. $^{-2}$ ஐயும கோணலானது பாவின இருநூற்றில ஒன்றையும் மீறுமல் இருககும்பொருட்டு, பாவு வளையினது ஆழததின் 24 மடஙகை மீறலாகாது எனக காட்டுக.

[$E=1\cdot2\times10^4$ தொன்.–நிறை. அங. $^{-2}$ எனக கொள்க.]

8·16. தொடக்கததில் நேராய் இருநத சீரான சட்டமொனறு பெரிய ஆரை ρ உடையவொரு வட்டவில்லாகக் கூனலுற்றிருக்குமபொழுது, அதன் எந்தக குறுககுவெட்டிலும் கூனற திருப்பத்திறகுக கோவையொனறைப் பெறுக. திரவியத்திறகு யஙகின் மட்டு E ஆகும்.

நீளம 100 சமீ. உம குறுக்குவெட்டு 2·0 சமீ. × 2·0 சமீ. உம் உடைய மரச்சட்டமொன்று கிடையாகவும சமசீராகவும் 60 சமீ. இடைததூரததில இருககினற இரு கத்தியோரங்களால் தாங்கப்பட்டிருககிறது. (a) சட்டத்தின் நுனியொவ்வொனறிலுமிருந்து 2·0 கிகி. திணிவு தொஙகவிடப்பட்டபோது (b) மிக விகாரப்படுத்தியுள்ள இழைகளில் ஒரு சமீ. நீளமொன்றின் நீட்சி $5·0 \times 10^{-4}$ ஆகும்போது, சட்டத்தின மையத்தில ஏறறததைக காண்க. $E = 1·3 \times 10^{11}$ தைன். சமீ.$^{-2}$ எனக கொளக. [(a) 0·102 சமீ., (b) 0·0563 சமீ.]

8·17. உள்விட்டம் 1·0 சமீ. உம் சுவர்த தடிப்பு 0·30 சமீ. உம் உடைய பொட் குழாயொன் றின நீளம் 100 சமீ. ஆகும். அதன் நுனிகளில் அது கிடையாகத தாங்கப்பட்டு அதன் மையத் தில 15 கிகி. சுமையொன்றைக் காவுகிறது. உயர்வுத் தொய்யல 0·415 சமீ. ஆகும். குழாயின் திரவியத்திறகு யங்கின் மட்டின் பெறுமானமொன்றைக் காணக.

[$2·71 \times 10^{12}$ தைன். சமீ.$^{-2}$]

8·18. நீளம் l உடையதும் அதன சுயாதீன நுனியில நிறை W உடைய சுமையொன்றைக் காவுகிறதுமான முனைநெம்பொனறினிடத்து, நிலையாக்கியுள்ள நுனியிலிருநது தூரம் x இலே கோணல்

$$y = \frac{W}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

ஆகும் எனக் காட்டுக. $x = 0$, $x = \frac{1}{2}l$, $x = l$ என்னும் இடங்களில் வளையின் வளைவு யாது ?

$$\left[\frac{Wl}{EI},\ \frac{1}{2}\frac{Wl}{EI},\ 0\right]$$

8·19. 12 அடி நீளமுள்ள முனைநெம்பொன்று, அதன் மையமான 6 அடிப்பாகத்தில் அடியொன்றிற்கு 1 தொன என்ற வீதத்திலே சீராகப் பரம்பியுள்ள சுமையொன்றைக் காவுகிறது. $E = 12 \times 10^3$ தொன்.–நிறை. அங்.$^{-2}$ உம, $I = 800$ அங்.^{4} உம் எனின், சுயாதீன நுனியில சரிவைக் காண்க.

8·20. நீளம் L உடைய இலேசான முனைநெம்பொன்றின் சுயாதீன நுனியில நிறை W ஐத் தொங்கவிட்டதால், நிலையான நுனியிலிருநது தூரம் pL ($p<1$) இலுள்ள புள்ளி P யில் இறக்கம y ஆகுமாறு அது சற்றுக் கூனலுறுகிறது. W ஆனது P யிலிருந்து தொஙகவிடப்பட்டால அப்பொழுது சுயாதீன நுனியில் விளையும் இறக்கத்தைக் கணிகக.

W வுடன் ஒப்பிடக்கூடிய நிறையொன்றை முனைநெம்பு உடையதாய் இருந்தால், கணிப்பில் விளைவு ஏதேனும் தோற்றுமாயின் அதை ஆராய்க. (G)

[மாற்றம் இல்லை.]

8·21. "இலேசான" முனைநெம்பொன்றின் குறுக்குவெட்டானது ஆரை a யுடைய ஒரு வட்டமாகும். நெம்பின் நீளம் 5 அடியும் அது காவும் சுமையின் திணிவு 4000 இரு. உம் ஆகும். உயர்வு நெட்டாங்குத் தகைப்பு 10,000 இரு. நிறை. அங்.$^{-2}$ ஆகும். வளையினது திரவியத்தின் யங்கின் மட்டு $3·0 \times 10^7$ இரு.–நிறை. அங.$^{-2}$ எனின், a யிற்கும், சுயாதீன முனையில் கோணலுக்கும் பெறுமானங்கள காண்க.

[3·13 அங்., 0·128 அங்.]

8·22. இலேசான உருளை நெம்பொன்று நீளம் 40 அங். உம் ஆரை 4·0 அங். உம் உடையது. நெம்பினது திரவியத்திற்கு யங்கின் மட்டு $2·0 \times 10^7$ இரு. நிறை. அங்.$^{-2}$ என எடுக்கலாம். சுயாதீன நுனியிலுள்ள சுமையின் திணிவு 1·0 தொன் எனின், அநநுனியிற் கோணலையும் முனைநெம்பின் உயர்வு நெட்டாங்குத் தகைப்பையும் காண்க.

[0·012 அங்., 0·80 தொன். நிறை. அங்$^{-2}$.]

8·23. அதன் நுனியொன்றில் இலேசான செவ்வகச் சட்டமொன்று கிடையாக நிலையாக்கப் பட்டிருக்கிறது; அதன் மற்றை நுனியில் நிறையொன்று இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. (a) சட்டத்தின் சுயாதீன நுனியின நிலைக்குத்தான இறக்கம், (b) நிறை, சற்று இறக்கப்பட்டு விடுவித்தபின் நிகழ்கின்ற அலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலம், என்பவற்றிற்குக் கோவைகள் பெறுக.

8·24. நிறை W வும் நீளம் $2l$ உம் உடைய சீரான பலகையொன்று அதன் நுனிகளில் தாங்கப்பட்டு, கிடைத் தளமொன்றிற் கிடக்கிறது. (a) நுனியொன்றிலிருந்து தூரம் $\frac{1}{2}l$ இல் நிறை 2W வினால், (b) இரு நுனிகளிலுமிருந்து தூரங்கள் $\frac{1}{2}l$ இல் இரு சம நிறைகள் W வினால் அது சுமையேற்றப்படுகிறது.

எவ்வாறு ஒவ்வோர் எடுத்துக்காட்டிலும் பலகை வழியே கூனற்றிருப்பம் மாறுகின்றது எனப்பதைக் காட்டுகின்ற வரைபுகளை வரைக. உயர்வுப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

8·25 நுனியொன்றில் விறைப்பாக நிலையாக்கியுள்ள கிடையான வளையொன்று அலகு நீளமொன்றிற்கு நிறை w உடையது. வசதியான உற்பத்தியொன்றிலிருந்து தூரம் x இலுள்ள எந்தப் புள்ளியிலும் நிலைக்குத்தான கொய் விசை S உம் கூனற்றிருப்பம் M உம் ஆகும்

$$\frac{dS}{dx}=w,\ \frac{dM}{dx}=F$$

எனக் காட்டுக.

கூனல் சிறிது எனக் கொள்ளப்படின்

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=w$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு E ஆனது திரவியத்தின் யங்கின் மட்டும், I குறுக்குவெட்டின் இரண்டாவது பரப்புத் திருப்பமும் ஆகும்.

சீரான கம்பமொன்று நிலைக்குத்தாக நிற்கிறது ; அதன்கீழ் நுனி தரையில் இருக்க, அதன் மேலான நுனியில் நிறை W இருக்கிறது. வளைவு சிறிதெனக் கருதி கம்பத்தினது அச்சின் சமன்பாட்டைத் துணிக.

உருளைக் கம்பமொன்றானது அமுக்கம் 15 தொன். நிறை. அங். $^{-2}$ இற்கு உட்பட்டுத் தனிவில்லொன்றின் வடிவத்தில் இருத்தற்பொருட்டு அதன் விட்டத்தைக் குறித்து அதன் நீளத்தின் விகிதத்தைக் காண்க. யங்கின் மட்டின் பெறுமானம்

$$3{\cdot}0\times10^7 \text{ இரு. -நிறை. அங்.}^{-2}.$$

8·26. பாவு l உடைய ஒரு சீரான வளையானது நுனியொவ்வொன்றிலும் கிடையாக நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது. வளையின் நுனிகளிலிருந்து சம தூரங்கள் h இல் W என்னும் இரு சம நிறைகள் ஏற்றப்பட்டிருக்கின்றன. வளையின் நிறையைப் புறக்கணித்து, வளையில் மிக வுயர்ந்த கோணல் $\frac{Wh^2}{24EI}(3l-4h)$ எனவும், மிகவுயர்ந்த கூனற்றிருப்பம் $\frac{Wh^2}{l}$ எனவும் நிறுவுக.

8·27. இரு சம பாவுகளைத் தொடுக்கும் பொருட்டுத் திட்டமிட்ட தொடர்ந்த தீராந்தியானது சீரான குறுக்குவெட்டும் அலகு நீளமொன்றிற்குத் திணிவு m உம் உடையதாகும். பாவுகளின் குறுக்கே தீராந்தி ஏற்றப்படுகிறது ; தீராந்தியின் மையம் நடுவான தூணிற்குச் சற்று மேலே இருந்தபோது முன்னேறும் நுனியானது கீழ்முகமாகத் தொங்கியுள்ளது. இடைத் தூரம் ஒவ்வொன்றினதும் நீளம் a எனின், சுயாதீன நுனியின் இறக்கம் $\frac{mga^4}{4EI}$ ஆகும் எனக் காட்டுக ; இங்கு குறியீடுகள் அவற்றின் வழக்கமான அர்த்தங்கள் உடையன.

8·28. அடிப்படைத் தத்துவங்களிலிருந்து, அலகு நீளமொன்றிற்குச் சீரான திணிவு உடையதும், அதன் மையத்தில் சுமையேற்றியுள்ளதும், அதே மட்டத்திலுள்ள கத்தியோரங்கள் மீது அதன் நுனிகள் தாங்கப்பட்டிருக்கின்றதுமான வளையொன்றின் மையத்தின் இறக்கத்திற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

புறக்கணிக்கத்தக்க திணிவுடைய வளையொன்றினிடத்துச் சுமையைச் சமநிலைத் தானத்திலிருந்து நிலைக்குத்தாகச் சற்றுப் பெயர்த்து விடுவித்தபோது உண்டாகின்ற சிற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காண்க.

(S)

8·29. ஓரிட வளைவாரையையும், தொடர்புள்ள மற்றைக காரணிகளையும் குறித்து வளையொன்றைக் கூனலுறச் செய்வதறகான இணைகருக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

இரு முனைநெம்புகள் ஒரே குறுக்குவெட்டுப பரப்பளவு உடையன; ஆனால் ஒனறின் குறுககுவெட்டு சதுரவடிவமானது; மறறதன் குறுககுவெட்டு வட்டவடிவமானது. இரு முனை நெம்புகளும ஒரே திரவியத்தாலானவை; சமநிறைகளால தாக்கப்பட்டபோது அவறறின் சுயாதீன நுனிகள் சம பெயாசசிகளைக் காட்டின. "வட்ட" முனைநெம்பின் நீளததைக் குறிததுச் "சதுர" இணைநெம்பின் நீளத்தின் விகிதத்தைக் கணிக்க. (S)

8·30. நீளம் $3l$ உடைய இலேசான சீரான வளையொன்று இரு நுனிகளில், கத்தியோரங்களின மீது, சுயாதீனமாகத் தாஙகப்பட்டிருககிறது. (*a*) சுமை W மையமாகப் பிரயோகிககப்படுமிடத்து, (*b*) அச் சுமையானது நுனியொனறிலிருந்து தூரம l இலுள்ள புளளியொன்றிற் பிரயோகிககப்படுமிடதது, சுமை ஆற்றும் புள்ளியில இறக்கத்தைக் கணிகக. (S)

8·31. 100 சமீ. நீளமும் 1 சமீ. விட்டமும உடைய இலேசான, சீரான உருளைக் கோலொன்று 50 சமீ. இடைததூரததில உளள கததியோரங்கள மீது கிடைத் தளமொன்றிலே சமச்சீராகத் தாங்கப்பட்டிருககிறது. கோலின மையத்திலிருநதும் அதன நுனிகளிலிருநதும் 1 கிகி. திணிவுடைய சமதிணிவுகள தொஙகவிடப்பட்டிருககினறன. (*a*) மையததிலும் கோலின நுனிகளிலும் இறககஙகளையும், (*b*) கோலிற் சேமித்துள்ள விகாரச் சகதியையும் கணிக்க. கோலினது திரவியத்தின் யங்கின் மட்டு 10×10^{10} தைன். சமீ. $^{-2}$ ஆகும.

(S)

8·32. இலேசான, நெருக்கமாகச் சுற்றியுள்ள சுரிவில்லொன்றின் கீழ் முனையில் இணைக்கப்பட்ட 50 கி. திணிவால் ஆகும் நீட்சியானது 3 சமீ. ஆகும். சுமையேற்றிய வில்லைக் கீழே இழுத்து விடுவித்தபோது நிகழ்கின்ற நிலைகருத்தான சிற்றலைவுகளின் ஆவர்த்தன காலத்தைக் காணக. [0·348 செக.]

8·33. இலேசான நெருக்கமாகச் சுறறியுள்ள சுரிவில்லொனறுல தாஙகப்பட்டிருக்கும் போது 200 கி. நிறையொனறு 40 செககன்களில் 50 முழு அலைவுகள் ஆற்றிற்று. வில்லில், சுமையை 20 கி. கூட்டுவதால் ஆகும் நீட்சியைக் காணக. கொள்கையைத் தருக.

[1·59 சமீ.]

8·34. 25 அடி நீளமுள்ள மெல்லுருக்காலான பொன் தூண் ஒன்று அதன இரு முனைகளிலும் நிலையாக்கப்பட்டிருககிறது; அதன் வெளிவிட்டம் 6 அங். ஆகும். காவற் காரணி 6 எனின், தூண 50 தொன் திணிவுடைய சுமையொன்றைக் காவவேண்டுமாயின், உலோகத்தின் தடிப்பிற்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறுக. [உருககினது யங்கின் மட்டு $3\cdot0\times10^{7}$ இரு.–நிறை. அங். $^{-2}$ எனவும் $\pi^2=10$ எனவும் கொள்க.]

[0·98 அங்.]

8·35. படிகநாரால் விட்டம் 0·88 சமீ. உடைய நெருக்கமாகச் சுற்றியுள்ள சுரிவில் வடிவத்தில் விற்றராசொன்று ஆக்கப்பட்டிருக்கிறது. நாரின் விட்டம் $1\cdot65\times10^{-3}$ சமீ. உம் தராசின் உணாதிறன் $0\cdot33\times10^{6}$ சமீ. கி. நிறை. $^{-1}$ உம் உருகிய படிகத்தின விறைப்பு மட்டு $3\cdot0\times10^{11}$ தைன். சமீ. $^{-2}$ உம் எனின பயன்படுத்தியுள்ள படிகநாரின் நீளம் எவ்வளவு ஆகும்? பரிசோதனைப்படி எவ்வாறு இம்மட்டைத் துணிவீர்?

[47·8 சமீ.]

அதிகாரம் IX

திரவ, திண்ம, வாயுக்களின் நெருக்கத்தகவு

திரவநிலையில், சடத்தின் நெருக்கத்தகவு பற்றிய முன்னைய ஆராய்ச்சி. நீர்நிலையியல் பற்றிய ஆரம்ப நூல்களில் திரவங்கள் நெருக்கப்படமுடியாதவை என எப்பொழுதும் கொள்ளப்படுகிறது. நீரானது பூச்சிய நெருக்கத்தகவுடைய திரவமன்று எனனுஞ் செய்தி முதன்முதலாகக் கானரன்† (Canton) என்பவராலேயே காட்டப்பட்டது. அதற்குமுன் பேககன (Bacon) என்பார் ஈயத்தாலான கோளப் பாத்திரமொன்றை நீரால் நிரப்பி, அதன் மீது வளிமண்டல அமுக்கத்திற்கு மேலான அமுககங்களைப் பிரயோகித்தார் ; ஆனல் கோளத்தில் பொசிவுகளின் தோற்றம் அல்லது பாத்திரத்தினது சுவர்களின நுண்டுளைகளூடே நீரின வெளியேறறததினல் அவரது பரிசோதனைகள் தவறிவிட்டன. கான்ரன், இரசங்கொண்ட கண்ணடிப் பாததிரமொனறைப் பயன்படுத்தினர் ; அப் பாத்திரம் வெப்பமானி போன்ற வடிவம் பெறறிருந்தது ; ஆனல் அதன மயிர்த்துளைக்குழாய் திறந்தே இருந்தது. வரையறுத்த வெப்ப நிலையொன்றில் ஆய்கருவியின் தண்டில் இரசமட்டம் நோக்கப்பட்டது. அடுத்து, பாத்திரத்தைச் சரியாக இரசம் நிரப்பும் வரை பாத்திரம் சூடேற்றப்பட்டது ; அந்நிலையில் மயிாத்துளைக் குழாயின் திறந்தமுனை அடைத்தொட்டப்பட்டது ; குளிர்ந்து அதன் தொடக்க வெப்பநிலையை அடையுமாறு ஆய்கருவி விடப்பட்டது. மயிர்த்துளைக் குழாயில், முந்திய மட்டத்தைக் காட்டிலும் உயாவான மட்டமொனறை இரசம் பினனர் அடைந்திருப்பது குறிக்கப்பட்டது. அதன் விளக்கத்தையிட்டு :—

(*a*) இரசமானது புற வளியால் எற்கெனவே நெருக்கமுற்றிருந்தது, அல்லது

(*b*) பாத்திரத்துள், அமுக்கமானது வளிமண்டல அமுக்கத்திற்குக் குறைவாக இருந்தபோது அதன் பருமன் சுருஙகிறறு

எனக் கொளளலாம்.

அடுத்து, அதே பாத்திரத்தில் நீரை வைத்துப் பரிசோதனை மீண்டுஞ் செய்யப்பட்டது ; இரசத்தைக் காட்டிலும் நீரானது கூடுதலான மட்ட மாற்றமொனறைக் காட்டிற்று. எனவே நீரானது நெருக்கத்தக்க ஒரு பொருளாகும் என நிறுவப்பட்டது.

திரவங்களின் நெருக்கப்படுதன்மை என்னும் ஆராய்ச்சித்துறையில் எசட்டு‡ (Oersted) என்பார், 1822 இல் இன்னுமொருபடி முன்னேறினர் ;

† கானரன, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1762–4.

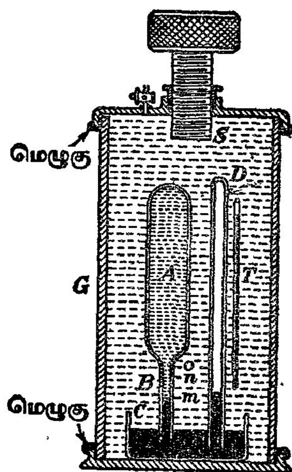
‡ எசட்டு, *Pogg. Ann.*, 9, 603, 1827.

அவரது ஆய்கருவியின் மாதிரியொன்று படம் 9·01 இற் காட்டப் பட்டிருக்கிறது ; அது அமுக்கமானி என்னும் கருவிக்கு ஓர் எடுத்துக் காட்டு ஆகும். அது மயிர்த்துளைக் குழாய் B யுடன் கூடிய கண்ணுடிப் பாததிரம் A ஐக் கொண்டது. கிண்ணம் C கொண்டிருக்கின்ற இரசத்துள் மயிர்த்துளைக் குழாயின நுனி அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கிறது. கண்ணுடிக் குழாய் D இன் மேல் முனை மூடப்பட்டு, அதன கீழ் முனையானது அதே கிண்ணத்திலுள்ள இரசத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டிருககிறது. அக்குழாய் வளி கொண்டுள்ளது. T, இரசங்கொண்ட ஒரு கணணுடி வெப்பமானியாகும். பித்தளையாலான முனைத்துண்டுகளுடன கூடிய திடமான கண்ணுடியுருளை G யுள் முழுத்தொகுதியும் வைக்கப்பட்டுள்ளது ; ஏதேனுமொருவகை மெழுகைப் பயன்படுதத்தி நுனித்துண்டுகளுக்கும் கண்ணுடிக்குமுள்ள மூட்டுக் கள் நீர் நுளையவியலாத வகையில ஆக்கப்பட்டுள்ளன. G நீரால் நிரப்பப் பட்டுள்ளது. S திருகமுங்கியாகும் ; அதைப் பயன்படுத்தி ஆய்கருவியுள் அமுக்கத்தை உயர்த்தலாம். குழாய் D யில் வளியின் கனவளவில் நிகழ் கினற மாற்றத்தைப் பயன்படுதத்தி, ஆய்கருவியில் நிகழ்கின்ற அமுக்க மாற்றத்தைக் கணிக்கமுடிகின்றது.

பரிசோதனைக்கான கொள்கை பின்வருமாறு. தண்டிலுள்ள பூச்சியக் குறி 0 வரை A யின் கனவளவு V ஆகுக. தண்டு B யிலுள்ள பிரிப் பொன்றின கனவளவு v ஆகுக. அமுக்கம் P_1 ஆகும்பொழுது B யில் இரச மட்டம் m இல இருக்கும் எனக் கொளக ; அமுக்கம் P_2 ஆகும்பொழுது இரசமட்டம் n இல் என்க. அப்பொழுது அமுக்கம் (P_2-P_1) எனனும் அளவால் மாறும்பொழுது கனவளவு $(V+mv)$ உடைய திரவததின் கனவளவு $(m-n)v$ ஆற் குறைவதாகத் தோற்றும். எனவே திரவததின் தோற்ற நெருக்கத்தகவா னது

$$\frac{\text{கனவளவில் தோற்றக்குறை}}{(\text{தொடக்கக் கனவளவு})\ (\text{அமுக்க மாற்றம்})} = \frac{(m-n)\,v}{(V+mv)\,(P_2-P_1)}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.



படம் 9·01. திரவமொன்றின் நெருக்கப்படுதன்மையின் ஆராய்ச் சிக்கு எசட்டின் ஆய்கருவி.

இரசம் உட்படப் பல பொதுத் திரவங் களின் நெருக்கத்தகவிற்குத் திருத்த மான பெறுமானங்களை முதன்முதலாகப் பெற்றவர் றேஞே (Regnault) (1847) ஆவர். றேஞே அவர்தம் பேறுகளின் அர்த்தத்தையிட்டு லாமே (Lame)

என்பவரின் அறிமுறை ஆராய்ச்சிகளைப் பயன்படுத்தினர். [அவை பின்னர் 1867 இல், பாரிசு மாநகரில், *Leçons sur l'elasticité des corps solides* என்னும் நூலில்—பக்கம் 189 இல் வெளியிடப்பட்டன.] இனித் தொடர்ந்து செல்லுமுன லாமேயின் ஆராய்ச்சியில் எமது உடனடியான தேவைக்குப் பொருத்தமானதை எளிய முறையில் கருதுதல வேண்டும்.

சமவியல்புடைய திரவியத்தாலான தடித்த சீரான உருளையோடொன்றில் அமுக்க மாறல்களால் ஆகின்ற கனவளவு மாற்றங்கள்.—கீழ்த் தரப்படும் அமுக்கவுயர்வுகளுக்கு ஆளாகின்ற வட்டக் குறுக்குவெட்டும் தட்டையான முனைகளும் உடைய நீணட உருளைக் குழாயொன்றைக் கருதுக. அமுக்க உயர்வுகள் வெளியே P_0 உம், உள்ளே P யும் ஆகும. குழாயினது வெட்டொன்றின் உள்ளாரையும் வெளியாரையும் முறையே a யும் b யும் ஆகுக— படம் 9·02 (a) யிற காண்க. அமுக்கங்கள் பிரயோகிக்கப்பட்டபின் அச்சிலிருநது தூரம் r இலுள்ள புள்ளியொன்று சிறு பெயர்ச்சி ξ ஐ அடைந்திருக்க. தொடக்கத்தில் தூரம் $r+\delta r$ இல் இருந்த புள்ளியொன்றின பெயர்ச்சியானது $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial r}.\delta r$ ஆகும்.

$$\therefore \text{ஆரைவிகாரம்} = \frac{\text{தொடக்க நீளம் } \delta r \text{ உடைய மூலகத்தின் நீட்சி}}{\text{தொடக்க நீளம் } \delta r} = \frac{\partial\xi}{\partial r}$$

$$= \epsilon_1 \text{ (என்க)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(i)}$$

r
a
b
(a)
$p_3\,\delta S$
δS
$P\pi a^2$
$P_0\pi b^2$
a
b
(b)

படம் 9·02. உள்ளமுக்கமிகையால் தாக்கப்படுகின்ற தடித்த சீரான உருளையோடு.

மேலும், தொடக்கத்தில் ஆரை r உம் பரிதி $2\pi r$ உம் உடையதாய் இருந்த வட்டத்தின் பரிதியானது அமுக்கங்கள் பிரயோகிக்கப்பட்டதும் $2\pi(r+\xi)$ ஆகின்றது. எனவே பரிதிவிகாரம் ϵ_2 என்பது

$$\epsilon_2 = \xi r^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(ii)}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

நெட்டாங்கு விகாரம் ϵ_3 ஆகுக ; அது கண்டிப்பாய் ϵ_1, ϵ_2 இரண்டிற்கும் செங்குத்தாய் இருத்தல்வேண்டும். இவற்றிற்கு ஒத்த தகைப்புக்கள் p_1, p_2, p_3 ஆகுக. அப்பொழுது

$$p_1 = (\beta + \tfrac{4}{3}n)\epsilon_1 + (\beta - \tfrac{2}{3}n)(\epsilon_2 + \epsilon_3), \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(iii)}$$

பக்கங்கள் 350–352 ஐப் பார்க்க.

தொடர்ந்து செல்லும்பொருட்டு, $\xi = Ar + Br^{-1}$ என நாம் கொள்ளல் வேண்டும்; இங்கு A யும் B யும் சிறு மாறிலிகள் ஆகும். இதனை லமே 1867 இல் நிறுவினர். எனவே

$$\epsilon_1 = A - Br^{-2} \text{ உம், } \epsilon_2 = A + Br^{-2} \text{ உம் ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad p_1 = (\beta + \tfrac{4}{3}n)(A - Br^{-2}) + (\beta - \tfrac{2}{3}n)(A + Br^{-2} + \epsilon_3)$$

$$= 2\,\beta A + \frac{2n}{3}(A - 3Br^{-2}) + (\beta - \tfrac{2}{3}n)\epsilon_3 \qquad . \qquad . \qquad \text{(iv)}$$

இனி, $r = a$ ஆகுமிடத்து $p_1 = -P$ உம், $r = b$ ஆகுமிடத்து $p_1 = -P_0$ உம் ஆகும்; திரவியமானது இழுவைநிலையொன்றில் இருக்கும்பொழுது தகைப்பு நேர் எனக் கருதபபடுகிறபடியால் சயக்குறிகள் தோற்றுகின்றன.

$$\therefore \quad -P = 2\beta A + \frac{2n}{3}\left(A - 3\frac{B}{a^2}\right) + (\beta - \tfrac{2}{3}n)\epsilon_3 \text{ உம் } \ldots\ldots\ldots \text{(v)}$$

$$-P_0 = 2\beta A + \frac{2n}{3}\left(A - 3\frac{B}{b^2}\right) + (\beta - \tfrac{2}{3}n)\epsilon_3 \text{ உமாகும் } \ldots\ldots \text{(vi)}$$

உருளையை ஈர்க்க முயலுகின்ற முழுவிசை $\pi[a^2P - bP_0]$ ஆகும், படம் 9·02(*b*) யிற் காணக; எனவே நெட்டாங்குத் தகைப்பு p_3 எனின்,

$$p_3 = \frac{a^2P - b^2P_0}{b^2 - a^2}.$$

ஆனல் $\quad p_3 = (\beta + \tfrac{4}{3}n)\epsilon_3 + (\beta - \tfrac{2}{3}n)(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, [பக்கம் 352 ஐப் பார்க்க.]

$$= (\beta + \tfrac{4}{3}n)\epsilon_3 + (\beta - \tfrac{2}{3}n)2A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(vii)}$$

சமன்பாடுகள் (v), (vi), (vii) எனபவற்றிலிருந்து

$$B = \frac{1}{2n}\cdot\frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}(P - P_0),$$

$$A = \epsilon_3 = \frac{1}{3\beta}\,\frac{Pa^2 - P_0b^2}{b^2 - a^2}.$$

குழாயானது விகாரமுற்றிருக்கும் பொழுது அதன் உட்கனவளவு

$$\pi[(r + \xi)_{r=a}]^2\, l(1 + \epsilon^3) = \pi\left(a + Aa + \frac{B}{a}\right)^2 l(1 + \epsilon_3)$$

ஆகும்; இங்கு l ஆனது குழாயின் தொடக்க நீளம் ஆகும். தொடக்கத்தில் உட்கனவளவு V என்பதாய் இருந்து, விகாரப்படுமிடத்து அது $(V + \Delta V)$ ஆனல், A, B, ϵ_3 எனபவற்றின் முதலாம் வலுவுக்கு மேலானவற்றைப் புறக்கணித்து,

$$\Delta V = \pi a^2 l\left[\frac{Pa^2 - P_0b^2}{(b^2 - a^2)\beta} + \frac{b^2}{b^2 - a^2}\cdot\frac{P - P_0}{n}\right].$$

எனப் பெறுவோம்.

அதுபோலவே வெளிக்கனவளவு மாற்றம்

$$\Delta V_0 = \pi b^2 l \left[\frac{Pa^2 - P_0 b^2}{(b^2 - a^2)\beta} + \frac{a^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{P - P_0}{n}\right].$$

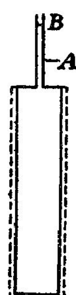
திரவமொன்றின் நெருக்கத்தகவைத் துணிதலுக்கான பரிசோதனை முறைகள்.—தரப்பட்ட திரவமொன்றின் நெருக்கத்தகவைப் பரிசோதனையால் துணியுமிடத்து மேலே பெற்றுள்ள பொதுச் சூத்திரங்கள் இரு தனிப்பட்ட எடுத்துக்காட்டுக்களிற் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(*a*) முதலாவதில், உருளைக்கு உள்ளேயும் வெளியேயும் அதே அமுக்கம் இருக்குமாறு அமுக்கம் உயர்த்தப்படுகிறது, அதாவது $P = P_0$. அப்பொழுது

$$\Delta V = -\pi a^2 l \cdot \frac{P}{\beta_1} = -\pi a^2 l P \kappa_1 ;$$

இங்கு கீழ்க்குறி (1) ஆனது அதனுல் கீழ்க் குறியிடப்பட்டுள்ள கணியம் உருளைக்குரியது என்பனத உணர்த்துகிறது. உருளையின் உட்கனவளவு அதன் சுவர்களின் தடிப்பைச் சாராத அளவிற்கு மாறுகின்றது என மேற்படி சமன்பாடு காட்டுகிறது. எனவே கொள்பாத்திரத்தின் சுவர்கள் போதியவளவு மெல்லியதாய் இருந்தால், அதே நேரத்தில் உள்ளேயும் வெளியேயும் ஒரே அமுக்கவுயர்வுக்கு ஆளாகின்ற உருளையொன்றின் உட்கனவளவில் உணரத்தக்க அளவில் மாற்றம் இராது என்னும், இத்துறையில் முன்னர் ஈடுபடடோரின் கருத்து தவறுகும்.







படம் 9·03. திரவமொன்றின் தோற்ற நெருக்கப்படுதன்மை.

இனி, மேற்படி உருளையானது கனவளவு மட்டு β வும் நெருக்கத்தகவு κ யும் உடைய திரவமொன்றைக் கொண்டிருக்கிறது எனக்கொள்க.

அப்பொழுது, அமுக்கவுயர்வு P யிற்கு இத்திரவத்துக் கனவளவு $\pi a^2 l$ ஆளாகும்பொழுது உண்மையான குறைவு $\pi a^2 l\kappa P$ ஆகும். உருளையுடன் மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றைத் தொடுத்துத் திரவமும் கொள்பாத் திரமும், உள்ளேயும் வெளியேயும் அதே அமுக்கவுயர்வு P யிற்கு ஆளாகுமிடத்து, எவ்வாறு இவ்வவதானிக்கப்பட்ட மாற்றமும் உருளையின் உட்கனவளவு மாற்றம், திரவத்தின் உண்மையான கனவளவு மாற்றம் என்பவையும் தொடர்பு கொண்டிருக்கின்றன என்பதைக் கருதுதல் வேண்டும்.

படம் 9·03 (a) ஆனது மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று தொடுக்கப்பட்டதும் நெருக்கமுடியாத திரவமொன்றால் நிரப்பப்பட்டதுமான உருளையொன்றை எடுத்துக் காட்டுக ; உள்ளேயும் வெளியேயும் அமுக்கம் பூச்சியம் ஆகும். மயிர்த்துளைக் குழாயில் திரவப்பரப்பின் நிலை A ஆகுக. அமுக்கமானது எங்கும் P வரை உயர்த்தப்பட்டால் திரவமானது புள்ளி B வரை ஏறும், படம் 9·03(b) யைப் பார்க்க. அப்பொழுது

$$\text{கனவளவு } BA = \pi a^2 l P \kappa_1.$$

உருளையானது நெருக்கத்தகவு κ உடைய திரவமொன்றைக் கொண்டிருக்கின்றது என்றும், அமுக்கம் எங்கும் பூச்சியமாய் இருக்கிறபோது அத்திரவம் A என்னும் குறிவரை உருளையை நிரப்புகிறது எனறும் கொள்க. ஆய்கருவிக்கு உள்ளேயும் வெளியேயும் அமுக்கம் P ஆகும் போது மயிர்த்துளைக் குழாயில் திரவப்பரப்பு C யில் இருக்க, படம் 9·03 (c) யைப பார்க்க. அப்பொழுது

$$\text{கனவளவு } BC = \pi a^2 l P \kappa.$$

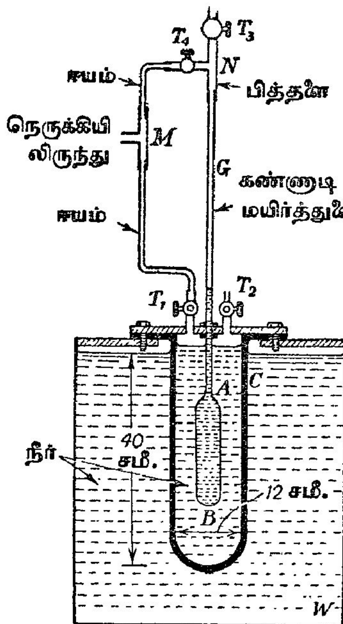
இனி கனவளவு AC என்பது அவதானிக்கப்பட்ட கனவளவு மாற்றம் ஆகும். எனவே

$$\text{கனவளவு } AC = \text{கனவளவு } BC - \text{கனவளவு } AB = \pi a^2 l P(\kappa - \kappa_1).$$

எனவே இவ்வண்ணம் நடாத்தியுள்ள பரிசோதனையொன்றால் $(\kappa - \kappa_1)$ என்னும் கணியமே உண்மையில் துணியப்படுகிறது ; எனவே திரவத் தின் நெருக்கத்தகவைத் துணியுமுன் திரவவமுக்கமானியினது திரவியத் தின் நெருக்கத்தகவைத் துணிந்தாகவேண்டும்.

(b) இரண்டாவது எடுத்துக்காட்டில், திரவவமுக்கமானியின் உள்ளே மட்டுந்தான் அமுக்கம் உயர்த்தப்படுகிறது. அப்பொழுது திரவத்தின் தோற்றக் கனவளவு மாற்றமானது திரவத்தின் உண்மையான கனவளவு மாற்றம், பாத்திரத்தின் உட்கனவளவு மாற்றம் என்பவற்றின் கூட்டுத் தொகை ஆகும். இம்முறையையே ஜமின் (Jamin) என்பவர் பயன் படுத்தினர் ; ஆனல் அதைப் பற்றி இங்கு எடுத்துரைக்கப்பட மாட்டாது.

திரவங்களின் நெருக்கத்தகவு பற்றி றேஞேவின் பரிசோதனைகள்.— வெவ்வேறான திரவங்களின் நெருக்கத்தகவுகளின் ஆய்வையிட்டு றேஞே† என்பவர் பயனபடுத்திய ஆய்கருவியானது படம் 9·04 இல் விளக்கப்பட முறைப்படி காட்டப்பட்டிருக்கிறது. அரைக்கோள முனைகளுடைய உருளைக் குமிழ் வடிவமான கண்ணுடிப் பாத்திரம் AB யிலே சோதனைக்கான திரவம் இருககிறது. அளவுகோடிட்ட கண்ணுடி மயிர்த்துளைக் குழாய் AG அக்குமிழுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது ; மயிர்ததுளைக் குழாயின் பிரிப்பொனறின கனவளவு ஆய்கூடதது வெப்பநிலையில் 0·010271 கி. இரசத்தின் கனவளவுக்குச் சமன. AB யின் நீளம் கிட்டத்தட்ட 23 சமீ. உம் அதன விட்டம் 2·4 சமீ. உம் ஆகும் ; அது நீளம் 40 சமீ. உம் விட்டம் 12 சமீ. உம் சுவாத்தடிப்பு 2 மிமீ. உம் உடைய செப்புப் பாத்திரம C யில இருககிற நீரில் அமிழ்த்தபபட்டிருககிறது. இப் பாத்திரம் தட்டையான சடையை உடையது ; அச்சடையுடன் மூடியொன்று பறருசு பிடிககப்பட்டிருக்கிறது. நீர் கொண்டிருக்கின்ற பெரிய வெளிப பாததிரம் W வின மூடியால் முழுத்தொகுதியும தாஙகப்படுகிறது. பரிசோதனையொன்றின் போது தொகுதியின வெபபநிலை மாறலைக் குறைக்கும்பொருட்டே W பெரிதாக்கப்பட்டுளளது. திரவவமுக்க மானியின மயிர்த்துளைக் குழாயானது மெழுகாற செப்புபபாத்திரத்தின் மூடியில நிலையாககப்பட்டுள்ளது ; அதன் மேல் முனையானது குழாயடைப்புக்கள் T_3, T_4 எனபவற்றுடன கூடிய பித்தளையாலான முவ்வளிக் குழாய் N இன் புயம் ஒன்றுள் புகுத்தபபட்டிருக்கிறது. M உம் அது போன்றதொன்று. T_1 உம் T_2 உம் செப்புப்பாத்திரத்தின் மூடியுடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ள குழாயடைபபுக்கள் ஆகும். படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு இவை ஈயக் குழாய்களால் ஆய்கருவியின் எஞ்சியிருக்கினற பாகத்துடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன ; M ஆனது வளியமுக்கி



படம் 9·04. திரவமொன்றின் நெருககத்தகவை அளத்தலுக்கு றேஞேவின் ஆய்கருவி.

† *Mem. de l'Acad. Fran.*, 21, 429, 1847.

யொன்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. பின்வருகின்ற செய்கைகள் நடாத்தப்படுகின்றன ; அவவொவ்வொனறினிடத்தும் திரவவமுக்கமானி யின் அளவுகோடிட்ட தண்டிலே திரவத்தின் பரப்பு நிலே நோக்கப்படுகிறது.

(*a*) குழாயடைப்புக்கள் T_1, T_4 என்பவை மூடப்பட்டு T_2, T_3 என்பவை திறந்து வைக்கப்படுகின்றன. அப்பொழுது திரவவமுக்கமானியின உள்ளே யும் வெளியேயும் அமுக்கம் வளிமண்டலத்துககுரியதாய் இருந்தது ; அது p எனக.

(*b*) அடுத்து T_2 மூடப்பட்டு T_1 திறக்கப்படுகிறது ; அப்பொழுது வெளி யமுககம் $(P+p)$ இறகு அதிகரிகக ; ஆனுல் உள்ளமுக்கம் இனனும் p ஆகும். அளவுகோடிட்ட மயிர்த்துளைக் குழாய் AG யிலே திரவம் எறுகிறது ; இவ்வேற்றத்திலிருநது கிடைக்கப்பெறுகின்ற கனவளவு மாற்ற மானது வெளியமுக்க மாறலால திரவவமுக்கமானியின் உட்கனவளவில் ஆகும் மாற்றத்திறகுச் சமமாகும்.

(*c*) T_2 தொடர்ந்து மூடப்பட்டும் T_1 திறந்தும் இருக்க, T_3 மூடப்பட்டு T_4 திறக்கப்படுகிறது. அப்பொழுது திரவவமுக்கமானிக்கு உள்ளேயும் வெளி யேயும் அமுக்கம் $(P+p)$ ஆகும்.

(*d*) T_1 மூடப்பட்டு T_2 திறக்கப்படுகிறது. எனவே அமுக்கமானது திரவ வமுக்கமானிக்கு வெளியே p யும், உள்ளே $(P+p)$ யும் ஆகும். மயிர்த்துளைக் குழாயிலே திரவம் இறங்குகிறது.

(*e*) T_4 மூடப்பட்டு T_3 திறக்கப்படுகிறது ; எனவே ஆய்கருவி உள்ளேயும் அதற்கு வெளியேயும் அமுக்கமானது வளிமண்டலத்திற்குரியதாகும். எனவே உணரத்தக்க அளவில் ஆய்கருவியின் வெப்பநிலே மாறுது இருந்தால் தண்டில் திரவப் பரப்பு அதேநிலேயில் இருத்தல் வேண்டும்.

இனி, எளிமையையிட்டுத் திரவவமுக்கமானியானது உருளே வடிவ முடையது எனக் கொள்ளப்படுகிறது ; எனவே பக்கங்கள் 475–7 இல் தரப் பட்டுள்ள ஆய்வு முடிவுகளே நாம் பயன்படுத்தலாம். [அதனினும் சிக்க லான சூத்திரமொன்றை றேஞே பயன்படுத்திஞர் ; திரவவமுக்க மானியின் முனேகள் அரைக்கோளங்கள் ஆகும் என்னுஞ் செய்தி அதில் இடம் பெற்றுள்ளது.] உருளேயின் உட்கனவளவில், செய்கைகள் (*b*), (*c*), (*d*) என்பவற்றிற்கு ஒத்த தோற்ற அதிகரிப்புகள் முறையே ω_1, ω_2, ω_3 ஆகுக. பொதுச் சமன்பாட்டில் $p=0$ என எழுதி இக்கனவளவு மாற்றங் களேப் பெறலாம். அப்பொழுது

$$\omega_1=\pi a^2 l\left[-\frac{Pb^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{\beta_1}-\frac{Pb^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{n_1}\right]$$
$$=-\frac{\pi a^2 b^2 lP}{b^2-a^2}\left[\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{n_1}\right].$$

திரவவமுக்கமானியினது திரவியத்தின் கனவளவு மட்டு β_1 ஐக் கணிக்கும்பொருட்டு இப்பேற்றை றேஞே பயன்படுத்திஞர் ; திரவியம்

இங்கு கண்ணுடி ஆகும். கண்ணுடியின் விறைப்பு மட்டு n_1 ஐக் கணிக்கும் பொருட்டுப் பொய்சோனின் விகிதம் σ ஆனது பெறுமானம் 0·25 உடைய அகில மாறிலி என எடுத்துக் கொண்டு, அப்பெறுமானத்தை

$$(1+\sigma)=\frac{E_1}{2n_1},\ (1-2\sigma)=\frac{E_1}{3\beta_1}$$

என்னுஞ் சூத்திரங்களில் அவர் பயன்படுத்திஞர்; இங்கு E_1 ஆனது கண்ணுடியின் யங்கின் மட்டு ஆகும். எனவே $n_1=0\cdot6\beta_1$. σ ஆனது அகில மாறிலியொன்று அன்று என நாம் இப்பொழுது அறிகிறேம்; சோடாக்கண்ணுடியிடத்து அது 0·20 இலிருந்து 0·27 வரை மாறுகிறது; எனவே இவ்விடயத்தில் றேஞேவின் ஆராய்ச்சி குறைபாடுடையது.

மேலும்

$$\omega_2=\pi a^2 l P\left[\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta_1}\right];$$

எனவே β வையும் அதிலிருந்து κ வையும் பெறலாம்.

அன்றியும்

$$\begin{aligned}\omega_3&=\pi b^2 l P\left[\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{\beta_1}+\frac{a^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{n_1}\right]+\pi a^2 l P\cdot\frac{1}{\beta}\\&=\frac{\pi a^2 l}{b^2-a^2}\cdot P\left[\frac{b^2-a^2}{\beta}+\frac{a^2}{\beta_1}+\frac{b^2}{n_1}\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \omega_1+\omega_3&=\pi a^2 l P.\left[\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta_1}\right]\\&=\omega_2.\end{aligned}$$

தான் ஏற்கெனவே பயன்படுத்திய அறிமுறை ஆய்வின் வலிமையைச் சோதிக்கும் பொருட்டு இத்தொடர்பை றேஞே கையாண்டார். அத் தகைய சோதனையொன்று வேண்டியதாயிற்று; ஏனெனில் கொள்கையின் விரிவாக்கலில் திரவத்தின் கொள்பாத்திரம் சமவியல்புடைய பொருளால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது எனவும் அதனது சுவர்கள் சீரான தடிப்பு உடையவை எனவும் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. நடைமுறையில் மேற்படி நிபந் தனைகளை நிறைவேற்றுவது மிகக் கடினம் ஆகும்.

றேஞே கோளவடிவக் கொள்பாத்திரங்களையும் பயன்படுத்திஞர்; அப்பொழுது வேண்டிய சூத்திரங்கள் எளிதாயின. கொள்பாத்திரங்களுள் ஒன்று செம்பாலானது, மற்றது பித்தளையாலானது; ஒவ்வோர் எடுத்துக் காட்டிலும் பாத்திரத்தின் இரண்டு பாதிகளும் வெள்ளிப்பற்றுசு பிடிக்கப் பட்டிருந்தன. கோளவடிவக் கொள்பாத்திரங்களைத் தேர்ந்தெடுத்தது பெரி தும் பொருத்தமாயிற்று; ஏனெனில் அவற்றினிடத்து லாமேயின் கொள் கையில் நியமிக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகளை நிறைவேற்றுவது பெருமளவில் எளிதாயிற்று. றேஞே நடாத்தியுள்ள எல்லாப் பரிசோதனைகளிலும் அதே மயிர்த்துளைக் குழாய் பயன்படுத்தப்பட்டது.

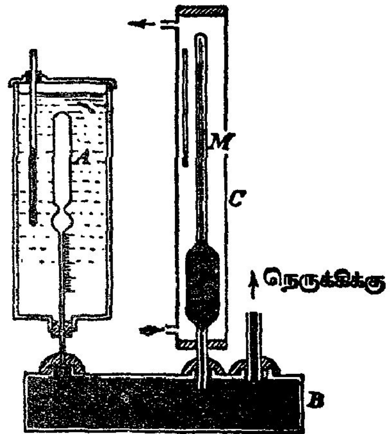
நியமத் திரவமொன்றின் நெருக்கத்தகவு திருத்தமாகத் துணியப்பட்டிருக்க ; அந்நியமத் திரவம் இரசம் என்க. அப்பொழுது நியமத் திரவத்தைத் தாக்காத வேறொரு திரவத்தின் நெருக்கத்தகவைத் துணிதலுக்குப் பின்வருகின்ற முறையானது மிகச் சிறந்ததொன்றாகும் ; திரவவமுக்கமானியானது நியமத்திரவத்தால் நிரப்பப்பட்டுக் கருவியின் உள்ளேயும் வெளியேயும் அதே அமுக்க உயர்வைப் பிரயோகித்து, இரசத்தின் தோற்றக் கனவளவு மாறல் துணியப்படுகிறது. அடுத்து, கருவியானது சோதனைக்கான திரவத்தால் நிரபபப்பட்டு, அக்கருவியின் உள்ளேயும் வெளியேயும் முன்னர் பிரயோகித்துள்ள அதே அமுக்கவுயர்வை இப்பொழுதும் பிரயோகித்துத் தோற்றக் கனவளவு மாறல் நோக்கப்படுகிறது. அபபொழுது,

$$\Omega_1 = \text{முதலாவது எடுத்துக்காட்டில் நோக்கியுள்ள கனவளவு மாறல்}$$
$$= \pi a^2 l\mathrm{P}\left[\kappa_{\mathrm{Hg}} - \kappa_{\text{கண்ணாடி}}\right] \text{ உம்}$$
$$\Omega_2 = \pi a^2 l\mathrm{P}\left[\kappa_{\text{திர.}} - \kappa_{\text{கண்ணாடி}}\right] \text{ உம்}$$

ஆகும்.

$$\therefore\ \Omega_2 - \Omega_1 = \pi a^2 l\mathrm{P}\left[\kappa_{\text{திர.}} - \kappa_{\mathrm{Hg}}\right].$$

அமகாவும் திரவங்களின் நெருக்கத்தகவும்.— பல திரவங்களின நெருக்கததகவு பற்றித் தாம் நடாத்திய விரிவான ஆராய்ச்சியொன்றின் அறிக்கையை 1877 இல் அமகா† (Amagat) வெளியிட்டார். அவரது ஆய்கருவியானது எசட்டு‡ என்பவர் பயன்படுத்திய ஆய்கருவியின் செம்மையாக்கம் ஆகும். சோதனைக்கான திரவம் கண்ணாடியாலான திரவவமுக்கமானி A யில் இருக்கிறது. அது உருளை வடிவக் குமிழ் ஒன்றுலும் அளவுகோடிட்ட மயிர்த்துளைக் குழாய் ஒன்றுலும் ஆனது ; மயிர்த்துளைக் குழாயானது ஒரு துவாரத்தினூடாகச் சென்று இரும்புத்தாழி B யுள் புகுகின்றது, படம் 9·05. திரவவமுக்கமானியானது ஒரு நீர்த்தொட்டியாற் சூழப்பட்டிருக்கிறது ; தொட்டிக்குக் கீழேயுள்ள சிறு சுவாலையொன்றால் தொட்டியின் வெப்பநிலை



படம் 9·05. திரவங்களின் நெருக்கத்தகவுகளின் ஒப்பீட்டிற்குரிய அமகாவின் ஆய்கருவி (1877).

†*Ann. Chim. Phys.*, 11, 520, 1877.

‡ இடைநிலைப் பௌதிகவியல் (பாகம் 1), ப. 220.

ஆளப்படுகிறது. தொட்டி முன்னும் பின்னும் கண்ணடித் தட்டுக்கள் உடைய உலோகததாலான ஒரு நீர்தாங்கியாகும். அவ்வமுக்கமானது வளியமுக்கமானி M ஆல் தரபபட்டுள்ளது ; அதைச் சூழ்ந்திருக்கின்ற கண்ணடிக் கஞ்சுகக்குழாய் C யூடே ஓடுகின்ற தணணீரால் அது மாறு வெப்பநிலையில் நிலையாக்கப்பட்டுள்ளது. படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு இவ் வமுக்கமானியானது இரும்புத்தாழியுடன் பொருத்தப்பட்டுள்ளது ; அதற்கு அதன் கீழ் முனையில குமிழ் ஒன்று பொருததப்பட்டிருக்கிறது ; அமுககம் ஒனபது வளிமண்டல அமுக்கமாகவிருக்கும்போது இரசநிரலானது மயிர்த் துளைக குழாயுள் புகும் தறுவாயில் இருக்கும்பொருட்டு அமுக்கமானியின் மேற்பாகத்தின கனவளவுக்கு ஏற்ப குமிழின கனவளவு தேர்ந்தெடுக்கப் பட்டுள்ளது ; அதாவது உயர்வான அமுக்கங்களிலுங்கூட அமுக்கமானி உணர்ச்சியுள்ளதாய் இருந்தது. கையற்றே (Cailletet) அமுக்கியிலிருந்து அமுக்கம் பெறப்படடது. ஆய்கருவியின் வெவ்வேறுன பகுதிகளிடையே தேவையான மூட்டுக்கள் மெழுகால் மூடப்பட்டு அம்மெழுகு குளிர்நிலையில் நிலை நிறுவப்பட்டுள்ளது.

இவ்வாய்கருவியைப் பயன்படுத்தி 0° இலிருந்து 50° ச. என்னும் வெப்ப நிலை வீச்சில எவ்வாறு திரவமொன்றின் நெருக்கத்தகவு மாறுகிறது என்பதை அமகாவால் ஆராயமுடிந்தது. இம்மாதிரியான ஆராய்ச்சி யினிடத்து எவ்வாறு இத்தகைய ஆய்கருவியானது சிறப்பாகப் பயன்படு கின்றது என்பதைக் கீழ்வருகின்ற குறிப்புக்கள் உணர்த்தும்.

றேஞோவின் ஆராய்ச்சியைப் பற்றி நன்கு அறிந்திருந்த அமகா திரவவமுக்கமானியினது திரவியத்தின் நெருக்கத்தகவைத் திருத்தமாக அளப்பது கடினம் என உணர்ந்திருந்தார். எனவே நெருக்கத்தகவு தெரிந்த திரவம் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி, கண்ணடியினிடத்து நெருக்கத்தகவைக் கண்டு, அடுத்து வேருெரு திரவத்தின் நெருக்கத்தகவையும் வெப்ப நிலையுடன் அதன் மாறலையும் துணியுமிடத்துக் கண்ணடியின் நெருக் கத்தகவைப் பயன்படுத்தினர். [வெப்பநிலையுடன் கண்ணடியினது நெருக்கத்தகவின் மாறலையிட்டுத் திருத்தம் ஏதும் செய்யப்பட்டதாகத் தோற்றவில்லை.] எல்லாப் பரிசோதனைகளிலும் தொடர்ந்த கொதித்தலால் திரவத்திலிருந்து கரைந்த வாயுக்கள் அப்புறப்படுத்தப்பட்டன ; வாயு வமுக்கமானி துப்புரவாக்கி உலர்த்தப்பட்டது.

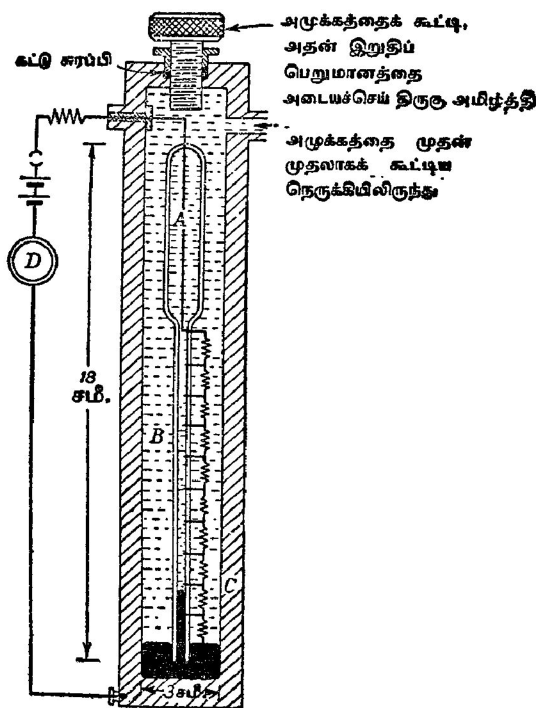
பிற்பட்ட ஆண்டுகளில் அமகா (1882–9) இன்னும் ஆராய்ந்தார் ; ஜமினின் முறையையே அவர் பயன்படுத்தினர் ; ஆனல் ஜமின் போல் அன்று அவர்தம் பேறுகளை அவர் சரியாக விளக்கினர். அமகா தட்டை முனைகளுடைய உலோகத்தாலான உருளைகளையே பயன்

படுத்தினார்; கண்ணாடியாலான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று மெழுகால் தொடுக்கப்பட்டிருந்தது. ஒவ்வொரு பரிசோதனையிலும் அதே திரவியத்தாலான, அதே நீளமும் உள்விட்டமும் உடைய உருளைகள் பயன்படுத்தப் பட்டன. வெளிவிட்டங்கள் வேறுபட்டன. இவ்வாறு லாமேயின் கொள்கை தருகின்ற முதன்மையான முடிவுகள் பலவற்றை அவரால் உறுதிப்படுத்த முடிந்தது; அதே (சமவியல்புடைய) திரவியத்தாலான அதே உள்விட்டமுடைய உருளைகளிடத்து குறிப்பிட்ட வெளியமுக்கவுயர் வொன்றாலாகும் உட்கனவளவு மாற்றம் அவ்வுருளைகளின் சுவர்த்தடிப் பைச் சாராது எனனும் முடிவு அவற்றுள் ஒன்றாகும். மேலும் இப்பரி சோதனைகள் 4° ச. இலேயே நடாத்தப்பட்டன என்னுஞ் செய்தி எமது கவனத்தைக் கவர்கின்றது; ஏனெனில் அமுக்கமானிக்கு வெளியே இருந்த திரவம் நீர் ஆகும்; அதனது அடர்த்தி 4° ச. இலே உயர் வாகும்.

திரவங்களின அமுக்கப்படுதன்மையைத் தொடர்ந்து ஆராய்ந்து அப்பரி சோதனைகளைப் பற்றி அறிக்கையொன்றை 1893 இல் அமகா† வெளியிட் டார்; இப்பரிசோதனைகளில் அமுக்கத்தை 3000 வளிமண்டல அமுக்கம் வரை உயர்த்தினார். அந்நாட்களில் உயர் அமுக்கத்தைத் தாங்கவும் அதே நேரம் இரசப்பரப்பைப் பார்வையிடவும் முற்றிலும் கண்ணாடியாலான ஆய்கருவியொன்று ஆக்கற்பொறிமுறைக்கு அப்பாற்பட்டதாய் இருந்தது. எனவே அமகா உருளைக்குமிழ் A யாலும் அதற்குக் கீழேயுள்ள மயிர்த் துளைக் குழாய் B யாலும் ஆன கண்ணாடித் திரவவமுக்கமானி யொன்றைப் பயன்படுத்தினார், படம் 9·06. அவை உருக்காலான கொள்பாத்திரமொன்றுள் தாபிக்கப்பட்டிருந்தன. B யின் முனையானது சிறிது இரசத்தின் பரப்பிற்குக் கீழே அமிழ்த்தப்பட்டிருந்தது; அமுக்கம் கூடியபோது இரசமும் மயிர்த்துளைக் குழாயில் ஏறியது. பரிசோதனையின் எந்தக் கட்டத்திலும் இரசத்தின் நிலையைக் காணும் பொருட்டு மயிர்த்துளைக் குழாயின் உட்சுவரில், இரசத்தில் கரையும் தன்மையுடைய பொருளொன் றைப் பூசினார்; எனவே ஆய்கருவியைக் கூறுகூறாகப் பிரித்தபின்னர் தேவைப்பட்ட செய்தியைப் பெற முடிந்தது. இது சிரமமிக்க செயன்முறை யொன்றாகும். இரசத்தின நிலையைப் பரிசோதனை முடிவடைந்தபின் துணியாது, பரிசோதனையின்போதே துணியும்பொருட்டு மின் தொடுகை களைப் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம் எனத் தைத் (Tait) என்பவர் ஆலோசனை கூறினார். எனவே படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு பிளாற்றி னக் கம்பித் தொடரொன்று திரவவமுக்கமானிக்கு அளிக்கப்பட்டது; ஒவ்வொரு சோடிக் கம்பியும் மயிர்த்துளைக் குழாய் B மீது சுற்றப்பட்டதும்

† *Ann. Chim. Phys.*, 29, 68, 1893.

நன்கு காவலிட்டதுமான கம்பிச் சுருளாலான மின்தடையொன்ருல் தொடுக்கப்பட்டது. காவலிட்ட பிளாற்றினக் கம்பியொன்று உருக்கா லான கஞ்சுகம், குமிழ் A என்பவையூடே சென்று மிகவுயரத்தில் நிலை யாக்கப்பட்ட பிளாற்றினக் கம்பியுடன் தொடுகையிலிருந்தது. B யில் இரசம் ஏறித் தொடுகை ஒவ்வொன்றையும் ஒன்றன்பின் ஒன்ருகக் கடந்து சென்றபோது முதன்மைச் சுற்றில் ஓட்டமும் வரையறுத்த அளவால் மாறிற்று.



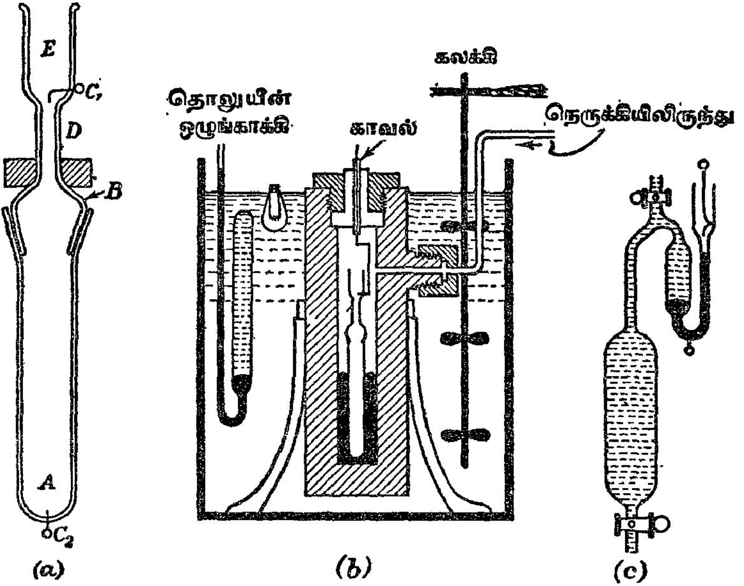
படம் 9·06. உயர் அமுக்கநிலைகளில் திரவங்களின் நெருக்கத்தகவு ஆராய்ச்சிக்கு அமகாவின் இரண்டாவது ஆய்கருவி.

ரிச்சேட்ஸ் (Richards), ஸ்ருள் (Stull) ஆகியோரின் ஆராய்ச்சி†.— இவ்வாராய்ச்சியாளர்கள் விரிவாக்கிய முறையானது திண்மங்கள், பல திரவங்கள் என்பவற்றின் நெருக்கப்படுதன்மையைத் திருத்தத்துடன்

†*Jour. Amer. Chem. Soc.*, 26, 399, 1904. *Carnegie Inst., Washington, Publication*, No. 7, 1903; No. 76, 1907.

தருகிறது ; இம்முறையில், திண்மங்கள் ஒழுங்கற்ற துண்டுகளாகவும் இருக்கலாம். அடுத்தடுத்துள்ள அமுக்கங்களில் நெருக்கலின்போது நிகழ்கின்ற கனவளவு நட்டத்தை ஈடுசெய்யும்பொருட்டு ஆய்கருவியில் இருக்கின்ற இரசத்துடன் சேர்க்கவேண்டிய இரசத்தின் நிறைகளைக் கண்டு சோதனைககான பொருளில் நெருக்கற்றகவை நியமத் திரவமொன்றின் நெருக்கற்றகவுடன் ஒப்பிடுதலே இம்முறையின் அடிப்படைத் தத்துவமாகும். வேண்டிய நெருக்கல் ஆக்கப்பட்டுள்ளது என்பதை உணர்த்தும் பொருட்டு மின் தொடுகைகள் பயன்படுத்தப்பட்டன. பரிசோதனைத் தொடரொன்றை நடாத்திப் பல வழுக்கள் விலக்கப்பட்டன.

திண்மங்களுக்குப் படம் 9·07 (a) யிற் காட்டியுள்ள ஆய்கருவி பயன்படுத்தப்பட்டது. அது உருளைக்குமிழ் A யைக் கொண்டது ; அத்துடன்



படம் 9·07. ரிச்சேட்ஸும் ஸ்ருள்ளும் : திரவங்கள் திண்மங்களின் நெருக்கற்றகவைத் துணிதலுக்கான ஆய்கருவி.

விட்டம் 1·5 மிமீ. உடைய மயிர்த்துளைக்குழாய் D யும் சிறு புனல் E யும் அளிக்கப்பட்ட நன்கு தேய்த்த அடைப்பு B யை அதனுள் பொருத்தமுடியும். மயிர்த்துளைக்குழாயின் சிறப்பான விட்டம் 1·5 மிமீ. எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது ; விட்டம் அதிலும் பெரிதாயிருந்தால் ஆய்கருவி உணர்ச்சியற்றதாகிவிடும் ; அது சிறிதாயிருந்தால் இரசத்துளிகள் பிளாற்றினக்

கம்பிக்கும் குழாய்ச் சுவருக்கும் இடையே ஒட்டப் பார்க்கும். C_1 உம் C_2 உம் பிளாற்றினத் தொடுகைகள் ஆகும். அதனது நெருக்கற்றகவு தெரிந்துள்ளது எனக் கருதப்படும் இரசத்தாலேயே முழு ஆய்கருவியும் முதன் முதலாக நிரப்பப்படுகிறது ; C_1 உடன் தொடுகை சரி கணக்காக நிகழும் வரை அமுக்கமானது P_1 வரை உயர்த்தப்படுகிறது. இதைச் செய்யும்பொருட்டு திரவ அமுக்கமானியானது கையற்றே (Cailletet) அமுக்கியொன்றின் பீப்பாவுள் வைக்கப்படுகிறது ; கவனமாக அளவுகோடுதிருத்தியுள்ள நீரியல் முகப்புமானியொன்றில் அமுக்கம் நோக்கப்படுகிறது. சொற்ப இரசத்தை நிறுத்து அதை ஆய்கருவியில் இருக்கின்ற இரசத்துடன் சேர்த்து பிளாற்றினக் கூர் C_1 இலிருந்து இரசம் சரி கணக்காகப் பிரியும் வரை அமுக்கம் உயர்த்தப்படுகிறது. நடைமுறையில் இக்கட்டத்திற்குச் சற்றுக் கூடுதலாக அமுக்கத்தை உயர்த்தி, பின்பு தொடுகை C_1 சரி கணக்காக நிறுவப்படும்வரை, அமுக்கம் குறைக்கப்படுகிறது. இவ் வண்ணம் அவ்விரு உலோகங்களின் ஒட்டறபண்பால் ஆகின்ற தொல்லை தவிர்க்கப்படுகிறது ; மேலும் C_1 இல் மின் பொறிகளின் விளைவுகளைக் குறைக்குமுகமாக இரசப் பரப்பானது தூய நீரால் மூடப்பட்டிருக்கிறது. ஆய்கருவியில் பெறக்கூடிய மிகுவுயர்ந்த அமுக்கத்தை அடையும்வரை இச்செயன்முறையானது தொடர்ந்து செய்யப்படுகிறது.

(*a*) ஆய்கருவியானது இரசத்தால் நிரப்பப்பட்டிருக்கிறபோதும்,

(*b*) திண்மத்தை உள்ளே புகுத்தி அதற்கு மேலே உள்ள இடம் இரசத்தால் நிரப்பப்பட்டிருக்கின்றபோதும், நோக்கல்கள் எடுக்கப்படுகின்றன.

திண்மத்தை வசதியாகப் புகுத்துவதற்காக ஆய்கருவியானது ஒன்றோடொன்று பொருந்துகின்ற இரு கூறுகளால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விரு கூறுகளுக்கிடையேயுள்ள தேய்ந்த மூட்டிலேயே பாரதூரமான தொல்லை நேர்கிறது. இரசத்தின் பொசிவே இத்தொல்லையின் காரணமாகும் ; இதன் விளைவாக அமுக்கம் கூடும்பொழுது அக்கூடுதலுக்கு ஒத்தவாறு நெருக்கற்றகவும் கூடிற்று ; கிடைக்கப்பெற்ற பேறுகள் முரண்பட்டன. கீழ்வரும் செயன்முறையால் இத்தொல்லையை நீக்கமுடிந்தது ; பரப்புகளை ஒரு சிறுதுளி திரவத்தால் (நீரால்) நனைத்து, அவ்விடத்தில் இருக்கின்ற வளியை அப்புறப்படுத்தி இரசம் உட்புகுதலைத் தடைசெய்து இப்பிரச்சினை தீர்க்கப்பட்டது. மாறு அளவுடைய மசகுத்திரவத்தின் நெருக்கற்றகவால் ஆகின்ற மாறல்கள் நுண்ணளவாய் இருக்கிறபடியால் அவற்றால் உணரத்தக்க வகையில் விளைவுகள் தோன்றமாட்டா. றப்பர்த் தாங்கியொன்றுமீது செல்லுகின்ற தடிப்பான கயிற்றுத் துண்டொன்றால் அடைப்பு அதனது தானத்தில் உறுதியாக நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது.

நெருக்கத்தால் ஆகின்ற வெப்பத்தைச் செலுத்தி அப்புறப்படுத்தவும், கீழ்ப் பிளாற்றினக் கம்பியுடன் தொடுகை வைத்திருக்கவும், திரவ வமுக்கமானியின் கீழ்ப்புற மூன்றில் இரண்டைச் சுற்றி இரசம் வார்க்கப

பட்டிருக்கிறது ; திரவவமுக்கமானியானது வெப்பநிலை மாறல்கள் 0·01°ச, ஐ மீருத வெப்பநிலைநிறுத்தியொன்றுள் வைக்கப்பட்ட இரும்புப் பாத்திரமொனறுள் இருக்கிறது. முழு ஒழுங்கு முறையும் படம் 9·07(*b*) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது.

இரசததைத் தாக்காத திரவங்களுக்குத் திரவ அமுக்கமானியின் வடிவம் படம் 9·07 (*c*) யில் காட்டியுள்ளவாறு அமைந்திருந்தது. சோதனைத் திரவத்தை இலேசாகப் புகுத்துவதறகாகவே அஙகு காட்டியுள்ள இரு குழாயடைப்புக்களும் சேர்க்கபபட்டுள்ளன ; ஆனல் உண்மையில் அவை அவசியமில்லை ; ஏனெனில் மாறிமாறி வெப்பமாக்கியும் குளிரச்செய்தும் திரவ அமுக்கமானியை நிரப்பிக் கொள்ளலாம்.

கடைசியாகக் கூறியுள்ள திரவ அமுக்கமானி வகையைச் சற்று மாற்றி அமைத்து ரிச்சேட்ஸும் ஸ்ருள்ளும் காரவுலோகங்கள் காரமண் உலோகங்கள் என்பவற்றின் நெருக்கறறகவையும் ஆராய்ந்தனர். நோக்கல்கள் பின்வருமாறு எடுக்கப்பட்டன.

(*a*) திரவவமுக்கமானி இரசத்தால் நிரம்பியிருக்கும்போது,

(*b*) வளிவில் இரசம், வேறெங்கும் எண்ணெய் (மண்ணெயிலிருந்து பகுதிப்படக் காய்ச்சிவடித்த பரபின்) இருக்கும்போது,

(*c*) வளிவில இரசம், பாத்திரத்தில் திண்மம், கிடைக்கக்கூடிய மற்ற எல்லா இடங்களிலும் எண்ணெய் இருககும்போது.

திண்மங்களுக்கு மேற்படி திரவவமுக்கமானியின் கொள்கை.—திண்மம் இல்லாதபோது ஆய்கருவியைத் தொடுகை C_1 வரை நிரப்புவதற்கு வேணடிய இரசத்தின் திணிவு m_1 ஆகுக ; அப்பொழுது அமுக்கம் P_1 ஆகுக ; வெப்பநிலை தெரிந்தும மாறுதும் இருக்கினறது. இனி அவ்வெப்பநிலையிலும் அமுக்கததிலும இரசத்தின் அடர்த்தி ρ எனின் அவ்விரசத்தின் கனவளவு $\frac{m_1}{\rho}$ ஆகும். பரிசோதனையின்போதுள்ள வெப்பநிலையிலும் அமுக்கம் P_1 இலும் அடர்த்தி D கொண்ட திரவியத்தாலான திண்மமொன்றின் திணிவு μ ஆகுக ; ஆய்கருவியை அதே சங்கற்பக் குறிவரை நிரப்புவதற்காகும் இரசத்தின் திணிவு M_1 ஆகுக. அபபொழுது

$$\frac{m_1}{\rho} = \frac{M_1}{\rho} + \frac{\mu}{D}.$$

அமுக்கமானது P_2 இற்கு உயர்த்தப்பட்டபோது, திண்மம் இல்லாதவிடத்து திரவ அமுக்கமானியை C_1 வரை நிரப்புவதறகாகும் இரசததின திணிவு m_2 ஆகுக ; திண்மம் இருக்கும்போது அதறகு ஒத்த திணிவு M_2 ஆகுக. அப்பொழுது இரசம், திண்மம் ஆகியவறறின் அடர்த்திகள் முறையே

$\delta\rho$, δD அளவால் கூடியிருக்கின்றபடியால்

$$\frac{M_2}{\rho+\delta\rho}=\frac{M_2}{(\rho+\delta\rho)}+\frac{\mu}{(D+\delta D)}.$$

திண்மத்தினது திரவியத்தின் நெருக்கற்றகவு κ ஆகுக. அப்பொழுது வரைவிலக்கணப்படி

$$\kappa=\frac{D}{\mu}\left[\frac{\frac{\mu}{D}-\frac{\mu}{D+\delta D}}{P_2-P_1}\right]$$

$$=\frac{D}{\mu(P_2-P_1)}\left[\frac{m_1-M_1}{\rho}-\frac{m_2-M_2}{\rho+\delta\rho}\right]$$

$$=\frac{D}{\mu(P_2-P_1)}\left[\frac{m_1-M_1}{\rho}-\frac{m_2-M_2}{\rho\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho}\right)}\right].$$

κ_m என்பது இரசத்தின் (தெரிந்த) நெருக்கற்றகவு ஆகுக. அப்பொழுது

$$\kappa_m=-\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial v}{\partial p}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial p}.$$

$$\therefore\ \kappa_m(P_2-P_1)=\frac{\delta\rho}{\rho}.$$

இது a சிறிதெனில் $(1+a)^{-1}=1-a$ ஆதலின்,

$$\kappa=\frac{D}{\mu(P_2-P_1)}\left[\frac{m_1-M_1}{\rho}-\frac{(m_2-M_2)}{\rho\{1+\kappa_m(P_2-P_1)\}}\right]$$

$$=\frac{D}{\mu(P_2-P_1)}\left[\frac{m_1-M_1}{\rho}-\frac{m_2-M_2}{\rho}\{1-\kappa_m(P_2-P_1)\}\right],$$

$$m_1-M_1=\frac{\mu\rho}{D}$$ உம்

$$m_2-M_2=\mu\cdot\frac{\rho+\delta\rho}{D+\delta D}=\mu\cdot\frac{\rho}{D}\left[1+\frac{\delta\rho}{\rho}-\frac{\delta D}{D}\right]$$ உம் ஆதலின்,

$$\kappa=\frac{D}{\mu(P_2-P_1)}\left[\frac{(M_2-M_1)-(m_2-m_1)}{\rho}\right]+\frac{D}{\mu}\cdot\kappa_m\cdot\frac{m_2-M_2}{\rho}$$

$$=\frac{D}{\mu(P_2-P_1)}\left[\frac{(M_2-M_1)-(m_2-m_1)}{\rho}\right]$$

$$+\frac{D}{\mu}\cdot\kappa_m\left(\frac{m_1-M_1}{\rho}\right)\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho}-\frac{\delta D}{D}\right).$$

இனி 1 உடன் ஒப்பிட்டுப்பார்க்கில் $\frac{\delta\rho}{\rho}$ உம் $\frac{\delta D}{D}$ யும் புறக்கணிக்கத்தக்கன.

எனவே

$$\kappa = \frac{(M_2 - M_1) - (m_2 - m_1)}{\rho} \cdot \frac{D}{\mu(P_2 - P_1)} + \kappa_m$$

எனப் பெறுகிறோம்; இங்கு $(M_2 - M_1)$ உம் $(m_2 - m_1)$ உம் இந்த இரண்டு எடுத்துக்காட்டுக்களிலும், அதாவது திண்மவமுக்கமானியின் திண்மம் இருந்தபோதிலும் அது அங்கு இல்லாதபோதிலும், சேர்த்துள்ள இரசத்தின் திணிவுகள் ஆகும்; இத்திணிவுகள் நேராகத் துணியப்பட்டுள்ளன. அவை முறையே μ_2 உம் μ_1 உம் எண்க; அப்பொழுது,

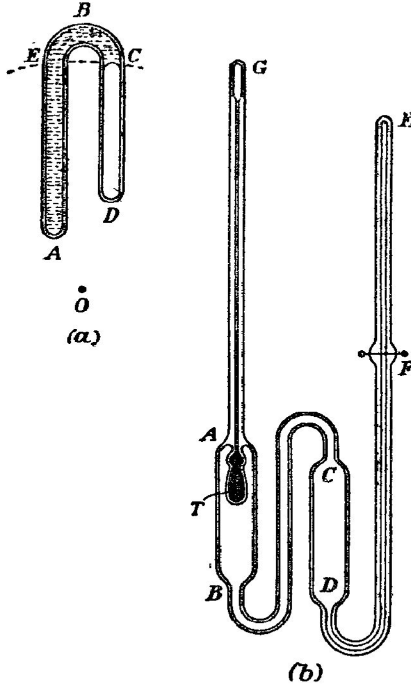
$$\kappa = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\rho} \cdot \frac{D}{\mu(P_2 - P_1)} + \kappa_m.$$

திரவங்களைப் பொறிமுறைப்படி ஈர்த்தல்.—கவனமாய்ச் செய்தால் பாரமானியுயரததின் பனமடங்கு நீளமுடைய இரச நிரலொன்றை அதனது ஒட்டற்பண்பால் அது கொள்ளப்பட்டிருக்கின்ற குழாயின் முனையிலிருந்து தொஙகவிடலாம்; இதற்கு மூன்று முறைகள் உள.

(*a*) முதலாவது தலைகீழ் பாரமானி முறையாகும். பாரமானியுயரமட்டத்திற்கு மேலேயுள்ள இரசமானது இழுவை நிலையில் இருக்கின்றது. இவ்விழுவையானது உயரத்துடன் கூடுகிறது; அதன் விளைவு எல்லாத் திசைகளிலும் குழாய்ச்சுவர் முகமாகச் செலுத்தப்படுகிறது. குழாயின் மேற்பாகமானது அதனது குறுக்குவெட்டு நீள்வளைய வடிவம் உடையதாய் மெல்லிய கண்ணாடியால் ஆக்கப்பட்டிருந்தால் உள்நோக்கியுள்ள இழுப்பினால் ஆகும் இளகுதலை எளிதில் நோக்கலாம்.

(*b*) இரண்டாவது **ஒஸ்பேண் றெனல்ஸ்** (Osborne Reynolds) என்பவர் திட்டமிட்ட மையநீக்க முறையாகும்; இம்முறையில் இரு முனைகளும் மூடப்பட்ட கண்ணாடி U குழாய் ABCD யின் பாகம் ABC யில் வளியிலலாத் திரவமுள்ளது; பாகம் CD யில் திரவத்தின் நிரம்பிய ஆவி மட்டும் இருககின்றது. இக்குழாயானது தக்க பலகையொனறுடன் நிறுவப்பட்டு முனை A யிலிருந்து செல்லுகின்ற அச்சொன்று பற்றிச் சுழற்றப்படுகிறது. CE எனபது மையம் O வும், ஆரை OC யும் உடைய வட்டத்தின் வில் ஆகுக. சுழலும்போது A யிற்கும் E யிற்கும் இடையேயுள்ள திரவமானது இழுவை நிலையில் இருக்கின்றது; [திரவத்தின் நிரம்பலாவியமுக்கம் புறக்கணிக்கப்பட்டால்] அவ்விழுவை E யிலுள்ள பூச்சியப் பெறுமானத்திலிருந்து கூடி A யில் உயர்பெறுமானத்தை அடைகிறது. இவ்வண்ணம் **றெனல்ஸ்** நீர்மீது 5 வளிமண்டலம் அதாவது 72·5 இறு. நிறை. அங். $^{-2}$ பெறுமானமுடைய இழுவைத் தகைப்பொன்றைப் பிரயோகித்தார். **வேதிங்ரன்** (Worthington) என்பார் அதுபோன்ற ஆய்கருவியொன்றைப் பயன்படுத்தி அற்ககோலிற்கு 7·9 வளிமண்டலத்தையும் செறிந்த சல்பூரிக்கமிலத்திற்கு 11·8 வளிமண்டலத்தையும் அடைந்தார்.

(*c*) மூன்றுவது குளிரல் முறையாகும். அது **பேதலோ†** (**Berthelot**) என்பவரால் திட்டமிடப்பட்டது. இப்பரிசோதனைகளில் நீடித்த கொதித்த லால் வளி அப்புறப்படுத்தப்பட்ட (நீர், அற்ககோல், ஈதர் போன்ற) திரவமானது தடித்த சுவருடைய கண்ணாடிக் குழாயொன்றைக் கிட்டத்தட்ட நிரப்புகிறது. எஞ்சியுள்ள சிறு இடத்தை அதன நிரம்பிய ஆவி நிரப்பு



படம் 9·08. (*a*) திரவமொன்றின் இழுவை வலிமை (ஒஸ்பேண் றெனல்ஸ்).
(*b*) வேதிங்ரனின் தொனிமானி.

கிறது. சற்று வெப்பமாக்கப்பட்டதும், நீர் விரிவுற்று முழுக்குழாயை யும் நிரப்புகிறது ; குளிர்ச்சி அடையும்போதும் அது விரிவுற்ற நிலை யிலேயே முழுக்குழாயையும் இன்னும் நிரப்புகிறது ; ஈற்றில் உரத்த உலோகச் சத்தத்துடன் பற்று அறுக்கப்படுகிறது ; அந்நேரம் ஆவிக் குமிழி மீண்டும் தோற்றுகிறது. குமிழியின் நீளத்திலிருந்து விரி (கனவளவு விகாரம்) கணிக்கப்படுகிறது.

†*Ann. de Chim.*, **30, 232, 1850.**

முறைகள் (*a*) யும் (*b*) யும் இழுவைத் தகைப்பின் அளவையும், ஆனால் முறை (*c*) ஆனது விகாரத்தையும் தருகின்றன. அதேநேரம் தகைப்பையும் விகாரத்தையும் அளப்பதற்குரிய ஆய்கருவியொன்றை **வேதிங்ரன்**† ஏற்படுத்திப் பயன்படுத்தினார். திரவமானது பலமான கண்ணாடிப் பாத்திரமொன்றில் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது ; சாதாரண வெப்பநிலைகளில் அப்பாத்திரமானது திரவத்தால் கிட்டத்தட்ட நிரப்பப்பட்டிருக்கிறது. திரவத்தின நிரம்பிய ஆவி மீதியை நிரப்புகிறது. பாத்திரத்தை உருக்கி அடைக்குமுன் நீடித்த கொதித்தலால் கூடியமட்டில் கரைந்த வளியைச் சிறப்பாக தொடக்கத்தில் திரவத்திற்கும் பாத்திரத்தின் சுவர்களுக்குமிடையில் பதிந்திருக்கின்ற வளிப்படலத்தை அப்புறப்படுத்துதல் வேண்டும். திரவம் விரிவடைந்து குழாயை முற்றிலும் நிரப்புமாறு பாத்திரத்தின் ஒருபாகம், அதன் உள்ளுறை என்பவற்றின் வெப்பநிலை உயர்த்தப்படுகின்றது. விரிவடைந்த திரவத்தின் அமுக்கமானது பாத்திரத்தை வெடிக்கச்செய்யும் அளவிற்கு உயருமுன் அப்பாத்திரம் பனிக்கட்டிக் குளிர்நிலை நீரில் குளிருமாறு வைக்கப்படுகிறது. அப்பொழுது சுருங்கமுடியாமல் ஈர்க்கப்பட்டுச் சுவர்களை இழுத்தவண்ணம் கிடக்குமாறு திரவம் பாத்திரத்தின் சுவர்களுடன் உறுதியாக ஒட்டியிருக்கிறது ; ஈற்றில் அது குளிர்ந்து கொண்டே போகும்பொழுது, இழுவைத் தகைப்பானது போதிய அளவு வளர்ச்சி அடைந்ததும் திரவத்திற்கும் சுவருக்குமிடையேயுள்ள பற்று அறுபடுகிறது ; அதேநேரம் பலத்த உலோகச் சத்தம் ஒன்று உண்டாகின்றது ; அப்பொழுது திரவத்தின் கனவளவானது அதன் சராசரி வெப்பநிலைக்கும் அதன் நிரம்பிய ஆவியின் அமுக்கத்துக்கும் பொருத்தமாய் இருக்கும். திரவத்தின் பிணைவு அன்று, ஆனால் கண்ணாடிக்கும் திரவத்திற்கும் இடையேயுள்ள ஒட்டற்பண்பே முதன்முதலாக வெல்லப்படுகிறது என **வேதிங்ரன்** கருதியுள்ளார்.

திரவத்திலுள்ள இழுவைத் தகைப்பை அளத்தற்பொருட்டு இரசத்தால் நிரப்பப்பட்டதும் அளவுகோடிட்ட தண்டு AG யுடன கூடியதுமான நீள் வளையவுருக் குமிழ் T ஆனது குமிழ் AB யுள் உருக்கி இணைக்கப்படுகிறது, படம் 9·08 (*b*). நீரியலமுத்தியொன்றால் 60 வளிமண்டலம் வரை குமிழ்மீது அமுக்கங்கள் பிரயோகிக்கப்படுகின்றன ; ஒவ்வோர் அமுக்கத்துக்கும் தண்டில் அதற்கு ஒத்த இரசவேற்றம் குறிக்கப்படுகிறது. இவ்வேற்றமானது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற அமுக்கத்திற்கு நேர்விகிதசமம் எனத் தெரியவருகிறது. குமிழின் கோளவடிவக் குறைவே இவ்வேற்றத்திற்குக் காரணம்.

ஆனாலும் அதைச் சூழ்ந்திருக்கின்ற திரவமானது இழுவை நிலையில் இருக்கும்பொழுது அது குமிழின் சுவர்களை இழுத்து குமிழின் கோளவடிவத்தைக் கூடச்செய்து அதன் கொள்ளளவைப் பெரிதாக்குகிறது.

†*Phil. Trans.*, **A, 183, 355, 1892.**

தரப்பட்ட இழுவையொன்றால் ஆகின்ற கனவளவு விரிவும் அதே அளவு அமுக்கத்தால் ஆகின்ற கனவளவுச் சுருங்கலும் சமன் எனக் கொள்ளப் படுகிறது.

விகாரத்தை அளக்கும் பொருட்டுக் குழாயின் சுவர்மீதுள்ள அதனது பற்றை விட்டு அதனது ஈர்க்கப்படாத கனவளவைப் பின்விரைந்து அடையவும் திரவம் தூண்டப்படுகிறது; ஆவியால் நிரப்பப்பட்ட கனவளவு அளக்கப்படுகிறது. இதன்பொருட்டு CD யுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கிற நேர்க்குழாயில் F என்னும் இடத்தில் நுண்பிளாற்றினக் கம்பியொன்று குறுக்காக நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது. அது திரவம் இழுவை நிலையில் இருக்கும்பொழுது திடீரெனச் செஞ்சூடாக்கப்படுகிறது. கம்பியை இழுத்துக் கொண்டிருந்த உடனடியான திரவமானது உடனே விடுபடுகிறது; அப் பொழுது அதன் மேல்முனை கம்பியிலும் அதற்குக் கீழே விரிந்தும் இருக்கின்ற ஆவிக்குமிழியால் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்ற குழாய் நீளம் அளக்கப்படுகிறது. குழாய்க்குப் பின்னாலே தளவாடியொன்றை வைத்து பரவயன்மை வழுக்கள் தவிர்க்கப்படுகின்றன. இவ்வண்ணம் கிடைக்கின்ற விரியானது தோற்ற விரியொன்று மட்டுமே. அதிலிருந்து கொள்பாத் திரத்தில் உள்ளிழுப்பால் ஆகின்ற கனவளவுக் குறைவைக் கழித்தல் வேண்டும். பாத்திரத்தின் இளகுதலை நேராகத் துணியும் பொருட்டு, கொதித்தலாற் சோதிக்கப்படுகின்ற திரவத்தை அப்புறப்படுத்தி அதற்குப் பதிலாக இரசம் புகுத்தப்படுகிறது. அற்ககோலின் நெருக்கற்றகவைக் காட்டிலும் இரசத்தின் நெருக்கற்றகவு ஐம்பது மடங்கு சிறிது. இரசமீது அமுக்கத்தைப் பிரயோகித்து, CD யில் அதன் பின்வாங்குகை குறிக் கப்படுகிறது. இரசம் அமுக்க முடியாத பொருளொன்றாயின் இப்பின் வாங்குகை கண்ணாடியின் இளகுதலாலேயே உண்டாகின்றது; 10 வளி மண்டலம் அல்லது 1033 கி.-நிறை. சமீ.$^{-2}$ அமுக்கத்தின் பிரயோகத் தால் கிடைக்கப்பெற்ற பின்வாங்குகை 7·2 பிரிப்புகள் ஆகும். இரசத்தின் முடிவுள்ள நெருக்கற்றகவுக்கான திருத்தமொன்றைப் பிரயோகித்தபோது மேற்படி எண் 6·6 ஆயிற்று.

தொனிமானி எனப்படும் இவ்வாய்கருவியை நிரப்புதல், கடைசி வளிச் சுவடுகளை அப்புறப்படுத்துதல் ஆகியவை பற்றிய அதிகப்படியான விவரங் களை ஆராய்ச்சி வெளியீட்டில் காண்க.

இவ்வாறு **வேதிங்ரன்** அற்ககோல்மீது 17 வளிமண்டல இழுவைத் தகைப்பொன்றைப் பிரயோகித்தார்; அதற்கு ஒத்த தோற்ற விகாரம் 25×10^{-4} ஆகும். அற்ககோலின் தனி விகாரம் கிட்டத்தட்ட 22×10^{-4} ஆகும்.

தரப்பட்ட வெப்பநிலையொன்றில், மாறாத் திணிவுடைய வாயுவொன்றின் அமுக்கத்திற்கும் அதன் கனவளவிற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு.— ஒருமாறா வெப்பநிலையில் ஒரு மாறாத் திணிவுடைய வளியின் அமுக்கத் திற்கும் அதன் கனவளவிற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பானது, **கனம்.**

ரேபேட் போயில்† என்பவரால், 1662 இல் வெளியிடப்பட்ட அவர்தம் நூலொனறில், முதன்முதல் தரப்பட்டது. இந்நூலின் பிரதியொன்று அவரால் வேத்தியற சபைக்கு வழங்கப்பட்டது ; ஆனல், புகழ்பெற்ற இப்பரிசோதனை பற்றிய செய்தி ஏதேனும் அவ்வகையால் வெளியிடப்படவேயில்லை. அவ்வாராய்ச்சி நூலின் ப. 58 இல் அப்பரிசோதனையைப் பற்றிக் கீழ்வருமாறு விவரிக்கப்பட்டிருக்கிறது :

"நீண்ட கண்ணுடிக் குழாய் ஒன்றை எடுத்து விளககொன்றைப் பயன் படுத்திக் கைததிறமையால் அதன் அடியில் வளைத்துள்ளோம் ; வளைத் தெடுத்த பாகமானது குழாயின எஞ்சிய பாகத்திற்குச் சமாந்தரமாக அமைந் திருக்குமாறு வளைக்கப்பட்டுளளது ; முழு ஆய்கருவியையும் நீரிறக்கி என் போம். இநநீரிறக்கியின் குறுகிய காலின் துவாரமானது காற்றுப் புகாமல் அடைக்கப்பட்டுள்ளது ; அதன் நீளம் அங்குலங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. [அவற்றுள் ஒவ்வொான்றும் எட்டு உட்பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது]. இப்பிரிப்பின்பொருட்டு குழாய் வழியே மேற்படி பிரிப்புகள் கொண்ட நேரான கடதாசி நிரலொன்று ஒட்டப்பட்டிருந்தது ; அடுத்து ஒரு காலில் கோடிட்ட கடதாசித்துண்டின் கீழ்முனைவரை, மறறைக்காலில் அதே உயரம் அல்லது கிடைக்கோடுவரை இருக்குமாறு போதிய இரசம் வளைவை அதாவது நீரிறக்கியின் வளைந்த பாகத்தை நிரப்பும் வண்ணம் விடப்பட்டது. இரசத் தின ஓரவழியாக ஒரு காலிலிருந்து மற்றைக் காலுள் தடையின்றி வளி சென்று குறுகிய காலில் இறுதியில் இருக்கின்ற வளியும் அதைச் சுற்றியி ருக்கிற வளியும் அதே தளர்ச்சியை அடையுமாறு (கவனமாக) குழாய் அடிக்கடி சாய்க்கப்பட்டது. பின்னர் நீரிறக்கியின் நீண்டகாலுள் இரசம் வார்க்கப்பட்டது ; அதன் நிறையானது குறுகிய காலிலுள்ள இரசத்தை அழுத்தி அங்கு அடைக்கப்பட்டிருந்த வளியைப் பலப்படுத்திற்று. குறுகிய காலிலிருந்த வளியானது அது தொடக்கத்தில் கொண்டிருந்த இடஞ் சுருஙகி அரைவாசியாக்கப்படும்வரை இரசம் தொடர்ந்து வார்க்கப்பட்டது [நிரப்பியிருக்கவில்லை, கொண்டிருந்தது என்றே நான் கூறுகிறேன்] ; அங்குலங்களிலும் அதன் பின்னங்களிலும் கோடிடப்பட்டு ஒட்டியிருந்த நீண்ட கால் நோக்கப்பட்டது; அங்கிருந்த இரசமானது உயரத்தில் மற்றதைக் காட்டிலும் 29 அங. கூடுதலாக இருப்பதை மகிழ்வுடனும் திருப்தியுடனும் குறித்துக் கொண்டோம்.

அமுக்கத்தை உயர்த்தி வளியின் கனவளவிற்கு நோக்கல் தொட ரொன்றையும் போயில் பெற்ருர்.

† வளியின விறபண்பு பற்றிய புதுப் பௌதிக பொறியியற் பரிசோதனைகள், 1662. இவ்வாராயசசி நூலின் இரண்டாவது பகுதியில் "புதுப் பௌதிக பொறியியற் பரிசோதனைகள" என்னும் அவர்தம் நூலில் வளியின் விற்பண்பு அதன் நிறை என்பவை பறறிய கோட்பாட்டின சார்பாகத் திரு. R. போயில் என்பவரால பிரேரிககப்பட்ட ஆதாரவு" அடங்கியிருக் கின்றது. இஙகேதான மேற்படி கூற்றுனது தோற்றுகிறது.

விரிவடைந்த வளியின் பலன் குறைந்த விசை என்னும் வேறொரு பரிசோதனைத் தொடரில், மெல்லிய கண்ணாடிக் குழாயொன்று இரசததில் அமிழ்த்தப்பட்டது ; அதன மேலான முனை முத்திரையிடுமெழுகால் அடைக்கப்பட்டிருந்தது. குழாயில் அதன ஓர் அங்குல நீளத்தை நிரப்புவதற்கான வளி இருந்தது. அதன் தொடக்கக் கனவளவின் 32 மடஙகுக்கு அவவளி விரிவடையும் வரை குழாயானது படிப்படியாக உயர்த்தபபட்டது ; அதன்போது இரசத்தின் நிலை 19 முறை நோக்கப்பட்டது.

போயிலின் அட்டவணைகள் இரண்டும் ப. 497 இல் தரப்பட்டுள்ளன.

குழாயில் வளியாற் கொள்ளப்பட்ட நீளத்தைப படிப்படியாகக் குறைத்து 25 முறை அமுக்கம் நோக்கப்பட்டது. "அமுககஙகளும் கனவளவுகளும் நேர் மாறு விகிதசமமாக அமைந்திருத்தல வேண்டும எனனும் கருதுகோள தரும் அமுக்கங்களுடன்" மேற்படி அமுக்கங்கள் பெரிதும் பொருந்தியிருந்தன.

1679 இல இ. மரியற் (Mariotte) என்பார், மாறு வெப்பநிலையில், குறிப்பிட்ட திணிவுடைய வாயுவொனறின் அமுக்கத்திறகும் அதன் கனவளவிற்கும் இடையேயுள்ள தொடாபைப் பறறி அவர்தம் பரிசோதனைச் செய்திகளை வெளியிட்டார் ; உண்மை கூறுமிடத்து அவரது ஆராய்ச்சியானது போயிலின் ஆராய்சசியைச் சாராது.

இலட்சிய வாயுவொன்றின் சமவெப்ப நெருக்கத்தகவு.—மாறு வெப்ப நிலையில் வாயுவொன்றின் அமுக்கம் p யும் தற்கனவளவு அதாவது அலகுத் திணிவொனறின் கனவளவு v யும் ஆயின, போயிலின் விதியை

$$pv = \text{மாறிலி}$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் எடுததுரைக்கலாம்.

எந்த மெய்யான வாயுவும இந்த விதியை, விரிந்த அமுக்கவீச்சொன்று முறறிலும் கீழ்பபடிகிறதன்று, எனவே அறிமுறைத் தேவையையிட்டு இலட்சிய வாயுவொன்று உளது எனக் கருதுகிறோம ; மாறு வெபபநிலையில் வெவ்வேறான அமுக்கங்கள் பிரயோகிக்கபபடுமிடதது அந்த இலட்சிய வாயுவானது மேலுள்ள சமன்பாட்டின்படி தொழிற்படுகிறது.

இலட்சிய வாயுவொன்றின் சமவெப்ப நெருக்கத்தகவு பின்வருமாறு எளிதிற் கணிக்கப்படுகிறது. மாறு வெப்பச் சூழலில் pv ஒரு மாறிலியாத லின், அதனை வகையிட,

$$v\ \delta p + p\ \delta v = 0.$$

எனவே சமவெப்ப நெருக்கத்தகவு κ எனபது

$$\kappa = \left(-\frac{1}{v}\cdot\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{T} = \frac{1}{p}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; அதாவது இலட்சிய வாயுவொன்றின் சமவெப்ப நெருக்கத்தகவானது அவ்வாயு ஆளாகின்ற அமுக்கத்தின் நிகர்மாறறால் அளக்கப்படுகிறது.

ஒடுங்கும் வளிக்கான அட்டவணை

A	B	C	D	E
12	00	உடன $29\frac{1}{8}$ ஐக் கூட்டிக் கிடைக்கப்பெறுகிறது	$29\frac{2}{16}$	$29\frac{2}{16}$
$11\frac{1}{2}$	$01\frac{7}{16}$		$30\frac{9}{16}$	$30\frac{6}{16}$
11	$02\frac{13}{16}$		$31\frac{15}{16}$	$31\frac{12}{16}$
$10\frac{1}{2}$	$04\frac{6}{16}$		$33\frac{8}{16}$	$33\frac{1}{7}$
10	$06\frac{3}{16}$		$35\frac{5}{16}$	35 - -
$9\frac{1}{2}$	$07\frac{14}{16}$		37 - -	$36\frac{15}{19}$
9	$10\frac{2}{16}$		$39\frac{4}{16}$	$38\frac{7}{8}$
$8\frac{1}{2}$	$12\frac{8}{16}$		$41\frac{10}{16}$	$41\frac{2}{17}$
8	$15\frac{1}{16}$		$44\frac{3}{16}$	$43\frac{11}{16}$
$7\frac{1}{2}$	$17\frac{15}{16}$		$47\frac{1}{16}$	$46\frac{3}{5}$
7	$21\frac{3}{16}$		$50\frac{5}{16}$	50 - -
$6\frac{1}{2}$	$25\frac{3}{16}$		$54\frac{5}{16}$	$53\frac{11}{16}$
6	$29\frac{11}{16}$		$58\frac{13}{16}$	$58\frac{2}{8}$
$5\frac{3}{4}$	$32\frac{3}{16}$		$61\frac{5}{16}$	$60\frac{18}{23}$
$5\frac{1}{2}$	$34\frac{15}{16}$		$64\frac{1}{16}$	$63\frac{6}{11}$
$5\frac{1}{4}$	$37\frac{15}{16}$		$67\frac{1}{16}$	$66\frac{4}{7}$
5	$41\frac{9}{16}$		$70\frac{11}{16}$	70 - -
$4\frac{3}{4}$	45 - -		$74\frac{2}{16}$	$73\frac{11}{19}$
$4\frac{1}{2}$	$48\frac{12}{16}$		$77\frac{14}{16}$	$77\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{4}$	$53\frac{11}{16}$		$82\frac{12}{16}$	$82\frac{4}{17}$
4	$58\frac{2}{16}$		$87\frac{14}{16}$	$87\frac{3}{8}$
$3\frac{3}{4}$	$63\frac{15}{16}$		$93\frac{1}{16}$	$93\frac{1}{5}$
$3\frac{1}{2}$	$71\frac{3}{16}$		$100\frac{7}{16}$	$99\frac{6}{7}$
$3\frac{1}{4}$	$78\frac{11}{16}$		$107\frac{13}{16}$	$107\frac{7}{13}$
3	$88\frac{7}{16}$		$117\frac{9}{16}$	$117\frac{4}{8}$

ஐதாகும் வளிக்கான அட்டவணை

A	B	C	D	E
1	$00\frac{0}{0}$	$29\frac{3}{4}$ இலிருந்து கழித்துக் கிடைக்கப்பெறுகிறது.	$29\frac{3}{4}$	$29\frac{3}{4}$
$1\frac{1}{2}$	$10\frac{5}{8}$		$19\frac{1}{8}$	$19\frac{5}{8}$
2	$15\frac{3}{8}$		$14\frac{3}{8}$	$14\frac{7}{8}$
3	$20\frac{2}{8}$		$9\frac{4}{8}$	$9\frac{11}{12}$
4	$22\frac{5}{8}$		$7\frac{1}{8}$	$7\frac{7}{16}$
5	$24\frac{1}{8}$		$5\frac{5}{8}$	$5\frac{19}{20}$
6	$24\frac{7}{8}$		$4\frac{7}{8}$	$4\frac{23}{24}$
7	$25\frac{4}{8}$		$4\frac{2}{8}$	$4\frac{1}{4}$
8	$22\frac{0}{0}$		$3\frac{6}{8}$	$3\frac{23}{32}$
9	$26\frac{3}{8}$		$3\frac{3}{8}$	$3\frac{11}{16}$
10	$26\frac{6}{8}$		$3\frac{0}{0}$	$2\frac{39}{40}$
12	$27\frac{1}{8}$		$2\frac{5}{8}$	$2\frac{23}{48}$
14	$27\frac{4}{8}$		$2\frac{2}{8}$	$2\frac{1}{8}$
16	$27\frac{6}{8}$		$2\frac{0}{0}$	$1\frac{55}{64}$
18	$27\frac{7}{8}$		$1\frac{7}{8}$	$1\frac{47}{72}$
20	28 - -		$1\frac{6}{8}$	$1\frac{9}{80}$
24	$28\frac{2}{8}$		$1\frac{4}{8}$	$1\frac{23}{96}$
28	$28\frac{3}{8}$		$1\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{16}$
32	$38\frac{4}{8}$		$1\frac{2}{8}$	$0\frac{119}{128}$

A. வெவவேறுன விரிவுநிலைகளில, அதே திணிவுடைய வளியைக குறுகிய காலில கொளளுகினற சமப் பிரிவுகளின எண.

B. வளியை மேறபடி கனவளவுகளை அடையுமாறு நீளமான காலில அமுககுகினற இரச நிரலின உயரம்.

C. வளிமணடல அமுக்கத்தை எதிரீடு செயயும இரசநிரலின உயரம்.

D. கடைசியான நிரலகள் B, C எனப வறறின கூட்டுததொகை ; இது, அடைககப பட்ட வளியால தாஙகபபடும அமுககததைக் காட்டுகிறது.

E. அமுக்கஙகளும் கனவளவுகளும் நிகர் மாறறு விகிதசமமாய் இருததல வேணடும் என்னும் கருதுகோளினபடி எதிபார்கக வேணடிய அமுககம.

A. அதே திணிவுடைய வளியைக் குழாயின மேற்பாகத்தில கொள்ளுகினற சமப் பிரிவுகளின எண்.

B. அடைக்கபபட்ட வளியின் அமுக்கத்துடன கூடி வளிமணடல அமுககத்தை எதிரீடுசெயகின்ற இரச நிரலின் உயரம்.

C. வளிமணடல அமுக்கம்.

D. B யிறகும் C யிற்கும் இடையேயுள்ள விததியாசம் ; இது அடைககபபட்ட வளியால் தாங்கப்படும் அமுககத்தைக காட்டுகிறது.

E. கருதுகோளின்படி எதிர்பார்க்க வேண்டிய அமுககம்.

போயிலின் விதியினின்று விலகல்கள்.—போயிலின் பெயரைத் தாங்கி நிற்கும விதியானது பொதுமையுடையது எனப் பிறபட்ட அறிவியலார் கருதியதுபோல் போயில் கருதவேயில்லை என றேனோ* என்பாா தெரிவித் தாா. நான்கு வளிமண்டலத்திற்கு மேலான அமுக்கங்களில் தரப்பட்ட திணிவுடைய வளியின நெருககலானது அவர்தம் கருதுகோளிலிருந்து கணிக்கப்படும் நெருக்கலைக் காட்டிலும் சிறிதாய் இருபபதாகப போயில் கருதினுர் என அந்நூலாசிரியர் தொடர்ந்து கூறுகிறுா. பதினெட்டாம் நூறருண்டின இறுதியில் முச்சன்புறுக (Musschenbroek)† உம், ரெபிச னும் (Robison) வேறு பலரும் மெய்யான வாயுக்களிடததுப போயிலினது விதியின செம்மையான பொருத்தத்தை ஆராயந்தனர் ; ஆனுல் அவாகள் முடிவான கருத்துக்களுக்கு வரவில்லை. இலட்சியவாயுவுடன் ஒப்பிடில் இரண்டு வளிமணடலம போனறு சிறு அமுககஙகளிடததும் நனகு உலர்ந்த அமோனியா, ஐதரசன் சலபைட்டு, சயனசன எனனும் வாயுககள் சிறு விலகல்களைக் காட்டுகினறன என எசட்டு‡ (1826) உம் டெஸ்பிறேற்ஸ்§ (1827) உம காட்டினர். ஒவ்வோர் எடுத்துக்காடடிலும் அமுக்கம் கூடுஙகாலே போயிலின விதி செம்மையானது எனக் கருதி அதிலிருந்து எதிர்பார்ககக் கூடிய கனவளவுக் குறைவுவீதத்தைக் காடடிலும் பெரிதான வீதமே அவதானிக்கப்பட்டது ; அதாவது அமுக்கம் கூடும்பொழுது pv எனனும பெருக்கமானது மாருமல் இருப்பதறகுப் பதிலாகக் குறைகிறது. இப்பரிசோதனைகளில மேறபடி வாயுககள அதே விட்டம் உடையவையும் அதே இரசத்தொட்டியில இருக்கினறவையுமான வெவ்வேருன பாரமானிக் குழாய்களில அடைக்கப்படடிருந்தன. முழுத் தொகுதியும கண்ணுடிக் குழாயொனறுற சூழபபட்டிருந்தது ; எனவே அமுக்கத்தை உயர்த்த முடிநதது. தொடக்கத்தில் வெவ்வேருன வாயுக் களும் அவ்வவற்றின் குழாய்களில சமநீளஙகளைக கொண்டிருந்தன. அமுக்கம் உயர்ததபபட்டபோது குழாய்களில வாயுக்களாற கொளளபபட்ட நீளங்கள் மறுபடி ஒரு போதும் சமமாக இருக்கவில்லை ; எனவே குறைந்தது சிலவாயுக்கள் போயிலின் விதிபபடி தொழிற்படவில்லை.

1847 இல் அவருக்கே சிறப்பாக உரிய செய்முறைத் திறமையைப் பயன்படுத்தி, 1 வளிமண்டல அமுக்கததிலிருந்து 30 வளிமணடல அமுக்கம் வரை சில வாயுககளின் நடததை பற்றிய அவாதம் பரிசோதனை களை றேனோ‖ முடித்தார். அவரது ஆய்கருவியானது படம 9·09 இல் வரிப்பட முறைப்படி காட்டப்பட்டிருக்கிறது. 3 மீற்றர் நீளமும் 1·1 சமீ.

* *Mem. de l' Acad. Fran.*, 21, 330, 1847. 4 வளிமணடலத்துக்கு மேலான அமுக்கங களினிடதது வளியானது அவரது விதி தரும் ஒடுககத்தைக காட்டிலும குறைவாகவே ஒடுங்கு கிறது எனப போயில எறகெனவே குறிததுளளாா.

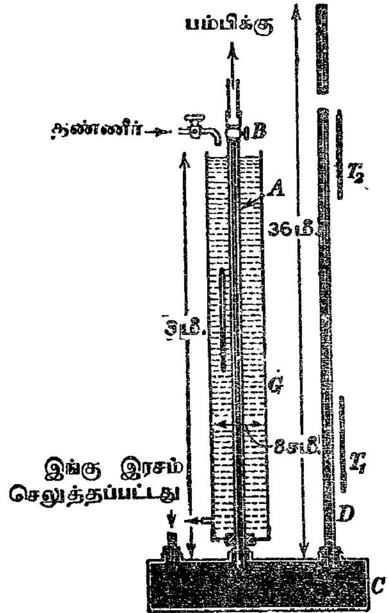
† *Cours de Physique*, மொழிபெயாபபு Signand de Lafond, Paris, 1759, தொ. 3., பக். 142.

‡ *Edin. Jour. of Science*, 4, 224, 1826.

§ *Ann. Chim. Phys.*, 605, 1827.

‖ *Mem. de l'Acad. Fran.*, 21, 329, 1847.

அகலமும் உடைய, அதனது நீளம் வழியே மிமீ. இல் அளவுகோடிட்ட கண்ணுடிக் குழாய் A யில் சோதனைக்கான வாயுவானது அடைக்கப்பட்டிருந்தது. குழாயின் மேலான முனையில் கவனமாகத் தேய்த்தெடுத்த உலோகக் குழாயடைப்பு B பொருத்தப்பட்டிருந்தது ; அதன மூலம் அக்குழாயை அமுக்கப் பம்பியொன்றுடனே வெற்றிடப் பம்பியொன்றுடனே தொடுதது வைக்க முடிந்தது. அதனது கீழ் முனையானது இரசங் கொண்ட இரும்புத்தொட்டி C யுட் பொருந்தியிருந்தது. D ஒரு திறந்த இரசவமுக்கமானியாகும் ; அதுவும் C யுட் பொருந்தியிருந்தது. அதைப் பயன்படுததி A யிலுள்ள வாயுவின் அமுக்கம நேரே அளக்கப்பட்டது. A யின் நீளம் 36 மீற்றர் ஆகும் ; அது வழியே 1·5 மீற்றர் இடையீடாக இரசங்கொண்ட கண்ணுடி வெப்பமானிகள் வைக்கப்படடிருந்தன. அவவெப்பமானிகள் காட்டியுள்ள வெப்பநிலைகளின சராசரியானது இரசநிரலின வெப்பநிலை என்று ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டது ; அடுதது அந்நிரலின் நீளம் 0° ச. இறகுத திருததப்பட்டது. இரசத்தின் நெருக்கத்தகவையிட்டு (மிகச் சிறிய) திருத்தமொனறு பிரயோகிககப்பட்டது. குழாய் A ஆனது 8 சமீ. அகலமுடைய கணணுடிக்குழாய் G யாற் சூழப்பட்டிருநதது ; அதனூடே கிட்டததட்ட 4° ச. வெப்பநிலையுடைய நீர் ஓடுமாறு செலுத்தப் பட்டது. அதன் வெப்பநிலையானது உணர்ச்சியுள்ள இரசங்கொண்ட கண்ணுடி வெப்பமானியொன்றுல் தரப்பட்டது.



படம் 9·0.9 போயிலினது விதியின் உண்மையை ஆராயும்பொருட்டு றேனேவின் ஆய்கருவி.

இப்பரிசோதனைகளால் தெரிந்த வெப்பநிலையிலும் அமுக்கத்திலும் இருக்கிற வாயுவொன்றின் கனவளவை அதே வெப்பநிலையில் அரைவாசியாக்குவதறகுப் பிரயோகிக்கவேண்டிய அமுக்கத்தைத் துணிதலே றேனேவின் நோக்கு ஆகும். 300 ஆவது மிமீ. பிரிப்பு வரை குழாய் A யின் கனவளவு ஒன்று என எடுக்கப்பட்டது. குழாயில் அதனது மேல் முனையிலிருந்து 300 ஆவது மிமீ. குறிவரையுள்ள கனவளவை இரு சரிசம

பாகங்களாகப் பிரிக்கும் குறியின் தானத்தைத் துணியும்பொருட்டு அக்குறிக்கு அண்ணளவான நிலையொன்றை எடுத்துக்கொண்டு குழாயானது இரசத்தால் நிரப்பப்பட்டது. குழாயில் பூச்சியக்குறியிலிருந்து " அரைவழி "க் குறிவரையும், அங்கிருந்து 300 ஆவது மிமீ. குறிவரையும் நிரப்பும் இரசத்தின் திணிவுகள் துணியப்பட்டன. " அரைவழி " க் குறியானது சரியாக எடுக்கப்பட்டிருந்தால் மேற்படி இரு திணிவுகளும் சமனாக இருத்தல்வேண்டும். இவ்வண்ணம் பலகால் முயன்று "அரைவழி"க் குறியின் சரியான தானம் செம்மையாகத் துணியப்பட்டது. மேற்படி குறி, 300 ஆவது மிமீ. குறி என்பவற்றின் அயலில் அடுத்தடுத்துள்ள பிரிப்புக்களுக்கிடையான கனவளவுகளும் துணியப்பட்டன.

அளவுகோடிட்ட குழாய் A யை வெறிதாக்கிய பின்னர் அதை வளியால் நிரப்பி, அச்செய்கையைத் திரும்பத்திரும்பச் செய்து அது உலர்த்தப்பட்டது. இச்செய்கையின்போது உலர்த்தும் நடவடிக்கைகளை எளிதாக்கு முகமாக G யிலுள்ள நீரானது 40° இற்கும் 50° ச. இற்கும் இடையேயுள்ள ஒரு வெப்பநிலையில் நிலைநிறுத்தப்பட்டது. அடுத்து குழாயானது உலர்ந்த வாயுவொன்றால் நிரப்பப்பட்டது.

A யிலுள்ள இரசமட்டமானது 300 ஆவது பிரிப்புக் குறியை அடையும் வரை ஆய்கருவியிலிருந்த இரசத்தின் அளவு செப்பஞ்செய்யப்பட்டது. பாரமானி வாசிக்கப்பட்டு, வாயுவின் கனவளவு 0·5 இற்குக் குறைக்கப் பட்டது ; வாயுவை அமுக்குதலால் பிறப்பிக்கப்பட்ட வெப்பமானது செலவாகும்வரை நோக்கல்களை எடுக்கலாகாது என்பது கவனிக்கப்பட்டது. சிறு வில்லையொன்றைப் பயன்படுத்தி இரசமட்ட நிலையை மதிப்பிடும் போது பரவயன்மை வழுக்கள் தவிர்க்கப்பட்டன. ஒவ்வோர் எடுத்துக்காட்டிலும் பரிசோதனையானது திரும்பச் செய்யப்பட்டது ; இசைகின்ற பேறுகள் கிடைத்தவிடத்துக் குழாயடைப்பு B பொசியவில்லை என முடிவுசெய்யப்பட்டது.

சாதாரண வளியானது போயிலின் விதிக்குக் கீழ்ப்படியவில்லை என றேனோ கண்டுகொண்டார் ; அதே அமுக்கவுயர்வினிடத்து இலட்சியவாயுவானது காட்டும் நெருக்கலைக் காட்டிலும் வளி உண்மையில் சற்றுக் கூடுதலாகவே காட்டிற்று.

றேனோவின் பரிசோதனைகளுள் ஏதேனுமொன்றில் பெருக்கம் " pv " யின் இறுதிப் பெறுமானத்தைக் குறித்து அப்பெருக்கத்தின் தொடக்கப் பெறுமானத்தின் விகிதமானது $\left[\frac{(pv)_{\text{தொ.}}}{(pv)_{\text{இறு.}}}\right]$ என்பதாற் குறிக்கப்படுக. இது, தரப்பட்ட அமுக்கமொன்றில் இருந்த வாயுவின் கனவளவிற்குரிய

பெருக்கம் "*pv*", உயர் அமுக்கத்தால் அரையாக்கப்பட்ட கனவளவிற்குரிய பெருக்கம் "*pv*" என்பவற்றின் விகிதம் ஆகும். தொடக்க அமுக்கம் 1 2, 3...வளிமண்டலமாக இருந்தபோது மேற்படி விகிதத்தின பெறுமானங்கள 1, 2, 3...என்னும் கீழ்க்குறிகளாற் குறிக்கப்படுக.

வளி, நைதரசன், காபனீரொட்சைட்டு என்பவற்றிற்கு

$$\left[\frac{(pv)_{\text{தொ.}}}{(pv)_{\text{இறு.}}}\right]_1 = (1+\alpha_1)$$

என றேஞ்ஞோ கண்டார்; இங்கு α_1 ஒரு சிறு நேர்க்கணியம். இப்பெருக்கம் "*pv*" ஆனது போயிலின் கருதுகோளின்படி குறையாது அதற்குச் சற்று மேலதிகமாகக் குறைந்துள்ளது என இச்செய்தி உணர்த்துகிறது. அதுபோலவே

$$\left[\frac{(pv)_{\text{தொ.}}}{(pv)_{\text{இறு}}}\right]_2 = (1+\alpha_2).$$

அடுத்து, மாறுந் திணிவுடைய வாயுவொன்றின் கனவளவானது அதன் தொடக்கப் பெறுமானம் V யின் $\frac{1}{2^1}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ... மடங்கு ஒடுங்குமாறு அவ்வாயுமீது பிரயோகிக்கப்படும் அமுக்கம் படிப்படியாக P_0 இலிருந்து P_1, P_2, P_3, ... என்றவாறு உயர்த்தப்படுகிறது எனக் கொள்க. அப்பொழுது P_1, P_2, P_3, முதலியவற்றைக் கணிக்கலாம். ஏனெனில்

$$\left[\frac{(pv)_{\text{தொ.}}}{(pv)_{\text{இறு.}}}\right] = \frac{P_0V}{P_1\left(\frac{V}{2^1}\right)} = (1+\alpha_1)$$

ஆதலின் P_1 அறியப்படுகிறது.

அதுபோலவே

$$\frac{P_1\left(\frac{V}{2}\right)}{P_2\left(\frac{V}{2^2}\right)} = (1+\alpha_2)\text{ ; எனவே } P_2 \text{ அறியப்படுகிறது.}$$

இவ்வண்ணம் செயன்முறையை நடத்தித் தரப்பட்ட திணிவுடைய வாயுவொன்றின்மீதுள்ள அமுக்கம் P_1, P_2 முதலியவற்றிற்கு உயர்த்தப்பட்டபோது அவ்வொவ்வொன்றிற்குமுரிய '*pv*' யின் பெறுமானத்தைக் கணிக்கமுடிந்தது.

கீழ்த்தரப்பட்ட அட்டவணை றேஞேவின் வெளியீட்டிலிருந்து எடுக்கப் பட்டுளளது. அதன்கண் நைதரசன், காபனீரொட்சைட்டு, ஐதரசன் என்ப வற்றிற்கு அவரால் கிடைக்கப்பெற்ற பேறுகள் அடங்கியிருக்கினறன.

வாயு	வெப்ப நிலை	V	V_0	P	P_0	$\frac{V}{V_0}$		
வளி	4·44	1939 69	969·26	738·72	1476·25	10	1·98389	1 001414
	4·70	1939 91	970·13	9336 41	18551 09	999614	1 986962	1·006366
	4 86	1939 86	969 86	6770 15	13483 48	2 00073	1 991607	1 004286
	4·95	1939·48	970·36	4219 05	8404 70	1·99826	1 992084	1 003335
நைதரசன்	5 09	1939 10	969·82	753 96	1505 06	1·999434	1 996206	1·001617
	5 18	1938 89	969 72	2159 36	4313 33	1·999133	1·997537	1 000966
	5·07	1941 81	966·70	8628 54	17249 95	2 000706	1 999174	1 004768
காபனீ-ரொட்சைட்டு	3 26	1939·68	970 56	765·77	1517 63	1 998515	1 981835	1 008416
	3 24	1939 10	969 75	4879·77	9331 72	1·999577	1·912328	1·0045625
	2 66	1935 25	970 31	9620 06	17445·23	1·994456	1 813421	1·099830
ஐதரசன்	10·02	1939·91	968·83	5555 32	11168 86	2 002314	2 010480	0 995938
	9·62	1939 98	969 79	7074 96	14228 28	2 000412	2 011075	0 994697
	9 73	1939·34	969·89	10361 88	20879·18	1 000540	2 015000	0 992327

பெருக்கம் "*pv*" ஆனது மாறிலி அனறு என றேஞே கண்டார்; ஐதரசனைத் தவிர்த்து அவரால் சோதிக்கப்பட்ட மற்ற எல்லா வாயுக் களுக்கும்

$$\left[\frac{(pv)_{தொ.}}{(pv)_{இறு.}}\right]$$

என்னும் விகிதம், 1 ஐச் சிறிதளவால் விஞ்சிற்று; ஐதரசனுக்கு அவ்விகிதமானது 1 ஐக் காட்டிலும் சற்றுக் குறைவாகவே இருந்தது. மேலே தரப்பட்டுள்ள தர்க்கரீதியைப் பினபற்றி, அமுக்கவீச்சு 1–30 வளிமண்டலங்களுக்குள்ளே ஐதரசன் தவிர்ந்த மேற்படி வாயுக்களினிடத்து அமுக்கம் கூடும்பொழுது பெருக்கம் "*pv*" குறைகிறது என றேஞே முடிவு செய்தார். ஐதரசன், இலட்சிய வாயுவைக் காட்டிலும் குறை வான நெருக்கப்படுதன்மையுடையது என இப்பரிசோதனைகள் காட்டியுள்ள செய்தியினபடி ஐதரசன இலட்சிய வாயுவைக் காட்டிலும் செம்மைமிக்க தொரு வாயுவாகும் என றேஞே வஞ்சகமாகப் புகழ்ந்தார். மேற்படி நடத்தையானது ஐதரசனுக்கு மட்டும் சிறப்பாக உரியதன்று எனப் பினவந்த பரிசோதனையாளர்களின் ஆராய்ச்சியிலிருந்து தெரியவருகிறது; நிலைமாறறம் இல்லாதபோது, உயர் அமுக்கங்களில எல்லா வாயுக்களும் அதேபோல் நடந்துகொள்கின்றன. இச்செய்தியைக் கண்டுபிடித்தவர் நற்தரேர்† (Natterer) ஆவர்; சோதிக்கப்படும் வாயுக்களின திரவமாக்கு கைக்கான பரிசோதனைகள சிலவற்றின்போதே இது கண்டு பிடிக்கப்பட்டது. 3000 வளிமண்டல அமுக்கத்தை அடைந்ததும் திரவமாக்கல் முயறசியில் அவரால் வெற்றியடைய முடியாமற் போயிற்று.

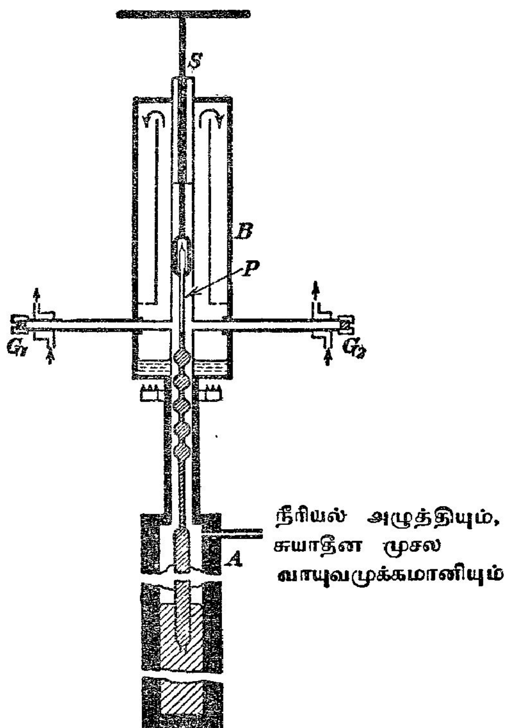
† *Wien. Ber.*, 5, 351, 1850 உம் பிற்பட்ட வெளியீடுகளும. *Pogg.. Ann.*, 62, 139.

1870 இலும் அதற்கு அடுத்துள்ள ஆண்டுகளிலும் கையற்றேற்† என்பார் பல வாயுக்களின் அமுக்கத்திற்கும் கனவளவிறகும் இடையேயுள்ள தொடர்பை ஆராய்ந்தார். டெஸ்கொஃபேயின் (Desgoffe) அமுக்க மானியைப் பயன்படுத்தி அமுக்கம் அளக்கப்பட்டது; எத்தூரம் வரை பரிசோதனைக் குழாயுள் பூசப்பட்ட பொறபூச்சானது இரசத்தாற் கரைக்கப் பட்டிருந்தது எனபதிலிருந்து அமுக்கமானியில் இரசத்தின் நிலை நோக்கப்பட் டது. றேனே, நறதரேர் ஆகியோரின் பேறுகளை இவர் உறுதிப் படுத்தினர். உயர் அமுக்கங்களின் பிரயோகத்தின்போது வாயுக்களின் நடத்தையையிட்டுக் கடந்த நூற்றுண்டில் நடாத்தப்பட்ட ஆராய்ச்சிகளுள் அமகா‡ என்பவரால் நடாததப்படடதே மிக நிறைவானது.

வாயுக்களின் நெருக்கத்தகவு பற்றி அமகாவின் பரிசோதனைகள்.— திரவஙகளின நெருக்கததகவையிட்டு அமகா நடாத்தியுள்ள ஆராய்ச்சி யைப் பற்றி ஏறகெனவே விவரித்துக் கூறப்பட்டிருக்கிறது. அதன குமிழ் இரசத்துள அமிழ்நதிருக்கும் முனைக்கு அணித்தாய் இருக்குமாறு திரவ வமுக்கமானியொன்றை மாறறியமைத்து, ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் வாயுககளின் நெருக்கப்படுதன்மைகளை அவர் ஆராய்ந்தார். எனினும் பிளாற்றினத் தொடுகைகள இணைக்கப்பட்ட இடஙகளில் கண்ணுடிக்குழாய் உடையும் இயல்பு, கம்பிகளின் தக்க காப்புப் பறறிய பிரச்சினை என்பவை காரணமாகவும், ஆய்கருவியின் மாபெரும் அளவு அதிலுள்ள பல மூட்டுக் கள் காரணமாகவும், இத்தகைய ஆய்கருவியானது உயர் அமுக்க ஆராய்ச் சிக்குத் தக்கதொனறு அனறு. எனவே, அமகா பின்வருகினற முறையை ஏற்படுத்தினர்; அது பார்வைமுறையென்று என அவரால் அழைக் கபபட்டது. சோதனைக்கான வாயுவானது கண்ணுடியாலான திரவவமுக்க மானி P யில அடைக்கப்பட்டது, படம் 9·10. அது இரும்பாலான பாத்திரம் A இல் இருந்தது; பாத்திரத்தின் கீழ்ப் பாகமானது இரசம் கொண்டிருந்தது; அதன எஞ்சிய பாகம் நீரால் நிரப்பப்பட்டது; எனவே வழக்கம்போல் வாயுவை அடையுமாறு அமுக்கத்தைச் செலுத்த முடிந்தது. இரும்புப் பாத்திரத்தின் மேற்பாகம் இரட்டைக் கஞ்சுக ஆவித் தொட்டி B யாற் சூழப்பட்டிருந்தது; அது திரவவமுக்கமானியின் மேற் பாகத்தை, அதாவது அமுக்கம் பெரிதாய் இருக்கும்போது வாயு வானது கொண்டிருக்கும் பாகத்தைச் சூழ்ந்திருந்தது. G_1 உம் G_2 உம் இரும்புப் பாத்திரத்துடன் காட்டியுள்ளவாறு பற்றப்பட்ட பக்கப் புயங் களின முனைகளில் கடற்பிசினுலும் திருகுப் புரியுடைய தொப்பிகளா லும் நிலையாக்கபபட்ட கண்ணுடி யன்னல்களாகும். குளிர்செய் உப கரணங்களால பிசினின் இளகுதல் தடுக்கபபட்டது. திரவவமுக்க மானியின் மேற்பாகமானது அமுஙகியொன்றுடன் தனிப்பட்ட வகையில் திட்டமிட்ட இறுக்கியொன்றல் இணைக்கப்பட்டது; அமுஙகியின் நிலை யைத் திருகு S ஆல் மாற்றிவைக்க முடிந்தது. இவ்வண்ணம் அதன்

† *Compt.*, *Rend.*, 70, 1131, 1870 ; 88, 61, 1879.
‡ *Ann. Chim. Phys.*, 23, 353 ; 29, 68, 1893.

தண்டிலுள்ள குறிகளுள் ஒன்றை G_2 ஊடே காண்பதற்கேற்றவாறு திரவவமுக்கமானியின் நிலையை எப்பொழுதும் செப்பஞ்செய்ய முடிந்தது. G_1 இற்கு அணித்தாயுள்ள வாயு விளக்கானது தேவையான ஒளியைத் தந்தது. G_2 ஊடே தோன்றும் குறியின் மட்டத்தை இரசம் அடையும்



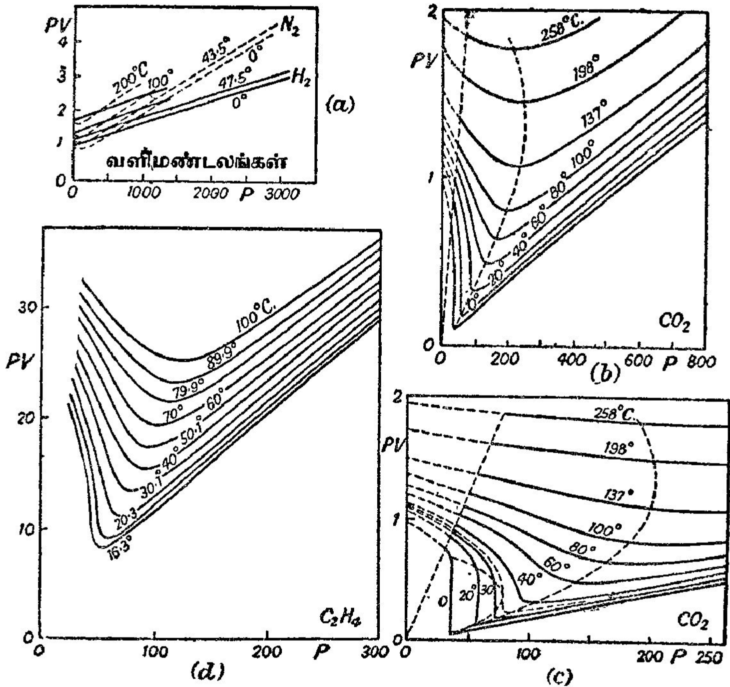
படம் 9.10. உயர் வெப்பநிலைகளிலும் உயரமுக்கங்களிலும் வாயுக்களினது நெருக்கத்தகவுகளின் ஆய்வுக்கு அமகாவின் ஆய்கருவி.

வரை அமுக்கம் செப்பஞ் செய்யப்பட்டது. தொடக்கத்தில் பார்வைச் சோதனையானது எப்பொழுதும் எளிதாய் இருக்கவில்லை ; ஏனெனில் பக்கப் புயங்களிலுள்ள நீரின் வெப்பமாககல் வகையானது உடன்காவுகையோட்டங்களைப் பிறப்பிக்குமுகமாக இருந்தபடியால் குறியைத் தெளிவாகக் காணமுடியாமற் போயிற்று. துலக்கின தட்டையான நுனிகளுடைய படிகக் கோல்களைப் பயன்படுத்தி ஆய்கருவியின் பக்கப் புயங்களிலிருந்து நீரைப் பெயர்த்து, அமகா கடைசியாக இந்தொல்லையைத் தீர்த்தார். இக்

கோல்கள் படிகப் பளிங்குகளிலிருந்தே வெட்டி எடுக்கப்பட்டன ; படிகத்தின் ஒளியியலச்சானது கோலின அச்சுடன் பொருந்தியிருந்தது. இதன் பொருட்டுக் கண்ணுடிக் கோல்களும் பரிசோதிக்கப்பட்டன ; ஆனுல் உயர் வெப்பநிலைகளில் அவற்றிற்கும் நீருக்கும் இடையே இரசாயனத் தாக்கம் நிகழ்ந்தது ; அதன் விளைவாகச் சூடான நுனிகள் ஒளிபுகாத் திரவியப் படலமொன்ருல் மூடப்பட்டன; அதாவது அவை மறை ஆயின. திரவ வமுக்கமானியின் மேலான பாகமானது முன்னரே அளவுகோடு திருததஞ் செய்யப்பட்டிருந்தது ; அமகாவால் நிறைவாககப்பட்ட " சுயாதீன முசல " மானியொன்ருல அமுக்கங்கள் அளக்கப்பட்டன; எனவே சோதிக்கப் படுகின்ற வாயுவின் நெருக்கததகவைக் கணிக்க முடிந்தது.

மேற்படி ஆய்கருவியைப் பயன்படுத்தி அமகாவால் கிடைக்கப்பெற்ற பேறுகள், படம 9·11 *இல் தரப்பட்டுளளன : இஙகு பெருக்கம்* PV *என்பது நிலைக்கூருகவும் அதறகு ஒத்த* P *யின பெறுமானம் கிடைக்கூருகவும் குறிக்கப்பட்டிருககினறன. போயிலின் விதி செவ்வை யானது எனில், தரப்பட்ட எந்த மாரு வெப்பநிலையிலும்,* PV *யையும்* P *யையும் தொடர்புபடுத்தும் வளையியானது ஒவ்வோர் எடுத்துக்காட்டி லும் அமுக்க அச்சுககுச் சமாந்தரமான நேர்கோடொன்ருகவே இருத்தல் வேண்டும். உண்மையில அமுககந் தொடர்பாக வாயுவொன்றின நடத்தை யானது அவ்வாயுவின் இயல்பைப் பொறுத்துள்ளது எனவும், வெப்பநிலை மாற்றப்பட்டபோது அதே வாயுவினிடத்து மேற்படி நடத்தை மாறுகிறது எனவும், வளையிகள் காட்டுகின்றன. ஐதரசனுக்கான வளையிகள் கிட்டத் தட்ட ஒன்றிறகொன்று சமாந்தரமான நேர்கோடுகள் ஆகும் ; ஆனுல் மாரு வெப்பநிலையில்* P *கூடும்பொழுது* PV *யும் கூடுகிறது எனக் காட்டு முகமாக அவை அமுக்க அச்சுடன் சாய்ந்திருக்கின்றன, படம்* 9·11 (a). *நைதரசனைப் பற்றி அது போலவே கூறலாம் ; அதற்கான வளையிகள் ஐதரசனுக்கான வளையிகளுடன் காட்டப்பட்டிருக்கினறன. இருந்தாலும் இவ்வெடுத்துக்காட்டில் வளையி ஒவ்வொனறும் ஓர் இழிவைக் காட்டுகிறது எனக் காண முடிகின்றது. காபனீரொட்சைடுக்கான வளையிகள் படம்* 9·11 (b) *யிற காட்டப்பட்டிருக்கினறன. இவ்வாயுவுக்கான வளையிகள ஒவ்வொன றும் தெளிவான இழிவொன்றைக் காட்டுகிறது ; அதற்குப் பின்னர் ஐதரசன்போல் அதுவும் நடந்துகொளகிறது ; ஆனுல் இவவெடுத்துக் காட்டில் மேற்படி விளைவு நனகு புலபபடுகிறது. காபனீரொட்சைட்டின இழிவுகளைப் பொறுத்தமட்டில், வெப்பநிலை கூடுங்காலே, இழிவானது தொடக்கத்தில் வரிப்படத்தின் வலதுமுகமாக அசைகிறது எனக் காண முடிகின்றது ; ஆனுல் இவ்வசைவானது தொடர்கிறதில்லை ; அதியுயர் வெப்பநிலைகளில் பின்வாங்கும் அசைவொன்று நிகழ்கிறது. இவ்விழி வுகள் ஊடே செல்லுகின்ற வளையியானது ஒரு பரவளைவாகும். இச் செய்திகள் படம்* 9·11 (c) *யில் மிகத் தெளிவாகக் காட்டப்பட்டிருக் கின்றன. அது* (b) *யின் இடப்பக்கத்தின் உருப்பெருக்க வரிப்படமாகும். இப்பொழுது மிகத் தெளிவாகத் தோற்றுகிற பரவளைவு வளையியைவிட,*

மேற்படி வளையிகள் தொடர்பாக, அவதிப்புள்ளிக்குக் கீழே, இரண்டாவது பரவளைவொன்று உளது. அது திரவமுண்டாதலின் தொடக்கத்தைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஊடேயும் அது முடிவடைந்த நிலைகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் ஊடேயும் செல்லுகிறது. புள்ளியிட்ட சமவெப்புளியானது 32°ச.

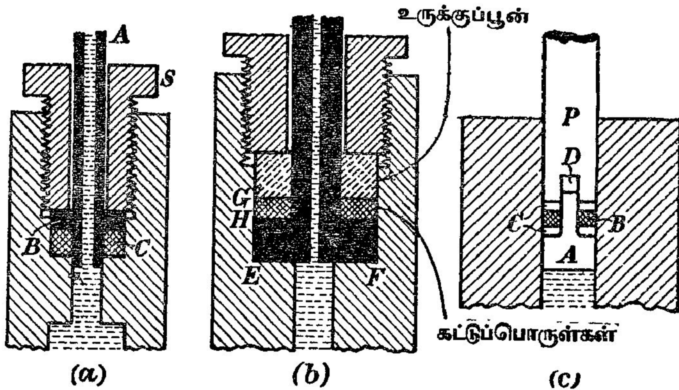


படம் 9·11. வாயுக்கள் பலவற்றினிடத்து, P தொடர்பாகப் PV யின் மாறல்.

இற்கு ஒத்தது ; இவ்வெப்பநிலை காபனீரொட்சைடின் அவதி வெப்பநிலையைக் காட்டிலும் சற்றுப் பெரிது. எதிலீனுக்கான வளையிகள் படம் 9·11 (*d*) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. இங்கும் கூட, வெப்பநிலை கூடுங்காலே வளையியில் தெளிவாயுள்ள தாழ்வானது மறையும் வண்ணமாக இருக்கிறது ; இதிலிருந்து உயர்வெப்பநிலைகளில், இவ்வளையிகளும் ஐதரசனின் வளையிகள் போலவே அமையும் என நாம் பிழையின்றி முடிவு செய்யலாம். இச்செய்திகளிலிருந்து நாம் பெறும் முடிவானது, பொது வெப்பநிலைகள் ஐதரசனின் அவதி வெப்பநிலையைக்காட்டிலும் மிக உயர்ந்தனவாய் இருக்கிறபடியால், அதன் வளையிகளின் தொடக்கக் கீழ்முகமான சாயவானது மறைந்துபோயிற்று என்பதும் அதன் விளைவாக இழிவுகளில்லா வளையிகளையே ஐதரசன் சிறப்பாகக் காட்டுகிறது என்பதும் ஆகும்.

உயரமுக்கங்களில் சடத்தின் இயல்புகள் பற்றிப் பிரிஜ்மானின் (Bridgman) ஆராய்ச்சி

பொதுக் கலைத்திறன்.—உயரமுக்கங்களில் சடத்தின் இயல்புகள் பற்றிய மிகவிரிவான ஆராய்ச்சியொன்றை பிரிஜ்மான் என்பார் நடாத்தியிருக்கின்றார் ; பொசிவைப் புறக்கணிக்கத்தக்க அளவில் இருக்குமாறு உயர் அமுக்கங்களைப் பிறப்பிக்கும் முசலத்தையும் ஆய்கருவியின் வெவ்வேறான பாகங்களுக்கிடையே தேவையான மூட்டுக்களையும் அடைக்கும் முறையொன்றைத் திட்டமிட்டதன் பயனாக அவர் இத்துறையில் வெற்றிபெற்றார். பிரிஜ்மானுக்குமுன் பெரிதும் விரும்பப்பட்ட அடைக்கும் முறை அமகாவால் ஆனது. இதற்கு எடுத்துக்காட்டாகக் குழாய்த்தொடுப்பொன்றைக் கருதுக. அதன் நுனிக்கு அணித்தாய் செவி B ஆனது குழாய் A யிற் பொருத்தப் பட்டிருக்கிறது ; படம் 9·12 (a). உயரமுக்கத்தை நிலைநிறுத்த வேண்டிய பாத்திரத்தின் பக்கத்தில் உள்ள இடுக்கொன்றுள்ளே மென்மையான அடைக்கும் பொருள் C முற்றிலும் அடக்கப்பட்டிருக்கும் வண்ணம்



படம் 9·12. உயரமுக்கத் தொகுதிகளிற் பயன்படும் அடைசல் ஒழுக்கடைகள்.

இச்செவி உட்செல்லுகிறது. இவ்வாறு அமகா, திருகு S ஆனது அதன் தானத்தில் வைக்கப்பட்டபோது அதனாற் பிரயோகித்துள்ள தொடக்க அமுக்கம் காரணமாக அடைசற் பொருள் தள்ளப்படாமலும் ஆய்கருவியில் அமுக்கம் உயர்த்தப்பட்டபோது அது எறியப்படாமலும் இருக்கும்வண்ணம் ஆவன செய்துகொண்டார். 3000 வளிமண்டல அமுக்கத்தை அமகா அடைந்தார். ஆய்கருவியில் இருக்கின்ற அமுக்கமானது அடைசற் பொருள் மீது திருகினாற் பிரயோகிக்கப்படும் அமுக்கத்துக்குச் சமமானதும் அமுக்கத்துக்கு மேலெல்லை தோற்றுகிறது ; அதற்கப்பால் இவ்வகையான மூட்டு பயன்படாது. இக்கட்டத்தில் அடைசற் பொருளானது அதைச் சுற்றியி

ருக்கின்ற இடத்தை நிரப்புகிறது; மேலான அமுக்கங்களில் அதை அடைக்குஞ் சுவர்களிலிருந்து அது சுருங்கிப் பொசிவு உண்டாகிறது. பொறிமுறைக் குறைபாடுகளால் ஆகும் ஒழுங்கின்மைகள இருந்தால் மேற்படி அறிமுறை யெல்லைக்கு முன்னரே பொசிவுகள் தோன்றலாம். இனி, பிரிஜ்மான் திட்டமிட்ட அடைசல் முறையின் செம்மையை நாம் நனகு உணரமுடியும்.

இத்தகைய உபகரணத்துக்குப் படம் 9·12 (*b*) யில எடுத்துக்காட்டொனறு காட்டப்பட்டிருக்கிறது. முதறபார்வையில அது அமகாவினது உபகரணத்தின் ஒரு சிறு மாறுபாடெனத் தோற்றககூடும்; ஏனெனில் அடைசற் பொருளானது பிணையலின முன்பக்கத்திலிருநது அதன் பிறபக்கம் வரை மட்டுமே அபபுறப்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது. இருநதாலும், அடைசற்பொருள் மீது தாக்குகின்ற விசைகளைக் கருதுவோம். கீழேயிருந்து அடைசறபொருள் மீது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற விசையானது ஆய்கருவியை நிரப்புகின்ற திரவத்திலுள்ள அமுக்கம், பரபபளவு EF என்பவற்றின பெருக்கத்துக்குச் சமம் ஆகும். அடைசற்பொருளின சமநிலையையிட்டு இவ்விசையானது திருகிஞற் பிரயோகிக்கப்படுகினற விசையால் சமமாக்கப்படுதல் வேணடும்; அது அடைசற்பொருளின் கஙகணப்பரப்பளவுமீது பரமபியிருககிறது. அலகுப் பரப்பளவொன்றிறகான இவவிசை அடைசற்பொருள் மெனமை யாக இருக்கும்வரை அதனுள் இருக்கின்ற அமுக்கம் ஆகும்; எனவே அவ்விசையானது திரவம் பொசியாதவண்ணம் திரவத்தில் இருக்கிற அமுக்கத்தின் பெறுமானத்தைக் காட்டிலும் உயர்ந்த பெறுமானமொன்றில் வெளித்தூண்டுதலினறிப் பேணப்படுகின்றது. இங்கு கொள்பாத்திரத்தின் சுவர்கள் சேதம் அடையாதவண்ணம் இருத்தல் வேண்டும். இவ்வடைக்கும் முறை "தாங்கப்படாத பரப்புக்கள் என்னும் தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது" எனப் பிரிஜ்மான் கூறுகிறுர்.

இன்னுமொரு தீர்க்கவேண்டிய பிரச்சினை இருந்தது; அது புள்ளிகள் G, H என்பவற்றிறகப்பால், அடைசற் பொருளின் பொசிவைத் தடுததல் ஆகும். ஈற்றில் தக்கவாறு வைக்கப்பட்ட உருக்குத் தகட்டுப் பூண்களால் இது நிறைவேற்றப்பட்டது.

அசையும் முசலமொன்றிற்குப் பிரிஜமான் திட்டமிட்ட அடைக்கும் முறையானது படம் 9·12(*c*) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. A ஆனது காளான் வடிவமுடைய ஒரு செருகியாகும்; வலலுருக்காலான அமுங்கி P யால் அது உயரமுக்கப் பாத்திரத்துள் தள்ளப்படுகிறது. அமுங்கியின தண்டு P யிலுள்ள குழியொன்றுள் தடையின்றி நீட்டியிருக்கிறது; இத்தண்டின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பே மேற்படி தாங்கப்படாத பரப்பளவு. சமநிலையையிட்டு அடைசற் பொருளிலுள்ள அமுக்கமானது

$$\frac{\text{செருகியின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பு}}{\text{அடைசற் பொருளின் கஙகணப் பரப்பு}}$$

என்னும் விகிதத்தில் திரவத்தில் இருக்கின்ற அமுக்கத்தைக் காட்டிலும் பெரிதாய் இருத்தல் வேண்டும்.

செம்பாலும் உருக்காலும் ஆன வளையங்கள் C என்பவை அமைந்திருக் கிறபடியால் (மென்மையான றப்பராலான) அடைசற் பொருள் B யின் பொசிவு தடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பொருளுககும் முசலம அசைகின்ற குழா யின் சுவர்களுக்குமிடையேயுள்ள உராய்வானது கவனிக்கத்தக்க அளவில் இருக்கிறது ; இப்பொருளின் தடிப்பைச் சிறிதாக்கி உராய்வால் ஆகின்ற தடைசெய்விசை தாழ்த்தப்படுகிறது. சிலவேளைகளில் அடைசற் பொருளா னது இரு அடுக்குகளாகச் செய்யப்படுகிறது. உராய்வைக் குறைக்குமுகமாக அவற்றிற்கிடையே பெனசிற்கரி, வசலின் ஆகியவற்றின் கலவை பூசப்படு கிறது.

இத்தகைய அடைசற் பொருளானது முசலத்தின் இரண்டு அல்லது மூனறு வீச்சுக்களுககு மேலே ஒருபோதும் பயன்படுத்தபடுகிறதில்லை ; ஆனால் அதை எளிதிலே புதுப்பிதது இசைவான பேறுகளைப் பெறமுடியும்.

இவ்வாராய்ச்சியிற் பயனபடுத்தியுள்ள தொடுக்குங் குழாய்கள் செம்பு ($P < 10^6$ கி-நிறை சமீ.$^{-2}$), வல்லிழுததவுருக்கு ($P < 4 \times 10^6$ கி. நிறை சமீ.$^{-2}$) என்பவற்ருல் ஆனவை ; இனனும் மேலான அமுக்கங்களிடத்து வலலுருக்கு கலப்புலோகத் திண்மமொன்றிலிருந்து குடைந்தெடுத்த, சூட் டால் பககுவபபடுததியுள்ள சிறு துண்டுகளால் அவை ஆக்கபபட்டுள்ளன. கீழான அமுக்கஙகளில் வன்கண்ணுடியாலான மயிர்த்துளைக் குழாய்களைப் பயனபடுத்தலாம் ; ஆனால் அவை நம்பமுடியாதவை.

உயரமுக்கங்களை அளத்தல்.—அமுக்கமானிகளைப் பின்வருமாறு வசதி யாக வகைப்படுத்தலாம் :

(*a*) **முதன்மானிகள்.**—இவை மானியின் அமைப்பு, அதன் வாசிப்பு என்பவறறைக் கொணடு, குறைந்த பட்சத்தில அண்ணளவாகவேனும், தனியமுக்கத்தை உடனே காணுமபடி ஆக்கப்பட்ட மானிகள் ஆகும். அண்ணளவாக எனக் கூறியதறகுக் காரணம், இவ்வகையான மானிக ளிடதது திருத்தப் பிரயோகம் இல்லாத ஒன்றைத் திட்டமிடுவது முடியு மாயினும் அது அரிதாகவே இருககும்.

(*b*) **துணைமானிகள்.**—இக்கருவிகளிடத்து அளவுகோடு திருத்தஞ் செய்யப் பட்ட பின்னர்தான அவற்றின வாசிப்புகளை அமுக்கங்கள் எனப் பயன் படுத்திககொள்ளலாம்.

எளிமைமிக்கதும் முதன்முதலாகப் பயன்படுத்தியுள்ளதுமான முதலமுக் கமானி வகையானது திறந்த இரசவாயு அமுக்கமானியாகும். இவ்வகை மானியொனறினிடத்து மேலெல்லையானது நிரலின உயரத்தால் நிருண யிக்கப்படுகிறது ; நடைமுறையில் ஒருசில நூறு கிகி.–நிறை. சமீ.$^{-2}$ அமுக்கங்களுக்கு மேலே இவ்வமுக்கமானிகள் பயன்படுத்தப்படவில்லை. ஆழமான சுரங்கவழிகளில் அல்லது உயரமான கோபுரங்களில் தான் இவற்றைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும். பிரயோகிக்கவேண்டிய திருத்தங் களுள் வெப்பநிலை, இரசத்தின் நெருக்கத்தகவு, அகலாங்கும் குத்துயரமும்

குறித்துப் புவியீர்ப்புச் செறிவு மாறல் என்பவற்றிற்கானவை இடம்பெறு கின்றன. உண்மையில், "சுயாதீன முசலமானி" எனப்படுவதன் ஏதேனு மொருவகை மட்டுந்தான் 10^6 கி. நிறை. சமீ. $^{-2}$ இற்கு மேலான அமுக் கங்களினிடத்து வெற்றிகரமாகப் பயன்படுத்தியுள்ள முதன்மானியாகும்; இவ்விடயத்தில் டேஸ்கோபு (Descoffe) என்பவர்க்கு முதன்மை அளிக்க வேண்டியிருக்கிறபோதிலும், அமகா என்பவரே அதைப் பயன்படுத்தியும் பெரிதும் திருத்தியுமுள்ளார். இத்தகைய மானியானது அடிப்படையில் சிறு குறுக்குவெட்டுப் பரப்புடைய முசலத்தாலானது; அதன நுனி யொன்று அளக்கவேண்டிய அமுக்கத்திற்குத் திறந்தமுகமாக அமைந் திருக்கிறது; அது செயலாற்றும் உருளையில் நன்கு பொருந்தியிருக்கும் வண்ணம் முசலமானது செம்மையாகக் கடையப்பட்டிருக்கிறபடியால் பொசிவு முதன்மையானதன்று. அதன் நிலையத்தில் முசலததை நிறுத்தி அதனமீது திரவத்து அமுக்கத்தால் ஆகும் தள்ளுதலை எதிர்பபதறகான விசையை ஏதேனுமொரு வசதியான முறையால் அளக்கலாம். பொது வாக இச்சிறு முசலமானது இரச நிரலொன்றுடன் நேர்த்தொடர்பு வைத் திருக்கின்ற, அதனினும் மிகப்பெரிய முசலமொன்றுடன் தொடுத்திருக் கிறது. தொகுதியானது சமநிலையில் இருக்கும்பொழுது இங்கு பொருத்த மான அமுககங்கள் முசலஙகளின் பரப்பளவுக்கு நேர்மாறு விகிதசமமாகும். நடைமுறையில் முசலங்களுக்கும் அவை அசைகின்ற உருளைகளின் சுவர் களுக்குமிடையேயுள்ள உராய்வால் ஆகும் விளைவைக் குறைக்குமுகமாக நோக்கறபேறு ஒன்றை எடுக்குமுன் தண்டு ஒவ்வொன்றிற்கும் சுழறசி யியக்கம் அளிக்கப்படுகிறது.

கிட்டத்தட்ட எல்லா உயரமுக்க ஆராய்ச்சிகளிடத்தும் சுயாதீன முசல மானியொன்றைப் பயன்படுத்தி அமுக்கத்தை நேரே அளப்பது கேவலமான, வசதியற்ற முறையாகும்; மேலும், சிறு பொசிவுகள் எப்பொழுதும் இருக்கத்தான் செய்யும். எனவே துணைமானியொன்று பெரிதும் வேண் டற்பாலது; மானியொன்றிற்கு வசதியாய் அளக்கக்கூடிய எந்த உயரமுக்க விளைவையும் அடிப்படைத் தத்துவமாகப் பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம். பெரும்பாலும் துணைமானியொன்றின் அமைப்புக்கு அடிப்படைத் தத்துவ மாகப் பயன்படக்கூடிய எளிமைமிக்க விளைவானது அமுக்கத்துடன் உலோ கக் கம்பியொன்றின் மின்தடை மாறல் ஆகும். ஒருபோதும் முற்றிலும் ஓரினமானவையும் விகாரமில்லாதவையுமான பொது உலோகங்களுக்கு இவ்விளைவைப் போதிய அளவில மீட்ட முடியாதபடியால் அதை இங்கு பயன்படுத்தலாகாது. சுயாதீன முசலமொன்றைப் பயன்படுத்தி, மாறு வெப்பநிலையில் 7×10^6 கி.-நிறை சமீ. $^{-2}$ என்னும் அமுக்கம் வரை திரவ இரசத்தின் மின்தடையில் அமுக்கத்தால் ஆகும் விளைவைப் பிரிட்ஜ் மான் ஆராய்ந்தார். அவரது அளவீடுகள் அத்துணைத் திருத்த முடையனவாய் இருந்தபடியால் அவை நியமங்கள் என ஏற்றுக்கொள்ளப் பட்டுள்ளன. இத்தகைய தடைகளை அமுக்கமானிகளாகப் பயன்படுத்து மிடத்துப் பல முன்யோசனைகள் தேவைப்படுகின்றன; அவற்றுள் முதன்

மையானது இரசத்தைக் கொண்டிருக்கவேண்டிய கண்ணுடியாலான மயிர்த் துளைக் குழாய்பற்றியதே. இரசத்தினுடைய தடையின் அமுக்கக் குண கத்துடன் ஒப்பிடின் கண்ணுடியின் நெருக்கத்தகவானது அத்துணைப் பெரிதாய் இருக்கிறபடியால் கண்ணுடியின் நெருக்கத்தகவை அளக்கவும் அமுக்கத்துடன் அதன மாறலைத் துணியவும் வேண்டும். கண்ணுடி யானது ஏகவினமானதல்லாததால் வேண்டிய திருத்தவரிசையில் மீட்டக் கூடிய பேறுகளைப் பெறமுடியாது ; எனவே பெரிதும் விரும்பப்பட்டும் மீட்டலையிட்டு தோற்றவளவில் இரசம் காட்டிய நயம் இழக்கப்படுகிறது. மேலும் கண்ணுடியைக் கவனமாகப் பதனிடுதல், கண்ணுடியையும் அது கொண்டிருக்கும் இரசத்தையும் வரையறுத்த வெப்பநிலையொன்றில் நிலை நிறுத்துதல என்பன கட்டாயமாக வேண்டப்படும் எனத் தெரிய வந்தது.

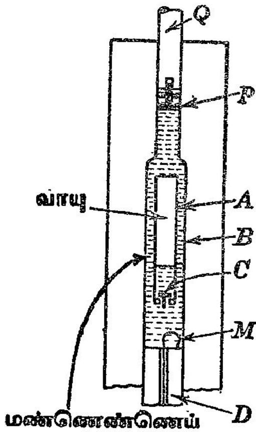
பின்னர் ஈயம் போன்ற மென்மையான உலோகங்களால் ஆக்கப்பட்ட கம்பிகளைப் பயன்படுத்த முடியும் எனப் பிரிஜ்மான் கண்டுகொண்டார். ஈர் ஈயமாதிரிகளினிடத்தும் தடையின் அமுக்கக் குணகம் 0·1 சதவீதத்துக் குப்பட்டது.

இவற்றுலும் வேறு கருத்துக்களாலும் உந்தப்பட்டு லிசேல் (Liselle) என்பவரால பிரயோகிககப்பட்ட மங்கனீன்மானியைப் பிரிஜ்மான் நாடினர் ; அவரது முழு ஆராய்ச்சியிலும் அது முக்கியமான இடத்தைப் பெற்றது. விட்டம் 0·005 அங். உம் நீளம் கிட்டத்தட்ட 5 மீறறர் உம் உடைய நன்ருய்ப் பதனிட்ட மங்கனீன் கம்பியால் எடுத்துக்காட்டான மானி யொன்று ஆக்கப்படுகிறது ; பொதுவாக அதன் தடை கிட்டத்தட்ட 120 ஓம் ஆகும். இத்திரவியத்தால் அமைக்கப்பட்ட மானியொன்றுமீது 0°ச. இல் இரசத்தை உறையச் செய்யக்கூடிய அமுக்கத்தைப் பிரயோகித்து, அதனுல் ஆகின்ற தடை மாற்றத்தைத் துணிந்து, அம்மானியானது அளவையிடப் படுகிறது. இதன்பொருட்டுச் சுருளின தடை தொடர்பாக அமுக்கத்தைப் பிறப்பிக்கும் முசலத்தின நிலையானது குறிக்கப்படுகிறது. முசலத்தின் இயக்கத்திலே காணப்படும் தொடர்ச்சியின்மை உறைதலின் தோற்றத்தை உணர்த்துகிறது ; தொடர்ச்சியின்மையின் முழு அளவானது திரவ இரசத் திறகும் திண்ம இரசத்திற்கும் உள்ள கனவளவு வித்தியாசம் ஆகும். 0° ச. இல் இரசத்தின் உறைதலுக்கான அமுக்கமானது $7{\cdot}640 \times 10^6$ கி. நிறை. சமீ.$^{-2}$ என ஏற்கெனவே சுயாதீன முசலமானியொன்றைப் பயன் படுத்தித் துணியப்பட்டுள்ளது. முதலமுக்கமானியொனறைப் பயன்படுத்தி மங்கனீனிடத்து அமுக்கம் 13×10^6 கி. நிறை. சமீ.$^{-2}$ வரை தடைமாற்ற மானது அமுக்கத்தின் ஒருபடிச் சார்பு எனப் பிரிஜ்மான் ஏற்கெனவே நிறுவிவிட்டார். இது லிசேலினது கண்டுபிடிப்பின் விரி ஆகும்.

மேற்படி முறையால் அளவையிடுதலின்போது இரசத்தின் உறைநிலையை, திரவம்→திண்மம், திண்மம்→திரவம் என்றவாறு இரு திசைகளிலும் அடைதல்வேண்டும் ; ஆய்கருவியானது சரியாகத் தொழிற்பட்டால் இசை வான பேறுகளைப் பெறல் வேண்டும்.

12×10^6 கி. நிறை. சமீ.$^{-2}$ என்னும் அமுக்கம்வரை இவ்வகையான மானியொன்றைப் பிரிஜ்மான் பயன்படுத்தியிருககிருர்; மேலான அமுக்கங் களுக்குப் புறச்செருகலாலேயே பேறுகள் கிடைக்கப் பெற்றுள்ளன. இச் செயனமுறை செமமையான எனப் பிரிஜ்மான் ஒத்துக்கொள்கிருர்; ஆனுல இவ்வெடுத்துக்காட்டில் வழுவானது பெரிதன்று எனக் கருதப் படுகிறது. மங்கனீன சுருளொனறிலும் வேருேர் உலோகம் அல்லது கலப் புலோகமொனருலான சுருளொன்றிலும் உடனிகழுகின்ற தடைமாற்றங்களே அளந்து, இவ்விரு எடுத்துக்காட்டுக்களிலும் அமுக்கத்துக்குப புறச்செருகலாற் கிடைக்கப் பெறுகின்ற பெறுமானஙகளே ஒப்பிட்டு இம்முறையைச சரிபார்க்க முடியும.

உயரமுக்கங்களில் வாயுக்களின் நடத்தை.—பிரிஜ்மானின் பரிசோதனே களிற பயனபடுததபபட்ட வாயுக்கள் ஐதரசன், ஈலியம, நைதரசன, ஆகன், அமோனியா எனபவை ஆகும். 2×10^6 கி. நிறை சமீ.$^{-2}$ எனனும் தொடகக அமுக்கத்தில் இருக்கும் வாயுவானது உருளேப பாததிரம் A யுட் செலுத்தப்படுகிறது, படம் 9·13; அப்பாததிரமானது அதனினும் பெரிய உருளே B யுள் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது; இதறகெனத் திட்டமிட்ட, உளமுகமாகத் திறநதுள்ள ஒரு வாலவு C யால் A யின் கீழ் முனே மூடப்பட்டிருககிறது. B யின கீழ் முனே யானது மஙகனீனமானி M ஐக் காவுகின்ற செருகி D யால் அடைக்கப்பட்டிருககிறது; இணேககமபிகள் சிறப்பாகக் காவலிடப்பட்டி ருக்கின்றன. அடுத்து B யிற்கும் A யிற்கும் இடையேயுள்ள இடம் தெரிந்த திணிவுடைய வாயுவில்லா மணணெண்ணெய் நிரபபப்பட்டி ருக்கும்வண்ணம் மண்ணெண்ணெய் விடப் படுகிறது. P ஒரு வழக்கமான செருகியாகும்; அது ஒரு நீரியலமுத்தியால் இயக்கிவைக்கப்படும் ஒரு முசலம் Q வினுல் உள்ளே அசைக்கப்படுகிறது. இவ்வணணம் ஆய்கருவி யில இருக்கினற அமுக்கத்தை உயர்த்த முடி கின்றது. செருகி படிப்படியாக உள்ளே செலுத் தப்படும்போது A யில் இருக்கினற வாயுவின அமுக்கத்தை அடையும்வரை அமுக்கம் கூடுகிறது; அப்பொழுது வால்வு C திறக்கப்படுகிறது; மண்ணெண்ணெயும் வாயுவும் நெருக்கத்தக்கவை எனபதால் ஆகினற கனவளவு மாறறமானது முசலம் D யின் முன் செல்லுதலிலிருந்து கணிக்கப்படுகிறது. இககட்டம் வரை இயக்கமானது மணணெண்ணெயின் தோற்ற நெருக்கத்தகவினுல் மட்டும் நிருணயிக் கப்படுகிறது மண்ணெணணெயின் தோற்ற நெருக்கத்தகவு தெரிந்தி



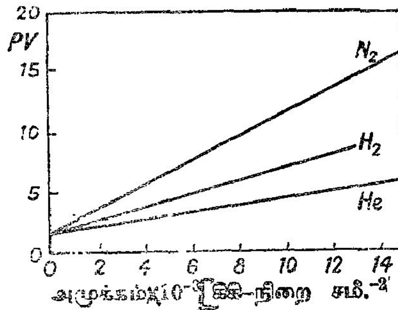
படம் 9·13. உயரமுக்கங்களில் வாயுக்களுக்குப் பயன்படும் பிரிஜ்மான் அமுக்கமானியின் கோட்பாடு.

ருக்கிறபடியால் வாயுவின் நெருக்கத்தகவைக் கணித்துக் கொள்ளலாம். அமுக்கத்தால் A யின் உட்கனவளவில் ஆகும் மாறலுக்கான சிறு திருத்தமானது பிரயோகிக்கப்பட்ட மிகவுயர்ந்த அமுககம் (16×10^9 கி. நிறை சமீ.$^{-2}$) இல் ஒரு சதவீததைத மீறவில்லை.

மண்ணெண்ணெயுடன் வாயு தொடுகை வைத்திருக்கிறபடியால், அத்திர வத்தில அவ்வாயு கரைதலாற் பேறுகள் பாதிக்கப்படக்கூடும் எனனும் கேள்வி எழுந்தது ; ஆனல் குறிப்பிட்ட அமுக்கம் ஒன்றில் வாயுவின் கனவளவானது அவ்வாயுவும் திரவமும் தொடுகை வைத்திருந்த நேரத் தைச் சாரவில்லை எனத் தெரியவந்துளளது. குணடு A யை நிரபபு முன்பும் அதை நிரப்பிய பினபும் நிறுத்து, வாயுவின் திணிவு துணியப்படு கிறது.

உயரமுக்கங்களில் ஐதரசனுனது சுயாதீன உருக்குருளைகளின் நுண்டுளை கள் ஊடே செல்கினறபடியால் அவவாயுவினிடத்து மிகக குறைந்த திருத்தத்துடன் பேறுகள் கிடைக்கப்பெற்றுள்ளன. வளியும் ஒட்சிசனும் அது போலவே ; ஆனல் அதனினும் குறைவாக நடந்துகொள்கின்றன.

நைதரசன, ஐதரசன், ஈலியம் என்பவற்றினிடத்து, பெருக்கம் pv என்பது இட்டததட்ட அமுக்கத்தின் ஒருபடிச் சார்பு எனப் பிரிஜ்மான கண் டார்—படம் 9·14 (a) இற் காண்க. $p = 15 \times 10^9$ கி. நிறை சமீ.$^{-2}$



படம் 9·14. (a) சில வாயுக்களுக்கு அமுக்கம் சார்பாகப் பெருக்கம் PV.

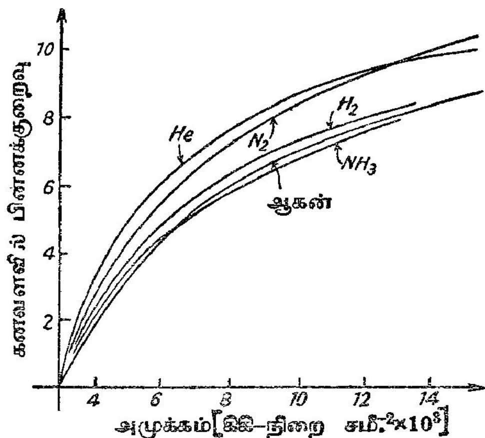
என்னும் அமுக்கத்தில் நைதரசனின் கனவளவானது அது இலட்சிய வாயு வாக நடந்திருந்தால் அப்பொழுது அது காட்டியிருக்க வேண்டிய கனவள வின் பதினறு மடங்கிற்கு மேலாக இருந்தது. ஐதரசன், ஈலியம் என்பவறறின் நடத்தையும் அவ்வாறே. இத்தகைய உயரமுக்கங்களில் மேற்படி வாயுக்கள் சாதாரண அமுக்கங்களில் திரவங்களின் நெருக்கத் தகவுகளுடன ஒப்பிடத்தக்க நெருக்கப்படுதன்மை உடையன.

சோதிக்கப்பட்ட வாயுக்கள் எல்லாவற்றிலும் காணப்படும் விளைவொன்றைப் படம் 9·14 (b) எடுத்துக்காட்டுகிறது; ஒத்திட்டுப் பார்க்கில் தாழ்ந்தவை எனச் சொல்லக்கூடிய அமுக்கங்களில் அவ்வாயுக்கள் நடந்துகொள்ளும் முறையிலிருந்து இதை ஊகித்தறிய முடியாது. விளக்கப்படத்தில் அமுக்கம் தொடர்பாக மூலொன்றிற்கான கனவளவு மாற்றம் சமீ.[3] இல் குறிக்கப்பட்டிருக்கிறது. தொடக்கக் கனவளவானது 3×10^6 கி. நிறை சமீ.$^{-2}$ என்னும் அமுக்கத்தில் கிராமூலக்கூறொன்றின் கனவளவாகும். உற்பத்தியொழிந்த புள்ளியொன்றில் நைதரசன், ஈலியம் ஆகியவற்றிற்கான வளையிகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன என்னும் செய்தியானது இவ்விளக்கப்படத்தில் குறித்தற்பாலது ; ஐதரசன், ஆகன் ஆகியவற்றின வளையிகளினது போக்கைப் பொதுவாக நோக்குமிடத்துப் பிரிஜ்மானால் அடையப்பெற்ற மிகவுயர்ந்த அமுக்கத்திற்குச் சற்று மேலான அமுக்கமொன்றிலே அவை ஒன்றையொன்று வெட்டுகின்றன எனத் தோற்றுகிறது. முதலாவது எடுத்துக்காட்டிலுள்ள வெட்டுதல் ஆனது அமுக்கம் கூடுங்காலே வாயுக்களின் தொடர்பு நெருக்கத்தகவின் மாற்றத்தால் ஆகிறது.

ஈலியம், நைதரசன் ஆகிய வாயுக்களின் நடத்தையை விளக்கும் பொருட்டு, வளையிகளின் தொடக்கத்திலுள்ள பாகங்களுக்கு ஒத்த, ஒப்பீட்டு முறைப்படி தாழ்ந்த அமுக்கங்களுக்கு அணுக்கள் அல்லது மூலக்கூறுகள் என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள "சுயாதீனமான அல்லது வெறுமையான" இடம் குறையுங் காரணமாக அவ்வாயுக்களின் கனவளவானது சுருங்கிறது என்பதை நாம் ஞாபகப்படுத்திக் கொள்ளல் வேண்டும். அவற்றினும் உயர்ந்த அமுக்கங்களுக்கு "இவ்வெற்றிடமானது" அத்துணை சுருங்கியிருக்கிறபடியால் அதற்குமேல் அது மெதுவாகவே சுருங்கும். இருந்தாலும் மூலக்கூறு அல்லது அணுவொன்றுல் உண்மையாகக் கொள்ளப்பட்ட இடத்தை அமுக்கத்தால் இன்னும் சுருக்கலாம் எனக் கருதுதற்கு இடமுளது. இனி, சிக்கலான நைதரசன் மூலக்கூறானது ஈலியம அணுவொன்றைக் காட்டிலும் மிகப் பெரிதாகும் ; எனவே தாழ்ந்த அமுக்கங்களுக்கு "வெற்றிடம்" குறைதலால் ஆகின்ற கனவளவுச் சுருங்கலின் பெரும்பகுதியானது ஈலியத்தினிடத்தே பெரிது ; அதாவது ஈலியத்தின் நெருக்கத்தகவு நைதரசனின் நெருக்கத்தகவைக் காட்டிலும் பெரிது. இருந்தாலும, உயர்ந்த அமுக்கங்களுக்கு, அடிப்படை அலகினது இலத்திரன்களின் உருவமைப்பே நெருக்கத்தகவைப் பெரிதும் நிருணயிக்கிறபடியால் இங்கு நைதரசன் மூலக்கூறினிடத்தே விளைவைப் பெருமளவில் எதிர்பார்க்கலாம்.

ஆகன், ஈலியம் என்பவற்றின் வளையிகளின் எதிர்பார்த்த வெட்டுதலும் அதேபோல், விளக்கி வைக்கப்படுகிறது ; ஆகனிடத்தில் அதன் கருவுக்கப்பால் பதினெட்டு இலத்திரன்கள் இருக்கின்றபோது அமோனியாவின் மூலக்கூற்றில் ஆகப் பத்துத்தான உளதென்னுஞ் செய்தியை ஞாபகப் படுத்திக் கொண்டால், அமோனியா, ஆகன் என்பவற்றின் வளையிகளின் வெட்டுதல் எளிதில் விளக்கம் பெறுகிறது.

உயரமுக்கங்களில் திரவங்களின் நெருக்கத்தகவு.—திரவங்களுக்கெனச் சமீபகாலத்தில் பிரிஜ்மாலுல் ஆக்கப்பட்ட அமுக்கமானி வகையொன்று படம் 9·15 இற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது; அது பேக்கின்ஸ்† (Perkins) என்பவர் தொடக்கிவைத்த முறையொன்றின விரிவாக்கம் ஆகும். பிரிட்ஜ்மான் முதன் முதலாக அம்முறையைச் செம்மையாக்கினர்; ஆனுல் அதனது இற்றைநாள அமைப்பில் முசலமானது மிக்குயர் திருத்தத்துடன் பொருத் தப்பட்டிருக்கிறபடியால் தொடர்ந்த வாசிபபுகளே எடுக்க முடிகின்றது; அதாவது இனிமேல் ஒவ்வோர் அமுக்க மாற்றத்திற்குப்பின் உண்டாகியுள்ள

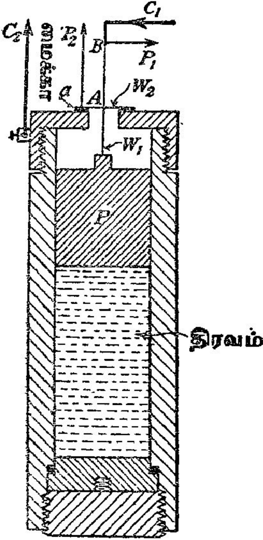


படம் 9·14. (b) அமுக்கத்தின் சார்பாகச் சமீ.^{3} இல் மூலொன்றின் கனவளவு மாற்றம்.

விளைவை நோக்குமுகமாக உருளையைத் திறக்க வேண்டியதேயில்லை. முசலத்தின் விட்டமும் உருக்கு உருளையின் உடலின் விட்டமும் அதுவே; அவற்றின் அகறசி 10^{-5} அங். ஆகும்; சமீபகாலத்தில் கலைத்திறன் அடைந்துள்ள முன்னேற்றம் காரணமாக இத்தகைய திருத்தம் முடிந்தது. உருளையின இயக்கத்தை அளப்பதறகு உயர்வுணாதிறன் உடைய மின்னுப கரணமொன்று பயன்படுத்தப்பட்டுளளது. அமுங்கி P யுடன் உயர் தடைக்கம்பி W_1 இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது; உருளையுடன் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டு ஆனுல் அதிலிருந்து மைக்காவாற் காவலிட்ட கிடையான கம்பி W_2 உடன் அது தொடுகையிலுள்ளது. C_1 உம் C_2 உம் ஒட்டத்திற்கான இணைக்கம்பிகளாகும்; P_1 உம் P_2 உம் அழுத்தத்திற்கான இணைக் கம்பி களாகும். முசலம் நிலைமாறும்போது W_1 ஆனது W_2 இற்குக் குறுக்கே அசைகிறது. அழுத்தமானியொன்றைப் பயன்படுத்தி வழுக்குந் தொடுகை A யிற்கும் கம்பி W_1 இல் தரப்பட்ட புள்ளி B யிற்கும் உள்ள அழுத்த

† *Trans. Roy. Soc.*, 72, 324, 1819-20.

வித்தியாசம் அளக்கப்படுகிறது; இம்முறையில் தொடுகைத் தடையால் ஆகின்ற வழு நீக்கப்படுகிறது. W_1 இலுள்ள ஓட்டமும் அளக்கப்படுகிறபடியால் கம்பி W_1 இன் பாகம் AB இன் தடையைக் கணிக்கலாம். இத்தடையின் மாற்றத்திலிருந்து முசலம் P யின் இடப்பெயர்ச்சி துணியப்படுகிறது. ஒளியியற்றலையீடு என்னும் தோற்றப்பாட்டைப் பயன்படுத்தும் முறையும் இம்முறையும் ஒரே உணர்திறன் வரிசையிற் படுகின்றன. இவ்வாய்கருவியின் உயர்வுணர்திறன் காரணமாக, அதைச் சிறியதாய் ஆக்கலாம்; எனவே மங்கனீன் மானியைக் கொண்டிருக்கின்ற உருளைக்கு வேறான உருளையொன்றில் அதை ஏற்றிவைக்கலாம். இவ்வாறு, மானியின் வெப்பநிலை மாறாது இருக்கச் சோதிக்கப்படுகின்ற திரவத்தின் வெப்பநிலையை மாற்றலாம். எனவே மானியின் வெப்பநிலை மாறலால் ஆகின்ற வழுக்கள் தவிர்க்கப்படுகின்றன.



படம் 9·15. உயரமுக்கங்களில் திரவங்களின் நெருக்கத்தகவை அளப்பதற்கு பிரிஜ்மானின் திரவவமுக்கமானி.

பரிசோதிக்கப்பட்ட திரவங்களுள் நீர், இரசம், கிளிசரோல், அற்ககோல்கள்பல, ஈதர், அசற்றோன், மண்ணெண்ணெய், ஏற்றில் மூன்று ஈதைலுறுப்புக்கள் என்பவை உள்ளன. அமுக்கம் உயர்ந்தபோது நெருக்கத்தகவு கருதத்தக்க அளவில் குன்றியுள்ளது. கனவளவானது பூச்சியமாகாமல் இருப்பதற்கு இது அவசியம் வேண்டப்படும். ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் தாழ்ந்த அமுக்கங்களிடத்து, சுயாதீன இடைவெளிவிடுத் தளர்ந்த வகையில் மூலக்கூறுகள் ஒன்றோடொன்று பொருந்தியிருக்கின்றன என்பதே இதற்கு இயல்பான விளக்கமாகும். இவ்விடைவெளியானது கருதத்தக்க அளவிற் குறைக்கப்படும்வரை நெருக்கத்தகவு பொதுவாகக் கூறுமிடத்துப் பெரிது; ஆனால் அது கிட்டத்தட்ட மறைந்ததும் அமுக்கம் உயருங்காலே உண்டாகின்ற கனவளவு மாற்றங்கள் மூலக்கூறுகளின் சுருங்கலாலேயே ஆக்கப்படுகின்றன.

திண்ம நிலையிலுள்ள சடத்தின் நெருக்கத்தகவு.—திண்மமொன்றின் நெருக்கத்தகவை நேரடியாக அளத்தலையிட்டுப் பொதுவான முறை எதுவும் இதுவரை திட்டமிடப்படவில்லை. பொதுவாகக் கூறுமிடத்துப் பாத்திரமொன்றில் இருக்கின்ற திரவமொன்றில் அமிழ்த்தியே திண்மமொன்றின் கனவளவைப் பெறமுடியும். திண்மங்களுக்கான அமுக்கமானியொன்றைப் பயன்படுத்துமிடத்துத் திரவத்தின் நெருக்கத்தகவு, கொள்பாத்திரத்தின்

கனவளவில் அமுக்கத்தால் உண்டாகின்ற மாற்றம் என்பவற்றிற்குரிய திருத்தங்களைப் பிரயோகித்தல் வேண்டும். எனவே முறையானது நேரல்லாததொனறுகும. ஏற்கெனவே ரிட்சேட்சும் ஸ்ருள்ளும் தந்துள்ள முறையை நாம் எடுத்துக் கூறியுள்ளோம் (ப. 486 ஐ ஒப்.). மல்லாக் (Mallock) எனபவர் அதற்கு முனனர் தந்துள்ள முறையொன்றில் உள்ளமுக்கத்தால் தாக்கபபடுகினற நீண்ட உருளைக்குழாயொன்றின் பெரும்பகுதியின் நீளமாற்றம் அளக்கப்பட்டது. மீள்தன்மைக் கொள்கையின்படி இமமாறறமானது குழாயினது திரவியத்தின் நெருக்கத்தகவின் சார்பொன்று எனவும் மற்ற மீள்தன்மை மாறிலிகளை அது சாரமாட்டாது எனவும் தெரியவருகிறது. இவவாறு குருனைசன்† (Gruneisen) என்பார் தாழ்வெப்பநிலையில் உலோகங்கள் பலவற்றின நெருக்கப்படுதன்மையைத் துணிந்துள்ளார்.

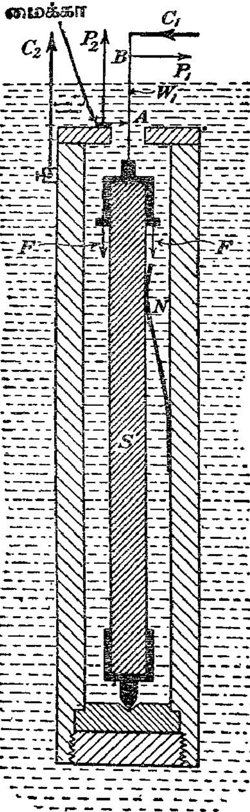
திண்மமொன்றின் நெருக்கத்தகவை அளப்பதற்குப் பிரிஜ்மான் கையாண்ட முறைகளுள் ஒன்று மட்டுமே விவரித்துக் கூறப்படும். அங்கு நீர்நிலையியலமுக்கத்துக்கு உட்பட்ட இரும்புகக்கோலின் சார்நீள மாற்றமானது கொள்பாத்திரத்தின் நீளத்தைக் குறித்து அளக்கப்படுகிறது ; கொளபாத்திரம் சோதிக்கப்படும் திரவியத்தாலானது. இங்கு இரும்பின் நெருக்கததகவை முதன்முதல் அறிதல் வேண்டும். அது கீழ்வருமாறு துணியப்படுகிறது.

30 சமீ. நீளமுடைய இரும்புச் சட்டமொன்று பாரமான உருளையொன்றுள் வைக்கபபட்டு அமுக்கததால் தாக்கப்படுகிறது ; அதில் நிரம்பியிருக்கும் திரவத்தாலேயே அவ்வமுக்கம் ஆய்கருவியுட் செலுத்தப்படுகிறது. உருளையைக் குறித்துக் கோலின் நீளத்தின சார்மாற்றம் அளக்கப்படுகிறது ; அதேநேரம, வெளிப்புள்ளிகளில உருளையின் நீளமாற்றம் அளக்கப்படுகிறது. இனி, இரும்புக்கோலின் தனி நீளமாற்றத்தைக் கணிக்கமுடியும். கணிக்கும்போது, உருளைக்குப் புறத்தே, நீளம் அளக்கப்படுகின்ற இடத்திலே உள்ள நீளமாற்றமும் உள்ளே அது கோலுடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற இடங்களுக்கு ஒத்த நீளமாற்றமும் ஒன்றே எனக் கொள்ளப்படுகிறது. முனைவிளைவுகளைப் புறக்கணிக்கத்தக்கவாறு கோலின் நுனிகளுக்கப்பால் உருளையானது கருதத்தக்க தூரம் நீட்டியிருக்கிறபடியால இவவெடுகோள் சரியாகும். இருந்தாலும் அது எவ்வாறுயினும் உருளையின் நீளமாற்றத்திற்கான திருத்தம் சிறிது ஆகும் ; அது ஒருசில சதவீதத்தை மீறாது.

இரும்பு, உருளை என்பவற்றினிடத்துள்ள சார்நீள மாற்றத்தைத் துணியும் முறையானது முன்னர் கூறியுள்ள அழுத்தமானி முறையாகும். மாறாவோட்டமானது, அழுத்த முடிவிடங்களுக்குப் புறம்பாகக் கம்பியூடே செலுத்தப்படுகிறது. அமுக்கம் மாறறப்பட்ட கணத்திலிருந்து ஒரு சில நிமிடங்கள் கழியுமுன் வழுக்குந் தொடுகைக்கும் கம்பியில் நிலைத்த

† *Ann. Phys.*, **33, 1269, 1910 ; 39, 257, 1912.**

புள்ளியொன்றிற்குமிடையேயுள்ள அழுத்த வித்தியாச வாசிப்புகள் ஒரு போதும் எடுக்கப்படுகிறதில்லை. அமுக்கவெப்பததின் செலவிற்கு இது இன்றியமையாது வேண்டபபடும். இம் மின்முறையையிட்டுக் கம்பியானது பெருமளவிற் சீராகவும், அதன் தடையானது உணரத்தக்க அளவில் அமுக்க மாறல்களால் பாதிக்கப்படாதவகையில் கம்பியின் திரவியத் தின இயல்பும் இருத்தல்வேண்டும் எனப் பிரிஜ்மான் வற்புறுத்துகிருர். மேலும், கம்பி யின் தடைத்திறன் பெரிதாய் இருத்தல் வேண்டும். இக்காரணங்களையிட்டு நிக்கிரோம் என்பதே கடைசியாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட் டுள்ளது.



படம் 9·16. இரும்பைக் குறித் துக் கோல் வடிவத்திலுள்ள திர வியங்களின் சார்நீட்டல் நெருக்கத் தகவின் துணிதலுக்குப் பிரிஜ்மா னின் அமுக்கமானி.

தூய இரும்பினிடத்துக் கீழ்க்குறிகளாற் காட்டப்பட்ட வெப்பநிலைகளில்

$\kappa_{30} = [5{\cdot}87 - (2{\cdot}1 \times 10^{-5}\mathrm{P})]$ (கிகி. நிறை)$^{-1}$ சமீ.^{2} எனவும்

$\kappa_{75} = [5{\cdot}93 - (2{\cdot}1 \times 10^{-5}\mathrm{P})]$ (கிகி. நிறை)$^{-1}$ சமீ.^{2} எனவும்

பிரிஜ்மான்† கண்டுகொண்டார்; இங்கு P ஆனது கிகி. – நிறை சமீ.$^{-2}$ இல் அமுக்கம் ஆகும்.

உலோகமொன்றின் நெருககத்தகவைத் திருத்தமாகப் பெற்றபின் மறற உலோகங்க ளின் நெருக்கத்தகவை வேற்றுமை முறை யொனறுல் ஆராய முடிகினறது. ஒப்பிட்டுப் பார்ககில் தாழ்ந்தவை எனப்படும் அமுக்கங்க ளில் இத்தகைய முறையொன்றை றிச்சேட்ஸ் என்பார் பெரிதும் பயன்படுத்திஞர். இருந்தாலும், இரசம் கொள்பாத்திரத்தின் திரவியம் (இரும்பு)‡ என்பவற்றின நெருக் கத்தகவுக்குக் கூடிய திருத்தமுடைய பெறுமா ணங்கள கிடைத்தபோது அவரது முடிவுகளைத் திருத்த நேரிடும் என்பதை அவர் முற்றிலும் உணர்ந்தார். அவர் நோக்கு சரியாய் இருந்தது; ஏனெனில் இரும்பின் நெருக்கத் தகவுக்கு அவர் பயன்படுத்திய பெறுமானம் 30 சதவீதம் குறைவாய் இருந்தது.

† பிற்சேர்க்கையைப் பார்க்க.

‡ *Jaur. Amer. Chem. Soc.*, **37**, 1643, 1915.

இரும்பு, சோதிக்கப்படும் திரவியம் என்பவற்றின் நீள மாறல்கள் கருதப்படுமளவில் பெரிதாயிருந்தபோது படம் 9·16 இற் காட்டியுள்ள ஆய்கருவியை பிரிஜ்மான் பயன்படுத்தினர். S என்பதே மாதிரி ; அது நீண்ட கோலொன்றின் வடிவமுடையது ; அது அமைந்திருக்கின்ற பாத்திரத்தின் அடிமீது வில்லொன்றல் அமர்த்தப்பட்டிருக்கிறது ; படத்தில் வரிப்படமுறைப்படி வில்லானது கீழ்முகமாகத் தாகருகின்ற இரு "விசைக் காவிகள்" FF என்பவற்றல் எடுத்துக்காட்டப்படுகிறது. மாதிரியின மேலான முனையில், பிடியொனறுடன் உயர்தடை (நிக்கிரோம்) கம்பி W_1 இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது ; கொள்பாத்திரத்துடன் இணைக்கப்பட்டு ஆனல் அதிலிருந்து மைக்கா வாசர்களாற் காவலிட்ட தொடுகை A யின் குறுக்கே அக்கம்பி அசையமுடியும். வில் N, W_1 ஐ A யுடன் தொடுகை வைத்திருக்கச் செய்கிறது. C_1 உம் C_2 உம் ஓட்ட இணைக்கம்பிகளாகும் ; P_1 உம் P_2 உம் அழுத்த இணைக்கம்பிகளாகும். ஓட்டம் மாறுது இருக்க, வழுக்குத்தொடுகை A யிற்கும் W_1 இலுள்ள நிலைத்த புள்ளி B யிற்கும் இடையேயுள்ள அழுத்தவிததியாசத்தின் மாறல்களை நோக்கிக் கோலுக்கும் இரும்பு உருளைக்கும் இடையேயுள்ள சாரியக்கம் காணப்படுகிறது. இந்நீள மாற்றங்களை ஆக்கும்பொருட்டு முழு ஆய்கருவியையும் உயரமுக்க ஆய் கருவியொன்றினுள் வைத்து அமுக்கம் நீர்நிலையியல் முறைப்படிப் பிரயோகிக்கப்படுகிறது.

W_1 ஐ மாதிரியுடன் இணைக்கும் பிடியின் நீளமாற்றம், மைக்கா வாசர் களின் தடிப்புமாற்றங்கள் போன்ற வெவ்வேறான குழப்பும் காரணங் களை நீக்கும்பொருட்டு பூச்சியப் பரிசோதனையொன்று செய்யப்படுகிறது ; இங்கு S இற்குப் பதிலாகத் தூய இரும்பாலான, அதாவது நெருக்கத் தகவு தெரிந்த திரவியத்தாலான உருளையொன்று பயன்படுத்தப்படுகிறது.

கட்டையான மாதிரிகள் மட்டும் கிடைத்தபோது, மாதிரியின் முனை யொன்றின் தொடர்பியக்கமானது நெம்புத தொகுதியொன்றல் உருப் பெருக்கம் பெறுகிறது ; அப்பொழுது கடைசி நெம்பின் நிலைமாற்றம் அழுததமானி முறையால் துணியப்படுகிறது.

கீழ்வருகின்ற பேறுகள் கிடைக்கப்பெற்றன : தங்குதனுக்கு

$$\kappa_{30}=[3{\cdot}15-(1{\cdot}6\times10^{-5}\text{P})]\times(10^{-7}\text{கி. - நிறை})^{-1}\text{சமீ.}^2.$$

$$\kappa_{75}=[3{\cdot}16-(1{\cdot}5\times10^{-5}\text{P})]\times(10^{-7}\text{கி. - நிறை})^{-1}\text{சமீ.}^2.$$

பொன்னுக்கு

$$\kappa_{30}=[5{\cdot}77-(3{\cdot}1\times10^{-5}\text{P})]\times(10^{-7}\text{கி. - நிறை})^{-1}\text{சமீ.}^2.$$

$$\kappa_{75}=[5{\cdot}70-(2{\cdot}1\times10^{-5}\text{P})]\times(10^{-7}\text{கி. - நிறை})^{-1}\text{சமீ.}^2.$$

திண்மங்களின் நெருக்கத்தகவு பற்றிய பொதுக் குறிப்புக்கள்.—திண்ம நிலையிலுள்ள மூலகங்களின் நெருக்கத்தகவானது அணுவெண்ணின் ஆவர்த்தனச் சார்பு ஆகும் என றிச்சேட்ஸ் முதன்முதலாகக் காட்டினர். இதைப் பிரிஜ்மான் மெய்ப்பித்தார். இதுவரை திண்ம

நிலையிற் சோதிக்கப்பட்ட எல்லா மூலகங்களுள் காரமூலகங்களே உயர் நெருக்கத்தகவுடையவை. திண்ம நிலையில் அரிய வாயுக்களின் நெருக்கத்தகவானது இன்னும் பெரிதாய் இருக்கக்கூடும். ஆனால் அதற்கான நேரடித் துணிவொன்று இன்னும் செய்யப்படவில்லை ; அப்பரிசோதனையானது மிகக் கடினமானதாம்.

பயிற்சி IX

9·01. திண்மமொன்றின் மீள்தன்மையின கருததை விளக்குக. எவ்வாறு கனவளவு மீள்தனமைககு வரைவிலககணம் கூறபபடுகிறது ? அதன பெறுமானத்தைத் தரபபட்ட திணமமொனறிறகு எவ்வாறு துணியலாம ?

9·02. கடலின மேறபரபபிறகுக் கீழே 4 மைல் ஆழத்தில கடல் நீரின அடர்த்திக்குப் பெறுமானம காணக ; மேறபரப்பிற் செறிவு 1·025 கி.மிலீ.$^{-1}$ எனவம, கடல நீரின் நெருககத்தகவு $4 \cdot 3 \times 10^{-5}$ தைன. பாா.$^{-1}$ எனவும் கொள்க. [1 பாா $= 10^6$ தைன. சமீ.$^{-2}$.]

அதிகாரம் X

பரப்பிழுவை

எல்லாத் திரவப் பரப்புக்களினது அடிப்படை இயல்பும் அதற்கான மூலக் கூற்று விளக்கமும்.—*அவற்றின பரப்புக்கள் இழிந்த பரப்பளவு உடையதாய் இருக்கும்வண்ணம் திண்மங்களுடன தொடுகை வைத்திராத திரவங்கள் யாவும் தத்தம் பரப்புக்களின் வடிவங்களை மாற்றியமைக்க முயல்கின்றன. இது திரவமொவ்வொன்றினதும் அடிப்படை இயல்பு ஆகும்; அது பல வழிகளில் தன்னை வெளிப்படுத்துகிறது. எடுத்துக் காட்டாகக் கனவளவிற சிறிதான திரவங்கள் கோளவடிவத்தை அடைய முயல்கின்றன; சவர்க்காரப் படலங்கள் சுருங்க முயல்கினறன. ஈர்ப்பு விசைகளாற் பாதிக்கப்படாத திரவத்துளிகளின் பரப்புகளால் மேற்கொள்ளப்படும் வடிவங்களைப்* **பிளாற்றோ** (Plateau) *என்பார்* (1873) *விரிவாக ஆராய்ந்தார். (a) அவற்றின் நிறையானது புறக்கணிக்கத்தக்க அளவில் அத்துணை மெல்லிய சவர்க்காரப் படலங்கள், (b) கிட்டத்தட்ட அதே அடர்த்தியுடைய நீர்—அற்ககோல் கலவையில் தொங்கிய ஒலிவெண்ணெய்த் துளிகள் என்பவற்றை அவர் பயன்படுத்தினர். இவவாறு பல சதமமீற்றர் விட்டமுடைய கோளங்கள் கிடைக்கப் பெற்றன. பூச்சிய ஈர்ப்புப் புலத்திலுள்ள திரவத்துளியொன்றினது பரப்பின் எந்தப் புள்ளியிலும்* R_1 *உம்* R_2 *உம் தலைமை வளைவாரைகளாயின், அப்பொழுது,*

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{மாறிலி}$$

ஆகும் என்னும் முடிவிற்கு அவர் வந்தார்.

திரவங்களிடத்துத் தரப்பட்ட கனவளவொன்றிற்கு, பரப்பிலுள்ள எந்தப் புள்ளியிலும் தலைமை வளைவுகள் மேற்படித் தொடர்பைக் கீழ்ப்படியும்பொழுது, மேற்பரப்பளவு ஓர் இழிவு ஆகும் எனக் கேத்திரகணித முறைப்படி காட்டமுடியும்.

எல்லாத் திரவங்களுக்கும் இயற்கையாயமைந்த இவ்வியல்பை மூலக் கூற்றுக் கொள்கையொன்றின் மூலமாக விளக்கிவைக்கும்பொருட்டு, பாயிகளினிடத்து (அதாவது, திரவங்களும் வாயுக்களும்) வரையறுத்த பருமனும் வடிவமும் உடைய பகுதிப் பொருள்களாகிய அவற்றின் மூலக்கூறுகள் சுயாதீனமின்றி ஒன்றிற்கொன்று சார்பாக அசையமுடியும் என்னும் செய்தியை ஞாபகப்படுத்திக் கொள்ளல் வேண்டும்; திரவங்களில் இவ்வியக்கங்கள், ஒருங்கிணைகின்ற விசைகளாற் பெரிதும் கட்டுப்படுத்தப் படுகின்றன. திரவங்களிலும் வாயுக்களிலும் மூலக்கூறுகளின் சுயாதீன அசைவானது அப்பொருள்களைத் திண்மங்களிலிருந்து நேரே வேறுபடுத்துகிறது. அவை **பாயுந்தன்மை** *உடையன எனப்படுகிறது.*

இனித் திரவமொன்றின் அகத்திலுள்ள மூலக்கூறுகள் எல்லாத் திசைகளிலும் மூலக்கூற்று விசைகளால், அதாவது அக்கம்பக்கமான மூலக்கூறுகளுக்கிடையேயுள்ள கவரும் விசைகளால் தாக்கப்படுகின்றன. தரப்பட்ட இத்தகைய எந்த மூலக்கூறு மீதும் தாக்குகின்ற இவ்விசைகளின் சராசரி விளையுளானது மிகச் சிறிதாகும்; தரப்பட்ட நிலையொன்றிலிருந்து அம்மூலக்கூறானது விரைவில விலகமாட்டாது. எனினும் திரவ மேற்பரப்பிற்கு அணித்தாயுள்ள மூலக்கூறுகளின சூழல் முற்றிலும் வேறு. இத்தகைய மூலக்கூறொன்றைக் கருதுமிடதது, மேறபரப்பிற்கு அணித்தாய் ஆவிமயமாக, ஒத்திட்டுப்பார்க்கில் எண்ணிக்கையில குறைவாக, உள்ள மூலக்கூறுகளால் ஆகும் விளைவைப் புறக்கணித்தால், அம்மூலக்கூறானது திரவத்தின் உட்புறத்தை நோக்குமுகமான கூறு உடைய விசைகளால் மட்டுமே கவரப்பட முடிகினறது. எனவே அவ்வொவவொரு மூலக்கூறும் அதை உள்முகமாக அசையுமாறு தூண்டுகின்றதும், ஒத்திட்டுப் பார்க்கில் பெரியதுமான விளையுள் விசையொன்றை அனுபவிக்கும்; இத்தகைய விசைகளை அனுபவிக்கின்ற மூலக்கூறுகள் அதிகமாக இருக்கிறபோதிலும் அவற்றின வெற்றிடஙகளை எடுக்கும்பொருட்டு வெளிநோக்கி அசைகின்ற மூலககூறுகளின எண்ணிக்கையானது ஒப்பிட்டுப்பார்க்கில் குறைவாகவே இருக்கும். இவ்வாறாக, திரவப்பரப்பொன்றின் இயல்பாய்ச் சுருங்கும் தன்மை எளிதாக விளக்கப்படுகின்றது.

பரப்புச் சக்தியும் பரப்பிழுவையும்.—பரப்பு மூலக்கூறுகள் மீதுள்ள விளையுள் விசைகள் காரணமாகத் திரவப்பரப்பானது, அதன்கண் குறைந்தளவு மூலக்கூறுகளைக் கொணடிருககுமவரை சுருஙகுமாறு தூண்டப்படுகிறது; அதாவது அங்கு இருக்கக்கூடிய எந்தப் புற விசைகளினாலும் தரப்பட்ட திரவக் கனவளவொன்று அவற்றால் தாக்கப்படுமிடத்து, மேற்பரப்பானது கூடிய அளவிற் சிறிதாகவே இருத்தல் வேண்டும்; எனவே மேற்பரப்பு மூலக்கூறு ஒவ்வொன்றும் நிலைச்சக்தி, அதாவது அதன் நிலை தொடர்பான சக்தியை, உடையதாய் இருத்தல் வேண்டும். மேறபரப்பின் பரப்பலகு ஒன்றிற்கான இச்சகதியின் அளவானது பதார்த்தத்தின் **உள்ளீட்டுப் பரப்புச் சக்தி** அல்லது **பரப்புச் சக்தியடர்த்தி** எனபபடுகிறது. திரவப் பரப்புக்களும் திண்மப்பரப்புக்களும் பரப்புச்சக்தி உடையன; ஆனால் பரபபானது அசையுந்தனமை உடையதாய் இருக்கும்போது மட்டுமே அச்சக்தியின் விளைவுகள் தோற்றமளிக்கும். திரவப் பரப்பொன்றனது நிலைச்சக்தியின் உறைவிடம் ஆகும் என்னும் செய்தியானது சவர்க்காரப் படலமொன்றை (எடுத்துக்காட்டாக, வடிதாளொன்றின் கூரிய நுனியைப் பயன்படுத்தி) உடையச் செய்யும் பொழுது வெளிப்படையாகிறது; அப்பொழுது திரவம் எல்லாத் திசைகளிலும் நியாயமான அளவு வேகத்துடன் எறியபபடுகிறது; அதாவது நிலைச்சக்தியானது இயக்கச் சக்தியாய் மாறிவிட்டது.

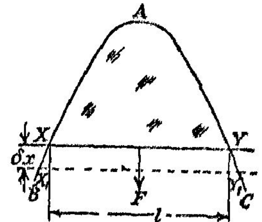
கூனலுற்ற கம்பி BAC, படம 10·01, இன் இரு கிளைகளுக்கிடையே திரவப்படலமொன்று ஆக்கப்பட்டும் அக்கிளைகள் மீது ஒரு கிடையான நேர்கம்பி XY யானது குறுக்கே வைக்கப்பட்டும் இருக்க. படலம் நிலைக் குததாக இருக்கும் பொழுது, சமநிலையையிட்டு XY யிற்குச் செங்குத்தாக விசை F தேவைப்படுகிறது எனக் கொள்க. அப்பொழுது F ஆனது கம்பிமீது படலத்தாலாகும் விசையாற் சமமாக்கப்படுதல் வேண்டும். கம்பியின் அலகுநீளமொன்றிற்கு இவ்விசையின் பருமன் γ எனக் கொள்க. XY யின் நீளம் l எனின், கம்பிமீது மேற்படி காரணத்தால் ஆகின்ற முழு விசையும் $2\gamma l$ ஆகும்; இங்கு படலம் இரு பக்கங்கள் உடையதாதலின் 2 என்னுங் காரணி புகுததப்படுகிறது. எனவே

$$F = 2\gamma l.$$

γ ஆனது திரவத்தின் **பரப்பிழுவை** எனப்படுகிறது.

[அவற்றிற்கிடையே படலம் ஒன்றை ஆக்கும்பொருட்டுச் சமாந்தரமான கம்பிகள் பயனபடுத்தப்பட்டிருப்பின் தொகுதி உறுதியில்லாதது என்பது குறித்தற்பாலது. எடுத்துக்காட்டாக, F மிகப் பெரிதாய் இருக்குமாயின், l மாறுமல் இருக்கிறபடியால், F இன சமமாக்கலுக்கு விசை $2\gamma l$ ஆனது ஒருபோதும் போதிய அளவில் இருக்கமாட்டாது. கொள்கையைப் பொறுத்தமட்டில் உறுதியின்மையைப் பற்றிக் கவலையில்லை; ஆனல் இங்கு எடுததுகொள்ளப்பட்ட உறுதியான ஒழுங்கைப் பயன்படுத்தி γ இற்கு அண்ணளவான மதிபபீடொனறைப் பெறலாம். கம்பியின் நிறை போதிய அளவில் இராவிட்டால் அதன்மீது சுமையேற்றலாம். அப்பொழுது $F = mg$; இங்கு m ஆனது கம்பி, அதன் சுமை என்பவற்றின் மொத்தத் திணிவு ஆகும்.]

உள்ளீட்டுப் பரப்புச் சக்தி, பரப்பிழுவை என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு பற்றியது.—XY ஆனது ஒரு சிறு தூரம் δx அசைந்து சமாந்தரமான நிலை X_1Y_1 ஐ அடைக; கம்பிமீதுள்ள புற விசை F ஆகுக, படம் 10·06. இனி அதற்கு வெப்பம் (வெப்பச்சக்தி) வழங்கப்படாவிடின், இவ்வாறு ஈர்க்கப்பட்ட படலமொன்றின் வெப்பநிலையானது இறங்கும். அதன் தொடக்க வெப்பநிலையை அடைதற்கு வேண்டிய வெப்பம் படலத்திற்கு அளிக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்வோம்.



படம் 10·01. பரப்பிழுவை.

ϵ ஆனது படலத்தின் உள்ளீட்டுப் பரப்புச் சக்தி, அதாவது மேற்பரப்பின் அலகுப் பரப்பளவுக்குரிய நிலைச் சக்தி எனின், "மேற்பரப்பு" மூலக்கூறுகளின் நிலைச்சக்தியுயர்வு $(2l\,\delta x)\epsilon$ ஆகும்; படலம் இரு மேற்பரப்புக்கள் உடையதாதலின் 2 என்னுங் காரணி இங்கு புகுத்தப்படுகிறது. ஈர்க்கும்

விசையாற் செய்யப்படும் வேலை $F\delta x$ ஆகும். இருந்தாலும் இவ்விரு கணியங்களையும் சமன்படுத்தலாகாது ; ஏனெனில் வெளிப் பொருள்களி லிருநது படலத்திற்கு வெப்பம் அளிக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்க. படலததின் வெப்பநிலையை அதனது தொடக்கப் பெறுமானத்தை மீளச் செய்யும் பொருட்டு வழங்கப்பட்ட வெப்பம் (வெப்பச் சக்தி) δQ எனின்

$$(2l\,\delta x)\,\epsilon = F\,\delta x + \delta Q$$

எனப் பெறுகிறேம்.

இனி, படலம் சமநிலையில் இருக்கும்பொழுது விசை F ஆனது கம்பி **XY** மீது படலத்தாலாகும் இழுப்புக்குச் சமனெதிர் ஆகும். அலகு நீள மொன்றில் இழுப்பு γ எனின், அப்பொழுது $2\,l\gamma = F$ ஆகும் ; எனவே, மேற்படி சமனபாடானது

$$(2l\,\delta x)\epsilon = 2\gamma l\,\delta x + \delta Q.$$

அல்லது
$$\epsilon = \gamma + \left(\frac{\delta Q}{2l\,\delta x}\right).$$

இதை
$$\epsilon = \gamma + \eta$$

என எழுதலாம் ; இங்கு $\eta = \dfrac{\delta Q}{2l\,\delta x}$; இது படலத்தின் பரப்பில் ஓர் அலகு உயர்வையிட்டு வழங்கப்பட்ட வெப்பச் சக்தியாகும்.

இனி கம்பியின் ஒவ்வோர் அலகுநீளமீதும் தாக்குகின்ற விசை γ ஆனது திரவத்தின் **பரப்பிழுவை** எனப்படுகிறது ; திரவமொன்றின உள் ளீட்டுப் பரப்புச் சக்தியானது உண்மையில் இரு கணியங்களின், அதாவது ஒன்று η எனபதாற் குறிக்கப்படுகினற "வெப்பப்" பகுதி, மற்றது γ அல்லது $\epsilon - \eta$ என்பதாற குறிக்கப்படுகின்ற "பொறிமுறைப்" பகுதி எனபவற்றின் கூட்டுத்தொகை ஆகும் என மேலே கூறியுள்ளது காட்டு கிறது ; எனவே பரப்பிழுவையானது உள்ளீட்டுப் பரப்புச் சக்தியின் பொறிமுறைப் பகுதிக்குச் சமன் எனக் காண்கிறேம். பரப்புச் சக்தியடர்த்தி யின் இப்பொறிமுறைப் பகுதியை **ஹெம்மோல்ற்ஸ்** என்பார் **சுயாதீனப் பரப்புச் சக்தியடர்த்தி** என அழைத்தார். அதனது வெப்பநிலை யானது மாருது இருக்கும் வண்ணம் வெப்பம் அளிக்கப்படின், மேற் பரபபொன்றின் முழுச் சுயாதீனச் சகதியுயர்வானது அம்மேற்பரப்புமீது செய்யப்பட்ட புற வேலைக்குச் சமன ஆகும் என்பது புலப்படும்.

சுயாதீனப் பரப்புச் சக்தியடர்த்தி அல்லது பரப்பிழுவை.—வெவ்வேருன சூழல்களில் திரவ மேற்பரப்புககள் கொள்ளும் வடிவங்களையும் நிலை களையும் பற்றிய பிரச்சினைகளைத் தீர்க்குமிடத்து கீழ்வருகின்ற கணித வுபாயத்தைப் பயன்படுத்துதல் பெருமபாலும் வசதியாம் ; மேற்பரப்பின் வடிவத்தில் தேவையான எந்த மாயமாற்றமும் சமவெப்புச் சூழலில்

நடைபெறுகின்றது எனக் கொள்ளப்படுகிறது ; மேலும் அலகுப் பரபபொனறிறகான சுயாதீனப் பரப்புச் சக்தியானது திரவப்பரப்பிலுள்ள விசையொன்ருல் பிரதிபிடப்படுகிறது. மேற்பரப்பில் நீளம் δs உடைய சிறுகோடொன்றை வரைந்தால் அதன்மீதுள்ள விசை $\gamma\,\delta s$ ஆகும் ; அது திரவப் பரப்பில் δs இற்குச் செங்குத்தாக ஆற்றும். γ எனபது திரவத்தின் **பரப்பிழுவை** எனப்படுகிறது. சுயாதீனப பரப்புச் சக்தி, பரப்பிழுவை என்பவற்றின் பரிமாணங்கள் முறையே $\frac{ML^2T^{-2}}{L^2}$ உம் $\frac{MLT^{-2}}{L}$ உம் ஆதலாலும், அவை இரண்டும் MT^{-2} எனச் சுருங்குவதாலும் இத்தகைய முறையானது எபபொழுதும் நிகழக்கூடியது.

அதனது சொந்த ஆவியுடன் (அல்லது வளியுடன்) தொடுகை வைத்திருக்கின்ற திரவப் பரப்பொன்றின் தெளிவு.—திரவமொன்றிற்கும் அதனது சொந்த ஆவிக்கும் (அல்லது மேலே இருக்கினற வாயு—அது வழக்கமாக வளி) இடையேயுள்ள நிலைமாற்றப்படையானது ஒரு அல்லது இரு மூலக்கூறுகள் தடிப்பு உடையது, அதாவது பரப்பிற்குச் செங்குத்தான திசை வழியேயுள்ள அடர்ததி மாறுகை வீதமானது பரப்பின் அருகில் பெரிது என்னும் கருததானது பரிசோதனைச் சான்றுகளால் ஆதரிக்கப்படுகிறது. ஒளியியலிலிருந்தே மிகச் சிறந்த ஆதாரத்தைப் பெறுகின்ருேம். முறிவுக் குணகம் μ உடைய திரவமொனறிறகும் அத்திரவத்திற்கு மேலேயுள்ள ஆவி அல்லது வாயுவுக்குமிடையே நிலைமாறலானது திடீரெனநிகழுமாயின, படுகோணம் தான்$^{-1}\mu$ ஆகுமிடத்து அத்தகைய மேற்பரப்பால் தெறிக்கபபடுகினற ஒளியானது முற்றிலும் தளமுனைவாக்கப்பட்டிருக்கும் ; ஆனுல் கீழே இருக்கின்ற திரவத்திலிருந்து அதற்கு மேலேயுள்ள வாயுவரை, படிப்படியாக மாறுகின்ற முறிவுக்குணகம் உடைய நிலைமாற்றப்படையொன்று இருக்குமாயின், தெறிக்கப்பட்ட ஒளியானது எப்பொழுதும் நீள்வளைய முனைவாக்கப்பட்டிருக்கும். பின்னர் கூறப்படவிருக்கின்ற முறையொன்ருல், (பக்கம் 536 பார்க்க) தற்செயலாகத் தோன்றும் நெய்ப்படை அப்புறப்படுத்தியுள்ள நீர் மேற்பரப்பொனறிற்குப் படுகோணமானது தான்$^{-1}$ 1·333 என இருக்கும்போது, அந்நீரால் தெறிக்கப்பட்ட ஒளியிற் சற்றேனும் நீள்வளையமுனைவுத்தன்மை இருக்கவில்லை என றேலி† (Rayleigh) என்பார் காட்டினர். அத்தகைய நெய்ப்படையானது ஆக ஒரேயொரு மூலக்கூறு தடிப்பு உடையது என நாம் இன்று அறிவோம் ; எனவே நிலைமாறல் பெரிதும் திடீரானது.

மிகச் சமீபகாலத்தில் ராமனும் ராமதாசும் தூய நீரிடத்தும் சிறு நீள்வளைய முனைவுத்தன்மையைக் கண்டுள்ளனர் ; ஆனுல் அது பரப்பிலுள்ள மூலக்கூறுகளின் வெப்பக்கலக்கத்தால் ஆகக்கூடும் எனக் கருதலாம்.

† *Phil. Mag.*, 33, 1, 1892.

உதாரணம்.—நிலைக்குத்துத் தளத்தில இருக்கின்ற முககோணிச் சட்டமொன்றில் சவர்க்காரப் படலமொன்று ஆக்கப்பட்டிருக்கிறது ; சட்டத்தின் புயங்களுள் இரண்டு நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன சமமாகச் சாயந்திருக்கின்றன ; முககோணியின் அடியாகிய கம்பியானது கிடையாக இருககின்றது ; ஆனால் அது பரப்பிழுவைகளின தாககத்தால் மேலே அல்லது அதனது நிறையின தாக்கத்தால கீழே சுயாதீனமாக வழுககலாம். சமநிலைத் தானமொன்றை அககமபியானது அடைய முடியும் எனக் காட்டுக ; மேலும் தணித்தல் விசைகளைப் புறக்கணித்து அதனது நிலையியற் சமநிலைத் தானம் பற்றிக் கம்பியடியின் அலைவுக் காலத்தைக காண்க.

படம் 10·02 (*a*) ஆனது திணிவு m, நீளம l உடையதும் படலத்துடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்றதுமான கம்பியின் நிலையியற் சமநிலைத் தானத்தைக காட்டுகின்றது. படலம் ஆக்கப்பட்ட கரைசலின் பரப்பிழுவை γ எனின், சமநிலையையிட்டு

$$mg = 2\gamma l$$

எனப பெறுகிறோம் ; இங்கு g ஆனது புவியீர்ப்புச் செறிவு ஆகும். படம் 10·02 (*b*) யில், அதனது சமநிலைத் தானத்திலிருநது கீழ்முகமாகத் தூரம் z பெயர்க்கப்பட்ட கமபி காட்டப்பட்டிருககிறது. நீளம் l' வழியே கம்பியானது படலத்துடன் தொடுகை வைததிருக்கின்றது எனவும் முககோணியின உச்சியில் கோணம் θ எனவும் ஆயின்

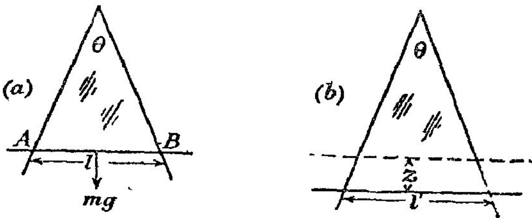
$$\text{தான } \tfrac{1}{2}\theta = \frac{l' - l}{2z}.$$

சமவெப்பச் சூழல் உள்ளது எனக் கருதியும் தணித்தலைப் புறக்கணித்தும், இயக்கச் சமன்பாடு

$$m\ddot{z} = mg - 2\gamma l' = 2\gamma(l - l') = -\frac{mg}{2l} \cdot 2z. \text{ தான் } \tfrac{1}{2}\theta.$$

ஆகிறது.

$$\therefore\ \ddot{z} + \left(\frac{2g}{l}\ \text{தான் } \tfrac{1}{2}\theta\right)z = 0\ ;$$



படம் 10·02. முக்கோணிச் சட்டப்படலொன்றில் சவர்க்காரப் படலம்.

எனவே இயககம் எளியயிசையினது ; அதனது ஆவர்த்தன காலம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g\ \text{தான் } \frac{1}{2}\theta}}.$$

[ந.கு. $\theta \to 0$ ஆகுமிடதது $T \to \infty$; ஆனால மேற்படி கோவையைப் பெறுமிடத்து அத்துணை எடுகோள்கள் கையாளப்பட்டிருககிறபடியால, அககோவையைப் பயனபடுததிக் கம்பியின் உறுதிப்பாட்டைப பற்றி எடுததுரைத்தலாகாது.]

கோளப் பரப்பொன்றிற்குக் குறுக்கேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசம்.—திரவமொன்றில் வாயுவாலான கோளக்குமிழியொன்றின் ஆரை r ஆகுக, படம் 10·03 (a). குமிழிக்கு வெளியே அமுக்கம் P ஆகுக. உள்ளே அமுக்கமானது $P+p$ யிற்குச் சமன் எனக் காட்டவேண்டியதாகின்றது, இங்கு p ஆனது துணியவேண்டியதொரு கணியமாகும். இதன்பொருட்டு r ஆனது $r+\delta r$ என மாறுக ; இங்கு δr ஆனது மிகச் சிறிதாய் இருக்கிறபடியால் உள்ளே ஆற்றுகின்ற அமுக்கமானது இதனுல் மாற்றம் அடைய மாட்டாது. மேலும் குமிழியின் தொடக்க வெப்பநிலையானது மீளப்படுமாறு அதனது பரப்பிற்கு வெப்பம் அளிக்கப்படுக. $A=4\pi r^2$ எனின், அப்பொழுது ஆரையின் மாற்றத்துடன் தொடர்புள்ள பரப்பளவுயர்வு δA ஆனது, $\delta A=8\pi r\,\delta r$ என்பதால் தரப்படுகிறது. γ ஆனது திரவத்தின் பரப்பிழுவை அல்லது நாம் ஏற்கெனவே கண்டுள்ளவாறு, அலகுப்பரப்பொன்றிற்கு அதனது சுயாதீனப் பரப்புச்சக்தி ஆயின், முழுச் சுயாதீனப் பரப்புச் சக்தியுயர்வு $8\pi\gamma r\,\delta r$ ஆகும். இது குமிழியின் விரிவின்போது செய்யப்பட்ட வேலைக்குச் சமன். இவ்வேலையை மதிப்பிடும் பொருட்டுக் குமிழியின் பரப்பில் δS ஒரு மூலகமாகுக. அதன்மீது வெளிப் புறமாகத் தாக்குகின்ற விளையுள் விசையானது

$$(P+p)\ \delta S - P\,\delta S = p\,\delta S$$

ஆகும் ; எனவே விரிவின்போது செய்யப்பட்ட வேலை

$$\delta r.\int p\ dS = p.\,4\pi r^2.\,\delta r.$$

செய்யப்பட்ட வேலைக்குப் பெற்றுள்ள இரு கோவைகளையும் சமன்படுத்த,

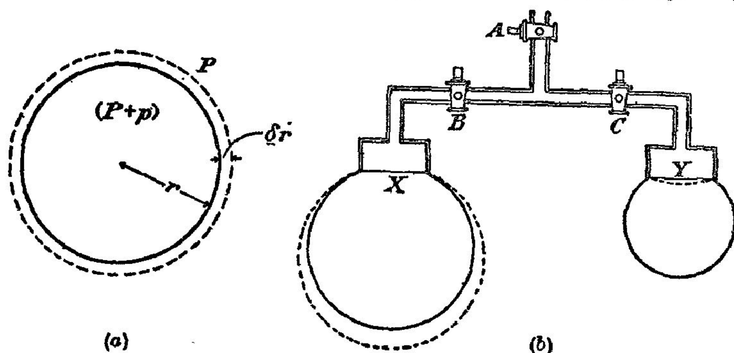
$$4\pi r^2 p\ \delta r = 8\pi\gamma r\ \delta r$$

அல்லது
$$p=\frac{2\gamma}{r}.$$

குமிழியானது சவர்க்காரக் குமிழியாக இருந்திருந்தால் சவர்க்காரப் படலமொன்று இரட்டைப் பரப்பு உடையதாதலால், இவ்வமுக்கமிகை $\frac{4\gamma}{r}$ ஆய் இருந்திருக்கும்.

சவர்க்காரக் குமிழியொன்றின் ஆரை கூடும்பொழுது அதனுள்ளே ஆற்றுகின்ற அமுக்கம் குறைகின்றது என்னுஞ் செய்தியைக் கீழ்வருகின்ற பரிசோதனை காட்டுகிறது. ஒவ்வொன்றும் விட்டம் கிட்டத்தட்ட 2 சமீ. உம் நீளம் 1 சமீ. உம் உடைய இரு பித்தளைக் கிண்ணங்கள் X உம் Y யும் குழாயடைப்புக்கள் A, B, C என்பவற்றுடன் படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன, படம் 10·03 (b). X, Y என்பவற்றின் திறந்த நுனிகள் சவர்க்காரக் கரைசலொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்றன ; விட்டத்தில் நியாயமான அளவு வேறுபடுகின்ற சவர்க்காரக் குமிழிகள் ஊதப்படுகின்றன. பெரிய குமிழி ஆக்கப்படும்போது B திறந்தும் C மூடப்பட்டும் மறுதலையாகவும் இருக்கின்றன. அடுத்து A யை மூடி,

குழாயடைப்புக்கள் B யையும் C யையும் திறந்து இரு குமிழிகளும் ஒன்றேடொன்று தொடர்புகொள்ளுமாறு செய்யப்படுகின்றது. சிறு குமிழியிலிருந்து பெரிய குமிழியுள் வளி சென்று, பிந்தியதை விரியவும் முந்தியதைச் சுருங்கவும் செய்கிறது. ஈற்றில் Y யின் திறந்த நுனிக்குக்



படம் 10·03. கோளக் குமிழியொன்றில் அமுக்கமிகை.

கீழே பிதுங்கியிருக்கின்ற, கோளப்பரப்பொன்றின் பாகமான சவர்க்காரப் படலத்தின் வளைவாரைக்குச் சமனுகப் பெரிய குமிழியின் வளைவாரை வரும்வரை இது தொடர்ந்து நடைபெறுகிறது—படத்திலே குற்றிட்ட கோடுகளைப் பார்க்க. நேரம் சென்றதும் பெரிய குமிழியின் சுவர்களின் தடிப்பு மிக மெல்லியதாகிக் குமிழி வெடிக்கிறது; Y யில் இருக்கின்ற படலம் உடனே தட்டையாகிறது; சிறிது நேரம் கழிந்ததும் அது மிக மெல்லியதாகி ஈற்றில் உடைகிறது.

உருளைப் பரப்பொன்றிற்குக் குறுக்கே அமுக்க வித்தியாசம்.—படம் 10·03 (a) ஆனது உருளைக்குமிழியொன்றின் குறுககுவெட்டை எடுத்துக்காட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். திரவமொன்றின இத்தகைய குமிழியின் ஆக்கம் கடினமானதாதலால், அது இரு பரப்புக்கள் உடைய சவர்க்காரப் படல மொன்றுலானது எனக் கொள்வோம். இவ்வுருளையில் நீளம் l ஐக் கருதுக. r ஆனது $r+\delta r$ என மாற்றம் அடைந்தபோது முன்போல பரப்பளவுயர்வு $2[2\pi(r+\delta r-r)l]$ ஆகும். படலத்தின் வெப்பநிலை அதனது தொடக்கப் பெறுமானத்தை அடையுமாறு அதறகு வெப்பச் சக்தி அளிக்கப்படுக. சுயாதீனப் பரப்புச் சகதியுயர்வானது $4\pi l\gamma\,\delta r$ ஆகும். இனி முந்திய பந்தியிற் பயனபடுத்தியுள்ள முறைப்படி கணிததால் செய்யப் பட்ட வேலை $2\pi r l p\cdot\delta r$ ஆகும். இவ்விரு கணியங்களையும் சமன்படுத்த,

$$p=\frac{2\gamma}{r}.$$

ஒரேயொரு உருளைப்பரப்பு இருக்குமிடத்து அமுக்கமிகை $\frac{\gamma}{r}$ ஆகும்.

தொடர்ச்சியின்மையில்லா எந்த வளைந்த பரப்பிற்கும் குறுக்கேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசம்.—பொதுப்பட்ட வளைந்த பரப்பொன்றிறகுக குறுக்கே நாம் காணப்போகின்ற அமுக்க வித்தியாசத்திற்கான கோவையானது யங்கிற்கும் லப்பிளாசிற்கும் தெரிந்திருந்ததே. திரவமொன்றின் பரப்பிழுவையைத் துணிவதற்குரிய அதி திட்பமான முறைகளுக்குப் பெரும்பாலும் இதுவே அடிப்படைத் தத்துவம். ABCD ஆனது வளைந்த திரவபபரப்பொன்றின் ஒரு சிறு பாகமாகுக, படம் 10·04 (a) ; அதன அடுத்துள புயஙகளுககிடையேயுள்ள கோணங்கள் செங்கோணஙகள் எனவே கருதபபடுகின்ற மூலகத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமன் ஆகும். மேற்பரப்பிற்கு மேலேயுள்ள புள்ளியொன்றைக் குறித்து அது குவிவானதாகுக. மேற்பரப்பில் A யிலும் B யிலும் உள்ள செஙகுத்துக்கள் O_1 இல் ஒன்றையொன்று வெட்டுக ; எனவே $AO_1 = BO_1 = r_1$ (என்க) ; அது போலவே B யிலும் C யிலும் உள்ளவை O_2 இல் ஒன்றையொன்று வெட்டுக ; இங்கு $BO_2 = CO_2 = r_2$ (என்க). அமுக்கமானது பரப்பின் குவிவான பக்கத்தில் P யும், அதன் குழிவான பக்கத்தில் $(P+p)$ யும் ஆகுக. திரவத்தின் பரப்பிழுவை, அதாவது அதன் சுயாதீனப் பரப்புச் சகதியடர்த்தி γ ஆகுக ; வெபபநிலை மாறுது இருககும்பொழுது ABCD என்பதை அதன் மேற்பரப்பின் ஒரு பாகமாகக்கொண்ட திரவத்துளியானது, அம்மூலகம் $A_1B_1C_1D_1$ என்னும் நிலையைக் கொள்ளுமாறு விரிகிறது எனக் கொள்க. கருதப்படும் பரப்புமூலகத்தின் புள்ளியொவ்வொன்றின பெயர்ச்சியும் δn ஆகுக. மூலகத்தின் பக்கங்கள் மீதுள்ள அமுக்கங்களால் ஆகும் விசைகள் முறையே P(ABCD யின் பரப்பளவு) உம் $(p+P)$ (ABCD யின பரப்பளவு) உம் ஆகும். எனவே பரப்பின் இந்தப் பாகத்தைப் பொறுத்தமட்டில் செய்யப்பட்ட வெளிவேலையானது

$$p\,(ABCD)\,\delta n$$

ஆகும்.

பரப்பிலே கருதப்படுகின்ற மூலகத்தின் சுயாதீனப் பரப்புச் சக்தியுயர்வானது பரப்பளவுயர்வின் γ மடங்காகும் ; அதாவது ஒவ்வொரு பரப்பு மூலகமும் செவ்வகமானதால்

$$\gamma(A_1B_1C_1D_1 - ABCD) = \gamma[(A_1B_1.B_1C_1 - AB.BC)].$$

ஆனல்,

$$\frac{A_1B_1}{r_1+\delta n} = \frac{AB}{r_1}, \quad \text{அல்லது} \quad A_1B_1 = AB\left(1+\frac{\delta n}{r_1}\right);$$

அதுபோலவே

$$B_1C_1 = BC\left(1+\frac{\delta n}{r_2}\right).$$

∴ சுயாதீனப் பரப்புச் சக்தியுயர்வானது

$$= \gamma\left[AB.BC\left(1+\frac{\delta n}{r_1}\right)\left(1+\frac{\delta n}{r_2}\right) - AB.BC\right];$$

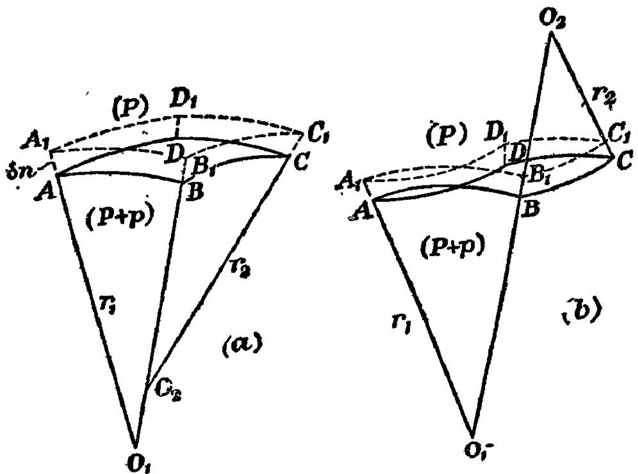
$(\delta n)^2$ ஐக் கொண்ட உறுப்பு புறக்கணிக்கப்பட்டால் இது

$$\gamma\,\delta n\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\mathrm{AB.BC}$$

ஆகும். வெப்பநிலைமாறல் இராதவண்ணம் படலத்துக்கு வெப்பம் அளிக்கப்படுகிறது என்னும் நிபந்தனையின்கீழ், இச்சுயாதீனப் பரப்புச் சக்தியு யாவானது மேற்பரப்பின் விரிவின்போது செய்துள்ள வேலைக்குச் சமன் ஆதலால்,

$$p=\gamma\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

எனப் பெறுகிறோம்.



படம் 10·04. கூனலுற்ற எந்தத் திரவப்பரப்பிற்கும் குறுக்கேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசம்.

O_1, O_2 என்பன பரப்பின ஒரே பக்கத்திற் கிடக்கின்றன என இதுவரை கருதப்பட்டுள்ளது. ஆனல் அவை அவ்வாறு இரா ; படம் 10·03(b) இற் காட்டியுள்ளவாறு அவை இருந்தால் அப்பொழுது

$$\frac{\mathrm{B_1C_1}}{\mathrm{BC}}=\frac{r_2-\delta n}{r_2},\quad \text{அல்லது}\quad \mathrm{B_1C_1}=\mathrm{BC}\left(1-\frac{\delta n}{r_2}\right).$$

எனவே முன்போல,

$$p.(\mathrm{AB.BC}).\delta n=\gamma\mathrm{AB}\left(1+\frac{\delta n}{r_1}\right)\mathrm{BC}\left(1-\frac{\delta n}{r_2}\right)$$

அல்லது
$$p=\gamma\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

ஒரு வளைவாரையானது அமுக்கம் மிகக் கூடுதலாய் அல்லது மிகக் குறைவாய் இருக்கிற பக்கத்திலே கிடக்கும்பொழுது அதை முறையே நேர் அல்லது மறை என எடுத்துக் கொள்ளலாம் என்றால்

$$p=\gamma\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

என்னும் பொதுச் சூத்திரத்தைப் பெறுகிறோம் ; இதிலிருந்து பரப்பானது கோளவடிவம் அல்லது உருளை வடிவம் பெறுமிடத்து அமுக்க வித்தியாசத்துக்குரிய பெறுமானங்கள் உடனே கிடைக்கப் பெறுகின்றன.

பரப்பானது படலமொன்றிற்குரியதாயின், அப்பொழுது இரு மேற்பரப்புக்கள் உள்ளபடியால் ஒவ்வோர் எடுத்துக்காட்டிலும் அமுக்க வித்தியாசம் இருமடங்காகும் ; உண்மையில், படலம் அவ்வளவு இலேசானதாதலால் இங்குள்ள மற்றவிசைகளுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் அதன் நிறை புறக்கணிக்கத்தக்கது.

பொதுமுகப் பரப்பிழுவையும் இரு திரவங்களுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டற் பண்பும்.—ஒன்றோடொன்று கலக்குநதன்மையில்லாத இரு திரவங்கள் ஓய்வாய், அதாவது நிலையியற் சமநிலையில் இருக்கும்பொழுது அவற்றிற்கிடையே வரையறுத்த வேறுபடுத்தும் மேற்பரப்பொன்று உளது. இம்மேற்பரப்பில், ஒன்றோடொன்று கலக்காமல் ஓரின மூலக்கூறுகளுடைய அடுக்கொன்று மற்ற இன மூலக்கூறுகளுடைய அடுக்கொன்றுமீது அமர்ந்திருக்கிறது என்றும், பொதுமுகப்பரப்பிற்கு மேலே அல்லது அதற்குக் கீழே ஒரேயொரு வகைக்குச் சேர்ந்த மூலக்கூறுகளே இருக்கின்றன என்றும் கொள்வோம். முதன்முதலாக மேலடுக்கிலுள்ளவற்றைக் கருதுவோம். இவை மொத்தமாக அவற்றிற்கு மேலேயுள்ள மூலக்கூறுகளால் மேலே கவரப்படுகின்றன ; எனினும் அதற்கு எதிரான திசையில் மற்றத் திரவத்தில் அவற்றிற்கு அடுத்துள்ள மூலக்கூறுகளின் கவர்ச்சியையும் அவை அனுபவிக்கின்றன. எனவே அவற்றின் தானங்களையிட்டு நாம் கருதுகின்ற மூலக்கூறுகள் நிலைச்சக்தி உடையன. அதுபோலவே இரண்டாவது அடுக்கிலுள்ள மூலக்கூறுகளுக்குமாம். இச்செய்திகளின் விளைவாக இரு திரவங்களுக்கிடையேயுள்ள பொதுமுகப் பரப்பில் ஒரு வரையறுத்த அளவு பரப்புச்சக்தி இருத்தல் வேண்டும் ; அலகுப் பரப்பொன்றிற்கான அளவு திரவங்களின் **உள்ளீட்டுப் பொதுமுகப் பரப்புச் சக்தி** எனப்படுகிறது. எனவே இரு திரவங்களுக்கிடையேயுள்ள பொதுமுகப்பரப்பு விரியும்போது வேலை செய்தல்வேண்டும் என்பது தெளிவாம். **அலகுக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்புடைய** நிரலொன்றில் ஒன்றோடொன்று கலக்குந்தன்மையில்லாத A, B என்னும் இரு திரவங்களைக் கருதுக.

பொதுமுகப்பரப்பு, திரவங்கள் என்பவற்றின் உள்ளீட்டு, பரப்புச் சக்திகள் முறையே ϵ_{ab} யும் ϵ_a யும் ϵ_b யும் ஆகுக. அவற்றிற்கு ஒத்த சுயாதீனப் பரப்புச் சக்தியடர்த்திகள் அல்லது பரப்பிழுவைகள் γ_{ab} யும் γ_a யும் γ_b யும் ஆகுக.

இரு திரவங்களையும் நேரடியான இழுப்பொன்றால் முற்றிலும் வெவ் வேறுக்க மட்டுமட்டாய் முடியும் எனக் கொள்க. செய்யப்பட்ட வேலையானது W_{ab} ஆகுக. திரவங்கள் A யிலும் B யிலும் சமவெப்புச் சூழலை நிலைநிறுத்தும் பொருட்டுப் புதிதாய் இயற்றப்பட்ட மேற்பரப்புக்களில் அலகுப் பரப்பளவு ஒன்றிற்கு அளிக்கவேண்டிய வெப்பத்தின் தொகைகள் (வேலையலகுகளில்) முறையே η_a யும் η_b யும் ஆகுக; பொதுமுகப் பரப்பிற்கு அதற்கு ஒத்த கணியம் η_{ab} ஆகுக. அப்பொழுது இவ்வெடுத் துக்காட்டில், பொதுமுகப் பரப்பில் பரப்பலகு ஒன்று அழிக்கப்பட்டும் ஒவ்வொன்றும் பரப்பலகு ஒன்று உடைய, ஒன்று திரவம் A யால், மற்றது திரவம் B யால் ஆன, இரு புதுப் பரப்புக்கள் ஆக்கப்பட்டும் உள்ளன. எனவே இரு மேற்பரப்புக்களுக்கும் அளிக்கப்படவேண்டிய வெப்பம் $-\eta_{ab}+\eta_a+\eta_b$ ஆகும். இம்மாற்றம் முடிவடைந்ததும் உள்ளீட்டுப் பரப்புச் சக்தி $\epsilon_a+\epsilon_b$ ஆகும். எனவே சக்திக் காப்புத் தத்துவத்திலிருந்து

$$\epsilon_{ab}+W_{ab}-\eta_{ab}+\eta_a+\eta_b=\epsilon_a+\epsilon_b.$$

பொதுவாக $\epsilon=\gamma+\eta$ ஆதலின்

மேற்படி சமன்பாட்டை

$$\gamma_{ab}+\eta_{ab}+W_{ab}-\eta_{ab}+\eta_a+\eta_b=\gamma_a+\eta_a+\gamma_b+\eta_a$$

அல்லது $$W_{ab}=\gamma_a+\gamma_b-\gamma_{ab}$$

என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாடு டுப்பிறே† (Dupré) என்பவரால் தரப்பட்டுள்ளது; அது முதன்மையானது. முதலாவதாக, குறிப்பிட்ட பரப்பிழுவைப் பெறுமானங் கள் γ_a யும் γ_b யும் உடைய இரு திரவங்களிடத்து **ஒட்டல்வேலை**, அதாவது W_{ab} பெரிதாய் இருந்தால் பொதுமுகப் பரப்பிழுவை சிறிதாய் இருத்தல் வேண்டும்; இங்கு ஒட்டல்வேலை என்பது வெப்பநிலை மாறுது இருகக, இரு திரவங்களுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டற்பண்புவிசைகளுக்கு எதிராகவும், அவற் றின் பொதுமுகப் பரப்பிற்குச் செங்குத்தான இழுப்பொன்றால் அவற்றை ஒன்றிலிருந்து மற்றதைச் சரிகணக்காக வெவ்வேறுக்கவும், அலகுப் பரப்பொன்றையிட்டுச் செய்யப்படும் வேலை என வரைவிலக்கணம் கூறப் படுகிறது. இரண்டாவதாக இரு திரவங்களினது முழுக் கலக்குந்தன்மைக் குத் தேவையான நிபந்தனையை இது தருகிறது; அதாவது இரு திரவங் களுக்கிடையேயுள்ள பொதுமுகப் பரப்பிழுவையானது ஒன்றில் பூச்சியமாக அல்லது எதிராக இருத்தல் வேண்டும். இனி பொதுமுகப் பரப்பிழுவை γ_{ab} என்பது நேராக இருக்குமிடத்து பொதுமுகத்தின் பரப்பு குறையுமுகமாக இருக்கிறபடியால் அது எதிராக இருக்குமிடத்து எந்தப் பொதுமுகத்தின் பரப்பும் கூடுமுகமாகவே இருக்கும் என்பது தெளிவு. பொதுமுக மேற் பரப்பின் விரியும் ஆற்றலால் நாம் உடனடியாக அறியக் கிடக்கிறது யாதெனில் திரவங்கள் ஒன்றோடொன்று கலக்க முயலும் என்பதே;

† *Théorie Mécanique de la Chaleur*, **1869.**

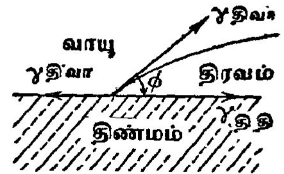
அதாவது அவை கலக்குந்தன்மையுடையனவாம். அதாவது அங்கு இருக்கின்றது என நாம் கறபனே செய்யும் எந்த எல்லேப் பரப்பிற்கும் குறுக்கே மூலக்கூறுகள் யாதொரு தடையுமின்றி அசைகின்றன.

இன்று தரப்பட்ட இரு திரவங்களுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டல் வேலையின் துணிதலுக்கு நேரடி முறை ஒன்றுமேயில்லை ; டுப்பிறேயின சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி அதன் பெறுமானத்தைத் திரவங்களின் பரப்பிழுவைகள், அத்திரவங்களின் பொதுமுகப் பரப்பிழுவை என்பவற்றிலிருந்து பெறல் வேண்டும்.

திரவ, திண்ம, வாயுப் பொருள்களிடையே தொடுகை.—படம் 10·05 ஆனது திண்ம, திரவம, வாயு ஆகியவற்றின் ஊடே செல்கின்ற நிலேக்குத்தான வெட்டொன்றைக் குறிக்க ; அவை யாவும் ஒன்ருெடொன்று தொடுகை வைத்தும் சமநிலேயில் அமைந்தும் இருக்கின்றன ; தொடுகைக் கோடானது கடதாசித் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் நீளம் δl உடையதாகவும் இருக்கிறது எனக் கொள்ளப்படுகிறது. இக்கோட்டிலுள்ள மூலக்கூறுகள் மீது தாக்குகின்ற விசைகள் அலகுநீளமொன்றிற்கு γ_{LG}, γ_{LS}, γ_{SG} என்பவை ஆகும் ; இங்கு குறியீடுகளின் கருத்து பார்த்த உடனேயே விளங்கும். ϕ என்பது காட்டியுள்ள கோணம் ஆகுக ; அதாவது அது திரவத்துக்கும் திண்மத்துக்கும் அவற்றின் தொடுகைக்கோடு வழியே வரைந்துள்ள தொடலித் தளங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம், அல்லது தரப்பட்ட திரவ திண்மங்களின் தொடுகைக் கோணம் ஆகும். சமநிலே இருக்கிறபடியால்

$$\gamma_{LS}+\gamma_{LG}\cdot \text{கோசை } \phi-\gamma_{SG}=0 \quad . \; . \; . \; \text{(i)}$$

எனப் பெறுகிறேம்.



படம் 10·05. திண்மப் பரப்பொன்றின்மீது ஓய்விலுள்ள திரவம்.

ஆனல், திரவ–திண்மத் தொகுதிக்கு டுப்பிறேயின சமன்பாடு

$$W_{LS}+\gamma_{LS}-\gamma_{LG}-\gamma_{SG}=0.$$

தெரியாத திண்மம்–திரவம், திண்மம்–வாயு என்பவற்றின் பரப்பிழுவைகளே நீக்கும் பொருட்டு மேற்படி சமன்பாடுகளேக் கழித்து

$$W_{LS}=\gamma_{LG}(1+\text{கோசை } \phi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{(ii)}$$

எனப் பெறுகிறேம்.

இனி W_{LS} ஆனது திரவத்திற்கும் திண்மத்திற்கும் இடையேயுள்ள ஒட்டற்பண்பின் அளவாகும் ; அதுபோலவே γ_{LG} ஆனது அல்லது அதைக்காட்டிலும் விளக்கமாக $2\gamma_{LG}$ ஆனது, திரவத்துள் அதனது ஒட்டற்பண்பின் அதாவது அதனது ஒருங்கிணைவின் அளவாகும் ; தன்னுடன் தானே தொடுகை வைத்திருக்கின்ற திரவமொன்றினிடத்துப் பொதுமுகப் பரப்பிழுவையானது பூச்சியம் ஆதலால், அத்திரவத்தையிட்டு டுப்பிறேயின் தொடர்பை எழுதி இச்செய்தி உடனே பெறப்படுகிறது. எனவே தரப்பட்ட எடுத்துக்காட்டொன்றில் திரவத்திற்கும் திண்மத்திற்கும் இடையேயுள்ள

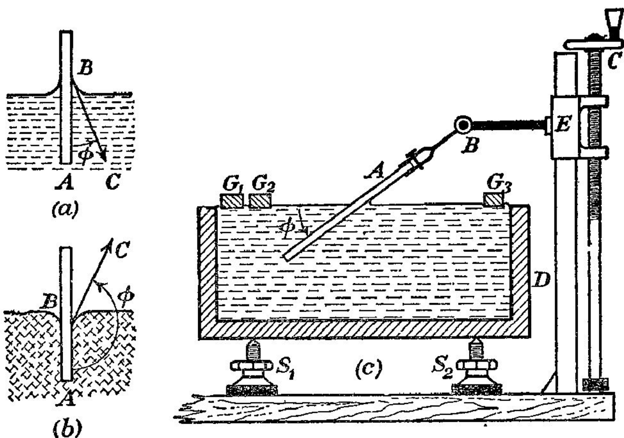
ஒட்டற்பண்பு, திரவத்தின் ஒருங்கிணைவு என்பவற்றின் தொடர்புப் பருமன் களால் திரவதிண்மத் தொடுகோணம் நிருணயிக்கப்படுகிறது என்பதை மேற்படி சமன்பாடு காட்டுகிறது. ϕ பூச்சியம் ஆயின், அதாவது திரவமானது அது தொடுகை வைததிருக்கின்ற திண்மத்தை முற்றிலும் "நனைக்கும்" ஆயின், $W_{LS}=2\gamma_{LG}$; எனவே இவ்வெடுத்துக்காட்டில் திரவத்திற்கும் திண்மத்திற்குமிடையேயுள்ள ஒட்டற்பணபானது திரவத் துள்ளான ஒருங்கிணைவுக்குச் சமன். [$0<\phi<\frac{1}{2}\pi$ ஆயின், திண்மம் பகுதியாகத்தான் திரவத்தால் நனைக்கப்படுகின்றது; $\frac{1}{2}\pi<\phi<\pi$ ஆயின் நனைத்தல் இல்லை.]

தொடுகைக் கோணங்களும் அவற்றை அளத்தலும்.—திண்மமொன்றின் மீது ஓய்வாய் இருக்கின்ற ஒவ்வொரு திரவத்துக்கும் தொடுகைக் கோண மொன்று பொதுவாக உளது என ஏறகெனவே காட்டப்பட்டிருக்கிறது. உதாரணமாக, நீரில் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு சுத்தமான கணணுடித் துண்டொன்றைப் புகுத்தினால், கண்ணுடிக்கு அணித்தாயுளள திரவ மானது எஞ்சிய நீரின் மட்டத்திலிருந்து சற்றுத்தூரம் இழுக்கப்பட்டி ருக்கின்றது எனக் காணப்படும். $\widehat{ABC}$ ஆனது, அதாவது நீரினுள்ள திண்மப் பரப்பிற்கும் நீர்ப்பரப்பு கண்ணுடியைச் சந்திக்கும் இடத்தில், அதற்கு வரைந்துள்ள தொடலித்தளத்திற்குமிடையேயுள்ள கோணமானது, நீர்-கண்ணுடிப் பொதுமுகப்பரப்பின் தொடுகைக் கோணம் எனப்படும், படம் 10·06 (a). கண்ணுடியுடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற நீரினிடத்து இக்கோணம் மிகச் சிறிது ஆகும்; கண்ணுடியுடன் தொடுகை வைத்திருக் கின்ற பென்சோலினிடத்து அது பூச்சியம் ஆகும்.

மேற்படி பரிசோதனையில் இரசத்தைப் பயன்படுத்தியுள்ளபோது கண்ணுடிக்கு அணித்தாயுள்ள திரவமானது இரசப்பரப்பின் பொது மட்டத் திற்குக் கீழே இறங்கிற்று. தொடுகைக் கோணம் மீண்டும் ABC ஆகும், படம் 10·06 (b); ஆனல் அது இப்பொழுது பெரிது ஆகும் (கிட்டத்தட்ட 135°). தரப்பட்ட திரவியமொன்றுடன் இரு திரவங்களின் தொடுகைக் கோணங்கள் வேறுபடக்கூடுமாதலால், அவற்றின் பரப்பிழுவைகள சமமாக இருக்கிறபோதிலும் அத்திரவங்கள் ஒரே மயிர்த்துளைத் தோற்றப்பாடுகளைக் காட்டாமல் இருக்கலாம்.

தட்டையான மேற்பரப்பொன்றின் மீது வைக்கப்பட்டிருக்கின்ற சிறிதளவு திரவத்தின் வடிவில், தொடுகைக் கோணத்தால் ஆகும் விளைவானது எளி திற் பின்வருமாறு காட்டப்படுகிறது. சுத்தமான கண்ணுடிப்பரப்பொன்றின் மீது இட்ட நீரானது கண்ணுடியெங்கும் பரவுகிறது; ஆனல் நெய் பூசியுள்ள தட்டொன்றுமீது அதுபோலவே நீரை இட்டால் அது ஒரு "துளி" யாக இருக்கிறது. அழுக்கு அல்லது நெய்ச்சுவடுகள் கோணத்தைப் பெருமளவில் மாற்றுகின்றன; அதே காரணத்தால்தான் யன்னற் கண்ணுடியொன்றுமீது படும் மழைத்துளியானது தொடர்ந்து துளியாகவே இருக்கிறது; ஏனெனில் கண்ணுடித் துண்டொன்று இரசாயனத் தூய்மையுடையதன்று.

நீருக்கும் பரபின் மெழுகு பூசப்பட்ட கண்ணுடிக்குமிடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணத்தைத் துணியும்பொருட்டு என். கே. ஆதாம் (Adam) என்பார் படம் 10·06(c) யிற் காட்டியுள்ள ஆய்கருவிபோன்ற ஒன்றைப் பயன்படுத்திஞர். A ஆனது தட்டின் முகங்களுக்குச் செங்குத்தான

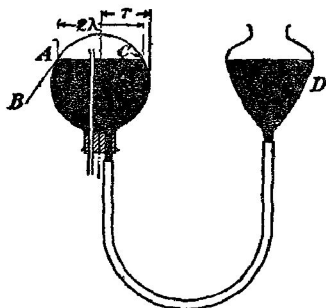


படம் 10·06. தொடுகைக் கோணங்களும் அவற்றை அளத்தலும்.

தொரு குறுக்குவெட்டாகும். தட்டானது B ஊடே செல்கின்ற கிடையான அச்சொன்றைப் பற்றிச் சுழலக்கூடிய இறுக்கியொன்ருற் பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது. திருகு C யையும் அது ஆளும் சட்டம் E யையும் பயன்படுத்தி இறுக்கியை நிலைக்குத்தாக அசையச் செய்யலாம்.

D ஒரு கண்ணுடித் தொட்டி ; அதன் பக்கங்களின் மேல் நுனிகள் தட்டையாகத் தேய்க்கப்பட்டிருக்கின்றன ; அந்நுனிகளின் மட்டத்திற்கு மேலே தொட்டியை நீரால் நிரப்பும் பொருட்டுத் தொட்டியுள்ளே பரபின் மெழுகு பூசப்பட்டிருக்கிறது. திருகுகள் S_1, S_2 என்பவற்றைப் பயன்படுத்தி அம்மட்டம் கிடையாக்கப்படுகிறது. G_1, G_2, G_3 என்பன மெழுகு பூசப்பட்ட செவ்வகக் கண்ணுடித் துண்டுகள் ஆகும் ; அவை தொட்டியின் பக்கங்கள் மீது தங்கி திரவத்துடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்றன. தொட்டியின் வலப்பக்கத்திலிருந்து, காட்டியுளள நிலைகளுக்கு, முதல் G_1 ஐயும் பின்னர் G_2 ஐயும் அசைத்து வைப்பதால் திரவப் பரப்பிலே கறைப்படுத்தல் அப்புறபபடுத்தப்படுகிறது. தட்டின் பக்கமொன்றில், திண்மத்துடனுள்ள தொடுகைக்கோடு வரை, நீர்ப்பரப்பானது திரிவின்றி இருக்கும் நிலையைப் பெறுமட்டும் தட்டு ஒன்றன்பின ஒன்ருக வெவ்வேருன சாய்வுக்கோணங்களில் வைக்கப்படுகிறது. தட்டின் அடையாளத்திற்கும் திரிவில்லா நீர்ப் பரப்பிற்கும் இடையேயுள்ள (பாகைமானியால் அளக்கப்பட்ட) கோணம் ϕ எனின், அப்பொழுது ϕ யே தேவைப்படுகின்ற தொடுகைக்கோணம் ஆகும்.

இரசத்திற்கும் கண்ணுடிக்கும் இடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணத்தின் ஆய்வுக்கான கவர்ச்சியுள்ள முறையொன்று பினவருமாறு :—தலைகீழாக்கப்பட்ட கோளக் குடுவையொன்றிலுளள சிறிதளவு இரசததின் நிலையானது, அக்குடுவையில இருககின்ற இரசத்தின் பரப்பு, கண்ணுடியைத் தொடும் புள்ளிகளில் தட்டையாக வரும்வரை சேமிப்புக் கலம் D யை உயர்த்தி அல்லது தாழ்த்திச் செப்பஞ் செய்யப்படுகிறது, படம் 10·07. கோணம் $BAC=\phi$ என்பதே தேவைப்படுகின்ற தொடுகைக் கோணம் ஆகும். AC யின் நீளம் 2λ வும், குடுவையின் ஆரை r உம் ஆயின், $\phi=$ சைன் $^{-1}\dfrac{\lambda}{r}$; $\dfrac{\pi}{2}<\phi<\pi$ என்பது குறித்தற்பாலது.



படம் 10·07. கண்ணுடியுடன் இரசத்தின் தொடுகைக் கோணம்.

தரப்பட்ட திரவத்திண்மச் சேர்மானம் ஒன்றின் தொடுகைக் கோணமானது இரு அந்தலை எல்லைகளுக்குள் மாறலாம் என வெவ்வேறுன திரவங்களுக்கும் திண்மங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணங்களின் கவனமான அளவீடுகள் காட்டியுள்ளன. யன்னற் கண்ணுடி, அதாவது இரசாயனத்தூய்மையில்லாத கண்ணுடித்துண்டு ஒன்றில் மெதுவாக இறங்கும் மழைத்துளியொன்றினிடத்து இம்மாறலை எளிதிற் காணலாம். துளி முன்னேறும் புள்ளிகளில் கோணம் மிகப் பெரிதாயும் அது பின்வாங்கும் இடங்களில் கோணம் மிகச் சிறிதாயும் இருக்கிறது. திண்மத்திற்கும் திரவத்திற்கும் இடையே உராய்வு விசையொன்று உளது என்னும் எடுகோளைப் பயன்படுத்தி, ஆதாமும் யெசப்பும்† இத்தொடுகைக் கோணமாறலை விளக்கினர். ϕ_A, ϕ_R என்பன முறையே "முன்னேறுகின்ற" தொடுகைக்கோணமும் "பின்வாங்குகின்ற" தொடுகைக் கோணமும் ஆகுக. துளியானது முன்னேறும் நிலையிலே சரியாக இருக்கும்பொழுது உராய்வு விசையானது இயக்கத்தை எதிர்க்க முயலும்; எனவே அது γ_{LS} இன் திசையில் தாக்கும், படம் 10·05, (ப. 533) ஐப் பார்க்க; ஆகவே

$$\gamma_{SG}=F+\gamma_{LS}+\gamma_{LG}\text{ கோசை }\phi_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

பரப்பானது பின்வாங்கும் நிலையிற் சரியாக இருக்கும்பொழுது F ஆனது γ_{SG} இன் திசையிலே தாக்கும் ; அப்பொழுது

$$\gamma_{SG}+F=\gamma_{LG}\text{ கோசை }\phi_R+\gamma_{LS} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

சமன்பாடுகள் (iii), (iv) ஆகியவற்றிலிருந்து F ஐ நீக்கி வருகின்ற விளைவைச் சமன்பாடு (i) உடன் சேர்த்து,

$$\text{கோசை }\phi_A+\text{கோசை }\phi_R=2\text{ கோசை }\phi \quad . \quad . \quad . \quad \text{(v)}$$

† *Jour. chem. Soc.*, 127, 1863, 1925.

எனப் பெறுகிறேம் ; அதாவது, உராய்வு இல்லாதபோது நோக்கப்படுகின்ற தொடுகைக் கோணத்தின் கோசைனனது முன்னேறுகின்ற கோணம், பின்வாங்குகின்ற கோணம் என்பவற்றின் கோசைன்களின் கூட்டலிடை ஆகும். சமன்பாடு (v) ஐ

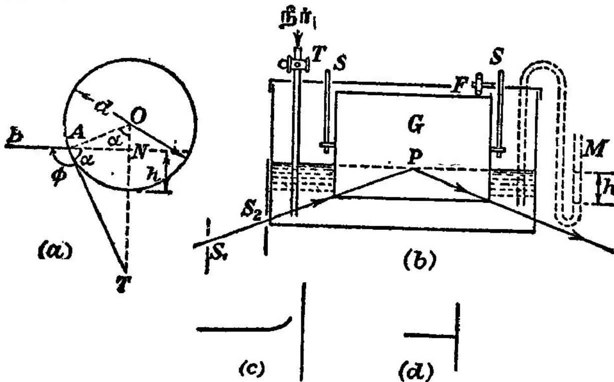
$$2 \text{ கோசை } \tfrac{1}{2}(\phi_A+\phi_R) \text{ கோசை } \tfrac{1}{2}(\phi_A-\phi_R)=2 \text{ கோசை } \phi$$

என எழுதலாம்.

நடைமுறையில் கிட்டத்தட்ட எப்பொழுதும் எதிர்பார்க்கக்கூடிய நிலையில் கிடைக்கிறதுபோல $(\phi_A-\phi_R)$ சிறிதாயின், அப்பொழுது கோசை $\tfrac{1}{2}(\phi_A-\phi_R)\to 1$; அதாவது

$$\phi_A+\phi_R=2\phi.$$

ஒரு திரவத்திற்கும் திண்மத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணத்தை அளப்பதற்கு அப்ளெற்† என்பார் வேறொரு முறையைத் தந்திருக்கிறர் ; இம்முறையில முன்னேறுங் கோணம், பின்வாங்குங் கோணம் என்பவற்றின் வித்தியாசம் அளக்கப்படுகிறது. உருளையொன்று அதன் அச்சு கிடையாக இருக்குமாறு திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப் படுகிறது ; சுயாதீனமான திரவப் பரப்பானது உருளையின் வளைந்த பரப்பிலுள்ள தொடுகைக் கோடுவரை கிடையாக இருக்குமாறு அமிழ்த்தும்போது ஆழம் செப்பஞ்செய்யப்படுகிறது, படம் 10·08 (*a*) இற் காண்க. O, உருளையின் குறுக்குவெட்டொன்றின் மையமும், BA திரவப்பரப்பும் ஆயின்



படம் 10·08. தொடுகைக் கோணங்களைத் துணிதலுக்கு அப்ளெற்றின் முறை.

அப்பொழுது $\widehat{BAT}$, தொடுகைக் கோணம் ϕ ஆகும்; இங்கு AT, புள்ளி A யில் வட்டத்தின் தொடலி ஆகும். அப்பொழுது நீட்டிய BA யிற்கு ON செங்குத்தாயின்,

$$\alpha=\widehat{AON}=\pi-\phi.$$

† *Phil. Mag.* **46, 244, 1923.**

d வட்டத்தின் விட்டமும், h உருளையின் மிகத் தாழ்ந்த பிறப்பாக்கிக்கு மேலே N இன் உயரமும் ஆகுக. அப்பொழுது

$$\text{கோசை } \alpha = \frac{ON}{OA} = \frac{\frac{d}{2} - h}{\frac{d}{2}} = 1 - \frac{2h}{d} = -\text{கோசை } \phi.$$

$$\therefore \text{ கோசை } \phi = \frac{2h}{d} - 1\,;$$

எனவே $h < \frac{d}{2}$ எனின், ϕ விரிகோணம் ஆகும்.

ஈற்றிலே பயன்படுத்தியுள்ள ஆய்கருவியின் முக்கியமான பகுதிகள் படம் 10·08 (b) யில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. அது நீளம் கிட்டத்தட்ட 3 அங்., விட்டம் 3 அங. உடையதும், பல மில்லிமீற்றர் தடிப்பில் பரபின் மெழுகுப் படையால் மூடப்பட்டதுமான திண்மக் கண்ணாடியுருளை G யினால் ஆனது. இதன்பொருட்டு உருளையை உருகிய மெழுகைக் கொண்டிருக்கின்ற தொட்டியொன்றில் வைத்து 3 இலிருந்து 4 மிமீ. வரை தடிப்புள்ள மெழுகுபபடையொன்று அதன்மீது உண்டாகும் வரை அது மெதுவாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. தூசில்லா வளியில் அது குளிரடைய விடப்படுகின்றது; குளிர்ந்ததும் அது கடைச்சலெந்திரம் ஒன்றில் திருத்தமாக மையத்தில் ஏற்றப்பட்டு அழுத்தமாக ஆக்கப்படுகின்றது. அடுத்து, உருளை செவ்வகக்கண்ணாடித் தொட்டியொன்றில் ஏற்றப்படுகின்றது ; உருளையின் அச்சு கிடையாகவும், தொட்டியின் நீளமான பக்கங்களுக்குச் சமாந்தரமாகவும் அமைக்கப்பட்டிருந்தது. தக்கவாறு வேகம் குறைக்கப் பட்ட சிறு மின்மோட்டரொன்று உராய்வுச் சில்லு F ஐச் செலுத்துகின்றது ; அது மெழுகுப் பரப்பை சரியாகத் தொடுகின்ற றப்பர்த் தயர் ஒன்றால் போர்த்தப்பட்ட சிறு சில்லொன்றாகும் ; எனவே தேவைப்படும்போது உருளைக்குச் சுழற்சி இயக்கமொன்றை அளிக்க முடிகின்றது. மோட்டரி லிருந்து செலுத்தல் நாடாவாக நெருக்கமாகச் சுற்றியுள்ள சுரிவில்லொன் றைப் பயன்படுத்தியபடியால் உருளைக்கும் அதிலிருந்து நீர்ப்பரப்புக்கும் அதிர்வுகள் செலுத்தப்படாதவாறு தடுக்கப்படுகின்றன.

நீர்–வளிப்பரப்பை வளைந்த ஆடியொன்றாகப் பயன்படுத்தி அதன்மீது ஒடுக்கமான சமாந்தர ஒளிக்கற்றையைப் படவிட்டு அதன் வளைவு சோதிக்கப் படுகின்றது. S_1, கிடையான பிளவு ஒன்றாகும் ; அது இன்னுமொரு கிடையான பிளவு S_2 இன் மட்டத்திற்குச் சற்றுத் தாழ்ந்தே இருக்கின் றது ; பிந்திய பிளவு நீர்த்தொட்டியின் இடப்பக்கத்தில் இணைக்கப்பட் டிருக்கின்ற கறுப்புக் கடதாசித் துண்டிலுள்ள நுண் துவாரம் ஆகும். S_2 ஐக் குறித்து S_1 இன் நிலையையும் சமாந்தரக் கற்றையைப் பிறப்பிக் கும் ஒளியியல் ஆய்கருவியையும் செப்பஞ்செய்து, உருளையின் வளைந்த பரப்பிற்கு அணித்தாய் உள்ள நீர்ப்பரப்பில் எந்த விரும்பிய புள்ளியிலும்

ஒளிக்கற்றை படுமாறு செய்யமுடிகிறது ; அப்புள்ளி P என்க. ஆக்கப்படும் விம்பமானது தொட்டியின் வலக்கைப்பக்க வழியே வெறுங் கண்ணுல் நோக்கப்படுகிறது. பரப்பானது தட்டையாய் இராதபோது விம்பம் படம் 10·08 (*c*) யில் காட்டியுள்ளவாறு தோற்றிற்று; மெழுகுப் பரப்பின் மேலுள்ள சிறு ஒழுங்கீனங்கள் துலக்கும் நன்கு ஒளிர்வுறச் செய்த புள்ளிகள்போல் தோற்றின. இன்னும் நீரைப் புகுத்திப் பரப்பைத் தட்டையாக ஆக்கிய பின்னர், உருளையின் பரப்புடன் பிளவின் விம்பம் படம 10·08 (*d*) யில் காட்டியுள்ளவாறு மட்டமாகவே இருக்கின்றது.

நீரின் சுயாதீனப் பரப்பைக் குறித்து உருளைப் பரப்பின் மிகத்தாழ்ந்த பிறப்பாக்கியின் ஆழம் *h* ஐ அளக்கும்பொருட்டு, அமுக்கமானி M பின் வருமாறு பயன்படுத்தப்படுகினறது. வளியிழுகுடுவை ஒன்றிலிருந்து தொட்டியுள் நீர் மிகு மெதுவாக ஓடவிடப்பட்டு, ஓட்ட வீதம் குழாய் வாயில் T யினுல் ஆளப்படுகின்றது. உருளையை நீர் சரியாகத் தொட்டதும், தாழ்வலு நுணுக்குக்காட்டியொன்றைப் பயன்படுத்தி M இல் நீரின் நிலை குறிக்கப்படுகிறது. திரவப்பரப்பானது P யில், தட்டையாக்கப்பட்டதும் அது மீண்டும் குறிக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு *h*, அமுக்கமானி வாசிப்புகளி லிருந்து நேரே துணியப்படுகிறது உருளையின் விட்டம், பல இடங்களில் அளக்கப்பட்டு அதன் இடைப் பெறுமானம் கணிக்கப்படுகிறது; எற் கெனவே நிலைநிறுத்தியுள்ள சூத்திரத்திலிருந்து தொடுகைக் கோணத் தைக் காணமுடிகின்றது.

முதலிலே இடஞ்சுழியாக, பின்பு வலஞ்சுழியாக, உருளையை மெதுவாகச் சுழற்றி தொடுகைக் கோணம் அளக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு “ முன்னேறு கின்ற ” தொடுகைக் கோணத்தையும் “ பின்வாஙகுகின்ற ” தொடுகைக் கோணத்தையும் அளக்கமுடிகின்றது ; ஏனெனில் P, உருளையின் அச்சுக் கும் தொட்டியின் சேய்மையிலுள்ள சுவருக்கும் இடையே இருக்குமா யின் உருளையின் இடஞ்சுழி இயக்கத்தால், ஏறும் பிறையுரு தரும் எடுத்துக்காட்டிற்கு ஒத்த நிலைமை நிலையாக்கப்படுகிறது ; வலஞ்சுழி இயக்கமானது இறங்கும் பிறையுருவிற்கு ஒத்ததாகும். பரிசோதனை வழு எல்லைகளுள்

$$\phi = \tfrac{1}{2}(\phi_A + \phi_R)$$

எனக் காணப்பட்டது ; இங்கு 0·44 மிமீ. செக்.$^{-1}$ ஐ எஞ்சிய ஓரக் கதி களுக்கு, கோணங்கள் மாறவில்லை.

மேற்படி சூழலில் இடைக்கப்பெற்ற இடைப் பேறுகள்

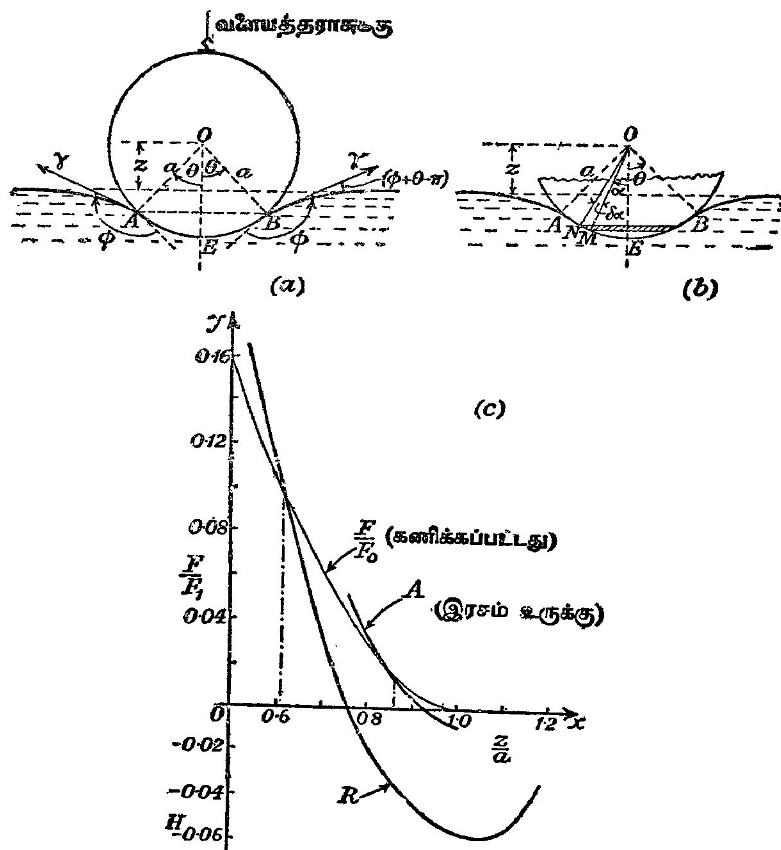
$$\phi_A = 113^\circ\, 9',$$
$$\phi_R = 96^\circ\, 20',$$
$$\phi = 104^\circ\, 34'$$

என்பவையாகும் ; முதல் இரு கோணங்களின் இடை 104° 45′ ஆகும்.

0·44 மிமீ.செக்.$^{-1}$ இற்குக் குறைவான ஓரவேகங்களுக்கு ϕ_A, ϕ_R என்பன வேகத்தைச் சார்ந்துள்ளன எனத் தெரியவந்துள்ளது. ஆனால் ஒவ்வோர் எடுத்துக்காட்டிலும்

$$\phi = \tfrac{1}{2}(\phi_A + \phi_R).$$

தொடுகைக் கோணங்களை அளத்தலுக்கான யாஞேல்டின் முறை.—இவ் வியக்கவியல் முறை,† முதன் முதலாக உருக்கு அல்லது கணணடிக்கும் இரசத்துக்கும் இடையேயுள்ள "முன்னேறும்" தொடுகைக் கோணத்தையும்



படம் 10·09. தொடுகைக் கோணங்களைத் துணிதற்கு இயக்கவியல் முறை.

† *Proc. Phys. Soc.*, 58, 120, 1946 ; B, 62, 125, 1949.

"பின்வாங்கும்" தொடுகைக் கோணத்தையும் அளப்பதற்குப் பயன்படுத்தப் பட்டது; பின்பு யாஞேஸ்டும் மேசனும் அதைப் பரபின்மெழுகுடன் தொடுகை யிலுள்ள நீருக்குப் பிரயோகித்தனர்.

இங்கு தொடர்புள்ள தத்துவங்களை விளங்கும்பொருட்டு, அடர்த்தி ρ வை உடைய திரவமொன்றில் பகுதியாக அமிழ்ந்திருக்குமாறு தொங்கவிடப்பட்டதும் ஆரை a யை உடையதுமான திண்மக் கோளமொன்றைக் கருதுதல் வேண்டும்; திரவத்தின் தட்டையான பரப்பைக் குறித்துக் கோளத்தின் மையம் O வின உயரம் z ஆகுக, படம் 10·09 (a). திரவத்தின் பரப்பிழுவை γ வும் புவியீர்ப்பு g யும் ஆகுக. தொடுகைக் கோணம் ϕ யும், கூம்பு AOB யின் அரையுச்சிக் கோணம் θ வும் ஆயின், பரப்பிழுவையானது கிடையுடன் கோணம் $(\phi+\theta-\pi)$ ஐ ஆக்குகிறது.

கோளமீதுள்ள மேலுதைப்பைக் கணிக்கும்பொருட்டு, படம் 10·09(b) யில் காட்டியுள்ள கிடையான வளையத்தின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் திரவத்தால் ஆகும் அமுக்கத்தைக் கருதுவோம்; அதன் எல்லைகள் M, N எனபனவும் கோணங்கள் α, $\delta\alpha$ வும் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. திரவத்தின் கிடையான பரப்பைக் குறித்து M இன் ஆழம் (a கோசை $\alpha-z$) ஆதலின் வளையத்தின் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அமுக்கம்

$$g\rho\,(a \text{ கோசை } \alpha - z).$$

ஆயின், வளையம் மீதுள்ள மேலுதைப்பு δU ஆனது

$$\delta \mathrm{U} = [g\rho\,(a \text{ கோசை } \alpha - z).\,2\pi\, a \text{ சைன் } \alpha\,.\,a\,\delta\alpha] \text{ கோசை } \alpha$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

∴ இக்காரணத்தாலாகும் முழு மேலுதைப்பும் U வே; இங்கு

$$\mathrm{U} = 2\pi g\rho\int_0^\theta (a \text{ கோசை } \alpha - z)\,a^2 \text{ சைன் } \alpha \text{ கோசை } \alpha\, d\alpha.$$

இத்தொகையீட்டை மதிப்பிட்டு அத்துடன் பரப்பிழுவையால் ஆகின்ற விசையையும் சேர்த்துத் திரவங்காரணமாகக் கோளம் மீதுள்ள முழு மேல் முகமான விசை F கிடைக்கப் பெறுகின்றது. பேறனது

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= \pi a^3 g\rho\,[\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3} \text{ கோசை}^3\theta] - \pi a^2 g\rho z\,(1 - \text{கோசை}^2\theta)\\ &\qquad + 2\pi\gamma a \text{ சைன் } \theta.\ \text{கோசை } \{\tfrac{1}{2}\pi - (\phi+\theta-\pi)\}\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots - 2\pi\gamma a \text{ சைன் } \theta.\ \text{சைன் } (\theta+\phi).\end{aligned}$$

கோளத்திற்கு அணித்தாயுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் இரசப் பரப்பு கிடையாய் அமையும்வண்ணம் அக்கோளம் அமிழ்த்தப்பட்ட ஆழம் இருக்குமாயின், $(\theta+\phi)=\pi$ யும் $z=a$ கோசை θ வும் ஆகும்; அத்தகைய நிலையில் முழு மேல்முகமான விசை F_0 ஆயின், அப்பொழுது,

$$\mathrm{F}_0 = \pi a^3 g\rho\,[\tfrac{2}{3} - \text{கோசை } \theta + \tfrac{1}{3} \text{ கோசை}^3\, \theta].$$

கோளம் முழுதாக அமிழ்த்தப்பட்டிருப்பின் மேல்முகமான விசை F_1 ஆகின்றது ; அது $F_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 g\rho$ எனபதால் தரப்படுகிறது. எனவே

$$\frac{F_0}{F_1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(\frac{z}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{a}\right)^3.$$

இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தும் பொருட்டுக் கோளமானது சக்சிமிதின் தராசொனறிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது, பக்கம் 464 இற் காணக; அப்பொழுது தொடர்ந்து பிரயோகிக்கப்படுகின்றதும் மெதுவாக மாறுகின்றதுமான சிறு விசைகளைத் திட்டமாக அளக்கலாம். திரவமானது தொங்குங் கோளத்தின் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியுடன் தொடுகைவைகக்கும் அளவிற்குக் கொண்டுவரப்படுகிறது ; பின்பு கிட்டத்தட்ட அரைக்கோளம் அமிழ்த்தப் படும்வரை திரவம் மெதுவாகவும் ஒவ்வொருபடி 0·01 சமீ. என்றவாறு படிப்படியாகவும் உயர்த்தப்படுகிறது; கடைசியாகக் கோளத்துடன் தொடுகை மறையும்வரை திரவம் தாழ்த்தப்படுகிறது ; ஒருசில மில்லிமீற்றர் அளவு முழுப்பெயர்ச்சிக்கு எடுக்கபபட்ட நேரம் கிட்டத்தட்ட ஒரு மணித்தியாலம் ஆகும்.

திரவம் (இரசம்) உயர்த்தப்படுமிடத்தும் தாழ்த்தப்படுமிடத்தும், $\frac{z}{a}$ உடன் $\frac{F}{F_1}$ இன் மாறலானது வளையிகள் A (முன்னேறும்), B (பின்வாங்கும்) என்பவற்றால் காட்டப்படுகிறது [படம் 10·09 (c)]; எவ்வாறு $\frac{F_0}{F_1}$ ஆனது $\frac{z}{a}$ உடன் மாறுகிறது என்பதை மெல்லிய வளையி எடுத்துக்காட்டுகிறது. வளையிகள் ஒனறையொனறு வெட்டும் புள்ளிகள், திரவப்பரப்பு சரியாகக் கோளப்பரப்புவரை கிடையாய் இருக்கும்பொழுது z கொள்ளவேண்டிய பெறுமானங்களைத் தருகின்றன. அப்பொழுது

$$\text{கோசை}\ (\pi - \phi) = \text{கோசை}\ \theta = \frac{z}{a}\ ;$$

இங்கு ϕ என்பது தேவைப்படுகின்ற தொடுகைக் கோணம் ஆகும்.

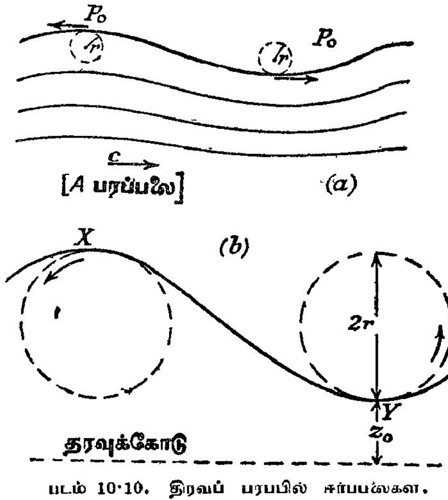
இம்முறையின் நயங்களாவன: (a) திரவத்தின பரப்பிழுவையை அறிய வேண்டியதில்லை, (b) இம்முறையானது தொடுகைக் கோணத்தின் நோக்கலுக்கான தனிப்பார்வை முறையொன்றைச் சாராது எனபவையாம்.

" முன்னேறுகின்ற " கோணத்தின் பெறுமானங்கள் நியாயமான வீச்சொன்றில் கிடக்கின்றன எனவும், ஆனால் " பின்வாங்குகின்ற " கோணத்தின் பெறுமானங்கள் யாவும் ஒத்திட்டுப் பார்க்கில் குறுகிய வீச்சொனறில் கிடக்கின்றன எனவும் காணப்பட்டது. இவ்விரு கோணங்களுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசம் தொடுகைக் கோட்டிற்குச் செஙகுத்தாக, அலகுநீளம் ஒன்றிறகான உராய்வுவிசையால் ஆகிறது என வழக்கமாகக் கருதப்படுகிறது, பக்கம 536 இற் காண்க. அங்கு இவ்விசையானது திரவத்தின் இயக்கத் திசையைச் சார்ந்திராது எனவுங் கொள்ளப்படுகிறது ;

இக்கருத்தானது திண்ம–வளிப் பொதுமுக அலகுப் பரப்பளவாக்கத்திற்குச் செய்யப்படும் மீளாவேலையும், திண்ம–திரவப் பொதுமுக அலகுப் பரப்பளவாக்கத்திற்குச் செய்யப்படும் மீளாவேலையும் ஒரேயளவினது என்னும் கருத்துக்கு நிகர். இத்தகைய எடுகோளைச் சரியென்று காட்டுவது கடினமாகும்.

பரபின் மெழுகுடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற நீருக்கு இவ்வாய் கருவியைப் பயன்படுத்துமிடத்துத் "தொடுகைக் கோணம்" எனனும் தொடரைத் திட்டமாகப் பயன்படுத்தவேண்டுமாயின், பரப்புக்களின் நிலை மட்டுமன்றி, அவற்றின் தொடர்பியக்கம், அவை ஒன்ருெடொன்று தொடுகை வைத்திருக்கும் காலம் என்பவற்றையுங்கூடக் குறித்தல் வேண்டும் எனக் காணப்பட்டது; ஏனெனில், இதில சமபந்தப்பட்ட கோணங்கள் அமிழ்ப்புக் காலத்தைப் பொறுத்துள்ளன என்பதேயாம். "சமநிலைத் தொடுகைக் கோணம்" என்பது நடைமுறையில் அர்த்தமற்றது என யாஞேல்டும் மேசனும் முடிவு செய்தனர்.

திரவப் பரப்பிலுள்ள அலைகள்.—திரவமொன்றின் பரப்பு மீதாக அலைகள் செல்லும்போது அத்திரவத்தால் இயக்கிவைக்கப்படுகின்ற வளியினது திணிவைப் புறக்கணித்தல் வழக்கில் அனுமதிக்கப்படுகிறது. அதன்



படம் 10·10. திரவப் பரபபில் ஈர்பபலகள.

பொருட்டுத் திரவப்பரப்பிலுள்ள அமுக்கமானது எங்கும் வளிமண்டல அமுக்கம் p_0 இற்குச் சமனய் இருத்தல்வேண்டும் என்னும் நிபந்தனை நிறைவேற்றபபடுதல் வேண்டும். மிகு எளிய அலையியக்க வகைகளில் நிலைக்குததான தளமொன்றிலுள்ள வட்டங்களெனக் கருதக்கூடிய பாதைகளைத் திரவப்பரப்பிலுள்ள தனித்தனித் துணிக்கைகள் வரைகின்றன என்பது தெரிந்ததே. பேனூயியின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்கக்

கூடிய உறுதியான இயக்கமொன்றைப் பெறும்பொருட்டு அலைகளுடன் செல்கின்றதும் முடிகள், தாழிகள் என்பவற்றின் வேகமென நிலையான நோக்குநரொருவரால் குறிக்கப்படும் வேகம் c யுடன் முன்னேறுகின்றதுமான ஆள்கூற்றுத் தொகுதியொனறைத் தெரிந்தெடுப்போம், ப. 714 இற் காண்க.

படம் 10·10 (a) யில் திரவப் பரப்பிற்கு அணித்தாயுள்ள துணிக்கை யொன்றினது வட்டப்பாதையின் ஆரை r உம், அதன் ஆவர்த்தன காலம் T யும் ஆகுக. இந்நேரத்தில் துணிக்கையானது தூரம் λ, அதாவது ஓர் அலைநீளம் முன்னேறுகிறது என ஓய்வாய் இருக்கின்ற நோக்குநரொரு வருக்குத் தோற்றும். எனவே $\lambda = c\mathrm{T}$; மேலும் அதனது வட்டப் பாதையில் துணிக்கையின் கதி $\dfrac{2\pi r}{\mathrm{T}}$ ஆகும்.

அலையொன்றின் முடி X இலுள்ள துணிக்கையொன்றின் வேகம் $c - \dfrac{2\pi r}{\mathrm{T}}$ ஆகும், படம் 10·10 (b) இற் காண்க ; தாழி Y யில் அது $c + \dfrac{2\pi r}{\mathrm{T}}$ ஆகும். மாட்டேற்று மட்டமொன்றைக் குறித்து Y யின் உயரம் z_0 ஆகுக. அப்பொழுது பேணூயியின் தேற்றத்திலிருந்து (ப. 715)

$$g(2r + z_0) + \frac{1}{2}\left(c - \frac{2\pi r}{\mathrm{T}}\right)^2 + \frac{p_0}{\rho} = gz_0 + \frac{1}{2}\left(c + \frac{2\pi r}{\mathrm{T}}\right)^2 + \frac{p_0}{\rho};$$

இங்கு ρ திரவத்தின் அடர்த்தியும், g புவியீர்ப்பும் ஆகும்.

$$\therefore\ c = \frac{g\mathrm{T}}{2\pi} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \qquad [\because\ \lambda = c\mathrm{T}.]$$

திரவப் பரப்பொன்றில் மயிர்த்துளையலைகளினது செலுத்துகை வேகத்தைக் கணித்தலுக்கான எளிய முறை.—திரவப் பரப்பொனறில், $c = \sqrt{(g\lambda/2\pi)}$ என்னுஞ் சமனபாட்டால் தரப்படுகினற வேகம் c யுடன் நீண்ட தளவலைகள் இயங்குகின்றன என ஏற்கெனவே நிறுவப்பட்டது. இத்தகைய அலை யொனறின பக்கப்பார்வையின பாகமொன்று படம் 10·11 (a) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இப்பக்கப்பார்வையில் P ஒரு புள்ளியும், திரவத்தின் குழம்பாத பரப்பில் N அதன் எறியமும் ஆகுக. புவியீர்ப்பு மட்டுமே இவ்வெடுத்துக்காட்டில் ஆற்றும் விசை ஆயின், N இல் அலையாலான அமுக்கவுயர்வானது $g\rho$PN ஆகும் ; இங்கு ρ திரவத்தின் அடர்த்தி. பரப்பிழுவையானது அதிகப்படியான் அமுக்கம் γr^{-1} என்பதைக் கொடுக்கும் ; இங்கு γ திரவத்தின் பரப்பிழுவையும், r ஆனது P யில் வளைவாரையும் ஆகும். λ வுடன ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் வீச்சம் சிறிதாயின், அலையின் பக்கப்பார்வையானது தளப்பரப்பொன்றில் உருளுகின்ற வட்ட மொன்றின் மையத்துக்கு அணித்தாயுள்ள புள்ளியொன்றால் வரையப்படுகின்ற வளையியெனக் கருதப்படலாம். இவ்வட்டத்தின் ஆரை a யும், அதன் மையம் O விலிருந்து P யின் தூரம் b யும் ஆகுக, படம் 10·11(b).

நிலையான செங்கோணவச்சுத் தொகுதி P_0x, P_0y என்பவற்றைக் குறித்து P யின் நிலை தரப்படும்; இங்கு P_0O ஆனது உருளல் தளத்துக்குச் சமாந்தரமாகும். P ஆனது P_0 இல் இருந்த கணத்திலிருந்து நேரம் அளக்கப்படுக. உருள்கோணம் θ ஆகுக. அப்பொழுது $Q\hat{O}C=\theta$; இங்கு புள்ளி Q ஆனது P_1 ஐ P_0 அடைந்திருக்கும்போது உருளும் வட்டம் உருள்தளத்துடன தொடுகை வைத்திருக்கும் புள்ளி ஆகும்; மேலும் $P_1\hat{O}_1P_0=\theta$; $OO_1=a\theta$. அப்பொழுது P_1 இன் கணநிலையாள்கூறுகள்

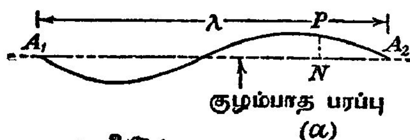
$$x=b+a\theta-b \text{ கோசை } \theta=a[\theta+(b/a)-(b/a) \text{ கோசை } \theta]$$
$$=a\theta, \qquad [(b/a)\to 0 \text{ எனின்}]$$
$$y=b \text{ சைன் } \theta.$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{b}{a} \text{ கோசை } \theta;\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b \text{ சைன் } \theta}{a^2}.$$

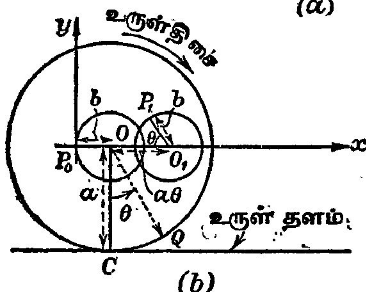
$\frac{dy}{dx}$ சிறிது என்பது இவ்வெடுத்துக்காட்டில் பிரயோகிக்கக் கூடிய நிபந்தனையொன்றாகும்; எனவே வளைவாரை $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}$ ஆகும். இவ்வாறு

$$r=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-1}=-\left(\frac{b \text{ சைன் } \theta}{a^2}\right)^{-1}=-\frac{a^2}{PN}.$$

எனவே, சயக்குறியைப் புறக்கணிக்க, அலையொன்றினிடத்துப் பரப் பிழுவையாலாகும் அமுக்கமிகை

$$\frac{\gamma}{r}=\gamma\frac{PN}{a^2}.$$





படம் 10·11. திரவப் பரப்பொன்றின் மயிர்த்துளை அலைகளின் வேகம்.

ஆனால் $2\pi a=\lambda$; எனவே அமுக்கமிகையை $(4\pi^2 PN.\gamma/\lambda^2)$ இற்குச் சமனாகப் போடலாம். இனி N இல் அமுக்கம் $g\rho PN$ ஆக இருக்கும்பொழுது வேகம்

$\sqrt{(g\lambda/2\pi)}$ ஆகும். எனவே N இல் அமுக்கம் $[g\rho+(4\pi^2\gamma/\lambda^2)]$PN ஆகும் பொழுது வேகம்

$$c=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\left(1+\frac{4\pi^2\gamma}{\lambda^2 g\rho}\right)}=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}}.$$

$g\rho$ என்பது $\left[1+\frac{4\pi^2\gamma}{\lambda^2 g\rho}\right]:1$ என்னும் விகிதத்தில் கூடுகிறபடியால் இவ்விளைவு ஆகின்றது எனக் கருதமுடியுமாதலின் இச்செய்கை நியாய மெனத் தோற்றுகிறது.

$$c^2=\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \quad \text{ஆதலின்,} \quad 2c\frac{dc}{d\lambda}=\frac{g}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

எனவே உயர்வு அல்லது இழிவு ஒன்றிற்கு $\frac{dc}{d\lambda}$ பூச்சியம் ஆதலின்

$$\frac{g}{2\pi}\cdot\frac{\rho}{2\pi\gamma}=\frac{1}{\lambda^2};$$

இதனை $\lambda=2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{g\rho}}$ என எழுதிக் கொள்ளலாம்; மேலும் $\lambda\to 0$ ஆகுமிடத்தும் $\lambda\to\infty$ ஆகுமிடத்தும் $c\to\infty$ ஆதலின், λ விற்கான இபபெறுமானமானது திரவப் பரப்பொன்றிலே இழிவுவேகத்துடன் செல் கின்ற குற்றலைகளின் அலைநீளம் ஆதல் வேண்டும். இதன பெறுமானம் c இழிவு $=\left(\frac{4\gamma g}{\rho}\right)^{\frac{1}{4}}$ இனால் தரப்படும்; நீருக்கு இது 23 சமீ. செக். $^{-1}$ ஆகும். மேலும் ஒத்த அலைநீளம் 1·7 சமீ. [அலைநீளத்திற்கு இழிவுப் பெறுமா னத்தை இக்கோவை தருகின்றது என்பதும $2\left(\frac{dc}{d\lambda}\right)^2+2c\frac{d^2c}{d\lambda^2}=0+\frac{4\pi\gamma}{\rho\lambda^3}$ ஆகுமிடத்து சமன்பாடு (1) ஐ வகையிட்டு நிறுவப்படுகிறது. ஆராய்ந்த நிபந்தனைகளின்கீழ், $\frac{dc}{d\lambda}=0$ ஆதலின், $\frac{d^2c}{d\lambda^2}$ நேரானது, அ—து. அலைநீளம் ஓர் இழிவு.]

திரவங்களின் பரப்பிழுவைகளையும் பொதுமுகவிழுவைகளையும் துணிதற்கான முறைகள்

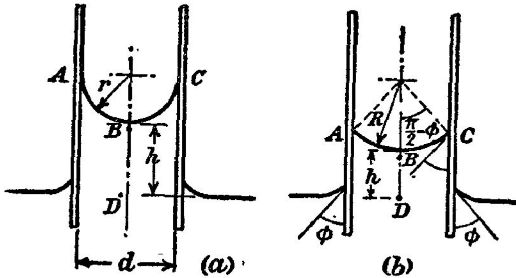
பொதுக் குறிப்புக்கள்.—வளைந்த திரவப் பரப்பொன்றின் இரு பக்கங்களுக் கிடையே அமுக்க வித்தியாசம் ஒன்றுளது என்பது ஏற்கெனவே காட்டப் பட்டிருக்கிறது. பரப்பு கோளவடிவமுடையதாயின் மேற்படி அமுக்க வித்தியாசமானது

$$p=\frac{2\gamma}{r}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது என நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது; இங்கு γ திரவத்தின் பரப்பிழுவையும், r கோளப்பரப்பின் ஆரையும் ஆகும்.

எனவே தரப்பட்ட எந்த எடுத்துக்காட்டிலும், பரப்பிழுவை γ வை அளக்கும் பொருட்டு முதனமுதலாகத் தேவைபபடுவது கோளப்பரப்பொன்றேயாம். சீரான ஒடுக்கமான குழாயொன்றை நிலைக்குத்தாகத் திரவத்தில் வைத்தல் இதைச் செய்யும் பொதுமுறையொன்று ஆகும்; அப்பொழுது குழாயிலிருக்கின்ற திரவப் பரப்பானது கோளமொனறின் பாகமாகும். அப் பரப்பின் ஆரையையும் அதன் குறுக்கேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசத்தையும் அளத்தல் மட்டுமே எஞ்சியிருக்கிறது. திரவத்திற்கும் குழாயின் திரவியத்திற்கும் இடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணம் பூச்சியம் ஆயின், குழாயானது போதிய ஒடுககம் உடையது எனனும் நிபந்தனையின் கீழ், மேற்படி ஆரையானது குழாயில் திரவம் தாங்கப்பட்டிருக்கின்ற இடத்திலுள்ள குறுக்குவெட்டாரைக்குச் சமன். ஏதோவொரு திரவநிரலின் உயரத்தை அளந்து அமுக்க வித்தியாசம பொதுவாகத் துணியப்படுகிறது. அத்திரவமும் சோதிக்கப்படும் திரவமும் ஒரே திரவமாயின், அதன் அடர்த்தியைத் தெரிந்திருத்தல வேண்டும; ஆனுல் தெரிந்த அடர்த்தியுடைய வேருெரு திரவ நிரலின் உயரத்தால் அமுக்கம் துணியப்படுமாயின், சோதிக்கப்படும் திரவத்தின் அடர்த்தியை அறியவேண்டியதில்லை. நடைமுறையில அமுக்கத்தை அளக்கும் பொருட்டு இவ்விரு முறைகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பதைக் காண்போம்.

செய்முறைப் பயனுடைய முதன்மையான தேற்றங்கள்.—(a) மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றில் திரவமொன்றின் ஏற்றம் : எளிமையையிட்டுக் குழாய் ஒடுக்கமானது எனவும் தொடுகைக் கோணம் பூச்சியம் எனவும் முதலிற் கொள்வோம். ஆரை r கொண்ட மயிர்த்துளைக் குழாயொனறில் ஒரு திரவத்தின் பரப்பு AC ஆகுக, படம் 10·12 (*a*). AC ஆனது ஆரை r கொண்ட கோளமொன்றின் பாகம் எனக் கொள்கிறேம். வளைந்த பரப்புமீது எங்கும் வளிமண்டலவமுக்கம் தாக்குகிறது. பரப்பிற்குச் சற்றுக்கீழே,



படம் 10·12. நிலைக்குத்தான, ஒடுக்கமான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றில் ஒரு திரவத்தின் ஏற்றம்.

எனவே திரவத்தில் உள்ள புள்ளி B யில் அமுக்கம் வளிமண்டலவமுக்கத்திலும் $\frac{2\gamma}{r}$ என்னும் அளவில் குறைவாக இருக்கிறது

[பக்கம் 527 இற் காண்க]. B யிற்குக் கீழே, குழாய்க்கு வெளியேயுள்ள திரவப்பரப்பின் அதே கிடைத் தளத்திலே இருக்கின்ற புள்ளி D யில் அமுக்கம் வளிமண்டலவமுக்கமாகும். இனி, புள்ளிகள் B யிற்கும் D யிற்கும் இடையேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசமானது உயரம் DB கொண்ட திரவ நிரலொன்றல் பிரயோகிக்கப்படும் அமுக்கத்திற்குச் சமன் ; $DB = h$ எனக. திரவத்தின் அடர்த்தி ρ ஆயின், இவ்வித்தியாசம் $g\rho h$ ஆகும் ; இங்கு g புவியீர்ப்பு ஆகும். எனவே இந்த அளவில் B யிலுள்ள அமுக்கம் வளிமண்டலவமுக்கத்தைக் காட்டிலும் சிறிது ; மேலும் இவ்வமுக்க வித்தியாசம் $\frac{2\gamma}{r}$ ஆகும் எனக் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. எனவே

$$\frac{2\gamma}{r} = g\rho h.$$

அடுத்துத் திரவத்துக்கும் குழாயின் திரவியத்துக்குமிடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணத்தை ϕ எனக் கொள்க, படம் 10·12 (b) இற் காண்க. அதன் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியில் திரவப்பரப்பின் வளைவாரை R ஆகுக; எல்லாவற்றிலும் R மாருமல் இருக்கும். அப்பொழுது முன்னர் போல், P_0 வளிமண்டலவமுக்கமாயின்,

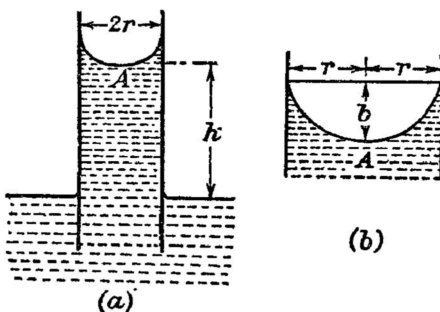
$$\text{B யில் அமுக்கம்} = P_0 - \frac{2\gamma}{R}.$$

ஆனல் D யில் அமுக்கம் $= P_0 =$ B யில் அமுக்கம் $+ g\rho h$.

$$\therefore \frac{2\gamma}{R} = g\rho h.$$

ஆனல் $r = R$ கோசை ϕ ; எனவே $\frac{2\gamma \text{ கோசை } \phi}{r} = g\rho h.$

ϕ முடிவுள்ளது எனின், அதன் பெறுமானம் எப்பொழுதும் ஐயத்திற்குரியதாதலின், மயிர்த்துளைக் குழாய்களில் திரவமொன்றின் ஏற்றத்தை



படம் 10·13.—அகலமான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றில் ஒரு திரவத்தின் ஏற்றம்.

அளநது பெறபபடுகின்ற பரப்பிழுவைகளின் பெறுமானங்கள் மீது நம் பிக்கை வைத்தலாகாது ; மேலும் தொடுகைப் பரப்புக்களின் கறைத தரத்துடன் ϕ நியாயமான அளவில் மாறுகிறது. இருந்தாலும் அறி முறைத் தேவைகளையிட்டு மேற்படிக் கொள்கை இன்றியமையாதது.

இனி மயிர்த்துளைக்குழாய் அத்துணை அகன்றிருக்கிறபடியால் பிறையுருப் பரப்பு ஓர் அரைக்கோளம் ஆகும் என ஒருபோதும் நியாயத்துடன் கருதமுடியாது. அப்போது, எவ்வாறு (பூச்சியத் தொடுகைக் கோணமுடைய) திரவமொன்றிற்கு நாம் பெற்றுள்ள சூத்திரமானது மாற்றமடைகின்றது என்பது ஆராயற்பாலது. கீழ்வரும் ஆய்வு பேகன் என்பவரால் ஆனது. அமுக்கமிகைத் தத்துவத்தின்படி

$$g\rho h = \frac{2\gamma}{R} ;$$

இங்கு, R, பிறையுருவின மிகத்தாழ்ந்த புள்ளி A யில் வளைவாரையா கும்—படம் 10·13 (a). சுருக்கத்தையிட்டு $a^2 = \dfrac{\gamma}{g\rho}$ என்போம். அப்பொழுது $2a^2 = Rh$; இங்கு a^2 ஆனது திரவத்தின் **மயிர்த்துளை மாறிலி** அல்லது தன் **ஒருங்கிணைவு**† எனப்படும்.

தொடுகைக் கோணம் எதுவாகிலும் இது திருத்தமான சமன்பாடொன் றுகும். மேலே கிடைத்துள்ள R இன் பெறுமானத்தைக் காட்டிலும் திருத்தம் மிக்கதாய் இருக்கவேண்டியதொன்றைக் காணமுயலும்போதே தொல்லைகள் தலைகாட்டுகின்றன. வரிப்படத்தளத்தில் பிறையுருவின் அடையாளமானது அரையச்சுக்கள் r உம் b யும் உடைய நீள்வளைய மொன்றுகும் எனக் கொள்ளப்படும், படம் 10·13 (b) இற் காண்க. A யில் வளைவாரை $R = r^2 b^{-1}$ ஆகும், பக்கம் 12 இற் காண்க. எனவே

$$2a^2 = Rh$$

என்னுஞ் சமன்பாடானது $2a^2 = \dfrac{r^2 h}{b}$ அல்லது $b = \dfrac{r^2 h}{2a^2}$ ஆகிறது.

குழாயானது பூரண உருளைவடிவமுடையது எனக் கொள்வோமாயின், திரவம் மீது மேனோக்கியும், திரவம் குழாயுடன் கொண்ட தொடுகைக் கோடு வழியேயும் தாக்குகின்ற விளையுள் விசை $2\pi r\gamma$ என்பதை உயர்த்தப் பட்ட திரவத்தின் முழு நிறைக்குச் சமன்படுத்தலாம். அப்பொழுது

$$2\pi r\gamma = \pi r^2 h\rho g + \tfrac{1}{3}\pi r^2 b\rho g.$$

$$\therefore \quad 2a^2 = rh\left(1 + \frac{r^2}{6a^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

இனி சமன்பாடு (i) ஐ

$$12a^4 - 6a^2 rh - r^3 h = 0$$

† இரசாயனவியலிலே, $2a^2$ அடிக்கடி தன் ஒருங்கிணைவு எனப்படுகிறது.

என எழுதலாம் ; அது a^2 இல் இருபடிச் சமன்பாடொன்ருகும் ; அது

$$a^2 = \frac{6rh \pm 6rh\left(1+\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{h}\right)^{\frac{1}{2}}}{24}$$

எனத் தருகிறது ; மேலும் எல்லையில், $\frac{r}{h} \to 0$ ஆகுமிடத்து, $2a^2 = rh$ என இருத்தல் வேண்டும் ஆதலின் நேர்க்குறியையே எடுத்தல்வேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{\gamma}{g\rho} = a^2 = \tfrac{1}{2}rh\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{r}{h}-\frac{1}{9}\cdot\frac{r^2}{h^2}+\ldots\right].$$

இவ்விடத்தில்

$$\mathrm{R} = r\left(1+\frac{r^2}{6a^2}\right)$$

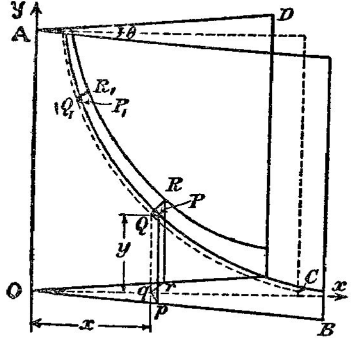
என்பது குறித்தற்பாலது. இது R இன் சரியான பெறுமானத்திற்கு நெருங்கிய அண்ணளவொன்றைத் தருகிறது ; ஆனல் அது இங்கு தேவைப்படமாட்டாது.

(b) நிலைக்குத்தான தட்டுக்களுக்கிடையே ஒரு திரவத்தின் ஏற்றம்.— (i) சமாந்தரத் தட்டுக்கள்: இவ்வேற்றத்தின் அளவைக் கணிக்கும்பொருட்டுப் படம் 10·12 (a) யை நாம் பயனபடுத்தலாம். அவ்வரிப்படத்தில் இப்பொழுது நிலைக்குத்தான கோடுகள், தூரம் d இடையீடு உடைய இரு சமாந்தரத் தட்டுக்களின் வெட்டுக்களை எடுததுக் காட்டுகின்றனவென்க. AC ஆனது விட்டம் d கொண்ட உருளைப் பரப்பொன்றின் வெட்டெனக் கருதுகிறேம் ; எனவே B யிலுள்ள அமுக்கமானது வளிமண்டலவமுக்கத்தைக் காட்டிலும் $\frac{\gamma}{r}$ அல்லது $\frac{2\gamma}{d}$ அளவால் குறைந்ததாகும்; இங்கு $d = 2r$. தொடுகைக் கோணம் பூச்சியம் எனின் முன் போல,

$$\frac{2\gamma}{d} = g\rho h.$$

(ii) ஒன்ருேடொன்று சாய்ந்த தட்டுக்கள்: படம் 10·14 ஆனது ஒன்ருேடொன்று சிறு கோணம் θ வை ஆக்குகின்ற இரு நிலைக்குததான தட்டுக்கள் AOB, OAD என்பவற்றை எடுததுக்காட்டுகிறது. ஒரு திரவத்தில் அவை புகுத்தப்படுமிடத்துத் தட்டுக்களிடையே திரவம் ஏறுகின்றது. நிலைக்குத்தாடு OA ஊடே செல்கின்றதும், கோணம் θ வை இருகூறிடுகினறதுமான தளம் AOC, அதாவது ஆள்கூற்றுத்தளமானது திரவப்பரப்பை வெட்டும் வளையியின் வடிவததைத் துணியும் பொருட்டுத் திரவப்பரப்பில் அதுவும் தளம் AOC யும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான திரவப் பரப்பு. மூலகம் PQR என்பதைக் கருதுவோம். அச்சுக்கள் என

எடுக்கப்படும் OC, OA என்பவற்றைக் குறித்து மூலகம் PQR இன் மையப்புள்ளி Q வின் ஆள்கூறுகள் (x, y) ஆகுக. [$P_1Q_1R_1$ என்பது அத்தகைய வேறொரு மூலகம் ஆகும். Ox ஊடே செல்லுகின்ற கிடைத் தளம் மீது புள்ளிகள் P, Q, R என்பவற்றின் எறியங்கள் முறையே p, q, r என்பவை ஒரே நேர்கோட்டில் கிடக்கமாட்டா என்பது குறித்தற்பாலது.] இனி திரவமானது கண்ணுடியை ஈரமாக்குமாயின் PQR இலுள்ள பரப்பானது Q வில தட்டுக்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்துக்குச் சமனை விட்டமுடைய உருளையொன்றினது பரப்பின் பாகம் ஆகும். θ சிறிது ஆதலின், இத்தூரம் $x\theta$ ஆகும். எனவே திரவம் ஏறும் உயரம் y ஆனது



படம் 10·14. சாய்ந்த நிலைக்குத்தான தட்டுக்களிடையே ஒரு திரவத்தின் ஏற்றம் (முனைவிளைவுகள் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன).

$$\frac{2\gamma}{x\theta} = g\rho y$$

என்பதால் தரப்படுகிறது,

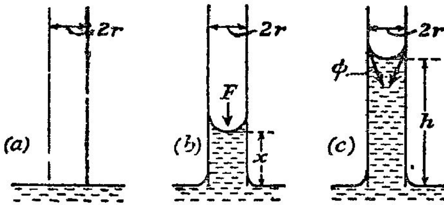
அதாவது $xy = 2\gamma/g\rho\theta =$ மாறிலி. எனவே பரப்பானது ஆள்கூற்றச்சுக்களை அணுகுகோடுகளாகக் கொண்ட அதிபரவளைவொன்றின் பாகமாகும்.

மயிர்த்துளையேற்றத்துடன் தொடர்புள்ள சக்தி மாற்றங்கள்.—நிலைக்குத்தான ஒரு மயிர்த்துளைக் குழாயில் ஒரு திரவம் அதனது நிலையியற் சமநிலைத் தானத்திற்கு ஏறும்பொருட்டுத் தேவையான சக்தியானது திரவத்தின் அசைவுடன் தோன்றுகின்ற பரப்புச் சக்தியின் குறைதலிலிருந்து பெறப்படுகிறது. எவ்வாறு இச்செய்தியைப் பயனபடுத்தி மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றில் ஒரு திரவத்தின் ஏற்றத்துக்கான நன்ருகத் தெரிந்த சூத்திரத்தை நிறுவலாம் என R. C. பிரௌன் என்பார் காட்டியிருக்கிருர். எளிமையையிட்டு அகன்ற பாத்திரமொன்றில் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்ற திரவத்தின் பொதுமட்டத்திற்குக் கீழே குழாயின் எந்தப் பாகமும் தொடக்கத்தில் அமிழ்த்தப்படாமல் இருக்கிறது எனப் பிரௌன் கருதுகிருர், படம் 10·15 (*a*) யிற் காண்க. குழாயில் நீளம் x ஐ உடைய திரவத்தைப் படம் 10·15 (*b*) யும், சமநிலைக் கட்டத்தை, அதாவது திரவமானது உயரம் h ஐ அடைந்த நிலையைப் படம் 10·15 (*c*) யும் காட்டுகின்றன ; இங்கு $0 < x < h$. வெப்பநிலை மாருமல் இருக்கின்றது எனக் கொள்ளப்படும்.

குழாயின் குறுக்குவெட்டாரை r ஆயின், சுவரில் பரப்பளவு $2\pi rh$ என்பது ஈரமாக்கப்படுமிடத்துச் சுயாதீனப் பரப்புச் சக்தி நட்டம்

$2\pi rh(\gamma_{SG}-\gamma_{SL})$ ஆகும்; பக்கம் 533 இல் தரப்பட்ட தொடர்பைப் பயன்படுத்தினுல் இது $2\pi rh\gamma_{LG}$ கோசை ϕ ஆகிறது; ϕ ஆனது தொடுகைக் கோணம் ஆகும்; மற்றைக் குறியீடுகள் அவற்றின் வழக்கமான கருத்துக் களை உடையன.

இனி மிகு வெளிப்படையான சக்தி நயமானது உயர்த்தப்பட்ட நிரலின் நிலைச் சக்தி ஆகும்; இது $(\pi r^2 h\rho)g.\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}\pi r^2 g\rho h^2$ ஆகும்; இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவு. திரவமொன்று மெதுவாக அசையும் பொழுது எழுகின்ற பிசுக்கு விசைகளைக் கடத்தற் பொருட்டு வேலைசெய்ய வேண்டியிருத்தலின் இதைச் சுயாதீனப் பரப்புச் சகதி நட்டத்துக்குச் சமன்படுத்திப் பிரசசினை தீர்க்கப்படமாட்டாது. திரவ நிரலானது (a)



படம் 10·15. மயிர்த்துளையேற்றத்துடன் தொடர்புள்ள சக்தி மாற்றங்கள்.

யிலிருந்து (c) வரை அசையும் பொழுது அதன் மீது கீழ்முகமான விசை $\mathbf{F}$ ஆற்றுகின்றது எனவும், ஒவ்வொரு கட்டத்திலும் ஆர் முடுகலைத் தடுப்பதற்கு அதன் பெறுமானம் சரியாக இருக்கிறது எனவும் கொண்டு, இவ்வண்ணம் விரயமாகியுள்ள சக்தியளவைக் கணிக்கலாம். படம் 10·15 (b) யில் காட்டியுள்ள இடையான கட்டத்தில் $\mathbf{F}=\pi r^2 g\rho\,(h-x)$ எனெனில், இந்தத் திரவநிறையை (b) யில் இருக்கிறதுடன் சேர்த்தால் கட்டம் (c) தரப்படுகிறது எனக் கொள்க; கட்டம் (c) இற்குப் பின்பு எற்றம் இல்லை.

$\mathbf{F}$ இற்கு எதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலை

$$\int_0^h \mathbf{F}\,dx=\pi r^2 g\rho\int_0^h (h-x)\,dx=\tfrac{1}{2}\pi r^2 g\rho h^2.$$

எனவே $$2\pi rh\gamma_{LG}\text{ கோசை }\phi=\tfrac{1}{2}\pi r^2 g\rho h^2+\tfrac{1}{2}\pi r^2 g\rho h^2,$$

அல்லது $$\gamma_{LG}\text{ கோசை }\phi=\tfrac{1}{2}g\rho hr;$$

இதுவே தேவைப்படுகின்ற தொடர்பு.

நிலைக்குத்தாய் இருக்கின்றதும் சற்றுக் கூம்பானதுமான ஒரு மயிர்த் துளைக் குழாயில் ஒரு சிறு திரவக் குறிகாட்டியின் உறுதிப்பாடு.—அடர்த்தி ρ வும், நீளம் h உம் உடைய திரவக் குறிகாட்டியானது படம் 10·16 (a) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இவ்வரிப்படத்தில் மயிர்த்துளைக் குழாயானது

மேனோக்கிக் கூம்புகிறது ; எனவே r உம் R உம் முறையே மேலான பிறையுரு, கீழான பிறையுரு என்பவற்றின் வளைவாரைகள் ஆயின் $r<R$. Π வளிமண்டல அமுக்கமும், γ என்பது திரவத்தின் பரப் பிழுவையும், A, B, C, D என்பவை காட்டப்பட்டிருக்கின்ற புள்ளிகளும் ஆயின்,

$$p_B=\Pi-\frac{2\gamma}{r} \text{ எனவும் } p_C=\Pi-\frac{2\gamma}{R} \text{ எனவும பெறுகிறோம்.}$$

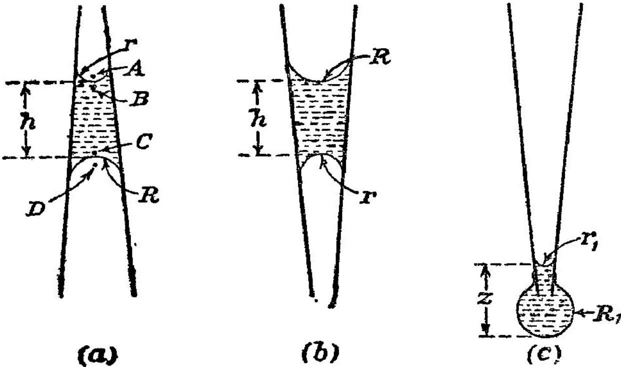
ஆனல்

$$p_C=p_B+g\rho h\ ;$$

எனவே,

$$g\rho h=2\gamma\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right].$$

$r<R$ ஆதலின், சதுரவடைப்புக்களுள் இருக்கின்ற கணியம் நேராகும் ; திரவமானது மேற்படிச் சமன்பாட்டிற்கு இணங்குகின்ற நிலையொன்றை அடைகிறது.



படம் 10·16. நிலைக்குத்தாய் இருக்கின்றதும் சற்றுக் கூம்பானதுமான ஒரு மயிர்த் துளைக் குழாயில் திரவக் குறிகாட்டியொன்றின் உறுதிப்பாடு.

படம் 10·16 (*b*) யில் காட்டியுள்ளவாறு மயிர்த்துளைக் குழாயின் ஒடுக்க மிக்க முனை கீழ்முகமாக இருக்கும்பொழுது,

$$g\rho h=2\gamma\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right].$$

$R>r$ ஆதலின், இதை நிறைவேற்ற இயலாது. எனவே திரவக் குறிகாட்டி யானது குழாயின் கீழ் முனையை அடைந்து அங்கு படம் 10·16 (*c*) யில் இருக்கிறவாறு சிறுதுளியொன்றை ஆக்கும். காட்டியுள்ள பரப்புகளின்

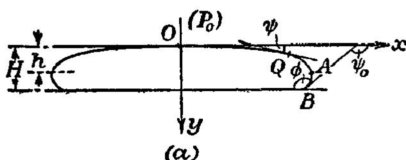
வளைவாரைகள் r_1 உம் R_1 உம், துளியின் முழுநீளம் z உம் ஆயின்,

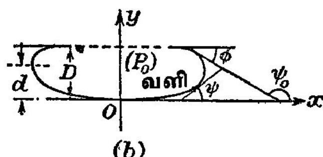
$$\Pi - \frac{2\gamma}{r_1} + g\rho z = \Pi + \frac{2\gamma}{R_1}.$$

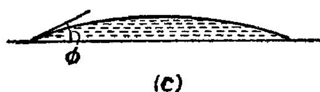
$$\therefore \ g\rho z = 2\gamma\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_1}\right];$$

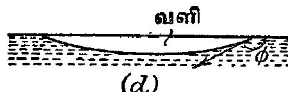
r_1 இன் பெறுமானம் எதுவாகினும் இது எப்பொழுதும் நேர் ஆகும்.

அடியிலிணைந்த பெருந்துளிகள், குமிழிகள் என்பவற்றின் வடிவம்.— (*a*) **பெருந்துளிகள்.—**அதன் மிக்குயர்ந்த புள்ளியிற் கருதப்படுகின்ற துளி தட்டையாயும், அதன் பரப்பில் நள்வான தளம் ஒழிந்த மற்றெல்லாத் தளங்களிலுமுள்ள எந்தப் புள்ளியிலும் வளைவு புறக்கணிக்கத்தக்கதாயும் இருக்குமாறு அத்துளி அத்துணைப் பெரியது எனக் கொள்ளப்படும். அத்தகைய துளியொன்றின் நள்வான் வெட்டொன்று படம் 10·17 (*a*) யில் தரப்பட்டிருக்கிறது. காட்டியுள்ள அச்சுக்கள் Ox, Oy என்பவற்றைக் குறித்து எந்தப் பரப்புப் புள்ளி Q வின் ஆள்கூறுகளும் (x, y) ஆகுக. P_0 ஆனது வளிமண்டலவமுக்கமாயின் Q வில் உள்ள அமுக்கம் ஒன்றில் $P_0 + g\rho y$ என்பதால் அல்லது $P_0 + \frac{\gamma}{R}$ என்பதால் தரப்படுகிறது; இங்கு R, நள்வான் தளத்தின் வளைவாரையாகும்.









படம் 10·17. பெருந்துளிகளுக்கும் குமிழிகளுக்குமூடாக நள்வான் வெட்டுக்கள்.

$$\therefore \ g\rho y = \gamma \cdot \frac{1}{R} = \gamma \cdot \frac{d\psi}{ds} = \gamma \cdot \frac{d\psi}{dy} \cdot \frac{dy}{ds};$$

இங்கு ψ ஆனது Ox உடன் வெட்டுக்கோட்டிற்கு Q வில் வரைந்துள்ள தொடலி ஆக்கும் கோணமும், s ஆனது வில் OQ வும் ஆகும்.

$$\therefore \ \frac{g\rho}{\gamma} \cdot y = \frac{d\psi}{dy} \cdot \text{சைன் } \psi.$$

வளையியில் அதன் தொடலி நிலைக்குத்தாய் இருக்கின்ற புள்ளி A யும், Ox இற்குக் கீழே A யின் ஆழம் h உம் ஆயின்,

$$\frac{g\rho}{\gamma}\int_0^h y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{சைன்}\ \psi\ d\psi.$$

$$\therefore\ \frac{g\rho}{2\gamma}\cdot h^2 = -\left[\text{கோசை}\ \psi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$\therefore\ h^2 = \frac{2\gamma}{g\rho}.$$

மேலும் துளி உண்டாகியுள்ள பரப்பை வளையி வெட்டும் புள்ளி B யிலுள்ள தொடலியானது Ox உடன் ஆக்கும் கோணம் ψ_0 எனின், $\psi_0 =$ திரவத்திற்கும் பரப்பிற்கும் உரிய தொடுகைக்கோணம் ϕ ஆதலால்,

$$\frac{g\rho}{\gamma}\int_0^{H} y\ dy = \int_0^{\psi_0} \text{சைன்}\ \psi\ d\psi = \int_0^{\phi} \text{சைன்}\ \psi\ d\psi;$$

இங்கு H குமிழியின் உயர்வுயரம் ஆகும்.

$$\therefore\ \frac{g\rho}{2\gamma}(H^2) = -\text{கோசை}\ \phi + 1,\ \text{அல்லது}\ H^2 = \frac{2\gamma\,(1-\text{கோசை}\ \phi)}{g\rho}.$$

(*b*) **பெருங்குமிழிகள்.**—இத்தகைய குமிழியொன்றின் வெட்டு படம் 10·17 (*b*) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. வசதியையிட்டு y அச்சின் நேர்த் திசை நேர்மாறுக்கப்பட்டிருக்கிறது. அப்பொழுது முன்னர்போலவே,

$$P_0 - g\rho y + \gamma\cdot\frac{d\psi}{ds} = P_0.$$

$$\therefore\ g\rho y\ dy = \gamma\ \text{சைன}\ \psi\ d\psi.$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot\frac{g\rho}{\gamma}D^2 = \left[-\text{கோசை}\ \psi\right]_0^{\psi_0} = -\text{கோசை}\ (\pi-\phi)+1$$

$$= 1 + \text{கோசை}\ \phi,$$

அத்துடன
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{g\rho}{\gamma}\cdot d^2 = 1;$$

இங்கு D யும் d யும் வரிப்படத்தில் காட்டியுள்ள ஆழங்கள் ஆகும்.

அடியிலிணைந்த துளிகளும் குமிழிகளும் பற்றிய இவ்விளக்கமானது முடிவானதொன்று அன்று ; ஏனெனில், முந்தியதினிடத்து $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ எனவும் பிந்தியதினிடத்து $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ எனவும் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்றது என்பதேயாம். நிகழக்கூடிய மற்றவிரு எடுத்துக்காட்டுக்களும் படங்கள் 10·17 (*c*), (*d*) யில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. ஏற்கெனவே பெற்றுள்ளதும் அவ்வவற்றிற்குரியதுமான சூத்திரத்தால் முழுவுயரம்

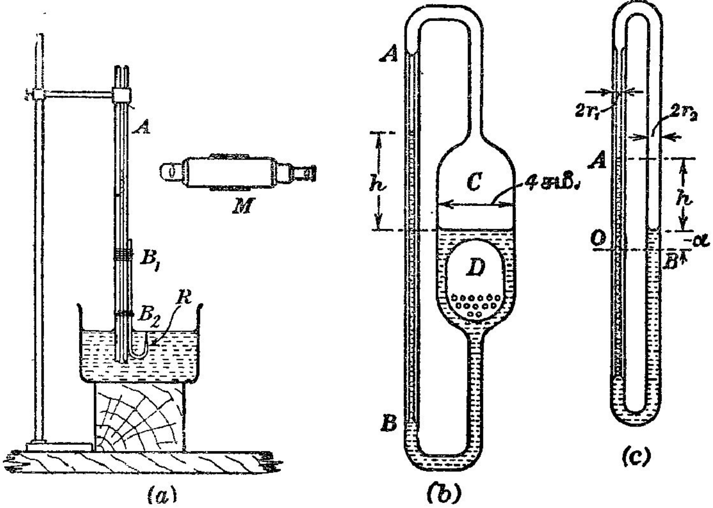
(அல்லது ஆழம்) தரப்படுகிறது ; ஆனால், h அல்லது d இற்கு எப்பெறுமானத்தையும் காணமுடியாது என்பது குறித்தற்பாலது. இவ் வெடுத்துக்காட்டுக்களில் γ தெரிந்திருந்தால்தான் ϕ இற்குப் பெறுமான மொன்றைக் காணமுடியும்.

படம் 10·17 இல் காட்டியுள்ளவை போன்ற பெருந்துளிகள் அல்லது குமிழிகளிடத்து விபத்திப் புள்ளி எதுவும் இருக்கமாட்டாது என்பதைக் குறித்தல் வேண்டும் ; ஏனெனில் அத்தகைய புள்ளியொன்று இருக்கு மாயின திரவத்தில், வெவ்வேறு மட்டங்களிலுள்ள புள்ளிகளில், அமுக்கம் ஒரேமாதிரியிருக்கும். மெல்லிய நிலைக்குத்தான கண்ணாடிக்கோலினின்று தொங்குகின்ற துளிகள் போன்ற சிறிய துளிகளிடத்து வரிப்படத்தளத்திற் குச் செங்குத்தான தளமொன்றிலுள்ள வளைவாரையுடன் தொடர்புள்ள அமுக்கமாறலானது நீர்நிலையியலின் தொடக்கநிலைத் தத்துவங்களை மீறுவண்ணம் தாக்கும்பொழுது, விபத்திப புள்ளிகள் உண்மையில் தோன்றும்.

பரப்பிழுவையைப் பரிசோதனைமுறையாகத் துணிதல்.—(*a*) **மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றில் ஏற்றத்தைப் பயன்படுத்தும் முறை.—**கிட்டத்தட்ட 0·4 சமீ. விட்டமுடைய கண்ணாடிக் குழாய்த் துண்டொன்றை எடுத்து, பன்சன சுவாலையில் அதை ஓயாது சுழற்றிச் சூடாக்குக. கண்ணாடியானது உருகு நிலையையடையத் தொடங்கும்போது குழாயின் சுவர்கள் தடிக்குமாறு குழாய் நீளம் வழியே இலேசாக அமுக்குக. பின்பு கண்ணாடியைச் சுவாலை யினின்றும் வெளியே எடுத்து அதன் முனைகளை **மெதுவாகவும்** வெளிப்புற மாகவும் இழுத்தல் வேண்டும். இவ்வண்ணம் ஆக்கப்பட்டுள்ள மயிர்த் துளைக் குழாய் துப்புரவானது ; γ இற்கு சரியான பெறுமானமொன்றைப் பெறவேண்டுமாயின் இந்நிபந்தனையைக் கண்டிப்பாய் நிறைவேற்றுதல் வேண்டும். குழாய் குளிர்ந்தபின்பு அதன் ஈர்க்கப்பட்ட பாகத்தின் மையத் திலிருந்து துண்டொன்றைத் தெரிந்தெடுத்து, படம் 10·18 (*a*) யில் காட்டி யுள்ளவாறு முனையொன்றில் கூர் ஒன்று உண்டாகும்வண்ணம் ஈர்க்கப் பட்டதும் இருமுறை செங்குத்தாக வளைக்கப்பட்டதுமான மிகுமெல்லிய கண்ணாடிக்கோல் R உடன் இணைக்க. இக்கோல் குழாயுடன இந்திய றப்பர்க் குழாய்த் துண்டொன்றிலிருந்து வெட்டியெடுத்த பட்டைகள் B_1, B_2 என்பவற்றால் எளிதில் இணைக்கப்படுகின்றது.

அடுத்து, மயிர்த்துளைக் குழாய் A யை இறுக்கியொன்றால் நிலைக்குத் தாக நிலைநாட்டுக ; பயன்படுத்துதலுக்கான ஆழத்திற்குக் கூடுதலாகக் குழாய் அமிழ்ந்திருக்கும்வண்ணம் அதற்குக் கீழே பரப்பிழுவை அளக்கப்பட வேண்டிய திரவத்தை வைத்துப் பின்பு குழாயைச் சற்று உயர்த்துக. குழாயை உயர்த்தும்பொழுது திரவம் உடனே இறங்கினால் குழாயும் நீரும் மாசற்றன என முடிவுசெய்யலாம். திரவப் பரப்பைக் கோலின் முனை சரியாகத் தாண்டும்நிலைவரை தொடர்ந்து குழாயை உயர்த்துக. மயிர்த்துளைக் குழாயில் திரவத்தின் உயரத்தை அளக்கும் பொருட்டு

வேணியர் நுணுக்குக்காட்டியொன்றைப் பயனபடுத்துதல் வேண்டும்; அது M என்க. மயிர்த்துளைக் குழாயில் திரவப்பரப்பின மிகத் தாழ்ந்த புள்ளிமீது நுணுக்குக்காட்டியைக் குவியச்செய்து அதன் அளவுச்சட்டத்தில் வாசிப்பு எடுக்கப்படுகிறது. கோல் குழப்பப்படாதவண்ணம் கவனஞ்



படம் 10·18. மயிர்த்துளை–ஏற்ற முறைப்படி பரப்பிழுவையைத் துணிதல்.

செலுத்தித் திரவத்தைக் கொண்டிருக்கும் பாத்திரம் அப்புறப்படுத்தப் படுகிறது. அடுத்து, கோலின் நுனியில் நுணுக்குக்காட்டியைக் குவியச் செய்து வாசிப்பு எடுக்கப்படுகிறது. இவ்விரு வாசிப்புகளின் வித்தியாசம் மயிர்த்துளைக் குழாயில் திரவததின் உயரத்தைத் தருகிறது. இந்நோக்கல் களை மீண்டுஞ் செய்தல்வேண்டும். பிறையுருவின் மேற்பாகத்திற்கு ஒத்த புள்ளியிற் குழாயை முறித்து, வேணியர் நுணுக்குக்காட்டியொன்றைப் பயன்படுத்தி ஆரை காணப்படுகிறது. இதன்பொருட்டு ஒனறிற்கொன்று செங்குத்தான இரு விட்டங்களிற்குப் பல வாசிப்புகள் எடுக்கப்படுகின்றன. கிட்டதட்ட 5 சதவீதத்திற்கு மேலாகத் தொகுதிகளின் இடைகள் வேறு படாதிருப்பின் இடையை r இன் அளவையாக எடுக்க முடியும். வேறு பாடானது இதை மீறுமாயின் குழாயை விலக்கி வேறொன்றைச் செய்தல் வேண்டும். பரிசோதனையின் முதன்மையான பகுதியைத் தொடங்குமுன் குழாய் நுனிகளின் இடை விட்டங்களை அளத்தல்வேண்டும். நுனிகள் நியாயமான அளவில் வட்டமானவை எனக் கண்டால் குழாயானது அதன் நீளம் முற்றிலும் வட்டக் குறுக்குவெட்டுடையது என எதிர்பார்க்கலாம். புள்ளி B யில் உள்ள ஆரையே திரவப் பரப்பிற்குக் குறுக்கேயுள்ள அமுக்கமாறலை நிருணயிக்கிறபடியால், γ வைக் கணிக்குமிடத்து இந்நுனி

விட்டங்களைப் பயன்படுத்தலாகாது, படம் 10·12 (a). ஏற்கெனவே நிலை நிறுத்தியுள்ள சூத்திரத்திலிருந்து பரப்பிழுவையின் பெறுமானத்தைக் கணிக்கலாம்.

[ஆரை r உடையதும், நீளம், $2\gamma = g\rho hr$ இனுல் தரப்படும் h இற்குக் குறைவானதுமான குழாயொன்றைப் பரப்பிழுவை γ வும் அடர்த்தி ρ வும் கொண்ட திரவமொனறில் அமிழ்த்திஞல் யாது நிகழும் என்னும் கேள் வியை நாம் இவ்விடத்தில் வசதியாகக் கேட்கலாம. வழக்கமாக, அதாவது குழாயின் நீளமானது h ஐக் காட்டிலும் பெரிதாய் இருக்கும்பொழுது, குழாயில் திரவ நிரலே சமன்பாடு நிறைவேற்றப்படும் வண்ணம் அதனுடைய உயரத்தைச் செப்பஞ்செய்கிறது. எமது இந்த எடுத்துக்காட்டில் இருக்கிறது போல அது ஒருபோதும் முடியாதுவிடின், மேற்படி சமன்பாட்டில r என்பது மட்டுமே மாறியாகும். எனவே குழாயின மேல்நுனிவரை திரவம் ஏறி அங்கு மேஞேக்கிக் குழிவானதும் r ஐக் காட்டிலும் பெரிய ஆரை உடையதுமான பரப்பொன்றை ஆக்குகிறது. அதன் பெறுமானம் r_1 ஆனது, $h_1 r_1 = hr$ என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு h_1 என்பது குழாயில் திரவததின் உயரம் ஆகும்.]

மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றிலே ஒரு திரவத்தின ஏற்றத்தைப் பயன்படுத் திப் பரப்பிழுவையைத் துணிதல் பற்றி எடுத்துரைக்குமிடத்து அது பெரிதும் சிக்கலானது எனப் பேகசனும் டோசனும்† கூறியுள்ளனர். முதலாவதாக வெவ்வேறு திரவங்களுக்குப் பயன்படுத்துவதற்குக் குறுக்குவெட்டைப் போதிய அளவில் சீராகக் கொணடிருக்கிற குழாயொன்றைக் கண்டு பிடிப்பது அரிது ; அத்தகைய குழாய்த் துண்டொன்றை அளவுகோடு திருததல், துப்புரவாக்கல், தூயதாய் வைத்துக் காப்பாற்றுதல் என்பன எளிதன்று என இக்கட்டுரையாசிரியர் சுட்டிக்காட்டியுளளார். மேலும் தேவைப்படும் திருத்தத்துடன் பிறையுருவின் வெப்பநிலையை மதிப்பிடுவதுங் கடினம் ; எனவே, பரிசோதனைத் துணிதலின நோக்கு வெப்பநிலையுடன் பரப்பிழுவையின் மாறல் எனின் இம்முறையானது பயனற்றது. அன்றியும் திரவத்தினது ஏறறத்தின் உயரத்தைத் திருத்தத்துடன் அளத்தல் எளி தன்று ; அல்லாமலும், எல்லா அளத்தல்களும் முறைப்படி செய்யப் பட்டும், பெறுமானம் γ அன்று, அது γகோசைϕ ஆகும் என்பதை ஞாபகப்படுத்திஞல் பெருமளவில் இம்முறையைப் பயன்படுத்துவதிலுள்ள வசதி தோற்றவளவில் மட்டுமேயன்றி அது உண்மையானது அன்று என வரவரத் தெளிவாகின்றது.

ஒடுங்கிய குழாயொன்றிலே திரவத்தின் ஏற்றத்தை அளக்காமல் அதற்குப் பதிலாகத் திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்ற குழாயொன்றின் கீழ் நுனிவரை திரவத்தைச் செலுத்தி, அதற்குத் தேவையான அமுக்கத்தை வசதியான அமுக்கமானியொன்றில் அளந்தால் இவ்விடர்கள் யாவும் பெருமளவில் மறையும்.

† *Trans. Far. Soc.*, 17, 384, 1921.

மயிர்த்துளைக் குழாயின் கீழ் முனைக்கு அணித்தாய் வைத்துள்ள வெப்ப விணையொன்று பிறையுருவின் வெப்பநிலையைக் காட்டுகிறது.

திருத்தங்கள் எல்லாவற்றையும் தவிர்க்குமிடத்து இம்முறையும் அதற்கான ஆய்கருவியும் **யேகர்** என்பவரால் திட்டமிடப்பட்டதும் பக்கம் 560 இல் விவரித்துக் கூறியுள்ளதுமான முறையுடன் அத்துணை ஒத்திருக்கிறபடியால் இங்கு விரிவாக விவரங்கள் தரப்படமாட்டா.

படம் 10·18 (*b*) யில் காட்டியுள்ள ஆய்கருவி வகையொன்றை ஆக்கி **ரிச்சேட்சும் கூம்சும்** † முந்திய பந்தியில் கூறியுள்ள பிரச்சினைகள் சில வற்றைத் தீர்த்துள்ளனர். AB ஆனது துளையின் சீர்மைக்காகத் தெரிந் தெடுக்கப்பட்ட ஒரு மயிர்த்துளைக் குழாயாகும்; C, அதனிலும் அகலமான குழாய் ஆகும்; அதன் விட்டம் கிட்டத்தட்ட 4 சமீ.; அது மயிர்த்துளைக் குழாயுடன உருக்கியொட்டப்பட்டிருக்கிறது. D ஆனது தேவைப்படுகின்ற நீரின் கனவளவைக் குறைகக்கும் பொருட்டு C யுள்ளே வைத்துள்ள கண்ணா டிப் பாத்திரமொன்றுகும். ஆய்கருவி செவ்வையாகத் துப்புரவாக்கப்பட்டுத் தூய வளியாலும் பரப்பிழுவை துணியப்படுகின்ற நீரால் போதிய அளவி லும் நிரப்பப்படுகின்றது. தொகுதியானது வெப்பநிலை நிறுத்தியொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கிறது; பிறையுருக்களின் நிலைகள் தடித்த கண்ணாடி யன்னல் வழியாக நோக்கப்படுகின்றன; ஒரு சிற்றுயரமானியால் உயரம் *h* துணியபபடுகிறது. அடுத்து, ஆய்கருவியைத தலைகீழாககி மயிர்த்துளை யேற்றமானது இரண்டாவது முறை துணியப்படுகிறது. இவ்வாய்கருவியைப் பயன்படுத்தி வெப்பநிலையுடன் பரப்பிழுவையின் மாறறம் ஆராயப்பட்டுள் ளது. இதில, மிகு ஒழுங்கான பேறுகள் கிடைக்கபபெற்றுள்ளன.

ரிச்சேட்ஸ், கூம்ஸ் ஆகியோா பயனபடுத்திய ஆய்கருவியின திரி பொன்றைப் படம் 10·18 (*c*) எடுத்துக் காட்டுகிறது. அது ஒன்றேடொன்றுக இணைக்கப்பட்ட இரு நிலைகுத்தான குழாய்கள் A, B என்பவற்றுல் ஆனது. அவற்றின் உள்ளாரைகள் முறையே r_1 உம் r_2 உம் ஆகும். முழு ஆய்கருவியையும் ஒரு வெப்பநிலை நிறுத்தியில் அமர்த்தி எளிதில் பயன்படுத்தலாம்; ஆய்கருவியில் திரவம் புகுததப்பட்டதும் அதை வளி புகாமல் அடைக்கலாம். [தேவைப்படும்போது ஆய்கருவியிலிருந்து வளியை அப்புறப்படுத்தலாம்.]

இரு திரவப் பரப்புக்களுக்கிடையேயுள்ள உயர வித்தியாசம் *h* உம் வளி, ஆவி என்பவற்றின் அமுககம் p யும், அகன்ற குழாயில் பிறை யுருவிற்குக் கீழே ஆழம் α விலுள்ள மாட்டேற்றுப் புள்ளி O உம் ஆயின், வழக்கம்போல

$$p-\frac{2\gamma}{r_1}+g\rho(h+\alpha)=p-\frac{2\gamma}{r_2}+g\rho\alpha.$$

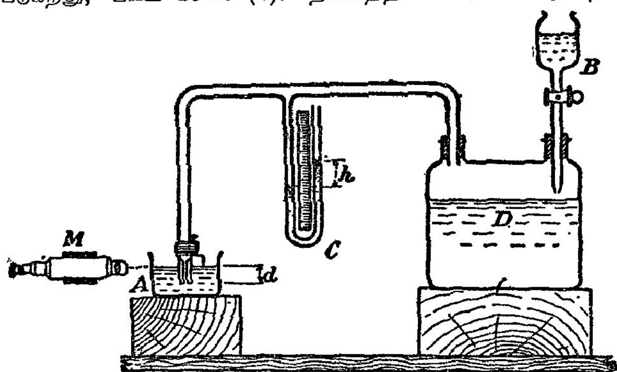
$$\therefore\ \frac{2\gamma}{g\rho}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=h;$$

† *Jour. Amer. Chem. Soc.*, **37, 1656, 1915.**

எனவே γ எளிதில் பெறப்படுகிறது. மேற்படி கொள்கையில் தொடுகைக கோணம் பூச்சியம் எனவும் திரவப் பரப்புக்கள் அரைக்கோள வடிவமுடையவை எனக் கருதுவதற்குக் குழாய் ஒவ்வொன்றும் போதிய அளவில் ஒடுங்கியது எனவும் கொள்ளப்படுகிறது.

(*b*) **யேகர் அல்லது உயர்வுக் குமிழி அமுக்க முறை.**—ஒரு திரவத்தி லுள்ள கோள வளிக் குமிழியில் அமுக்கமிகை $\frac{2\gamma}{r}$ ஆகும் என்பதே இம்முறையின் அடிப்படைத் தத்துவம்; இங்கு, r, குமிழியின் ஆரையாகும்.

பரப்பிழுவை துணியப்படும் திரவததில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்ற நிலைக்குத்தான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றின் முனையில் வளிக் குமிழியொன்றை ஆக்குவதறகுத தேவையான உயரமுக்கத்தைத துணிதலே இப்பரிசோதனையின் முதனமையான நோக்கு. (*a*) யில் காட்டியுள்ளவாறு விட்டம் கிட்டத்தட்ட 0·05 சமீ. கொண்ட மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று ஆக்கப்பட்டுள்ளது. பரப்பிழுவை துணியப்படும் திரவத்தைக் கொண்டிருக்கிற பாத்திரம் A யில் இது கீழ்முகமாக நிலைக்குத்தாய் வைக்கப்படுகிறது, படம் 10·19 (*a*). திரவத்தின் பரப்பானது தட்டையாக



[பாத்திரம் A யை அப்புறப்படுத்திய பின்புதான் நுணுக்குக்காட்டி M பயன்படுத்தப்படுகிறது; இல்லாவிடில், இப்பாத்திரத்தின் வளைந்த பரப்பில் நிகழும் முறிப்பானது நோக்கலைப் பாதிக்கும்.]

படம் 10·19. (*a*) உயர்வு மிகையமுக்க முறையால் பரப்பிழுவையைத் துணிதல்.

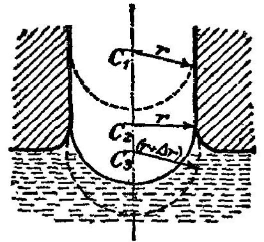
இருக்கும்பொருட்டுப் பாத்திரத்தின் விட்டம் குறைந்தது 8 சமீ. ஆக இருத்தல்வேண்டும். சைலலைப் பயன்படுத்தும் அமுக்கமானி C உடனும், துளி புனல் B பொருத்தப்பட்ட ஊல்வின் போத்தல் D யுடனும் மயிர்த்துளைக் குழாய் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இரசம் (அல்லது நீர்) B யில் வைக்கப்பட்டு அது D யுள் மெதுவாகச் செல்லும்வண்ணம் விடப்படுகிறது. ஆய்கருவி வளிபுகாவண்ணம் அமைக்கப்பட்டிருந்தால் அதன் அக, புற அமுக்க வித்தியாசம் உடனே தோற்றும். குறிப்பிட்ட

பெறுமானமொன்றை D யிலுள்ள அமுக்கம் அடையும்போது A யில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்ற மயிர்த்துளைக் குழாய் முனையிலிருந்து குமிழிகள் விடுவிக்கப்படுகின்றன. அவை ஒவ்வொன்றாக, பத்துச் செக்கன்களில் கிட்டத்தட்ட ஒரு குமிழி என்னும் வீதத்தில், உண்டாதல் வேண்டும். மயிர்த்துளைக் குழாய் நுனியினின்று குமிழியொன்று பிரியும்போது ஆய் கருவியிலுள்ள அமுக்கமானது குமிழியின் ஊதுதலுக்குத் தேவையான உயர்வமுக்கத்துக்குக் குறைவாக அமையுமாறு ஆய்கருவியிலுள்ள வளியினது கனவளவைக் குறைத்து முதலாவது நிபந்தனை நிறைவேற்றப்படுகின்றது ; D யில் திரவம் புகும வீதத்தைச் செப்பஞ்செய்து இரண்டாவது நிபந்தனை நிறைவேற்றப்படுகிறது. அமுக்கமானியில் உயர்வுயரம் h குறிக்கப்படுகிறது. மாணியில் இருக்கின்ற திரவத்தின் அடர்த்தி ρ எனின் அம்மானியில் குறிக்கப்படுகின்ற அமுக்கம் $g\rho h$ ஆகும் ; இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவு. ஆனால் இவ்வமுக்க வித்தியாசம் முற்றிலும் பரப்பிழுவை விளைவுகளாலானதொன்றன்று ; ஏனெனில் அதன் ஒரு பங்கு, திரவப்பரப்பிற்குக் கீழே ஆழம் d யில் மயிர்த்துளைக் குழாயின் துவாரம் இருப்பதால் ஆகிறது எனக் கருதுதல் வேண்டும். இத்திரவத்தின் அடர்த்தி σ எனின், இவ்வமுக்கம் $g\sigma d$ ஆகிறது ; எனவே பரப்பிழுவையால் நேரே ஆகின்ற அமுக்க வித்தியாசம் $g[\rho h-\sigma d]$ ஆகும். ஆகவே

$$\frac{2\gamma}{r}=g(\rho h-\sigma d).$$

எனவே இச்சமன்பாட்டில் வருகின்ற மற்றை மாறிகளின் பெறுமானங்கள் தெரியப்பட்டதும் γ வைக் கணிக்கலாம்.

ஏதற்காக மேற்படிச் சமன்பாட்டில் r இற்குப் பயன்படுத்தியுள்ள பெறுமானமானது மயிர்த்துளைக் குழாயினது கீழ் முனையின் ஆரைக்குச் சமனாக இருக்கிறது என்பதை ஆராயும் பொருட்டு, குழாயானது சீரான விட்டம் உடையது எனவும், திரவத்தின் அரைக்கோளப் பரப்பின் மையமானது C_1 இல் இருக்குமாறு ஆய்கருவியில் அமுக்கம் அமைந்திருக்கிறது எனவும் கொள்வோம், படம் 10·19 (b). மயிர்த்துளைக் குழாய் ஒடுக்கமாகவும் திரவத்துக்கும் குழாய்க்கும் இடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணம் பூச்சியமாகவும் இருக்குமாயின், இத்திரவப் பரப்பானது ஆரை r ஐயுடைய கோளமொன்றின் பாகமாகும் என்னும் எடுகோள் சரியானது. திரவப்பரப்பின் மையமானது C_2 இலும், அதன் அதே ஆரை r ஐ உடையதாயும் இருக்குமாறு ஆய்கருவியில் அமுக்கம் உயர்த்தப்படுகிறது எனக்கொள்க ; ஆனால் இந்நிலைக்குக் கீழே திரவப்பரப்புச் செலுத்தப்படின் அதனது ஆரை



படம் 10·19. (b) மயிர்த்துளைக் குழாய் நுனியில் குமிழியொன்றின் ஆக்கம் (பெருப்பிக்கப்பட்டுள்ளது).

கூடும். மையமானது C_3 இல் இருக்கும்பொழுது ஆரை $(r+\Delta r)$ ஆகுக. அப்பொழுது பரப்பிற்குக குறுக்கேயுள்ள அமுகக வித்தியாசம் குறைந்து குமிழி வளாகிறது; ஏனெனில், பரப்பின் சமநிலேக்கு ஆய்கருவியிலுளள அமுக்கம பெரிதும மிகைப்படுகிறது. எனவே குமிழியொனறை அப்புறப்படுததுதலால் ஆய்கருவியிலுள்ள அமுககம் குழாய் முனேயிலிருந்து குமிழியொன்றின் பிரிவுக்குத் தேவையான உயர்வமுககத்தைக் காட்டிலும் சிறிதாய் அமையுமாயின ஒரு வளிக் குமிழி வெளியேறும்; அல்லாமலும் திரவப் பரப்பானது C_2 இற்கு மேலே முற்றிலும் இருக்கும்.

இம்முறையை, உருகிய உலோகமொன்றின் பரப்பிழுவையைத் துணிதல், வெப்பநிலேயுடன் ஒரு திரவத்தின் பரப்பிழுவை மாறும் முறையை ஆராய்தல், கரைபொருளின் செறிவுடன ஒரு கரைசலின பரப்பிழுவை மாறும் முறையை ஆராய்தல் என்பவற்றிற்குப் பயன்படுத்தலாம்; இவை இம்முறையின் பெரும் நயங்கள் ஆகும். கடைசியான இரு துணிதல்களுக்கு இம்முறை சிறப்புவாய்ந்தது; ஏனெனில் அங்கு மயிர்த்துளேக் குழாயின் ஆரை தெரியவேண்டியதேயில்லே. மேலும் திரவத்தின் புதுப் பரப்பு தொடர்நது ஆக்கப்படுகிறபடியால் கறைகளால் ஆகும் விளேவுகள் குறையும்; இறுதியாக, நோக்கல்களே எடுக்கு முன்பே ஆரை r ஐத் துணியமுடியும் [முறை (*a*) யைக் காண்க].

ஆனல், இம்முறையால் ஒரு திரவத்தின் பரப்பிழுவையின தனி நிர்ணயமொனறைச் செய்யுமிடத்துச் சில பிரச்சினேகள் தோன்றுகினறன. குமிழியில் அமுக்கமிகை உயர்வாக இருக்கும்பொழுது, குமிழிகளின் பருமன் குழாயின் உள்ளாரையாலோ வெளியாரையாலோ ஆளப்படுகிறது என்பது பற்றி உறுதியாய்க் கூறமுடியாது. இவ்வீர் ஆரைகளும் கருதத்தக்க அளவில் வேறுபடும்பொழுது, பரப்பிழுவையானது அண்ணளவாகக் கூடத தெரிந்திருப்பினும் எடுத்துக்காட்டுக்குரிய சமன்பாட்டில் அப்பெறுமானஙகளின் நேர்ப் பிரதியீடு சரியான பெறுமானத்தைத் தருகிறது.

சக்தனின் (Sugden) உயர்வுக் குமிழி அமுக்கமுறை ஆராய்ச்சி பற்றிய குறிப்பு.—சோதிக்கப்படுகின்ற திரவத்தின் பரப்பிழுவைக்கான பெறுமானமொன்றைப் பெறும்பொருட்டு, எவ்வாறு வெப்பநிலேயுடன் அத்திரவத்தின் அடர்த்தி மாறுகின்றது எனபதைத் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும்; இது உயர்வுக் குமிழியமுக்கமுறையிலே மெய்யான பிரச்சினேயொன்றுகும். அதற்குத் தேவையான தரவுகள் எப்பொழுதும் கிடைப்பதில்லே; எனவே அத்தேவையைத் தவிர்க்குமுகமாக யேகரின ஆரம்பமுறையைச் **சக்தன்** மாற்றியமைத்துளளார். அவர் வெவ்வேறு ஆரைகள் உடைய இரு மயிர்த்துளேக் குழாய்களேப் பயன்படுத்தி, முதல் அகனற மயிர்த்துளேக் குழாயிலும் அடுத்து மற்றதிலுமாக, குமிழிகளே ஆக்குவதறகுத் தேவையான உயரமுக்க மிகையைத் துணியலானுர். குமிழிகள் உண்டாகும் நுனிகள் திரவப்பரப்பிற்குக்கீழே அதே ஆழத்தில் இருக்குமாயின் வழககமான குறிப்பீட்டில் சிறு, ஆனல் வெளிப்படையாகத தெரியக்கூடிய மாற்றத்தைப் புகுத்தி,

$$\frac{2\gamma}{r} = g(\rho h - \sigma d) \text{ ஐயும், } \frac{2\gamma}{R} = g(\rho H - \sigma d) \text{ ஐயும்}$$

பெறுகிறோம் ;

எனவே
$$2\gamma \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{R}\right] = g\rho(h - H).$$

இறுதிச் சமன்பாட்டில் திருத்தத்திற்கான உறுப்பு மறைகிறபடியால் பாத்திரத்தில் திரவத்தின் பரப்பு தட்டையாக இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை ; எனவே சிறிய கொள்பாத்திரமொன்றைப் பயன்படுத்தலாம் ; இது சக்தன் முறையின் நயங்களுள் ஒன்றாகும்.

தொடக்கத்தில் மிக அகன்ற மயிர்த்துளைக் குழாய்களைச் சக்தன் பயன்படுத்தியபடியால், குமிழிகளின் மேற்பரப்புக்கள் மயிர்த்துளைக் குழாயின் குறுக்குவெட்டாரைக்குச் சமனான ஆரையொன்றையுடைய அரைக் கோளங்களாக ஆனதும் அக்குமிழிகள் பிரிந்து செல்கின்றன எனக் கொள்வது முறையன்று. இருந்தாலும் மேலதிக விவரங்களை அறிதற்கு மூலக் கட்டுரையைப் படித்தல் வேண்டும்.†

உதாரணம்.—திரவமொன்றின் பரப்பிழுவையைத் துணிவதற்குச் சக்தனின் முறையில் பயன்படுத்தியுள்ள குழாய்களின் விட்டங்கள் 0·050 சமீ. உம் 0·120 சமீ. உம் ஆகும். சிறிய குழாயின் விட்டத்தில் வழு 2 சதவீதம் ஆயின், அதனால் பரப்பிழுவை γ வின் கணித்த பெறுமானத்தில் ஆகும் விளைவை மதிப்பிடுக.

$$p = g\rho(h - H) \text{ ஆயின்}$$

$$p = 2\gamma\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

எனப் பெறுவோம், மேலே காண்க; இங்கு r உம் R உம் குழாய்களின் ஆரைகள் ஆகும் ; $r < R$. p, R என்பவற்றின் பெறுமானங்களிலுள்ள வழுக்கள் புறக்கணிக்கத்தக்கன எனக் கொண்டு,

$$0 = \delta\gamma\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \gamma\left(-\frac{\delta r}{r^2}\right)$$

என நாம் வகையீட்டால் பெறுகிறோம்.

$$\therefore \quad \frac{\delta\gamma}{\gamma} = \frac{\delta r}{r^2} \cdot \frac{rR}{R - r} = \frac{\delta r}{r} \cdot \frac{R}{R - r}$$

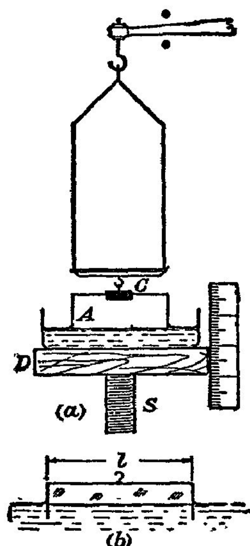
$$= \frac{2}{100} \cdot \frac{12}{12 - 5}$$

$$= 3 \cdot 4 \text{ சத வீதம்.}$$

(c) சாதாரண தராசைப் பயன்படுத்தும் முறை.—கண்ணாடியை ஈரமாக்கும் ஒரு திரவத்தின் பரப்பிழுவையைப் பின்வருமாறு துணியலாம். கண்ணாடித்தட்டு (அது நுணுக்குக்காட்டி வழுக்கித் தட்டொன்றாகும்)

† *Jour. Chem. Soc.*, 121, 858, 1922.

A ஆனது தராசுத் தட்டொன்றின் அடியிலிருந்து உலோகக் கவ்வி C யினால் தாங்கப்பட்டிருக்கிறது ; தட்டின் கீழ் ஓரம் கிடையாயிருக்குமாறு செப்பஞ்செய்யப்படுகிறது. கண்ணாடித தட்டிற்குக் கீழே சிறு மேசையொனறுமீது, திரவங்கொள் பாத்திரம் D வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. திருகு S ஐப் பயன் படுத்தி மேசையை உயர்த்தலாம். சமநிலையாக்கப்பட்ட தராசானது ஊஞ்சலாடுமாறு விடப்படுகிறது. அடுத்துத் திரவம் கண்ணாடித் தட்டின் கீழ் ஓரத்தைச் சரியாகத் தொடும்வரை செப்பஞ்செய் மேசையானது திருகால் உயர்த்தப்படுகிறது. இந்நிலை, நுணுக்குக்காட்டி வழுக்கித்தட்டு பரப்பிழுவையின் கீழே இருக்கும் போது சுட்டி காட்டும் திடீர்க் குலுக்கத்தால் தெரியவருகிறது. திரவத்தினின்று வழுக்கித் தட்டு வெளியேற்றப்படும்வரை மற்றைத் தராசுத் தட்டில் திணிவுகள் சேர்க்கப்படுகின்றன. வழுக்கித்தட்டின் கீழ் ஓரம் திரவத்தின் பொதுப் பரப்பில் இருந்தபடியால் மீயுந்தலுக்குரிய திருத்தம் வேண்டியதில்லை. வழுக்கித் தட்டின் நீளம் l உம் கீழான ஓரத்தில் அதன் தடிப்பு t யும் ஆயின், வழுக்கித்தட்டுமீது பரப்பிழுவையாலாகும் விசை $2(l+t)\gamma$ ஆகும். இது mg யிற்குச் சமன் ஆகும் ; இங்கு m ஆனது சமநிலையை மீண்டும் நிலைநிறுத்துதற்கெனச் சேர்த்துள்ள திணிவு ஆகும். எனவே γ வைத் துணியலாம்.



படம் 10·20. பொதுத்தராசு முறைகளால் பரப்பிழுவையைத் துணிதல்.

வேறுமுறையொன்று பினவருமாறு.—சுட்டி குலுக்கங் காட்டும்வரை செப்பஞ் செய்மேசையைத் திருகி உயர்த்திய பின்பு மேசையின் நிலையை நோக்குக (கோளமானியொன்றில் உள்ளது போல உகந்த அளவுத் திட்டங்கள் இதிலும் அமைந்து இருக்கலாம்). மேலே கூறியுள்ளவாறு மீண்டும் நிலைநிறுத்துவதற்குப் பதிலாகச் சுட்டி மீண்டும் பூச்சியத்தை மீளும்வரை மேசையை தூரம் h வரை திருகி உயர்த்துக. அப்பொழுது மீயுந்தலால் ஆகும் விசை பரப்பிழுவையால் ஆகும் விசையைச் சரியாக ஈடுசெய்கிறது ; மேலும் h ஆனது வழுக்கித்தட்டின் அமிழ்ப்பாழமாகவும் இருக்குமாறு திரவங்கொள் பாத்திரம் பெரிதும் அகன்றதாய் இருந்தால்

$$2(l+t)\gamma = lth\rho g.$$

இங்கு ρ, திரவத்தின் அடர்த்தி ஆகும்.

மெழுகு பூசியுள்ள கண்ணாடித் துண்டுகளால் பக்கம் 534 இல் கூறியுள்ளவாறு நீர்ப்பரப்பைத் துப்புரவாக்கும்பொருட்டுக் கொள்பாத்திரமானது நீரால் முற்றிலும் நிரப்பப்பட்டிருந்தாற்றான் இம்முறை திருத்தமான பேறுகளைத் தரும் எனபது குறித்தற்பாலது.

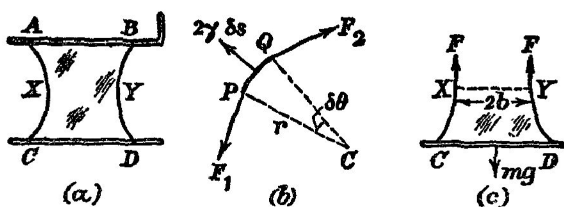
சவர்க்காரக் கரைசலொன்றின்† பரப்பிழுவையைத் துணிவதற்கு ஏற்கெனவே விவரித்துக் கூறியுள்ள தட்டு முறையை எளிதில் மாற்றியமைக்கலாம். படம் 10·20(b) யில் காட்டியுள்ளதுபோல் கண்ணாடி அல்லது கம்பிச்சட்டமொனறு தயாரிக்கப்பட்டுத் தராசுத் தட்டொன்றிலிருந்து கீழ்முகமாகத் தாங்கப்பட்டிருக்கிறது ; தராசு சமநிலையில் இருக்கும்பொழுது சட்டத்தின் கிடையான கீழ்ப்பாகம் திரவத்தின் பொதுப்பரப்பிலிருந்து 0·5 சமீ. உயரத்தில் இருக்கும்வண்ணம் ஒழுங்குசெய்யப்படுகிறது. அடுத்து, சட்டத்தை முற்றிலும் அமிழ்த்தி அதன் முந்திய அதே தொடர்பு நிலையைச் சட்டம் அடையுமாறு தராசின் வலப்பக்கத்துத் தட்டில் அதிகப்படியான திணிவு m சேர்க்கப்படுகிறது. கிடையான பாகத்தின் நீளம் l எனின்

$$2\gamma l = mg\,;$$

இங்கு படலத்தின் நிறை புறக்கணிக்கப்படுகிறது.

நீர்போன்ற திரவங்களிடத்தும் இம்முறையைப் பயன்படுத்தலாம் ; அப்பொழுது சட்டத்தின் கிடையான பாகமானது திரவத்தின் பொதுப் பரப்பிற்கு இன்னும் கிட்ட இருத்தல் வேண்டும்.

(d) இழை முறை.—சவர்க்காரக் கரைசலொன்றின் பரப்பிழுவையைத் துணிவதறகு இது எளிய ஆனால் கவர்ச்சியுள்ள ஒரு முறையாகும். 1·5 இலிருந்து 2 மிமீ. வரை விட்டமுடைய இரு கண்ணாடிக் கோல்கள் துப்புரவாக்கப்பட்டு அவற்றுள் ஒன்று படம் 10·21 (a) யில் காட்டி



படம் 10·21. சவர்க்காரக் கரைசலின் பரப்பிழுவையைத் துணிதலுக்குரிய இழை முறை.

†கீழ்த்தரப்படும சவர்ககாரக கரைசலானது சிறந்ததெனப **பேராசிரியர் போய்ஸ்** என்பார் வறபுறுததுகிறா. நனகு அடைக்கபபட்ட போத்தல ஒன்றில இருககிற ஒரு லீற்றா காய்ச்சி வடிதத நீருடன 25 கி. சோடியமோலியேற்றைச சோத்து 24 மணிததியாலம் வைகக. பின்பு 300 சமீ.³ கிளிசரோலைச் சோதது, நனகு குலுக்கி ஒரு கிழமைகது வைகக. மாசுநுரை தங்கியிருகக, தெளிவான திரவததை நீரிறககியொன்றால வெளியேறறுக. கரைசலுடன் இரணடு அலலது மூன்று துளி திரவ அமோனியாவைச சோத்து அதை இருளான அலுமாரியொனறில வைகக. கரைசலைச சூடுகாட்டவோ வடிககவோ கூடாது.

யுள்ளவாறு விளக்கப்பட்டிருக்கிறது. அடுத்து, கோணலுற்ற கோலானது இறுக்கியொன்றால் கிடையாகத் தாங்கப்பட்டிருத்தல் வேண்டும். படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு புள்ளிகள் A, B, C, D என்பவற்றுடன் சமநீள மான பருத்தியிழைகள் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன; AB யின் நீளம் கிட்டத் தட்ட 10 சமீ. உம் AC யின் நீளம் கிட்டத்தட்ட 8 சமீ. உம் ஆகும். இவ்வண்ணம் செவ்வகச் சட்டமொன்றைப் பெறுகிறோம்; பரப்பிழுவை யைத் துணியவேண்டிய சவர்க்காரக் கரைசலில் அதை இனி அமிழ்த்த லாம். கரைசலினின்று முழுத்தொகுதியும் வெளியேற்றப்பட்டபோது கோல்களுக்கும் இழைகளுக்குமிடையே படலமொன்று ஈர்க்கப்பட்டிருக்கும்; படலத்தின் வடிவம் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு இருக்கும். இழைகளின் வளைவு தெளிவாகவும் அளக்கததக்கதாகவும் இருக்கும்வண்ணம் கீழே யுள்ள கண்ணாடிக் கோலின் நீளம் அடுத்துச் செப்பஞ்செய்யப்படுகிறது; CD கிடையாக இருக்குமாறு கவனஞ் செலுத்தப்படுகிறது; தேவைப்படின் கோலுடன் கிட்டத்தட்டப் பொருந்தும் சிறு கம்பித்துடமொன்று CD யில் வைக்கப்பட்டு, CD கிடையாக அமையும்வரை அதன் நிலை செப்பஞ் செய்யப்படுகிறது.

இனி இழைகளுள் ஒன்றில் நீளம் δs கொண்ட சிறுபாகம் PQ வின் சமநிலையைக் கருதுக, படம 10·21 (b). P யிலும் Q விலுமுள்ள செங்குத்துக்கள் C யிற சந்திக்க; இங்கு $P\widehat{C}Q=\delta\theta$; P யில் வளை வாரை r ஆகுக. P யிலும் Q விலும் இழையிலுள்ள இழுவை யால் ஆகின்ற விசைகள் F_1 உம் F_2 உம் ஆகும் எனக் கொள்க. [பயன்படுத்தியுள்ள பருத்தியிழை மிக மெல்லியதாயின்] இம்மூலகத்தின் நிறையைப் புறக்கணிக்கலாம்; எனவே அதன்மீது ஆற்றுகின்ற மற்றை விசை பரப்பிழுவையாலானது; அதன் பெறுமானம் $2\gamma\,\delta s$ ஆகும்; அது PQ விறகுச் செங்குத்தாக அதன் மையப்புள்ளியில் தாககுகிறது. PQ வின் மையப்புள்ளியிலுள்ள தொடலி வழியேயும் அதற்குச் செங்குத்தாகவும் விசைகளைத் துணித்தும், PQ மீது தாக்குகின்ற விசைகள் சமநிலையில் இருககினறன ஆதலின்,

$$F_1 \text{ கோசை } \tfrac{1}{2}\delta\theta - F_2 \text{ கோசை } \tfrac{1}{2}\delta\theta = 0 \quad \text{எனவும்}$$

$$2\gamma\,\delta s = (F_1+F_2) \text{ கோசை } (\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\delta\theta) \quad \text{எனவும்}$$

பெறுகிறோம்.

எனவே $$F_1 = F_2 = F \quad \text{(என்க)},$$

அதாவது, இழையில் இழுவை மாறுமல் இருக்கிறது.

ஆகவே $\delta\theta$ சிறிது ஆதலின்,

$$2\gamma\,\delta s = 2F \text{ சைன் } \tfrac{1}{2}\delta\theta = F\,\delta\theta\ ;$$

$$\therefore\ \frac{ds}{d\theta} = \text{ எல் } \frac{\delta s}{\delta\theta} = \frac{F}{2\gamma} = \text{ மாறிலி };$$

அதாவது, வளைவாரை மாருமல் இருக்கிறது அல்லது இழையானது ஆரை r கொண்ட வட்டமொன்றின் வடிவத்தைக் கொள்ளுகிறது; இங்கு $r = PC$ ஆகும். எனவே

$$F = 2\gamma r\ . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad \text{(i)}$$

எவ்வாறு கரைசலின் பரப்பிழுவையையும் CD யின் திணிவையும் CD யுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற கம்பிவளையத்தின் திணிவையும் படலத்தின் வடிவமானது பொறுத்துள்ளது என்பதைக் காட்டும் பொருட்டுப் படலமானது XY யின் குறுக்கே இருசம பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கிறது எனக் கற்பனை செய்வோம்; இங்கு XY ஆனது CD யிற்குச் சமாந்தரம்—படம் 10·21 (c) இற் காண்க. படலத்தின் கீழ்ப்பாகம் சமநிலையில் இருக்கிறபடியால்

$$2F + 4\gamma b = mg\ . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad \text{(ii)}$$

இங்கு m, [அதனுடன் பொருத்தப்பட்ட கம்பிவளையங்கள் சேர] CD யின் திணிவும், g புவியீர்ப்புச் செறிவும், γ கரைசலின் பரப்பிழுவையும், $2b$ ஆனது XY யில் படலத்தின் அகலமும் ஆகும். (i), (ii) என்பவற்றிலிருந்து F ஐ நீக்கினல்

$$4\gamma(r + b) = mg\ . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad \text{(iii)}$$

படலம் இருக்கும்போது கோல்களுக்கிடையேயுள்ள நிலைக்குத்தான தூரம் $2h$ உம் படலம் இல்லாத போது இழைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் $2a$ யும் ஆயின்

$$(a - b)(2r - a + b) = h^2,$$

அல்லது
$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{a - b} + a - b\right).$$

(iii) இல் r இற்கு இப்பெறுமானத்தைப் பிரதியிட்டால்,

$$\gamma = \frac{mg(a - b)}{2(h^2 + a^2 - b^2)}\ . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad \text{(iv)}$$

சவர்க்காரக் கரைசலானது இழைகளுக்கு அப்பால் படர்தலோ, கீழேயுள்ள கோல்மீது இருத்தலோ நிகழலாகாது என்னும் நிபந்தனையின் பேரில் மிகு எளிதான இவ்வாய்கருவியைப் பயன்படுத்திக் கரைசலின் பரப்பிழுவைக்கு நியாயமான பெறுமானமொன்றைப் பெறமுடிகின்றது; ஆய்கருவியைக் கரைசலினின்று எடுத்தபோது மேலே கூறியுள்ளவாறு இருக்கின்ற கரைசலை வடிதாள் துண்டொன்றுல் அப்புறப்படுத்துதல் வேண்டும்.

பிரிகருவி, மில்லிமீற்றர்கள் பொறிக்கப்பட்ட அளவுச்சட்டம் என்பவற்றால் தேவையான நீளவளவீடுகளை எடுக்கலாம்; அல்லது குவிவில்லையொன்றைப் பயன்படுத்திப் படலத்தின் விம்பத்தை வரைபுத் தாளொன்று மீது விழச் செய்யலாம்; இங்கு உருப்பெருக்கத்தையிட்டு ஈடுகொடுத்தல் வேண்டும்.

உதாரணம்.—பக்கம் $2a$ கொண்ட சதுரவடிவத்தில் சீரான கம்பியொன்று வளைக்கப்பட்டிருக்கிறது; சதுரத்தின் பக்கமொன்றை அப்புறப்படுத்தி அதற்குப் பதிலாக நீளம் $(\pi+1)a$ கொண்ட, வளையுந்தன்மையுள்ள விரியமுடியாத இழையொன்று புகுத்தப்படுகிறது. அடுத்து தொகுதியானது சவர்க்காரக் கரைசலொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டு வெளியே எடுக்கப்படுகிறது. இழையின் திணிவு புறக்கணிக்கத்தக்கது எனின் அடிப்படைத் தத்துவங்களைப் பயன்படுத்தி இழையின் உருவமைப்பையும் இழைக்கும் கம்பிச் சட்டத்துக்குமிடையே தாங்கப் பட்டிருக்கின்ற படலத்தின் ஒரு பக்கத்தின் பரப்பளவையும் காண்க.

பக்கம் 567 இல் காட்டியுள்ளவாறு இழையில் இழுவை F ஆனது மாறாமல் இருக்கிறது; அன்றியும் அது

$$\frac{F}{2\gamma} = \text{இழையின் வளைவாரை}$$

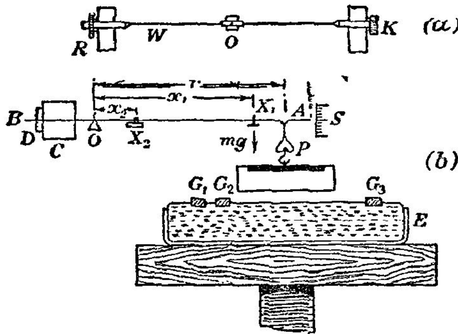
என்னுஞ் சமன்பாட்டால் பரப்பிழுவை γ வுடன் தொடர்பு படுத்தப்பட்டிருக்கிறது. எனவே இங்கு படலத்துடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற இழையின் நீளம் πa ஆகும்; அதாவது சட்டத்தின் நிலைக்குத்தான பக்கம் ஒவ்வொன்றுடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற இழை நீளம் 0 5a ஆகும்.

$\therefore$ தேவைப்படுகின்ற பரப்பளவு $=(2a\times\frac{3}{2}a)-\frac{1}{2}\pi a^2=(3-\frac{1}{2}\pi)a^2=1{\cdot}43a^2.$

(*e*) **சேளின் பரப்பிழுவைத் தராசு.**—துப்புரவான மெல்லிய செவ்வகத் தட்டொன்றின் கீழ் ஓரம் திரவமொன்றில் சரியாக அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கும் பொழுது அது கீழ்முகமான இழுப்பு $2\gamma l$ ஐ அநுபவிக்கிறது; இங்கு γ திரவத்தின் பரப்பிழுவையும், l கணுத்தட்டின் நீளமும் ஆகும். இவ்விழுப்பு சிறிதாக உள்ளது; அதை வசதியாக அளக்கும் பொருட்டுச் சேள் என்பார் படம் 10·22 இல் காட்டியுள்ள முறுக்கற்றராசொன்றைத் திட்டமிட்டு அமைத்தார். மெல்லிய கம்பி W, இரு நிலைக்குத்தான தூண்களுக்கிடையே ஈர்க்கப்பட்டிருக்கிறது; அதில் O என்னும் புள்ளியில் செம்பாலான சிறு நுண்குழாய்த் துண்டொன்று பற்றுசு பிடித்தொட்டப்பட்டிருக்கிறது, படம் 10·22 (*a*). திருகு R ஐப் பயன்படுத்திக் கம்பியிலுள்ள இழுவையைச் செப்பஞ்செய்யலாம். முறுக்கற் கம்பியிலே O என்னும் புள்ளியிலே சிறு திருகொன்றால் சமச்சீரில்லாத நெம்பு AOB ஆனது இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது, படம் 10·22 (*b*). OB யில் கோர்த்திருக்கின்ற திணிவுமிக்க குமிழ் C யினால் நெம்பைக் கிடையான நிலைக்குக் கொண்டுவரலாம்; C யின் நிலைமாற்றங்களைத் தராசானது பெரிதும் உணர்கின்றபடியால் இலேசான திருகு D யினால் அத்திணிவு உறுதியாக்கப்படுகிறது. நெம்பின் முனை A ஆனது (மீமீ.) அளவிடை S மீது இயங்குகிறது. நெம்பு மீது, X_1 என்னும் புள்ளியில் தெரிந்த திணிவொன்றைச் சேர்த்தும், தாங்கும் கம்பியை அத்துடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற குமிழ் அல்லது நெம்பு K யினால் திருகியும், நெம்பானது கிடையான நிலையைத் திட்டமாக அடையச் செய்யலாம். தட்டைப் புகுத்திய

பின் m ஆனது A யிற்கு அணித்தாயுள்ள X_1 இல் இருக்கும்பொழுதே மேலே கூறியுள்ளவாறு ஏற்பாடுகள் செய்யப்படுகின்றன.

இங்கு நீரே, பரப்பிழுவையைத் துணிவதற்குகந்த திரவம் எனக் கொள்ளப்படுகிறது; உயர்த்தவும் தாழ்த்தவும் கூடிய மேசையொன்று மீது வைக்கப்பட்டிருக்கின்ற துப்புரவான பாத்திரம் E யில் அது இருக்கிறது. E யின் விளிம்பிற்கு மேலே அதன் பரப்பு† இருக்குமாறு நீரைச் சேர்ப்பதற்கு அப்பாத்திரத்தின் மேல் விளிம்பில் மெழுகு பூசுதல் வேண்டும் என இந்நூலாசிரியர் குறிப்பாகத் தெரிவித்திருக்கிறார். தடுப்புக்கள் எனப் படுகின்ற, மெழுகு பூசியுள்ள G_1, G_2 G_3 எனனும் மூன்று கண்ணாடித் துண்டு களைப் பயன்படுத்திப் பக்கம் 535 இல் விவரித்துக் கூறியுள்ளவாறு நீரின் பரப்பு துப்புரவாக்கப்படுகிறது.



படம் 10·22. சேளின் பரப்பிழுவைத் தராசு.

முறுக்கற்றராசைச் சமநிலையாக்கிய பின்பு, தொங்குந் தட்டானது நீர்ப்பரப்பைச் சரியாகத் தொடும் வரை பாத்திரம் E உயர்த்தப்படுகிறது. அப்பொழுது தட்டானது உடனடியாக நீரில் இழுக்கப்படுகிறது; கண்ணாடித் தட்டு நீரினின்று பிரியும் அளவிற்கு நெம்பில் X_1 இலிருந்து X_2 வரை திணிவு m ஐ அசைத்து அந்நெம்பு மீது தாக்குகின்ற விசைகளின் திருப்பம் குறைக்கப்படுகிறது. இப்பொழுது கண்ணாடித்தட்டுமீதுள்ள உதைப்பின் விளைவைப் பற்றிய பிரச்சினை எழாது; ஏனெனில் அது தானாகவே பூச்சிய மாகின்றது. இனி O விலிருந்து கண்ணாடித்தட்டு முதலியவற்றின் தொங் கற் புள்ளியின் தூரம் r ஆயின்,

$$2\gamma lr = mg(x_1 - x_2);$$

இங்கு, x_1, x_2 என்பன முறையே O விலிருந்து X_1, X_2 ஆகியவற்றின் தூரங்கள் ஆகும்.

$$\therefore \gamma = \frac{mg(x_1 - x_2)}{2lr}.$$

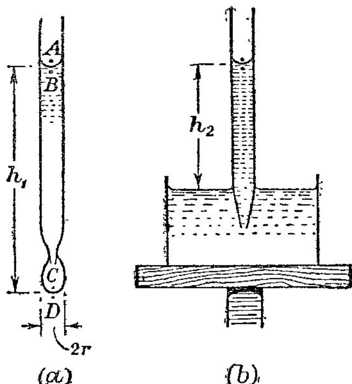
† *Phil. Mag.*, 33, 775, 1942.

[தட்டின் தடிப்பு b எனின்,

$$\gamma=\frac{mg(x_1-x_2)}{2(l+b)r}$$

என்பதைப் பயன்படுத்தித் திருத்தமொன்றைப் பிரயோகிக்க முடியும்.]

(f) திரவமொன்றின் பரப்பிழுவையைத் துணிவதற்குரிய சென்ரிசின் (Sentis) முறை.—சென்ரிஸ்† தொடக்கத்தில் விவரித்துக் கூறியுள்ளவாறு இம்முறைக்கு நுணணிய கூர்நுனி பெறும் பொருட்டு உருக்கி இழுக்கப்பட்ட துப்புரவான மயிர்த் துளைக் குழாயொன்று தேவைப்படுகிறது. இது சோதனைக்கான திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டுப் பின்பு அதினின்று வெளியே எடுக்கப்படுகிறது; குழாயுட் புகுந்த திரவத்தில் சிறிதளவு கசிந்து மயிர்த துளைக் குழாயின் கூர்நுனியில் சிறு கோளத்துளியொன்றை ஆக்குகிறது—படம் 10·23 (a). புள்ளிகள் A, B, C, D என்பவற்றிலுள்ள அமுக்கங்களைக் கருதினல் இங்கு



படம் 10·23. ஒரு திரவத்தின் பரப்பிழுவையைத் துணிதலுக்குச் சென்ரிசின் முறை.

$$\frac{2\gamma}{R}+\frac{2\gamma}{R_0}=g\rho h_1.$$

R, R_0 என்பன முறையே C யிலும் A யிலும் உள்ள பரப்புக்களின் வளைவாரைகள் ஆகும்; ஏனைய குறியீடுகள் அவ்வவற்றின் வழக்கமான அர்த்தங்களை உடையன. இது திருத்தமான ஒரு சமன்பாடாகும்.

அடுத்துக் குழாய்க்குக் கீழே சோதனைக்கெடுத்துக்கொண்ட திரவத்தில் சிறிதளவைக் கொண்டிருக்கின்ற பாத்திரமொன்றை வைக்க; பாத்திரமானது தெரிந்த அளவால உயர்த்த அல்லது தாழ்த்தக் கூடிய மேசையொன்ருல் தாங்கப்பட்டிருக்கிறது. பாத்திரத்தில் இருக்கினற திரவப் பரப்பானது தொங்கற்றுளியைச் சரியாகத் தொடும்போது மேசையின் நிலையை நோக்குக. கடைசியாக நிலைக்குத்தான மயிர்த்துளைக் குழாயில் மேற் பிறையுருவானது அதனது தொடக்க நிலையை மீளும்வரை பாத்திரத்தை உயர்த்துக—படம் 10·23 (b). அப்பொழுது

$$\frac{2\gamma}{R_0}=g\rho h_2\,;$$

எனவே

$$\frac{2\gamma}{R}=g\rho(h_1-h_2)=g\rho H\,;$$

†*Jour. de Physique*, 6, 571, 1887.

இங்கு H, மேசை உயர்த்தப்பட்ட தூரம் ஆகும். அது அளந்து அறியப்படு கிறது.

மேற்படி சமன்பாடானது மயிர்த்துளைக் குழாயின ஆரையையும் கண்ணுடியுடன் திரவம் ஆக்கும் தொடுகைக் கோணத்தையும் சாராது எனபது குறிக்கப்படும. "இம்முறையானது (தொடுகைக் கோணம் பூச்சியம் ஆகும் என்னும்) இவ்வெடுகோளைச் சாராது" எனச் செனரிஸ் எழுதியுளள போதிலும் பிந்திய செய்தியானது எப்பொழுதும் போற்றப் படுவதில்லை.

அதனது உயாவுக் குறுக்குவெட்டிற்குக் கீழே துளியானது உண்மையான கோளவடிவமுடையதாயின் $R = r$ என எழுதலாம் ; இங்கு $2r$, தொங்கு துளியினது மிகு பெரிய கிடையான வெடடின் விட்டம் ஆகும் ; எனவே

$$\frac{2\gamma}{r} = g\rho H.$$

இம்முறையின் திரிபொன்று இந்நூலாசிரியரால ஆனது.† எதற்காக "மயிாத்துளைக் குழாயை அதனது கீழ் முனையில் கூராக இழுத்தல் வேண்டும் ?" என்னும் வினு எழுமிடத்து மூல முறைபற்றிய குறை பாடொனறு உடனடியாகத் தெளிவாகும். இததகைய குழாயொனறைப் பயன்படுத்துமிடத்துச் சிறிய துளிகளே உண்டாகும் என எளிதில் உணர முடியும் ; ஆனல் திரவத்தின் பிசுபிசுப்பு உணரத்தக்க பருமன் உடைய தாயின் இவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட குழாயில் துளியுண்டாதல் தடங்கும் என்பதை ஞாபகப்படுத்தல் வேண்டும் ; எனவே உண்மையான உறுதிநிலை வருமுன் அளத்தலைச் செய்திருக்கலாம். இப்பிரச்சினையைச் சமாளிக்கும் பொருட்டுப் படம் 10·24 (a) யில் காட்டியுள்ளவாறு குழாய் ஆக்கப்படு கிறது. கிட்டத்தட்ட 2 மிமீ. வெளிவிட்டமுடைய கண்ணுடிக் குழா யொன்று (0·5 மிமீ. இலிருந்து 1 மிமீ. வரை விட்டமுடைய) மயிர்த துளைக் குழாயின் கீழ் முனையில் இணைக்கப்பட்டு அதன் நீளம் கிட்டத்தட்ட 5 மிமீ. இருக்குமாறு வெட்டப்படுகிறது. அப்பொழுது உயர் பிசுபிசுப்புத் திரவங்களைப் பயன்படுத்துமிடத்தும் நன்கு வரையறுத்த, எளிதில் அளக் கக்கூடிய, துளிகள் விரைவாக உண்டாகின்றன ; ஆனல் இனிமேல் $R = r$ எனக் கொள்ளுதல் நியாயமற்றது. திருத்தமொன்றைச் செய்யும் பொருட்டுப பின்வருமாறு நடந்து கொள்ளலாம். A யில் அமுக்கம் P_0 ஆகுக ; அப்பொழுது, B யில அது $P_0 - \frac{2\gamma}{R_0}$ ஆகும். துளியில் உயர்வுக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்புத் தளம் MN ஆயின், படம் 10·24 (b), அதனது எந்தப புளளியிலும் அமுக்கம்

$$P_0 - \frac{2\gamma}{R_0} + (h_1 - b)g\rho$$

ஆகும் ; இங்கு b ஆனது MN ஐக் குறித்து D யின் ஆழம் ஆகும்.

† *Phil. Mag.*, 33, 775, 1942.

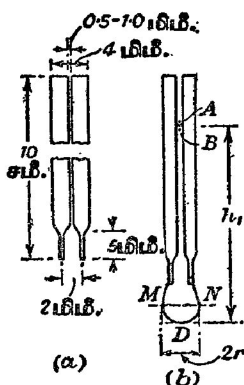
மேற்படி அமுக்கம் காரணமாக, MN மீது கீழ்முகமாகத் தாக்கும் விசையானது

$$\pi r^2\left[P_0-\frac{2\gamma}{R_0}+(h_1-b)g\rho\right]$$

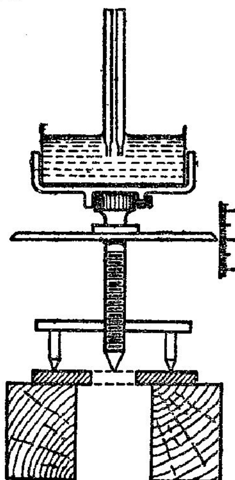
ஆகும்.

இனி துளியின் கீழ்ப்பாகத்தின் சமநிலையைக் கருதுக ; அது சுற்றல் நீள்வளையவுருவொன்றின் அரை எனக் கொள்கிறோம். அதன் நிறை $\frac{2}{3}\pi r^2 bg\rho$ ஆகும் ; அவ்விசையானது கீழ்முகமாகத் தாக்குகிறது. பரப்பிழுவையால் ஆகும் விசை $2\pi r\gamma$ ஆகும் ; அது நிலைக்குத்தாக மேனோக்கித் தாக்குகின்றது ; வளியானது $\pi r^2 P_0$ என்னும் விசையை உஞற்றுகிறது. எனவே $\frac{2\gamma}{R_0}=g\rho h_2$ ஆதலின், சமநிலையையிட்டு

$$2\pi r\gamma=\pi r^2\left[-\frac{2\gamma}{R_0}+(h_1-b)g\rho\right]+\frac{2}{3}\pi r^2 bg\rho$$
$$=\pi r^2[\{(h_1-h_2)-b\}g\rho]+\frac{2}{3}\pi r^2 bg\rho.$$



படம் 10·24. சென்ரிசின் முறையில் பயன்படுத்துவதற்கு இந்நூலாசிரியர் மாற்றியமைத்த குழாய் வகை ; விரிவு மிக்க கொள்கை.



படம் 10·25. சென்ரிசின் முறையால் திரவமொன்றின் பரப்பிழுவையைத் துணிதல்.

$h_1-h_2=H$ எனக் கூறுமிடத்து

$$a^2=\frac{\gamma}{g\rho}$$

என எழுதலாம். அப்பொழுது
$$2a^2=(H-b)r+\frac{2}{3}rb$$
$$=Hr-\frac{1}{3}br \qquad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

ஆனால் $R=\frac{r^2}{b}$ என்பது தெரிந்ததே, பக்கம் 12 இற் காண்க ; எனவே $2a^2=RH$ ஆதலின், $b=\frac{r^2H}{2a^2}$. (i) இல் b யிற்கு இப்பெறுமானத்தைப் பிரதியிட்டால்

$$2a^2=Hr-\frac{r^3H}{6a^2},$$

அல்லது

$$12a^4-6Hra^2+r^3H=0.$$

a^2 இற்கு இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க,

$$a^2=\frac{6rH\pm\sqrt{36r^2H^2-48r^3H}}{24}=\frac{rH\pm rH\left[1-\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{H}\right]^{\frac{1}{2}}}{4}.$$

$r\to 0$ ஆகுமிடத்து $2a^2=rH$ ஆய் இருத்தல் வேண்டும். ஆதலின் இங்கு சகக் குறியையே எடுத்தல் வேண்டும். சேட்டினை விரித்து r^4 ஐக் கொண்ட உறுப்புக்களை விலக்க,

$$a^2=\tfrac{1}{2}rH-\tfrac{1}{6}r^2-\frac{1}{18}\cdot\frac{r^3}{H}=\frac{\gamma}{g\rho}.$$

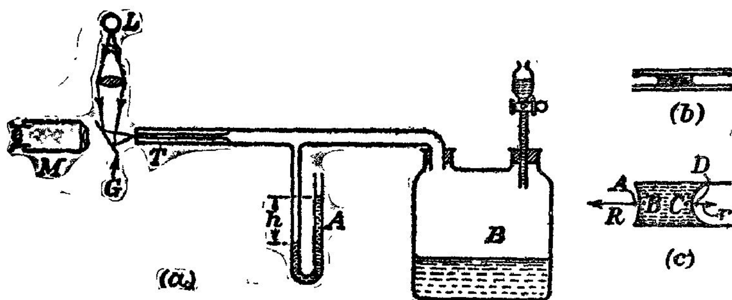
$$\therefore\ \gamma=\tfrac{1}{2}g\rho\left[rH-\tfrac{1}{3}r^2-\frac{1}{9}\cdot\frac{r^3}{H}\right]$$

தேவையான இரு நுணுக்குக்காட்டிகளினதை விட இப்பரிசோதனையின் வசதியான ஒழுங்குமுறையொன்று படம் 10·25 இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; அதற்கு மேலதிகமான விவரங்கள் தேவைப்படமாட்டா.

(*g*) **பரப்பிழுவையைத் துணிவதற்குப் ஃபேகசனின் முறை.**— ஒரு திரவத்தின பரப்பிழுவையை அளப்பதற்குப் ஃபேகசன்† எனபார் மயிர்த்துளைக் குழாய் முறையின் பின்வரும் திரிபைத் திட்டமிட்டு அமைத்தார். இம்முறைக்குச் சிறிதளவு திரவமே தேவைப்படுகிறது ; அது பெரும் நயமொன்ருகும். கிடையாக வைக்கப்பட்டுள்ள மயிர்த்துளைக் குழாயானது படம் 10·26 (*a*) யில் காட்டியுள்ளவாறு, தக்க அமுக்கமானி A யுடனும் ஊல்வின் போத்தல் B யுடனும் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. சோதனைக்கான திரவத்திற் சிறிதளவு மயிர்த்துளைக் குழாய் T யில் புகுத்தப்படுகிறது. துளியின் இருபக்கங்களிலும் அமுக்கங்கள சமனுய் இருக்குமாயின், படம் 10·26 (*b*) யில் உளளவாறு துளி தோற்றும் ; அப்பொழுது இரு திரவப் பரப்புகளின வளைவாரைகள் சமனெதிர் ஆகும். இனித் துளிபுனலிலிருந்து திரவத்தை ஊல்வின் போத்தலுள் போக விட்டுப் போத்தலிலுள்ள அமுக்கம் உயர்த்தப்படுகிறது எனக் கொள்க. மிகச் சிறிய அமுக்கவுயர்வும் துளியை மயிர்த்துளைக் குழாயின் முனைக்குச் செலுத்துதற்குப் போதியதாகும் ; அமுக்கம் இன்னும் கூடிஞல், துளி

† *Proc. Phys Soc.*, 36, 37, 1923 ; மிற்சேர்க்கையையும் காணக.

யின் வெளிப்பரப்பு குறைவாக வளைவுற்று அதாவது அதன் வளைவாரை கூடி, துளியின் சமநிலை நிலைபெறுகிறது. ஆய்கருவியில் அமுக்கமிகை $g\rho h$ எனக்கொள்க; இங்கு, ρ என்பது மாணியில் இருக்கின்ற திரவத்தின் அடர்த்தியும், h அதில் இருக்கின்ற திரவப்பரப்புக்களின் உயர வித்தியாசமும் ஆகும்; அப்பொழுது திரவத்தில் சரியாக உள்ளே A யில் இருக்கிற அமுக்கத்தைக் குறித்து புள்ளி B யிலே, படம் 10·26 (c), உள்ள அமுக்கமிகை $-\frac{2\gamma}{R}$ ஆகும்; இங்கு γ திரவத்தின் பரப்பிழுவையும், R ஆனது B யிலுள்ள வளைவாரையும் ஆகும். B யிலும் C யிலும் அமுக்கங்கள் சமனாக இருத்தல் வேண்டும். C



படம் 10·26. (சிறப்பாகச் சிறிதளவில் மட்டும் கிடைக்கின்ற) ஒரு திரவத்தின் பரப்பிழுவையையும் இரு திரவங்களின் பொதுப் பரப்பிழுவையையும் துணிதலுக்குரிய ஃபகசனின் முறை.

யிலுள்ள அமுக்கத்தைக் குறித்துத் துளியின மற்றைப் பரப்பிற்குச் சரியாக வெளியேயுள்ள புள்ளி D யில் உள்ள அமுக்கமிகை $\frac{2\gamma}{c}$ ஆகும்; இங்கு r ஆனது C யிலுள்ள வளைவாரை ஆகும். எனவே A யிலுள்ள அமுக்கததைக் குறித்து D யிலுள்ள அமுக்கமிகை $2\gamma\left[-\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right]$ ஆகும்; இது, $g\rho h$ ஆதல் வேண்டும்.

$R\rightarrow\infty$ வரை, அதாவது துளியின் பரப்பொன்று தட்டையாகும்வரை அமுக்கம் உயர்ததப்படுகிறது எனக் கொள்க. அப்பொழுது $R\rightarrow\infty$ ஆகுமிடத்து $h=H$ ஆயின்,

$$g\rho H=\frac{2\gamma}{r}.$$

எனவே γ வைக் காணலாம்; சூத்திரத்தில், சோதிக்கப்படுகின்ற திரவத்தின் அடர்த்தி தோற்றுவதில்லை என்பது குறித்தற்பாலது. இது இம்முறையின் இன்னுமொரு நயம் ஆகும்.

துளியின் முதலாவது மேற்பரப்பினது தட்டையைச் சோதிக்கும் பொருட்டுக் குறுகிய குவியத்தூரமுடைய குவிவில்லையொன்றால் மயிர்துளைக் குழாய் முனை T யில் சிறு ஒப்பல் விளக்கு L இன் விம்பம் எறியப்படுகிறது. அதன் தளம், குழாய் அச்சுடன் 45° ஆக்கும்வண்ணம் வைத்துள்ள மெல்லிய கண்ணுடித்துண்டு G ஆனது இச்செய்கைக்கு உதவுகிறது ; அது நுணுக்குக்காட்டி M இல் குழாய் முனையின் காட்சியைத் தடை செய்யமாட்டாது. பரப்பானது தட்டையாக இருக்கும்பொழுது அது சீராக ஒளியால் விளங்குகிறதுபோல் தோற்றும். இல்லாவிடில் ஒப்பல் விளக்கின் விம்பம் காணப்படும் ; பரப்பானது தட்டையாகும்பொழுது இவ்விம்பம் படிப்படியாக விரியும். இம்முறையானது உணர்ச்சிமிக்கது ; எனவே சம நிலைத் தானத்தைத் திருத்தமாக உறுதிப்படுத்தலாம்.

[ந. கு. மேற்படிக் கொள்கையிலே திரவமானது மயிர்த்துளைக் குழாயின் சுவர்களை முற்றிலும் ஈரமாக்குகிறது எனக் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது, பக்கம் 534 இற் காண்க.]

இரு திரவங்களின் பொதுமுகப் பரப்பிழுவையைத் துணிதலுக்கு இம் முறையை எளிதில் மாற்றி அமைக்கலாம். α, β என்பன இடையான மயிர்த்துளைக் குழாயிலுள்ள இரு திரவங்கள் எனக்கொள்க. மயிர்த் துளைக் குழாயின் திறந்த முனையில் திரவம் β வின் பரப்பைத் தட்டையாக ஆக்குவதற்கு ஆய்கருவியில் அமுக்கமிகை $g\rho h$ எனபது போதியது எனக்கொள்க. தொடுகைக் கோணங்கள் பூச்சியம் எனக் கொண்டால்

$$\gamma_{\alpha\beta}+\gamma_{\alpha}=\tfrac{1}{2}g\rho hr\ ;$$

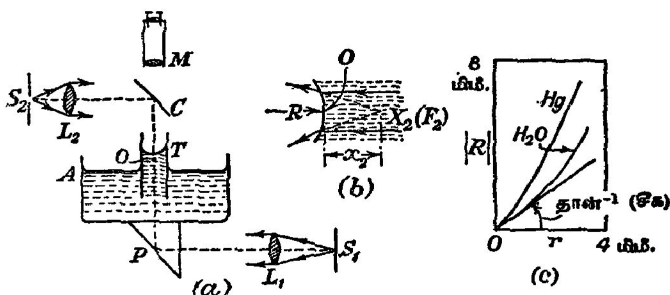
இங்கு $\gamma_{\alpha\beta}$ ஆனது தேவைப்படுகின்ற பொதுமுகப் பரப்பிழுவையும், γ_{α} ஆனது திரவம் α வின் பரப்பிழுவையும் ஆகும்.

(h) அண்டர்சன்–போவன் முறை.—இம்முறையானது† திரவத்தில் அமிழ்த்தியுள்ள நிலைக்குத்தான குழாயொன்றில் இருக்கின்ற பிறையுருவின் வளைவாரையை ஒளியியல் முறையால் அளத்தலிலும் வெளியேயுள்ள திரவப் பரப்பிற்குமேலே (அல்லது கீழே) அப்பிறையுருவின் மையத்தின் உயரத்திலுந் தங்கியுள்ளது. எனவே உண்மையான அரைக்கோளமொன் றிலிருந்து பிறையுருவின் வடிவம் வேறுபடுகிறது என்பதற்கான திருத்தம் இங்கு வேண்டியதில்லை ; மேலும் தொடுகைக் கோணத்தைப் பற்றித் தெரிந்திருக்கவும் வேண்டியதில்லை.

வெவ்வேறன விட்டங்கள் உடைய குழாய்களோடு இவ்வாறு துணி யப்பட்ட வளைவாரையைப் பிறையுருவுக்கு மேலேயுள்ள குழாயாரையுடன் தொடர்புபடுத்துகின்ற வளையியைப் பயன்படுத்தித் தொடுகைக் கோணத் தைத் துணியலாம்.

† *Phil. Mag.*, 31, 143, 1916.

கண்ணாடிப் பாத்திரம் A யின் தட்டையான அடியில் செங்கோணக் கண்ணாடியரியம் P என்பது சீமந்தால் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது, படம் 10·27(a). நேர்வரிசையாக்கும் வில்லை L_1 இலிருந்து வருகின்ற சமாந்தரச் சோடியவொளியானது அரியத்தால் தெறிக்கப்பட்டு A யிலுள்ள திரவத்தில் அமிழ்ந்திருக்கின்ற நிலைக்குத்தான கண்ணாடிக்குழாய் T யின் அச்சுவழியே செல்லுகிறது ; பிறையுருவில் ஒளியின் முறிவால் உண்டாகும் விம்பமானது தாழ்வலு நுணுக்குக்காட்டி M (0·001 சமீ. திருத்தத்துடன் அளவிடையில் அளக்கலாம்) என்பதால் நோக்கப்படுகிறது. படம் 10·27 (b) யையும் பார்க்க.



படம் 10·27. திரவமொன்றின் பரப்பிழுவை அளத்தலுக்கு அண்டர்சன்–போவன் ஆய்கருவி.

பிறையுருவின் வளைவாரை R ஆகுக. அப்பொழுது பிறையுருவின் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து திரவத்தின் வளைந்த பரப்பில் சமாந்தரக் கற்றையின் முறிவால் உண்டாகும் விம்பம் $X_2(=F_2)$ என்பதின் தூரம் x_2 ஆயின்

$$\frac{1}{x_2} - 0 = \frac{1-\mu}{R} ;$$

இங்கு μ சோடியவொளிக்குத் திரவத்தின் முறிவுக்குணகம் ஆகும்.

உண்மையில் R மறை ஆதலின், x_2 நேர் ஆகும்.

$$\therefore |x_2|(\mu - 1) = |R|.$$

x_2 ஐத் துணிவதற்கு, O வின் நிலை தேவைப்படுகிறது. புள்ளிமுதல் S_2 தரும் ஒளியைப் பயன்படுத்தி, ஒருங்குவில்லை L_2 இனால் அதை நேர்வரிசையாக்கிப் பின்பு பிறையுருவிலிருந்து தூரம் $\frac{1}{2}|R|$ இல் விம்பமொன்று காணும்படி அவ்வொளியைப் பிறையுருமீது படுமாறு மூடுகண்ணாடியொன்றால் தெறிக்கச்செய்வதால் O மீது நேர்க் குவிதல் தவிர்க்கப்படுகிறது. முறிவால் ஆகும் விம்பத்திற்கும் தெறிப்பால் ஆகும் விம்பத்திற்கும் இடையேயுள்ள தூரம் ξ எனின், அப்பொழுது

$$\xi = \tfrac{1}{2}|R| + \frac{|R|}{(\mu - 1)},$$

அல்லது
$$|R| = 2\xi \cdot \left[\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right].$$

குழாயில் திரவம் ஏறும் உயரம் h எனின், நுணுக்குக்காட்டியைப் பக்கமாகப் பெயர்த்து அதை பரப்பு மட்டத்தில் குவியசெய்து இது துணியப்படுகிறது—அப்பொழுது

$$\gamma = \tfrac{1}{2} g\rho h|R| = g\rho h\xi\left[\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right].$$

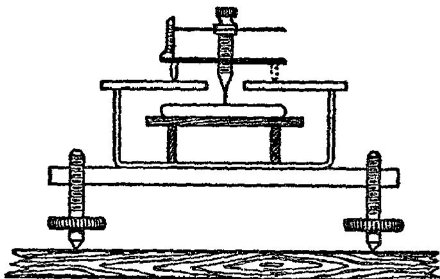
இரசம் போன்ற ஒளிபுகாத் திரவஙகளுக்குத் தெறிபபு முறையொன்றைப் பயன்படுத்தியே R ஐத் துணிதல்வேண்டும்; இங்கு இரசப்பரப்பின் மிகவுயர்ந்த புள்ளியைத் திருத்தத்துடன அவதானித்தல் வேண்டும்.

இம்முறையைப் பிரயோகித்துத் தொடுகைக் கோணங்களைக் காணும் பொருட்டு வெவ்வேருன ஆரைகள் (r) உடைய குழாய்களுடன் பரிசோதனைகளை நடாத்துதல் வேண்டும். அப்பொழுது r ஐ x ஆகவும் $|R|$ ஐ y யாகவும் பயன்படுத்தி குறித்தால், உற்பத்தியில் சரிவுக்கோணம் தான $^{-1}$ (சீக ϕ) உடைய வளையியொன்றைப் பெறுவோம்; இங்கு ϕ, தொடுகைக்கோணம் ஆகும். இதனது விளக்கம் யாதெனில் ஒடுக்கமான குழாய்களுக்கு, $|R| = r$ சீக ϕ என்பதேயாம், பக்கம் 548 இற காண்க. நீர், கிளிசறின், ஒலிவெண்ணெய், கற்பூரத்தைலம் என்பவற்றிற்கு உற்பத்தியில் வளையிகளின் சரிவுக்கோணமானது பூச்சியமாய் இருந்தது; இது தொடுகைக் கோணம் பூச்சியம் எனக் காட்டிறறு. கண்ணுடிமீதுள்ள இரசத்துக்கு ϕ ஆனது $139°$ எனத் தெரியவந்தது—படம் 10·27 (c) யிற் காணக.

(i) அடியிலிணைந்த பெருந்துளிகளும் குமிழிகளும்.—இரசத்தின் பரப்பிழுவை γ வையும் இரசத்துக்கும் கண்ணுடிகருமிடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணம் ϕ யையும் ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் துணியும் பொருட்டுக் கணணுடித் தட்டொன்றுமீது ஆக்கப்பட்டிருக்கின்ற அடியிலிணைந்த இரசத் துளியொன்றுடன் குவிங்கே† எனபார் பல அவதானிப்புகளைச் செய்தார். அப்பரிசோதனையைப் பினவருமாறு மீண்டுஞ் செய்யலாம். மட்டமாக்குந் திருகுகளைக் கொண்ட மேசையொன்றிலே தாங்கப்பட்ட செவ்வகக் கண்ணுடிப் பெட்டியினுள்ளே உள்ள ஓர் உருக்குருளை மீது தட்டுக் கண்ணுடி ஓய்வாய் இருக்கிறது, படம் 10·28. கண்ணுடித் தட்டின் மேற் பரப்பை மிகு கவனமாகத் துப்புரவாக்கல் வேண்டும்; அடுத்து அதன்மீது ஆக்கப்பட்ட, 2 சமீ. இற்குக் குறையாத விட்டமுடைய இரசத் துளியொன்றைப் பயன்படுத்தி அது கிடையாக்கப்படுகிறது; நுண்மைமிக்க மயிர்த்துளைக் குழாயூடே பாயவிட்டு இரசம் வடிகட்டப்பட்டிருத்தல் வேண்டும்.

† *Pogg. Ann*, 105, I, 1858.

அடுத்தபடியாகத் துளியின் விட்டம் 8 சமீ. இற்குக் குறையாமல் இருக்கும் வரை அதேபோல் இன்னும் இரசம் சேர்க்கப்படுகிறது. γ வையும் ϕ யையும் துணியும்பொருட்டுத் துளியின் முழு உயரம் H ஐயும், துளியின் மேற் பரப்பைக் குறித்து அதனது உயர்வான குறுக்குவெட்டின் ஆழம் h ஐயும் அளத்தல் வேண்டும். துளியின் எந்தப் புள்ளியில் அதன் புறவுரு சரியாக நிலைக்குத்தாய் இருக்கிறது என்பதை அறியும்பொருட்டுக் குக் என்பவரால் தரப்பட்ட பின்வரும் ஒளியியல் ஒழுங்குமுறையைப் பயன்படுத்தலாம்.



படம் 10·28. அடியிலிணைந்த பெரும் இரசத்துளியொன்றை நோக்கி அதன் பரப்பிழுவையைத் துணிதல்.

துளியை நோக்குவதற்குப் பயன்படுத்தப்படுகின்ற தொலைகாட்டி அல்லது தாழ்வலு நுணுக்குக்காட்டியின் பக்கத்தில் விளக்கொன்றும், அவ்விளக் குக்கு முன்னால் இடையான பிளவு ஒன்றும் வைக்கப்படுகின்றன. பிளவும் தொலைகாட்டியின் அச்சும் ஒரே மட்டத்தில் இருக்குமாறு பிளவு செப் பஞ்செய்யப்படுகிறது. இவ்வச்சும் கிடையான பிளவும் துளியின் தொட லித் தளம நிலைக்குத்தாக இருக்கிற வளைபரப்புப் புள்ளியும் ஒரே கிடைத் தளததில் இருககும்பொழுது தொலைகாட்டியின் குறுக்குவெட்டு மயிர்களின் மையததில "துலகக உடு"வொன்று காணப்படும்.

H ஐயும் h ஐயும் துணியும்பொருட்டுக் கண்ணாடிப் பெட்டியால் தாங்கப் படுகின்ற கண்ணாடித் தட்டொன்றில கோளமானியொன்று வைக்கப்படு கிறது ; மிகக்கூராக இழுககப்பட்ட கண்ணாடியூசியொன்று கோளமானியின் நடுக்காலுடன இணைககப்பட்டிருக்கிறது. அது இரசத்தின் மேற்பரப்பைச் சரியாகத் தொடும்வரை ஊசியைத் தாழ்த்தி அதன் நிலை குறிக்கப்படுகிறது. இரசத்துளியை அப்புறப்படுத்தி, ஊசியின் நுனி காணப்படும்வரை நுணுக் குக்காட்டியானது உயர்த்தியும் முன்னோக்கிச் செலுத்தியும் செப்பஞ்செய்யப் படுகிறது. நுணுக்குக்காட்டியின் நிலைக்குத்தான பெயர்ச்சி h ஆகும். ஊசி கண்ணாடியின் மேற்பரபபைச் சரியாகத தொடும்வரை கோளமானி யின் நடுவான கால் தாழ்த்தப்படுகிறது. கோளமானி வாசிப்புகளிலிருந்து H பெறப்படுகிறது. அப்பொழுது

$h^2 = \frac{2\gamma}{g\rho}$ வும் $H^2 = \frac{2\gamma(1 - \text{கோசை } \phi)}{g\rho}$ வும் [பக்கம் 555 இற் காண்க].
ஆதலால்

$$1 - \text{கோசை } \phi = \frac{H^2}{h^2};$$

எனவே γ, ϕ ஆகிய இரண்டையும் துணியலாம்.

(j) துளி—நிறை முறை.—நிலைக்குத்தான குழாயொன்றின் நுனியிலின்று மெதுவாய்ப் பிரிகின்ற துளியொன்றின் நிறையைத் துணிதல் திரவமொன்றின் பரப்பிழுவையைத் துணிதலுக்குப் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படும் முறைகளுள் ஒன்றாகும். துளியானது குழாய் முனைக்கு அணித்தாய் உருளைப் பரப்பொன்றைப் பெற்றதும் பிரியும் அந்நேரம் குழாய்க்கு அணித்தாய துளியின் குறுக்குவெட்டாரை அக்குழாயின் வெளியாரை r இற்குச் சமமன என்னும் எடுகோள் சரி எனின அப்பொழுது துளியிலுள்ள அமுக்கமிகை கணித்தலில் சோக்கப்பட்டிருந்தால், துளியின் நிறை mg ஆனது,

$$mg = \pi\gamma r$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

இச்சமன்பாட்டை நிலைநிறுத்தும் பொருட்டுத் துளியின் உருளையான பாகம் AB யின ஆரை r எனக் கொள்வோம், படம் 10·29 (a) யிற் காண்க. துளியின் பிரிவிற்குச் சற்றுமுன அது

(i) கீழ்முகமாகத் தாக்குகின்ற அதன் நிறை mg,

(ii) பரப்பிழுவையாலாகும் மேல்முகவிசை $2\pi\gamma r$,

(iii) வளிமண்டலவமுக்கம் p யினுல் ஆகின்றதும் மேல்முகமாக ஆகின்றதுமான விசை $p(\pi r^2)$,

(iv) அதன் பரப்பு AB மீது கீழ்முகமாகத் தாக்குகின்ற விசை $\left(p + \frac{\gamma}{r}\right)\pi r^2$; புற அமுக்கத்தைக் காட்டிலும் உருளைப் பரப்பொன்றிற்குள்ளே அமுக்கம் கூடுதலாய் இருக்கிறபடியால் இங்கு γ/r என்னும் உறுப்புத் தோற்றுகிறது, ப. 528 பார்க்க.

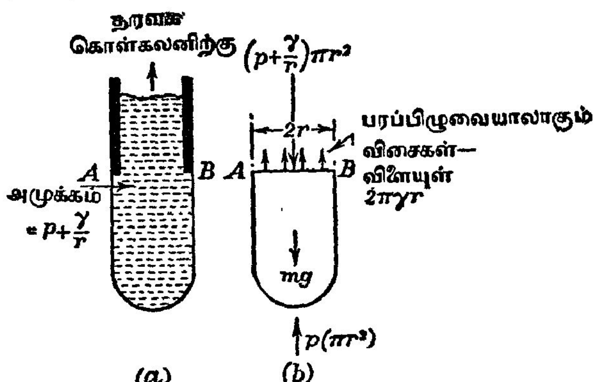
இவ்விசைகள் படம் 10·29 (b) யில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. துளியானது மெதுவாகவே உண்டாகின்றபடியால் அது நிலையியற் சமநிலையில் இருக்கிறது எனக் கொள்கிறேம்; மேற்படி விசைகளைச் சமனுக்கி $mg = \pi\gamma r$ எனப் பெறுகிறேம்.

[(iv) இல் γ/r என்னும் உறுப்பை நீக்கினுல்.

$$mg = 2\pi\gamma r.$$

இச்சமன்பாடானது பல்லாண்டுகளுக்குமுன் துளி–நிறை முறை தொடர்பாக (உண்மையில் பிழையாகப்) பயன்படுத்தப்பட்டது—இருந்தாலும் பக்கம் 583 இற் காண்க.]

துளியின் ஓரம் அரிதாய்த்தான் நிலைக்குத்தாய் இருக்கிறபடியாலும் துளி முழுதாய் விழாதபடியாலும் இச்சமன்பாடு உண்மையாயிராது. என் மாறிகளைத் தொடர்புபடுத்தும் சூத்திரமொன்றைக் காணமுடியாது



படம் 10·29. பரப்பிழுவையைத் துணிவதற்குரிய துளி–நிறை முறை.

(a) துளி காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; இக்கட்டம் அடையப்பட்டதும் துளி பிரிகிறது எனக் கொள்ளப்படுகிறது

(b) துளிமீதுள்ள விசைகள் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

எனபதைக் கேய், பெறற்† என்பவர்களால் விழுந்துளியொன்றில் இயக்கப் படம் பதிமுறைப்படி நடாத்தப்பட்ட ஆய்வு காட்டுகிறது. துளியானது உறுதி யின்மை அடைந்தபின் அதன் நான்கு அடுத்தடுத்துள்ள கட்டங்களைப் படம் 10·30 எடுத்துக்காட்டுகிறது. இரு துளிகள் ஆக்கப்படுகின்றன ; அவற்றுள் சிறியது **பிளாற்றேவின் சிறுகோளம்** எனப்படுகிறது ; மேலும், துளியின் திரவத்திற் சிறிதளவு பின் தங்குகிறது. γ வைக் காணும் இம்முறை யிலே, இரு துளிகளினது திணிவும் ஒன்றுசேர்த்துத் துணியப்படுகிறது.

இம்முறைக்கான கொள்கையானது விவரமாக ஆராயப்படவில்லை ; ஆறுல் ஹாக்கின்சும், பிறௌனும் ‡ரேலி எனபவரின் வழிகாட்டும் ஆய்வைப் பின்பற்றி, γ திருத்தமாகத் தெரிந்திருக்கின்ற திரவங்களுடன பரிசோதனை களை நடாத்திக் கொள்கையிலுள்ள குறைகளைத் தீர்த்துள்ளனர். அதன் பிரிவுக்கு உடனடியாக முன்பான கட்டங்களிலாவதும் துளி மிகு மெதுவாக உண்டாதல் வேண்டும் என்பது இம்முறையின் வெற்றிக்கு இன்றியமையாத நிபந்தனைகளுள் ஒன்றுகும் என அவர்கள் கண்டனர். துளியொன்று உண்டாவதற்குத் தேவையான இழிவு நேரம் கிட்டத்தட்ட நான்கு நிமிடங்கள ஆகும் ; இருந்தாலும் துளி ஆக்கத்தின் தொடக்கக் கட்டங்களை விரைவாக நிகழவிட்டு, இறுதிக் கட்டங்களைப் போதிய தாமதத் துடன் நிகழச்செய்து இந்நேரத்தைக் கருதத்தக்க அளவில் சுருக்கமுடியும்.

† *Arch. Sci. Phys. Nat.* (*Geneva*), 15, 178, 1903.

‡ *Jour. Amer. Chem. Soc.*, 41 (i), 499, 1919.

இவ்வாராய்ச்சியாளர் கண்ணுடி நுனிகளை ஆக்குவதில் சிறப்பாகக் கவனஞ் செலுத்தினர். செம்மையான உயர்வேகக கடைச்சலெந்திரமொன்றில் யேனுக் கண்ணுடியாலான ஒரு மயிர்த்துளைக் குழாய் இறுக்கப்பட்டுச் சுழற்றப்படுகிறது ; மிகு நுண்ணிய காபரண்டத் தட்டொன்றும் உயர்



படம் 10·30. துளியொன்று மெதுவாக உண்டாதல்.

வேகத்துடன் சுழற்றப்படுகிறது ; தட்டு, குழாய் ஆகியவற்றின் அடுத்துள ஓரங்கள எதிர்த்திசைகளில் அசையுமாறு செய்யப்பட்டுள்ளன. அடுத்து தேய்க்கப்பட்ட பக்கங்கள் எண்ணெய் கலந்த இருசுவால் துலக்கப்பட்டுள் ளன. தடிப்பு 2 சமீ. உம் விட்டம் 10 சமீ. உம் கொண்ட ஒரு பித்தளையுருளைக் குற்றி அதனது பககம் ஒன்றிற்குச் செங்குத்தாகத் துளையிடப்பட்டுள்ளது ; குழாயின உருளையாகத் தேய்த்த நுனியானது துளையில் குறையின்றிச் சரியாகப் பொருந்தியிருக்குமாறு அத்துளையின் விட்டம் இருநதது. நுனியைச் சுற்றியிருக்கின்ற பித்தளை அப்புறப்படுத்தப் பட்டு உருகிய ஊட்டின் உலோகத்தால் நிரப்பப்படுகிறது ; நுனியைச் சுற்றி அவ்வுலோகம் இறுகும் வண்ணம் விடப்படுகிறது. பின்பு ஈரமான காபரண்டத்தூள் பூசிய தட்டையான உருக்குக் குற்றியொன்றின் தட்டைப் பரப்பில் கண்ணுடியும் ஊட்டின உலோகமும் பித்தளையும் உராய்ந்து தேய்த்தெடுக்கப்படுகின்றன.

வெவ்வேறு விட்டங்களுடைய குழாய்களுக்கும் வெவ்வேறு பரப்பிழு வைகளுடைய திரவங்களுக்கும் mg யின் பெறுமானங்களைப் பரிசோதனையால் துணிந்தபின்பு, ஹாக்கின்ஸ், பிறௌன் என்போர்

$$mg = f(r, \gamma, \rho, V)$$

என எழுதினர் ; இங்கு ρ திரவத்தின் அடர்த்தியும், V துளியொன்றின் கனவளவும் ஆகும். இனி சார்பு f இன ஒவ்வோர் உறுப்பும்

$$\kappa r^x \gamma^y \rho^z V^w$$

என்னும் வகையினது ; அதன் பரிமாணங்கள் நிறையின் பரிமாணங்களாக இருத்தல் வேண்டும். எனவே

$$[MLT^{-2}] = [L^x (MT^{-2})^y (ML^{-3})^z L^{3w}].$$

நிகர்த்த பரிமாணங்களின் வலுக்களைச் சமன்படுத்த,

$$1 = y + z, \quad 1 = x - 3z + 3w, \quad -2 = -2y.$$

இவை

$$y = 1, \quad z = 0, \quad 1 = x + 3w$$

எனத் தருகின்றன.

$\therefore$ f இன் ஒவ்வோர் உறுப்பும்

$$\kappa r^x \gamma V^{\frac{1-x}{3}} = \kappa r \gamma \left(\frac{r^{x-1}}{V^{\frac{x-1}{3}}} \right)$$

என்னும் வகையினது.

$$\therefore \; mg = r\gamma \Phi\left(\frac{r}{V^{\frac{1}{3}}}\right) = r\gamma F\left(\frac{V}{r^3}\right);$$

இங்கு சார்பு F என்பது பரிசோதனையால் துணியப்படுகிறது. [Φ என்பது வசதி குறைந்த சார்பாகும்.]

கீழ்வரும் அட்டவணையானது $\frac{V}{r^3}$ மட. $\left(\frac{1}{F}\right)$ என்பவற்றின் ஒன்றிற்கொன்று ஒத்த பெறுமானங்களைத் தருகிறது.

Vr^{-3}	மட $\left(\frac{1}{F}\right)$	Vr^{-3}	மட $\left(\frac{1}{F}\right)$
10·29	$\bar{1}$·3799	1·310	$\bar{1}$·4230
8·190	$\bar{1}$·2874	1·211	$\bar{1}$·4218
6·662	$\bar{1}$·3943	1.124	$\bar{1}$·4203
5·522	$\bar{1}$·4004	1·048	$\bar{1}$·4177
4·653	$\bar{1}$·4051	0·980	$\bar{1}$·4153
3·975	$\bar{1}$·4092	0·912	$\bar{1}$·4125
3·443	$\bar{1}$·4128	0·865	$\bar{1}$·4099
2·995	$\bar{1}$·4152	0·816	$\bar{1}$·4065
2·637	$\bar{1}$·4186	0·771	$\bar{1}$·4038
2·241	$\bar{1}$·4208	0·729	$\bar{1}$·4009
2·093	$\bar{1}$·4224	0·692	$\bar{1}$·3978
1·884	$\bar{1}$·4235	0·658	$\bar{1}$·3949
1·706	$\bar{1}$·4242	0·626	$\bar{1}$·3916
1·555	$\bar{1}$·4243	0·597	$\bar{1}$·3883
1·424	$\bar{1}$·4239	0·570	$\bar{1}$·3856

மேற்படித் திருத்த அட்டவணை பயன்படுத்தப்பட்டால் துளி—நிறை முறையைத் தக்கார் கையாளுமிடத்து 0·1 சதவீதத்துக்குள் அடங்கும் திருத்தத்துடன் பேறுகள் கிடைக்கின்றன. (முன்சு ரியவற்றிற்கு மேலான வீதங்களில்) திரவங்களைத் துளித்துளியாக அதே நுனியிலிருந்து விழவிட்டு,

துளிகளின் திணிவு விகிதம் திரவங்களின் பரப்பிழுவை விகிதத்திற்குச் சமன் எனக்கொண்டு, அத்திரவங்களின் பரப்பிழுவைகளை ஒப்பிடுதல் என்னும் பொதுவான வழக்கமானது தவருனதும் பெரிதும் நம்பமுடியாததும் ஆகும். "அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும் முறை மிக எளிதானது ஆதலின், துளிகளின நிறைகளைச் சும்மா ஒப்பிட்டுப் பெறும் பேறு அவ்வளவு பிழையாய் இராது என்னும் நம்பிக்கை வைப்பதற்கு இனி மேல் இடமேயில்லை" என **N. K.** ஆதாம் என்பார் எடுத்துக்கூறியுள்ளார்.

இனி துளி–நிறை முறையை முதன்முதலாகப் பயன்படுத்தியவர்களுள் குவிங்கேயும் ஒருவர் ஆவர் ; எதற்காக அவர்

$$mg = 2\pi r\gamma$$

என்னுஞ் சமனபாட்டைப் பயன்படுததினுர் என்பது கருதற்பாலது. ஏனெனில் ஃபகசனின் கூற்றின்படி† "இப்பௌதிக அறிஞர் அடிப்படைத் தவறுகள செய்யும் இயல்பு உடையவரல்லர்".

நுனியில் தொடுகைக் கோட்டைச் சுற்றி, உருளையாக இருக்கினற ஒரு துளியின நிலையியற கொள்கையின்படி மேற்படிச் சமன்பாடு பிழையாகும் ; ஏனெனில் துளியுள்ளே வளைவால் ஆகும் அமுக்கமிகை புறக்கணிக்கப்பட்டிருக்கிறது எனத் தெளிக. ஆனுல் துளி பிரியும் நிலையில் இருக்கும்பொழுது அதன இடுப்பானது, சமனெதிரான இரு வளைவுகளையுடைய முரணமுறிவு வளைவுப் பிரதேசமாகும் எனக் கொண்டால் அமுக்க மிகை பூச்சியமாகும் ; அப்பொழுது

$$mg = 2\pi R\gamma.$$

இஙகு R, இடுப்பின் குறுக்குவெட்டு ஆரை ஆகும். இத்தகைய நிலையையே குவிங்கே கருதியிருககிருர் ; ஆனுல் மேற்படி சூத்திரததை இவ்வாராய்ச்சியாளர் பயனபடுத்துமிடத்து

$$mg = 2\pi r\gamma$$

என்னும் சமன்பாட்டின் தோற்றமும் குவிஙகே ஒருபோதும் கருதியிராத சூழலில் அதன உபயோகமும் நிகழ்ந்திருக்கலாம்.

இனி பரப்பிழுவைகளின் ஒப்பீட்டிறகுச் செம்மையாக்கப்பட்ட துளி–நிறை முறையைக் கருதுவோம். **R.C.பிறௌன்** (1948) என்பவராலான இம்முறையில், **ஹாக்கின்ஸ், பிறௌன்** ஆகியோரின் துளி–நிறை முறையில் பயன் படுத்தப்பட்ட வரையறுத்த ஆரை கொண்ட தட்டையான நுனிக்குப் பதிலாகத் தலைகீழாக்கபபட்ட கூம்பொன்று பயன்படுத்தபபடுகிறது. தெரிந்த பரப்பிழுவையுடைய ஒரு திரவத்தைப் பயன்படுத்திக் கூம்பானது நியமமாக்கப்பட்டதும் பரப்பிழுவைத் துணிதலை நடாத்தலாம். இங்கு திருத்தக் காரணிகள் தேவைப்படா ; இது இப்புது முறையின் நயமாகும்.

†*Jour. Sci. Instr.*, **6**, **163**, **1929**.

எனவே படம 10·31 (*a*) யில் காட்டியுள்ள கூம்பு நுனி போன்ற ஒன்றிலிருந்து ஒரு திரவத்துளி பிரிதலைக் கருதுவோம். ஒரு தொங்கற் றுளியை ஆக்கும்பொருட்டுத் தலைகீழாக்கப்பட்ட கூம்பின் பக்கங்கள் வழியே திரவம் மெதுவாக இறங்குமாறு செய்யப்படுகிறது ; இச் செயன்முறை பற்றிப் பின்னர் விவரித்துக் கூறப்படும். ஈற்றில் இத் துளி, உறுதியிழந்து பிரிந்து விழுகிறது ; பிரிந்த துளியின சராசரித் திணிவு வழக்கம்போற் காணப்படுகிறது. துளியானது உறுதியறற நிலையில் இருக்கும்பொழுது V_1 ஆனது தளம் AB யிற்குக் கீழேயுள்ள சுற்றற் றிண்மத்தின் கனவளவு ஆகுக ; இத்தளம் திரவப பரப்புகசும் கூம்புக் குமுள்ள தொடுகைக் கோட்டால வரையறுக்கப்படுகிறது. இக்கனவளவானது கூம்பின் அரையுச்சிக்கோணம் θ விஞலும் அவற்றின் வழக்கமான அர்த்தங்களைக் கொண்ட பரமானங்கள் γ, ρ, g எனபவற்ருலும் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. எனவே

$$V_1=\gamma^x\rho^y g^z\psi_1(\theta)$$

என நாம் எழுதலாம ; இங்கு $\psi_1(\theta)$ ஆனது தெரியாத பரிமாணமில்லாச் சார்பொன்ருகும். மாறிலிகள் x, y, z என்பவற்றின் பெறுமானங்கள் முறையே $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ ஆகும் எனப் பரிமாணப் பகுப்பால் தெரியவருகிறது.

$$\therefore\ V_1=\left(\frac{\gamma}{g\rho}\right)^{\frac{3}{2}}\psi_1(\theta).$$

மேலும் துளியானது உறுதியின்மையை அடைந்தபொழுது உச்சியி லுள்ள அத்துளியின் வளைவாரை b என்பது θ, γ, ρ, g என்பவற்ருல் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. பரிமாணப் பகுப்பானது

$$b=\left(\frac{\gamma}{g\rho}\right)^{\frac{1}{2}}\psi_2(\theta)$$

எனத் தருகிறது.

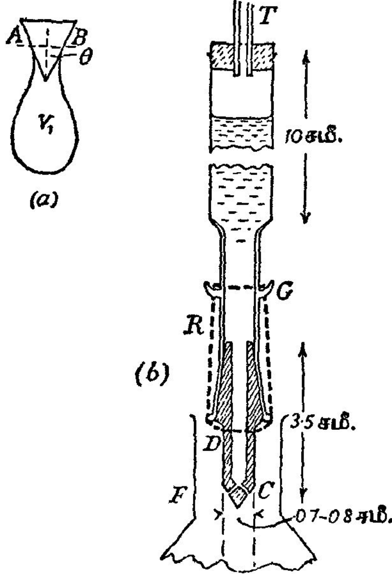
இனி, θ வின் நிலையான பெறுமானமொனறிற்கு, எல்லாத் துளிகளும் உறுதியில்லாக் கட்டத்தில ஒப்பான வடிவங்கள் உடையவை என இச் சமன்பாடு உணர்த்துகிறது என்று பாஷ்ஃபாத், அடம்ஸ் ஆகியோரின அறிமுறையாராய்ச்சி காட்டுகிறது. இத்தகைய ஒப்பான துளிகளிடத்துக் கூம்பிற்குக் கீழேயுள்ள திரவத்தின் கனவளவு V_2, கனவளவு V_1 இன் மாறுப் பின்னமொன்ருகும். இவ்வளவில் கொள்கை சரியானது ; ஆனுல் அடுத்து ஹாக்கின்ஸ், பிறௌன் ஆகியோர்களின் ஆராய்ச்சியினபடி நியாயமெனத் தோற்றும் எடுகோள் ஒனறை, அதாவது பிரிந்த துளியின் கனவளவு V ஆனது V_2 இன், எனவே V_1 இன் மாறுப் பின்னமொன்ருகும் என்பதைக் கையாள்வோம். எனவே பிரிந்த பாகத்தின் திணிவு m எனின்

$$m=V\rho=\left(\frac{\gamma}{g}\right)^{\frac{3}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\psi_3(\theta).$$

இங்கு $\psi_3(\theta)$ ஆனது $\psi_1(\theta)$ வின மாறுப் பின்னமொன்ருகும்.

அதே கூம்பு நுனியிலிருந்து சொட்டுச சொட்டாகப் பிரிகின்ற இரு வெவ்வேறு திரவஙகள் 1, 2 என்பவறறிற்கு

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$



படம் 10·31. பரப்பிழுவையைத் துணிதலுக்குச் செம்மையாக்கப்பட்ட துளி–நிறை முறை.

பிறௌன் என்பவர் பயன்படுத்திய ஆய்கருவியின் எளிய வகையொன்று படம் 10·31 (*b*) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. பித்தளைக் கூம்பு C ஆக்கப் பட்டுப் பிளாற்றினத்தால் பூசப்பட்டிருத்தல் வேண்டும். கூம்பானது பட்டை D, யினுல் நீட்டப்பட்டிருக்கிறது. காடடியுள்ளவாறு உரு அமைக்கப்பெற்ற கண்ணுடிக் குழாய் G ஆனது பட்டை மீது சீராக அமைந்திருக்கிறது. றப்பர்ப் பட்டையொனறு ஆய்கருவியின் இவ்விரு பகுதிகளையும் ஒருஙகு சேர்த்துப் பிடிக்கிறது ; எனவே கூமபு மூட்டு மார்க்கமாகத் திரவம் பொசியமாட்டாது.

T, ஒரு மயிர்த்துளைக் குழாயாகும் ; தொஙகற்றுளிகள் மெதுவாக உண்டாகும் வண்ணம் அதன் நீளம் செப்பஞ்செய்யப்பட்டிருக்கிறது. F, பயன்படுத்தப்படுகின்ற திரவத்திற் சிறிதளவைக் கொண்டிருக்கின்ற சிறு கூம்புக் குடுவையொன்ருகும் ; தெரிந்த எண்ணிக்கையில் துளிகளை வாங்குதற்காக அது பயன்படுத்தப்படுகிறது.

கூம்பை ஈரமாக்கும் ($\phi=0$) திரவங்களைப் பயன்படுத்துதல் இன்றியமை யாததாதலின் பென்சீனை நியமமாக்குந் திரவமாகப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும் ; பின்பு நீரில் அற்ககோலின் கரைசல்கள், சிறிதளவில் "ஈரமாக்கி" சேர்க்கப்பட்ட நீர் முதலியவற்றின் பரப்பிழுவையைத் துணி வதற்கு ஆய்கருவியைப் பயன்படுததலாம்.

(k) குற்றலை முறை : குற்றலைகளின் வேகம் c ஆனது

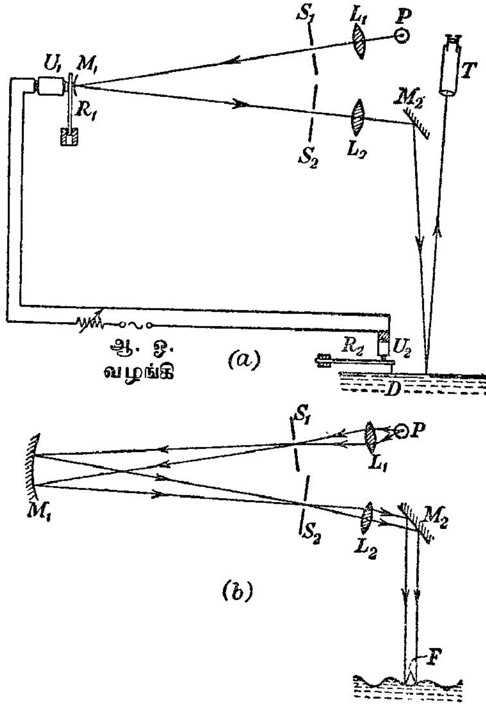
$$c^2=\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}$$

இனால் தரப்படுகிறது என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கிறது, பக்கம் 546 இற் காண்க. γ இற்கு ஒரு பெறுமானத்தைத் துணியும் பொருட்டுத் திரவப்பரப்பொன்றில் குற்றலைகளின் வேகத்தைப் பலர் பரிசோதித்திருக் கின்றனர். R. C. பிறௌண்† எண்பவர் விவரித்துக் கூறியுள்ள முறையின் சுருக்கமே இங்கு தரப்படும். γ தேவைப்படுகின்ற நீரானது தட்டையான பித்தளைத் தொட்டியொன்றில் இருக்கிறது. முன்னேற்பாடாகத் தொட்டி யினது பக்கங்களின் விளிம்புகள் மெழுகு பூசப்பட்டிருக்கிறபடியால் மெழுகு பூசியுள்ள கண்ணுடித் துண்டுகளால் நீர்ப் பரப்பைத் துப்புர வாக்கமுடிகிறது, பக்கம் 536 இற் காண்க. குற்றலைகள் அமிழ்த்தி D யினுல் ஆக்கப்படுகின்றன ; அது ஒலிபெருக்கித் தொகுதி U_2 இல் செலுத்தப்படுகின்ற ஆடலோட்டத்தால் சக்தியூட்டப்பட்ட நாக்கு R_2 உடன் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது ; அதனது இயல்பான அதிர்வெண் (மீடிறன்) ஆடலோட்டவழங்கியின் அதிர்வெண்ணுடன பொருந்தும் வரை நாக்கின் நீளம் செப்பஞ்செய்யப்படுகிறது. குற்றலைகளின் அலைநீளத்தை அளக்கும் பொருட்டுப் படம் 10·32 (b) யில் காட்டியுள்ள சுழநிலைகாட்டி முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. வில்லை L_1 ஐப் பயனபடுத்திக் கிடையான பிளவு S_1 மீது போயின்ரோலைற்று விளக்கு P யினுல் காலப்படும் ஒளி குவியுமாறு செய்யப்படுகிறது. (1 மீறறர் வளைவாரை உடைய) குழிவாடி M_1 இனுல், S_1 ஊடே செல்லுகின்ற ஒளியானது வில்லை L_2 இன் முதற் குவியத் தளத்திலுள்ள புள்ளி S_2 இல் குவியுமாறு செய்யப்படுகிறது. இவ்வண்ணம் சமாந்தர ஒளிக்கற்றையொன்று தளவாடி M_2 ஐ நோககிச் செலுத்தப்படுகிறது ; நீரின் குழம்பிய பரப்பு மீது சமாந்தர ஒளிக்கற்றை யொன்று படுமாறு இத்தளவாடி கிடைத் தளத்துடன ஆக்கும் கோணம் அமைந்திருக்கிறது.

அடுத்து ஆடலோட்ட வழங்கியின் அதிர்வெண்ணுடன் இசைவாக்கப்பட்ட தும் U_2 உடன் தொடராக இருக்கின்ற இரணடாவது ஒலிபெருக்கித் தொகுதி U_1 இல் பாயும் ஓட்டத்தால் சக்தியூட்டப்பட்டதுமான நாக்கு R_1 உடன் குழிவாடி M_1 இணைககப்பட்டிருக்கிறது. எனவே, D யினுல் ஆக்கப்படுகின்ற குற்றலையொவ்வொன்றிற்கும் அதாவது R_2 இன் முழு அதிர்வு ஒவ்வொனறின் போதும் M_1 தரும் ஒளிக்கற்றையானது S_2 ஊடே

† *Proc. Phys. Soc.*, 48, 312, 1936.

இருமுறை செல்லும் ; எனவே நீர்ப் பரப்பின் இடையறவுபட்ட ஒளிர்வின் அதிர்வெண்ணனது அமிழ்த்தியினது அதிர்வெண்ணின் இரு மடங்காகும். நீர்ப் பரப்பால் தெறிக்கப்படும் இடையறவுபட்ட ஒளியானது தொலைகாட்டி T யினுல் நோக்கப்படுகிறது ; விம்பம் அமிழ்த்தியின் ஓரத்திற்குச் சமாந்தர



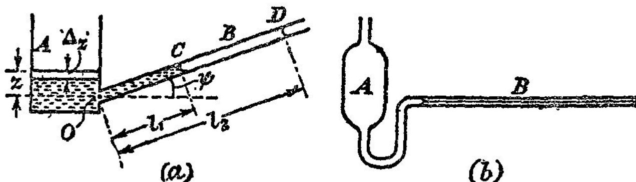
படம் 10·32. குற்றலை (அல்லது மயிர்த்துளை அலை) முறையால் பரப்பிழுவையைத் துணிதல்.

மான நேர்கோட்டுத் தொடரொன்றுல் ஆனது. தொலைகாட்டியைப் பக்கமாகப் பெயர்த்து அடுத்தடுத்துள்ள கோடுகளின் இடைத்தூரங்கள் துணியப்படுகின்றன. அமிழ்த்தி, தெறித்த கற்றை என்பவற்றின் அதிர் வெண்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு காரணமாக இவ்விடைத்தூரமானது தேவைப்படும் அலைநீளத்தின அரைவாசியாகும். பக்கம் 585 இல் தரப்பட்ட சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி γ வின் பெறுமானம் கணிக்கப்படுகிறது.

(l) **சவர்க்காரக் கரைசல்கள் :** தெரிந்த ஆரையுடைய சவர்க்காரக் குமிழி யொன்றிலுள்ள அமுக்கமிகையை நோக்கிச் சவர்க்காரக் கரைசலொன்றின்

பரப்பிழுவையை உடனே பெறமுடிகின்றது. அமுக்கமிகையானது மிக அரிதாய்த்தான் ஒருசில மில்லிமீற்றர் நீரை மீறுகிறபடியால் தனிப்பட்ட வாயுவமுக்கமானி வகையொன்று தேவைப்படுகின்றது.

இதற்குரிய தக்க வாயுவமுககமானியொன்றின் அடிப்படை பின்வருமாறு: படம் 10·33 (a) யில், A யானது குறுககுவெட்டுப் பரப்பளவு A கொண்ட ஓர் உருளைப் பாத்திரமும், B யானது A யுடன் இணைக்கப்பட்டதும், கிடைத் தளத்துடன் சிறு கோணம் ψ ஐ ஆக்குகின்றதுமான பகக்குழாயொன்றும் ஆகுக.



படம் 10·33. சிறு அமுக்க வித்தியாசங்களை அளத்தலுக்குரிய உணர்ச்சிமிக்க வாயுவமுக்கமானி.

இவ்வாய்கருவியானது அடர்த்தி ρ கொண்ட ஒரு திரவததைக் கொண்டுள்ளதெனக; A யில் அமுக்கம் வளிமண்டலவமுக்கம் p யாக இருக்கும்பொழுது A யிலுள்ள திரவம், O ஊடே செல்லுகின்ற மாட்டேறறு மட்டமொன்றைக் குறித்து உயரம் z இல் இருக்கிறது எனக் கொள்க; B யிலுள்ள திரவமானது அக்குழாயில் நீளம் l_1 ஐக் கொள்ளுக. A யிலுளள திரவப் பரப்புமீது தாக்குகின்ற அமுக்கமானது $p+\Delta p$ ஆகி அதன விளைவாக அப்பரப்பானது தூரம் Δz இறங்குமிடத்து, B யிலுள்ள திரவம் D யிற்கு அசைக; இங்கு $CD = l_2 - l_1 = \lambda$ எனக. அமுக்கமானித் திரவத்தின் கனவளவு மாறுமல் இருக்கின்றபடியால்

$$A(\Delta z) = a(l_2 - l_1) = a\lambda.$$

இங்கு a, குழாய் B யின குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவாகும். முதற் கட்டத்தில் O விலுள்ள அமுக்கத்தைக் கருத,

$$p + \alpha + g\rho l_1 \text{ சைன் } \psi = p + g\rho z.$$

இங்கு α, பரப்பிழுவை காரணமாகத் திரவப் பரப்புகளுக்குக் குறுக்கே தாக்கக்கூடிய சிறு அமுக்க வித்தியாசங்களுக்கான திருத்தவுறுப்பொன்ருகும். குழாய்கள் ஒவவொன்றிலும் குறுக்குவெட்டு α சீராய் இருக்குமாயின், α மாருமல் இருக்கும்.

அதுபோலவே இரண்டாவது கட்டத்தில்

$$p + \alpha + g\rho l_2 \text{ சைன் } \psi = (p + \Delta p) + g\rho(z - \Delta z).$$

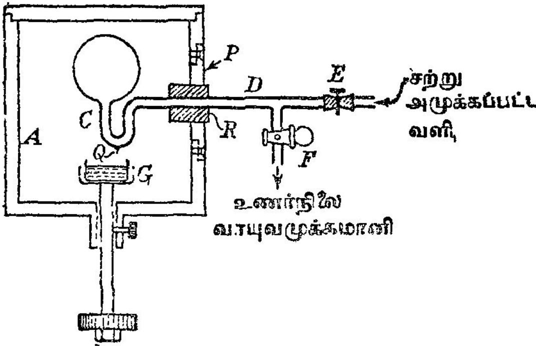
எனவே

$$\Delta p = g\rho\lambda\left[\frac{a}{A} + \text{சைன் } \psi\right].$$

a யைச் சிறிதாயும் A யைப் பெரிதாயும் ஆக்கி $\frac{a}{A}$ என்னும் பின்னத்தை மிகவும் சிறிதாய் ஆக்கமுடியும்; இருந்தாலும் ஆரை 0·1 சமீ. உடைய அமுக்கமானிக்குழாய், ஆரை 1 சமீ. உடைய பாத்திரம் ஆகியவற்றினிடத்தும் $\frac{a}{A}$ ஆனது 0·01 ஆகும்; இது ψ ஆனது 2° ஆய் இருக்கும்பொழுது சைன் ψ யுடன் ஒப்பிடத்தக்கது.

நடைமுறையில், படம் 10·33 (b) யில் காட்டியுள்ள வடிவத்தில் வாயு வமுக்கமானி அமைந்திருக்கும்; எனவே அதை எளிதில் துப்புரவாக்க லாம். A யின் அச்சுக்குக் குழாய் B செங்குத்தானது. அத்துடன் தேவைப்படும் சரிவு ψ ஐ, கருவி பொருத்தப்பட்டிருக்கும் தாளைச் சற்றுச் சாய்த்துப் பெறலாம்.

தக்க பருமனுடைய சவர்க்காரக் குமிழியொன்றின் ஆக்கலுக்கு வசதி யான ஆய்கருவியொன்று படம் 10·34 இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. A ஒரு பெட்டியாகும்; அதன் ஓரங்கள் ஒவ்வொன்றும் கிட்டத்தட்ட



படம் 10·34. குமிழியொன்றிலிருக்கின்ற அமுக்கமிகை நோக்கலிலிருந்து, சவர்க்காரக் கரைசலொன்றின் பரப்பிழுவையைத் துணிதலுக்கான பரிசோதனை முறை.

10 சமீ. ஆகும்; அதன் இரு எதிர்ப் பக்கங்கள் கண்ணாடியாலானவை எஞ்சிய பக்கங்கள் பித்தளையாலானவை. நிலைக்குத்தான உலோகப் பக்கங்களுள் ஒன்று துளைக்கப்பட்டு துளையில் வட்ட உலோகத்தட்டு P பொருந்தும் பொருட்டு அது செம்மையாக்கப்படுகிறது; திருகிகளால் தட்டானது நிலையாக்கப்படுகிறது. P யில் துவாரமொன்று உளது; அதன் ஊடே விட்டம் கிட்டத்தட்ட 3 மிமீ. உம் படத்தில் காட்டியுள்ள வடிவமும் உடைய கண்ணாடிக் குழாயொன்றைக் காவும் சிறு றப்பர் அடைப்பானொன்று செல்லுகிறது. குழாய் CD ஆனது றப்பர்க்குழாய்,

கவ்வி E என்பவை வழியாகச் சற்று அமுக்கப்பட்ட வளி வழங்கி யொன்றுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது ; பக்கக்குழாய் F, உணர்ச்சியுள்ள வாயுவமுக்கமானியொன்றுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. C இன் முனை யில் சவர்க்காரக் குமிழியொன்றை ஆக்கும் தருணத்தில், அமுக்கமானித் திரவம் வெளியேற்றப்படாமல் இருக்கும் பொருட்டு, F இலுள்ள குழா யடைப்பு மூடப்படுகிறது. சோதிக்கப்படுகின்ற கரைசலானது G யில் வைக்கப்பட்ட ஒரு சிறு கண்ணடிப் பாத்திரத்தில் இருக்கிறது ; பாத்தி ரத்தைக் காட்டியுள்ளவாறு உயர்த்தவோ தாழ்த்தவோ முடியும்.

குமிழியொன்றை ஆக்கும் பொருட்டு C என்பது கீழ்முகமாகச் சுட்டும் வரை, கிடையான அச்சொன்று பற்றி குழாய் CD சுழற்றப்படுகிறது; அடுத்து C அதனுள் அமுங்கும் வண்ணம் G யிலுள்ள திரவம் உயாத்தப்படுகிறது. G தாழ்த்தப்பட்டதும் C யின் முனையின் குறுக்கே சவர்க்காரப் படலமொன்று ஆக்கப்படும் ; இப்படலத்தை ஊதித் தேவைப் படுகின்ற பருமனுக்கு குமிழியொன்றை உண்டாக்கலாம். குமிழியானது வரிப்படத்தில் காட்டியுள்ள நிலையை அடையுமாறு குழாய் CD இரு செங்கோணங்களூடாகச் சுழற்றப்படுகிறது. C கீழ்நோக்கியிருக்கும் பொழுது குமிழியைப் பயன்படுத்தினால் குமிழியிலிருந்து பெரும்பாலும் சிறு திரவத்துளியொன்று தொங்கும்; இதனால் குமிழியின கோளவடிவத்தைக் கெடுக்கும். C ஆனது மேல்நோக்கி இருக்கும்பொழுது இக்கோளவடிவ மின்மை தவிர்க்கப்படுகிறது ; அல்லாமலும், குமிழியிலிருந்து வழிகின்ற திரவத்தைக் கண்ணடிக் கூர் Q சேர்க்கிறது ; ஈற்றில் இத்துளி, G யுள் விழுகிறது.

இனி குமிழியின் விட்டம் D ஆயின்

$$\frac{4\gamma}{r} = g\rho\lambda\left[\frac{a}{A} + \text{சைன் } \psi\right] = \frac{8\gamma}{D}.$$

எனவே,
$$\lambda = \frac{8\gamma}{g\rho\left[\frac{a}{A} + \text{சைன } \psi\right]}\frac{1}{D};$$

அப்பொழுது வெவ்வேறு பருமன்களுடைய குமிழிகள் பற்றிய அவதானிப் புத்தொடரொன்றை எடுத்து, λ தொடர்பாக $\frac{1}{D}$ ஐக் குறித்தால் வரையின் சரிவிலிருந்து γ இற்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறமுடியும்.

D யை அளக்கும் பொருட்டுக் குமிழியைத் தூரத்திலிருந்தே ஒளிர்ப் பித்தல் வேண்டும்; பின்னர் திரையொன்றில் குமிழியினது பக்கப் பார்வையின் விம்பம் வரிப்படத்தளத்தில் உண்டாகுமாறு குவியத் தூரம் கிட்டத்தட்ட 25 சமீ. கொண்ட குவிவில்லையொன்று ஒழுங்குபடுத்தப் படுகிறது. இங்கு தேவையான கணித்தல் மிக எளிது ; எனவே இது இங்கு தரப்படமாட்டாது.

பரப்பிழுவையைத் துணியும் முறைகள் பற்றிய சில குறிப்புக்கள்.—பரப்பிழுவையைத் துணிதலுக்கான முறைகள் யாவும் பின்வரும் இரு வகுப்புக்களுள் ஏதேனுமொன்றினுட்படும் ; அவை **நிலையியல் முறைகள்** எனவும் **இயக்கவியல் முறைகள்** எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. முந்தியதில் சொற்ப காலமாய் இருந்த நிலையான பரப்பொன்றின் மீது நோக்கல்கள் எடுக்கப்படுகின்றன ; அப்பேறுகள் ஒரு அல்லது இரு தத்துவங்களைச் சார்ந்துள்ளன. மிகு திருத்தமான நிலையியன் முறைகளில் ஒரு திரவத்தின் வளைபரப்பிற்குக் குறுக்கேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசத்தை அளத்தல் வேண்டும் ; பரப்பின் இரு தலைமை வளைவாரைகள் தெரிந்திருந்தால் இவ்வமுக்க வித்தியாசம் தெரிந்ததும் பரப்பிழுவைக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறமுடிகின்றது. மயிர்த்துளைக் குழாய்களைப் பயன்படுத்தும் முறைகள், அடியிலிணைந்த துளி முறை, துளிநிறை முறை இவையாவும் நிலையியன் முறைக்கு எடுத்துக்காட்டுக்கள் ஆகும். சிலவேளைகளில் துளி-நிறை முறையானது இயக்கவியன் முறை எனக் கருதப்படுகிறது ; எனினும் துளிகள் மிகு மெதுவாக ஆக்கப்படாவிட்டால் நம்பத்தகு பேறுகள் கிடையா என **ஹாக்கின்ஸ், பிறௌன்** என்பவர்கள் காட்டிய பின்பு இம்முறை உண்மையில் நிலையியன் முறையாகவே கொள்ளப்படுகிறது. திருத்தம் குறைந்த நிலையியன் முறைகளில் ஒரு திரவப் படலத்தின் விரி அல்லது வடிவம் பற்றிய நோக்கல்கள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

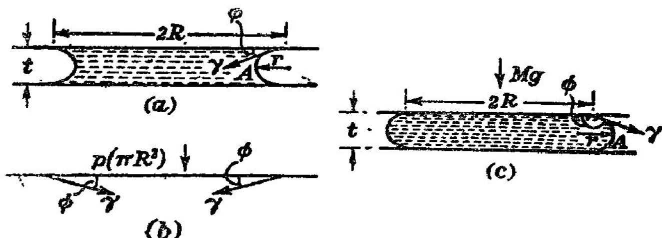
சில அதிர்வுகளால் ஒரு திரவம் உந்தப்படுமிடத்து அதன் பரப்பில் ஆவர்த்தன விரிகளும் சுருங்கல்களும் ஆக்கப்படக்கூடும் என்னும் உண்மையில் இயக்கவியன் முறைகள் தங்கியுள்ளன. இவை தோன்றுமிடத்து அதிர்வுகளின் நிகழ்வுக்குத் தேவையான மீள்தருவிசை பரப்பிழுவையால் வழங்கப்படுகிறது. தொங்கற்றுளிகளின் அலைவுகள் (பயிற்சி 10·14, பக்கம் 614 இற் காண்க). நீள்வளையத் துவாரமொன்றிலிருந்து† பாயும் தாரைகள், குற்றலைகளின் செலுத்துகை என்பவை தலைமையான இயக்கவியன் முறைகள் ஆகும். கரைசலொன்றின் பரப்பிழுவைக்கு இத்தகைய முறைகள், நிலையியன் முறைகள் தரும் பெறுமானத்திலிருந்து வேறுபடுகின்ற பெறுமானமொன்றைத் தரக்கூடும் ; ஏனெனில் முந்தியதில் ஓயாமல் புதுப்பரப்பொன்று ஆக்கப்படுகின்றபடியால் மேன்மட்டவொட்டலானது சமநிலை அடைதற்கு அப்பரப்பின் வயது போதியதன்று என்பதே காரணம். இருந்தாலும் விருத்திக் குற்றலைகளைச் சுழனிலைகாட்டி முறையாக நோக்கிய **R. C. பிறௌன்** என்பாரின் ஆராய்ச்சியானது "நிலையியற்" பரப்பிழுவையையே குற்றலை முறை தரு

† மேன்மட்டவொட்டல் என்னும் பதம், கரைசலொன்றின் பரப்பில அக்கரைசலின் ஒரு கூறு கொண்டிருக்கும் அடர்த்தியைக் குறிக்கும் ; திரவம்-திரவக்கரைசல என்னும் வகையிலே கரைசலின் பரப்பிழுவை கரைப்பானின் பரப்பிழுவையைக் காட்டிலும் சிறிதாய் இருக்குமாயின், பரப்பு புதிதாய் ஆக்கப்பட்டிருக்கும்பொழுது அங்கு கரையம் செறிந்திருக்கும் என்பதே மேன் மட்டவொட்டலுக்குரிய விதியாம்.

கிறது எனக் காட்டுகிறது. உண்மையில் பரப்பானது புதிப்பிக்கப்படுவதில்லை எனவும், பரப்பிற்கும் திரவத்திற்கும் இடையே அரிதாகவே பொருட் பரிவர்த்தனஞ் செய்யப்படுகின்றது எனவும, வழக்கமாக இதற்கு விளக்கம் கூறப்படுகிறது. தெரிந்த எல்லா இயக்கவியன் முறைகளிலுமுள்ள குறையொனறு யாதெனில் அவற்றின் இற்றைநாள் முனனேற்ற நிலையில் பரப்பொன்றின் தோற்றத்திற்கும் பரப்பிழுவையை அளத்தலுக்கும் இடையிலுள்ள காலச் செலவு உண்மையில் தெரியாதது என்பதாகும்.

பரப்பிழுவையுடன் தொடர்புள்ள பலவினப் பிரசினங்கள்

மெல்லிய திரவப் படையொன்றால் வேறுக்கப்பட்ட இரு தட்டுக்களிடையேயுள்ள விசை.—ஒரு திரவத்துளி இரு சமாந்தரக் கண்ணுடித் தட்டுக்களிடையே கிடக்கின்றது எனவும் தட்டொவ்வொன்றிலும் துளியுடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற பரப்பளவு பெரிது எனவும் கொள்க. தட்டுக்களின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் அவற்றை வேறுக்குவதற்குப் பெரும் விசையொன்று தேவைப்படுகிறது எனவும், ஆனால் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் ஒன்று மற்றதன்மீது எளிதில் வழுக்குகின்றது எனவும் பரிசோதனையால் காணப்பட்டிருக்கிறது. தட்டுக்களைச் செங்குத்தாகப் பிரிப்பதற்கு வேண்டிய விசையைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.



படம் 10·35. சமாந்தரத் தட்டுக்களிடையே மெல்லிய திரவப்படைகள்.

2R, மேற்றட்டில் துளி ஆக்குகின்ற வட்டத்தின் விட்டமும், படம் **10·35 (*a*),** t தட்டுக்களிடையேயுள்ள தூரமும், γ திரவத்தின் பரப்பிழுவையும், ϕ திரவத்திற்கும் கண்ணுடிக்குமிடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணமும் ஆகுக. திரவத்துள் தாக்குகின்ற அமுக்கமானது வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் காட்டிலும் $p = \gamma\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] \simeq \frac{\gamma}{r}$ என்னும் அளவாற் குறைந்தது ; இங்கு r என்பது A யிலுள்ள வளைவாரையாகும். இனி, தட்டுக்கள் பெரிதும் நெருங்கியிருக்குமாயின்

$$r = \frac{t}{2\ \text{கோசை}\ \phi} = \tfrac{1}{2}t\ \text{சீக}\ \phi.$$

∴ மேல் தட்டுமீது (கீழ்முகமாகத் தாக்குகின்ற) விளையுள் விசை

$$p(\pi R^2)+2\pi R\gamma \text{ சைன } \phi=\pi R^2.\left(\frac{2\gamma}{t \text{ சீக } \phi}\right)+2\pi R\gamma \text{ சைன் } \phi$$

$$=2\pi R\left[\frac{\gamma R}{t \text{ சீக } \phi}+\gamma \text{ சைன் } \phi\right]$$

ஆகும், படம் 10·35(b) இற் காண்க.

∴ தட்டுக்களை வேருக்குவதற்குத் தேவையான விசை

$$2\pi R\left[\frac{\gamma R}{t \text{ சீக } \phi}+\gamma \text{ சைன் } \phi\right].$$

γ சைன் ϕ என்னும் உறுப்பானது t ஐக் கொணடிருக்கும் உறுபபைக் காட்டிலும் சிறியது ; எனவே அதைப் புறக்கணிக்கலாம்.

நெருங்கியிருக்கின்ற இரு சமாந்தரத் தட்டுக்களிடையே இரசத்துளி யொன்றை நிறுத்தவேண்டுமானால் அப்பொழுது கீழ்த் தட்டு மேசை யொன்று மீது ஓய்வாய் இருக்க, மேல் தட்டுமீது சுமையேற்றப்படுதல் வேண்டும். இரசத்துள் தாக்குகின்ற அமுக்கமானது $p=\frac{\gamma}{r}=\frac{2\gamma}{t}$ கோசை $(\pi-\phi)$ என்னும் அளவில் வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் காட்டிலும் பெரியது, படம 10·35 (c) யிற் காண்க.

∴ மேற்றட்டுமீது இரசத்தால் ஆகும் விளையுள் விசை

$$\pi R^2 p-2\pi R\gamma \text{ சைன் } (\pi-\phi)=\pi R^2.\left[\frac{2\gamma}{t \text{ சீக } (\pi-\phi)}\right]-2\pi R\gamma \text{ சைன் } \phi.$$

இது மேல்முகமாகத் தாக்குகிறது. மேற்றட்டை நிலைநிறுத்தும்பொருட்டு அதன்மீது வைக்கவேண்டிய சுமை M உம், புவியீர்ப்புச் செறிவு g யும் ஆயின், அப்பொழுது

$$Mg=2\pi R\left[\frac{\gamma R}{t \text{ சீக } (\pi-\phi)}-\gamma \text{ சைன் } \phi\right].$$

மீண்டும் γ சைன் ϕ என்னும் உறுப்பு சிறிது ஆதலின் அதைப் புறக்கணிக்கலாம்.

ஒரு திரவப் பரப்பிலிருந்து தட்டொன்றை வேருக்கத் தேவையான விசை பற்றி.— ஓய்வாயிருக்கின்ற ஒரு திரவப்பரப்புமீது தட்டையான தட்டொன்றை வைத்துப் பின்பு அதைச் சற்று உயர்த்தினால், தட்டுடன் திரவப்படையொன்று ஒட்டியிருக்கப் புலப்படும். தட்டை உயர்த்துகின்ற விசை கூடக்கூடத் தட்டுடன் ஒட்டியிருக்கின்ற திரவவளவும் கூடிக் கொண்டே போகிறது ; ஈற்றில் விசையானது F (அல்லது mg என்க) என்னும் ஒரு பெறுமானத்தை அடைந்ததும் தட்டு பரப்பினின்றும் திடீரெனப் பிரிகிறது. இந்நிகழ்ச்சிக்குச் சற்றுமுன்னராக திரவப்பரப்பின்

பொதுமட்டத்தைக் குறித்துத் தட்டின் உயரம் z ஆகுக. p_0 வளிமண்டல வமுக்கமும், A தட்டின் (தட்டு ஆரை R கொண்ட வட்டம் என்க) பரப்பளவும் ρ திரவத்தின் அடர்த்தியும் ஆயின் திரவத்துள் தட்டுக்குச் சற்றுக்கீழே தாக்குகின்ற அமுக்கம் $(p_0-g\rho z)$ ஆகும் ; அதாவது தட்டைக் கீழ்முகமாக இழுக்கின்ற விசை

$$p_0\mathrm{A}-(p_0-g\rho z)\mathrm{A}=\mathrm{A}g\rho z.$$

இது F இற்குச் சமனெதிர் ஆகும் ; எனவே $m=\mathrm{A}\rho z$.

இனி R ஐப் பெரிதெனக் கொள்வோம் ; அப்பொழுது தட்டை திரவம் ஈரமாக்குமானல், நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் பிறையுருவின் அடையாளம் எங்கும் ஆரை $\frac{1}{2}z$ ஐயுடைய அரைவட்டமொன்ருக இருக்கும். அப்பொழுது திரவத்தில் உயர்த்தப்பட்ட திரவத்தின் கிடையான குறுக்கு வெட்டு இழிவாக இருக்கின்ற புள்ளியில் தாக்கும் அமுக்கமானது கிட்டத் தட்ட

$$\gamma\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\mathrm{R}}\right)=\frac{\gamma}{r}=\frac{2\gamma}{z}\quad\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\to 0 \text{ எனின்}\right)$$

எனபதால் தரப்படும் அளவில் வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் காட்டிலும் சிறிதாய் இருக்கும்.

பிறையுருவானது கருதப்படும் வடிவம் உடைத்தாயின் இவ்வமுக்க வித்தியாசம் $\frac{1}{2}g\rho z$ ஆக இருத்தல் வேண்டும் ; எனவே

$$m=\mathrm{A}\rho z=2\mathrm{A}\sqrt{\frac{\gamma\rho}{g}};$$

அதாவது $$\mathrm{F}=mg=2\mathrm{A}\sqrt{\gamma\rho g}.$$

எனவே தட்டானது சமநிலையாக்கப்பட்ட தராசொன்றிலிருந்து தொங்கும் பொழுது m அளக்கப்பட்டால், பரப்பிழுவை γ இற்குப் பெறுமான மொன்றைக் காணலாம்.

உதாரணம்.—சறறுக் கூம்புருவத் துளையுடைய நிலைகுத்தான மயிர்த்துளைக் குழா யொன்று அடர்த்தி ρ வும், பரப்பிழுவை γ வும், கணுடியுடன் தொடுகைக் கோணம் பூச்சிய முமா உடைய திரவமொன்றில, அதன உச்சி கீழ்முகமாகச் சற்று அமிழ்நதுகிறது. குழாயி லிருந்து வளி வெளியேறுவதற்கு உச்சியில் சிறு துவாரமொன்று உளது. குழாயின் உயர் வான வெட்டுமுகவாரை a யும, குழாயின் நீளம் l உம ஆயின் திரவம் எறும் உயரம் h ஆனது

$$h=\frac{l}{2}\pm\sqrt{\frac{l^2}{4}-\frac{2\gamma l}{g\rho a}}$$

எனக் காட்டுக ; இஙகு, g புவியீர்ப்புச் செறிவு.

நிகழக்கூடிய இவவிரு நிலைகளுக்குரிய சமநிலையை ஆய்க; மேலும் l மிகப் பெரிதாய் இருக்கும்போது h இறகுப பெறுமானமொனறைக் காண்க.

படம் 10·36 (*a*) யிற் காட்டியுள்ள நிலையைத் திரவம் அடைகின்றது எனவும், பிறையுருவின் வளைவாரை r எனவும் கொள்க. அப்பொழுது

$$r=\frac{a}{l}(l-h),\quad \frac{2\gamma}{r}= g\rho h\ ;$$

$$\therefore\quad h^2-lh+\frac{2\gamma l}{g\rho a}=0\ ;$$

இது

$$h=\frac{l}{2}\pm\sqrt{\frac{l^2}{4}-\frac{2\gamma l}{g\rho a}}.$$

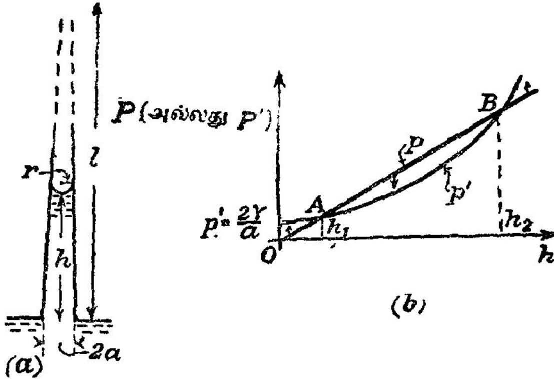
$$\therefore\ (h_2,\ h_1)=\frac{l}{2}\pm\frac{l}{2}\sqrt{1-\frac{8\gamma}{g\rho al}}$$

எனபதைத் தருகிறது.

l பெரிதாய் இருக்கும்பொழுது

$$\sqrt{1-\frac{8\gamma}{g\rho al}}\simeq 1-\frac{4\gamma}{g\rho al}.$$

$$\therefore\quad [h]_{l\to\infty}=\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\left(1-\frac{4\gamma}{g\rho al}\right)=\frac{2\gamma}{g\rho a}.$$



படம் 10·36. ஒரு கூம்புருவ மயிர்த்துளைக் குழாயில் திரவத்தின் ஏற்றம்.

ஆரை a கொண்ட சீரான ஒரு மயிர்த்துளைக்குழாயில் திரவம் ஏறும் உயரம் $[h]_{l\to\infty}$ ஆதலின், சகக் குறி விலக்கப்படுகிறது. எனவே குறைவான உயரம் h_1 என்பதே உறுதியானது என இது சுட்டிக்காட்டுகிறது.

இச்செய்தியை உறுதியாக நிலைநிறுத்தும் பொருட்டு, அதன் பிறையுரு உயரம் h இல் இருக்கும்பொழுது திரவத்தைக் கருதுக ; குழாயில அந்நிலைக்கு ஒத்த குறுககு வெட்டாரை r ஆகும் ; திரவம் கட்டாயமாகச் சமநிலையில் இருக்கமாட்டாது.

$$g\rho h=p \text{ ஆகுக ;}\quad \frac{2\gamma}{r}=\frac{2\gamma l}{a(l-h)}=p'.$$

சமநிலையையிட்டு $p=p'$. $p>p'$ எனின், பிறையுரு இறங்கும் ; $p<p'$ எனின் பிறையுரு ஏறும், அதாவது p கூடும்.

அடுத்து h ஐக் குறித்து p, p' ஆகிய இரண்டையும் குறிக்க ; விளைவு படம் 10·36 (b) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. பொதுவாக

$$p=p'$$

எனனுஞ் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் h_1, h_2 என்பவற்றிற்கு ஒத்த இரு வெட்டுப் புள்ளிகள், அதாவது A, B என்பவை ஆகும.

தரப்பட்ட எந்த h இற்கும் A, B என்பவற்றிற்கிடையே $p>p'$; எனவே அம்மட்டத்தில் ஒரு பிறையுருவை வைத்தால் அது இறங்கும் ; இதன் கருத்து யாதெனில், திரவநிரலைத் தாங்குவதற்கு பரப்பிழுவை விளைவுகள் போதியவளவு பெரிதன்று எனபதேயாம்.

A யிற்குக் கீழே $p<p'$; B யிற்கு மேலே $p<p'$; எனவே எடுத்துக்காட்டுக்கள் ஒவ்வொன்றிலும் பிறையுரு ஏறும்.

இனி A யானது குழாயிலுள்ள திரவத்தின் ஓர் உறுதிநிலையை ஒத்திருக்கிறது; ஏனெனில் பிறையுருவை எந்தப் பக்கத்திற்குப் பெயர்த்தாலும் அதன் குழம்பா நிலைக்கு அது மீள்கிறது. அல்லாமலும் B யானது உறுதியில் நிலையொன்றை ஒத்திருக்கிறது ; ஏனெனில் எந்தப் பக்கமும் உள்ள ஒரு சிறு பெயர்ச்சியை பெரிய பெயர்ச்சியொன்று தொடரும் என்பதேயாம்.

இரு சமநிலைத் தானங்களின் உண்மையானது p யிற்குரிய நேர்கோட்டை p' இற்கான வளையி வெட்டுகிறதோ வெட்டாமல் இருக்கிறதோ என்பதைப் பொறுத்துள்ளது.

$$\frac{2\gamma}{g\rho al}>\frac{1}{4}$$

எனின், கற்பனை மூலகங்கள் தோற்றும் ; ஆனால் குழாய் சீராக இருக்குமேயானால் p' ஆனது h அச்சுக்குச் சமாந்தரமாகும் ; அப்பொழுது ஒரேயொரு சமநிலைத் தானமே உளது.

வெப்பநிலையுடன் பரப்பிழுவை மாறுதல்.—பென்சீன், காபன் நாற்குளோரைட்டுப் போன்ற **இணக்கமில்**† திரவங்களிடத்துச் சதமவளவை அளவிடையில் அளக்கப்பட்ட வெப்பநிலை θ உடன் பரப்பிழுவை மாறலை

$$\gamma=\gamma_0(1-b\theta)^n$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் எடுத்துக்காட்ட முடியும் என 1915 இல் **ஃபேகசன்** பிரேரித்தார் ;‡ இங்கு b யும் n உம் தரப்பட்ட ஒரு திரவத்திற்கு மாறிலிகளும், γ_0 ஆனது 0° ச. இற்குரிய பரப்பிழுவையும் ஆகும் ; மேலும் அவதி வெப்பநிலை θ_c இல் பரப்பிழுவை பூச்சியமாகிறபடியால் $b=\theta_c^{-1}$ என நாம் நியாயத்துடன் எதிர்பார்க்கலாம். b, n என்னும் மாறிலிகளைத் துணியும்பொருட்டு§ ஃபேகசன் பின்வருமாறு செய்தார். வகையிட

$$\frac{d\gamma}{d\theta}=-bn\gamma_0(1-b\theta)^{n-1}.$$

$$\therefore\ \gamma\frac{d\theta}{d\gamma}=-\left[\frac{1-b\theta}{bn}\right]=-\frac{1}{bn}+\frac{1}{n}(\theta).$$

† நீர், போமிக்கமிலம் (H.COOH), அசெற்றிக்கமிலம் ($CH_3.COOH$), ஈதைலற்ககோல் ($C_2H_5.OH$) முதலிய இணங்குந் திரவங்கள் உயர் இருமுனைவுத் திருப்பங்கள் உடையன.

‡ *Phil. Mag.*, 31, 37, 1916 ; *Trans. Far. Soc.*, 19, 407, 1923.

§ ப. 47 ஐப் பார்க்க.

எனவே $\theta = x$ எனவும், $y = \gamma \frac{d\theta}{d\gamma}$ எனவும் குறித்தால், சரிவு $\left(\frac{1}{n}\right)$ ஐயும், y அச்சில் வெட்டுத்துண்டு $\left(-\frac{1}{bn}\right)$ ஐயும் உடைய நேர்கோடொன்றைப் பெற வேண்டும். கிடைத்த பேறுகள் சில பின்வருமாறு :

	n	$b \times 10^3$	$b^{-1} = \theta$	θ_c° ச. (நோக்கியுள்ள)
ஈதர்	1·248	5·155	194	193·8
பென்சீன் C_6H_6	1·218	3·472	288	288·5
காபன நாற்குளோரைட்டு CCl_4	1·206	3·553	281·5	283·1

சோதிக்கப்பட்ட பதினைங்கு வெவ்வேறு திரவங்களிடத்து, n சிறிதளவாலேயே வேறுபட்டது ; அவற்றிற்கு n இன் இடைப் பெறுமானம் **1·210** ஆகும்.

1893 இல் வண் ட வால் என்பார்

$$\gamma = A\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^m$$

என்னுஞ் சூத்திரத்தை எடுத்துரைத்தார் ; இங்கு A, m என்பன தரப்பட்ட ஒரு திரவத்திற்குரிய மாறிலிகளும், T தனியளவிடையில் வெப்பநிலையும், T_c அவதி வெப்பநிலையும் ஆகும். இது ஓர் அனுபவ சூத்திரம்; இருந்தாலும் m, ஒரு மாறிலியாக இருத்தல் வேண்டும் என **வண் ட வால்** முன்கூட்டியே கூறினர். இனி, **வர்ச்சாஃபெல்ற்** (1925) என்பவரைப் பின்பற்றிப் ஃபேகசனின் சமன்பாடும் வண் ட வாலின் சமன்பாடும் சமானமெனக் காட்டலாம். எனெனில்

$$\gamma = \frac{A}{T_c{}^m}(T_c - T)^m = \frac{A}{T_c{}^m}(\theta_c - \theta)^m = \frac{A\theta_c{}^m}{T_c{}^m}\left(1 - \frac{\theta}{\theta_c}\right)^m.$$

ஆனால் γ_0 ஐப் போல, $A\left(\frac{\theta_c}{T_c}\right)^m$ உம் ஒரு மாறிலியாகும் ; எனவே $m = n$ என்னும் நிபந்தனையின் கீழ் சர்வசமம் நிலைநிறுத்தப்படுகிறது.

இனி வெப்பவியக்கவியற் கருத்துக்களின்படி (பாகம் II ஐக் காண்க), பரப்புச்சக்தியடர்த்தி ϵ, பரப்பிழுவை γ, தனிவெப்பநிலை T என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு

$$\epsilon = \gamma - T \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial T} = \gamma - T \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}$$

ஆகும்.

ஃபகசனின் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்த,

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = -bn\gamma_0(1-b\theta)^{n-1} = -n\frac{\gamma_0}{\theta_c}\left(1-\frac{\theta}{\theta_c}\right)^{n-1}$$

$\therefore\ n>1$ ஆதலின், $\theta=\theta_c$ ஆகுமிடத்தில் $\dfrac{\partial\gamma}{\partial\theta}=0$; அதாவது γ, T வளையியானது, $T=T_c$ ஆகுமிடத்து, T அச்சைத் தொடுகிறது.

இனி
$$\frac{\partial\epsilon}{\partial T} = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial T}-\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right) - T\frac{\partial^2\gamma}{\partial\theta^2}$$

$$= -T\left[-n\frac{\gamma_0}{\theta_c}\left(-\frac{1}{\theta_c}\right)\left(1-\frac{\theta}{\theta_c}\right)^{n-2}\right].$$

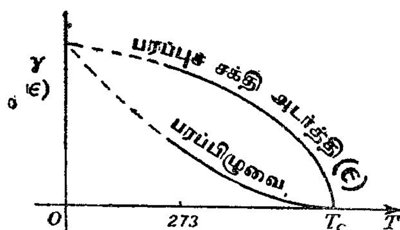
$n \simeq 1{\cdot}2$ ஆதலின் இது θ_c என்பதில் ∞ ஆகிறது ; அதாவது

$$\left[\frac{1}{\left(1-\dfrac{\theta}{\theta_c}\right)^{2-n}}\right]_{\theta=\theta_c} \to \infty.$$

எனவே, ϵ, T வளையியானது, $T=T_c$ ஆகுமிடத்தில், T அச்சுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கிறது.

மேலும்
$$(\epsilon)_{\theta_c} = 0-0 = 0.$$

γ, ϵ என்பவற்றினிடத்து வெப்பநிலையுடன் எத்தகைய மாறுதலை எதிர் பார்க்கலாம் என்பதைப் படம் 10·37 இல் காட்டியுள்ள வளையிகள் காட்டு கின்றன.



படம் 10·37. வெப்பநிலையுடன் γ, ϵ என்பன மாறுதல்.

மூலக்கூற்றுக் கனவளவும் பரக்கோரும்.—ஒரு திரவத்தின் மூலக்கூற்றுக் கனவளவானது கிராமளவில் அத்திரவியத்தின் மூலக்கூற்று நிறையை அதன் அடர்த்தியால் பிரிக்கக் கிடைக்கின்றது. சேதனச் சேர்வைகளின் மூலக் கூற்றுக் கனவளவுகளை அப்பொருள்களின் பொதுக் கொதிநிலைகளிலே மதிப்பிட்டபோது அவை பொதுவாக அவ்வவற்றின் கூற்று மூலகங்களினது அணுக் கனவளவுகளின் கூட்டுச்சார்புகள் ஆகும் என அத்துணை முற்பட்

காலமாகிய 1842 இல் கொப் (Kopp) என்பார் குறிப்பிட்டார். பௌதிக வியல்பொன்றின் கூட்டற்பண்பிற்கு இதுவே முதல் எடுத்துக்காட்டாகும்.

பரந்த வெப்பநிலை வீச்சொன்றில்

$$\frac{\gamma^{\frac{1}{4}}}{\rho} = C$$

என்னும் தொடர்பு சேராத்திரவங்களிடத்து உண்டானது என மக்கிளௌட் என்பார் 1923 இல் கண்டுபிடித்தார் ; இங்கு γ, திரவத்தின் பரப்பிழுவையும், ρ பரிசோதனையின்போதுள்ள வெப்பநிலையில் திரவத்தின் அடர்த்திக்கும் அதனது நிரம்பிய ஆவியின் அடர்த்திக்குமுள்ள வித்தியாசமும், C ஒரு மாறிலியும் ஆகும். மேற்படி சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களையும் கிராம் அளவில் மூலக்கூற்றுநிறை M என்பதால் பெருக்கினுல்,

$$\frac{M\gamma^{\frac{1}{4}}}{\rho} = MC = [P]$$

ஆகும் எனச் சக்டன் (Sugden) 1924 இல் காட்டினுர் ; இங்கு [P] ஒரு மாறிலி ; அது பரக்கோர் எனச் சக்டனுல் அழைக்கபபட்டது. இப்பெயரானது [P] என்பது ($\chi\dot{\omega}\rho\alpha$) = இடத்துக்கு ($\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$) அடுத்துள்ள ஒத்திடும் தன்மையுள்ள கனவளவு எனப் பொருடபடுகிறது. மிகக் கூடியதல்லாத வெப்பநிலைகளில் ρ வைத் திரவத்தின் அடர்த்தி என எடுத்துக்கொள்ளலாம் ; எனவே, $\frac{M}{\rho}$ என்பது மூலக்கூற்றுக் கனவளவு Ω ஆகும். எனவே,

$$[P] = \Omega\gamma^{\frac{1}{4}};$$

மேலும் எந்த வெப்பநிலையில ஒரு திரவத்தின் பரப்பிழுவை 1 தைன். சமீ$^{-1}$ ஆக இருக்கிறதோ, அதே வெப்பநிலையில் திரவம் கொண்டிருக்கின்ற மூலக்கூற்றுக் கனவளவையே பரக்கோர் குறிக்கிறது என்பது உடனடியாகத் தெளிவாம். எனவே கொப் என்பவரைப் பின்பற்றித் திரவங்களின் பொது கொதிநிலைகளில் அத்திரவங்களின் மூலக்கூற்றுக் கனவளவுகளை ஒப்பிடாது, அவற்றின் பரப்பிழுவைகள் ஒரே பெறுமானம் உடையதாய் இருக்கும் சூழலில் அம்மூலக்கூற்றுக் கனவளவுகளை ஒப்பிடலாம். ஒரு திரவத்தில் அடுத்துள்ள மூலக்கூறுகளின் கவர்ச்சியானது அத்திரவத்தின் பரப்புச் சக்தியடர்த்தியை, எனவே அதன் பரப்பிழுவையையும் அதன் உள்ளமுக்கத்தையும் நிர்ணயிக்கின்றபடியால், இரு திரவங்கள் ஒரே பரப்பிழுவையுடையதாய் இருந்தால் அவற்றின் உள்ளமுக்கங்கள் கிட்டத்தட்ட சமமாக இருக்கும். எனவே இரு திரவங்களின் சுயாதீனப் பரப்புச் சக்திகள் சமமாக இருக்கிற வெப்பநிலைகளில் அத்திரவங்களின பரக்கோர்களை ஒப்பிட்டால், மூலக்கூற்றுக்‡ கனவளவுகளின் ஒப்பீட்டுக்கு, கொப் என்பாரின் முறையைக் காட்டிலும் சிறந்த அடிப்படையொன்று கிடைக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம். கனவளவானது வெப்பநிலையின்

சார்பு ஆதலின், மூலக்கூற்றுக் கனவளவுகள் கூட்டக்கூடியவை என்பதைப் பயன்படுத்துமிடத்துள்ள முதன்மையான பிரச்சினை மூலக்கூற்றுக் கனவளவுகளின் ஒப்பீட்டிற்குச் சரியான வெப்பநிலைகளைக் காண்பதா கும் என்பதை இங்கு ஞாபகப்படுத்திக் கொள்ளல் வேண்டும். சக்டன் என்பார் முதன்முதலாகக் காட்டியுள்ளவாறு, $\frac{\gamma^{\frac{1}{4}}}{\rho}$ என்பது வெபபநிலை யிற் கிட்டத்தட்ட பொறுத்திராதபடியால், மக்கிளௌட்டின்* தொடர்பைப் பயன்படுத்திஞல் வெப்பநிலை விளைவு நடுநிலையாக்கப்பட்டிருக்கும் சூழலில் இக்கனவளவுகளை நாம் ஒப்பிடலாம். இருந்தாலும் இணங்காதவை எனக் கருதப்படும் திரவங்களிடத்து அதாவது மீதைலற்ககோல், ஈதைலற்ககோல், அசெற்றிக்கமிலம், அமைன்கள் முதலியவற்றைப் போன்றவற்றினிடத்து இப்பின்னத்தின் பெறுமானமானது வெப்பநிலையுயர்வுடன் மெதுவாகக் **கூடுகிறது**† எனச் சக்டன் கண்டார். இரசத்தினிடத்து, வெப்பநிலை அறை வெப்பநிலையிலிருந்து இரசத்தின் கொதிநிலைவரை சென்றபோது பின்ன மானது கிட்டத்தட்ட 2 சதவீதம் கூடுகிறது ; வெளளீயமிடத்து இதே வெப்பநிலை வீச்சொன்றில் மாற்றம் 5 சதவீதம ஆகும்.

திரவநிலையில் வெவ்வேறு சேர்வைகளின் பரக்கோர்களை ஒப்பிட்டு, பரக்கோரானது சிறப்பாகக் கூட்டுப் பண்பொன்ருகும் எனச் சக்டன் காட்டி ஞர். எனவே, (*a*) **சமபகுதிச்‡ சேர்வைகள்** ஒரே பரக்கோர்ப் பெறுமா னம் உடையவை, (*b*) வெவ்வேறு தொடர்களில் ஓரமைப்புத் தொட ரொன்றில அடுத்தடுத்த உறுப்புக்களின் பரக்கோர்களின் வித்தியாசங்கள் ஒரேயளவின. மேலும் தனித்தனியான அணுககள், சில அணுத்தொகுதி கள் என்பவற்றின் பரக்கோர்களைத் துணிந்தபோது பரிசோதனைப் பெறு மானங்களுக்கும் கணித்த பெறுமானங்களுக்குமிடையே இருந்த ஒற்றுமை மிக வெள்ளிடையாய்க் காணப்பட்டது.

பரக்கோரானது சேர்வையொன்றிலுள்ள உறுப்புக்களில் மட்டுமன்றி அக்கூறுகள் ஒன்ருேடொன்று பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் முறையிலும் கூடப் பொறுத்துள்ளது என விரைவில் தெரியவந்தது. இவ்வண்ணம் வளைய அமைப்பொன்றின் ஆக்கமானது அவ்வளையத்திலுள்ள அணுக்களின் தொகையால் நிருணயிக்கப்பட்ட அளவில் பரக்கோரைக் கூடச் செய் கிறது ; அதுபோலவே பரக்கோரில் இரட்டைப் பிணைப்பால் ஆகும் விளை வானது அப்பிணைப்பு எதிலீன் [C_2H_4] இன் முனைவிலி இணைப்பு அல்லது மும்மீதைலமிஞெட்சைட்டு [$(CH_3)_3NO$] இன் அரைமுனை இணைப்பு என்பவற்றைப் போலவோ வேருகவோ இருக்கிறது என்பதைப் பொறுத்துள்ளது. ஒரு சேர்வையின் பரக்கோரை அச்சேர்வையின் இயல்பைச் சாராத சில அணு மாறிலிகள், அமைப்பு மாறிலிகள் என்பவற்றின் கூட்டுத்தொகையாக எடுததுக் கூறலாம். இவ்வண்ணம்,

* *Trans. Far. Soc.*, 19, 38, 1923.

† இவற்றின் மூலக்கூறுகள் உயர் இருமுனைவுத் திருப்பங்கள் உடையன.

‡ அதாவது, ஒரே மூலக்கூற்று நிறையுடையது.

பரக்கோரின் உண்மையான கருத்துத் தெரியாமல் இருக்கிறபோதிலும், சேர்வைகளின் அமைப்பைத் துணியவும், எடுத்துரைக்கப்பட்ட மாற்று அமைப்புக்கள் பற்றித் தீர்ப்புக் கூறவும் அது பயன்படுத்தப்படுகிறது. இவ்வாறு துணியப்பெற்ற அமைப்புக்கள் இரசாயனவியற் சான்றுகளுடன் அல்லது X கதிர்கள், உறிஞசல் திருசியங்கள் என்பவற்றைப் பயன் படுத்திப்பெறும நம்பக்கூடிய பௌதிக முறை முடிவுகளுடன் எப்பொழுதும் ஒத்திருப்பதில்லை.

உருக்கிய உலோகங்களின் பரப்பிழுவை.—உருக்கிய ஓர் உலோகத்தினது பரப்பிழுவையைத் திருத்தமாகத் துணியுமிடத்து அசாதாரணமான இடர்கள உள; ஏனெனில் பரப்புக்களில் மாசு எளிதாகப் படிகின்றது. இத்துறையில் மிகச்சிறந்த ஆராய்ச்சிகள்சில பேக்கம்ஷோ (1926) என்பவராலே நடாத்தபபட்டுளளன. அவர், சக்டன மாற்றியமைத்த உயர்வுக் குமிழியமுக்க முறையையே பயன்படுத்தினா, பககம் 562 இற காண்க. உருககிய உலோகத்தில் ஒரே ஆழத்திறகு அமிழ்த்தப்பட்ட இரு குழாய்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இது தனிப்பட்ட நயமொன்றுகும்; ஏனெனில் பரப்பிழுவையைக் கணிபபதற்குப் பயன்படும் இறுதிச் சமன்பாட்டில் அமிழ்ப்பாழத்தையோ உருக்கிய உலோகத்தின் அடர்த்தியையோ கொண்ட உறுப்பு எதுவும் வருவதில்லை. குமிழிகள் பிரிந்து விலகுவதற்குச் சறறுமுன், அவை உண்மையான அரைக்கோள வடிவமுடையனவல்ல எனபதையிட்டுச் சக்டன் கணித்துப் பெறற திருத்தங்களை பேக்கம்ஷோவும் தம் ஆராய்ச்சியில் பிரயோகித்தார்.

எல்லா உருக்கிய உலோகங்களுக்கும் பரப்பிழுவை நியாயமான அளவில் பெரிதாய் இருக்கினறது எனக் காணப்பட்டது; செம்பு, கடமியம் என்பவற்றிற்கு, வெப்பநிலையுடன் பரப்பிழுவை கூடுதலை எதிர்பார்க்கலாம்.

நீர்மீது கரையுந் தன்மையில்லாப் பொருள்களின் பரப்புப் படலங்கள்.—ஒரு திரவப் பரப்பின்மீது கரையுந்தன்மையில்லாதது எனக் கூறக்கூடியதும் எளிதில் ஆவியாகமாட்டாததுமான பொருளொன்று சிறிதளவில் வைக்கப் பட்டிருக்கிறது எனக் கொள்க; அத்திரவமானது நீரைப்போல் உயர் பரப் பிழுவையுடையது எனவும் கொள்க; அப்பொழுது இரு தோற்றப்பாடு களுள் ஒன்றைக் காணலாம். ஒன்றில் அப்பொருளானது நீர்ப் பரப்பு மீது பரவலாம் அல்லது அது அடர்ச்சித் திணிவாக இருக்கலாம். ஒரு பொருளின் பரம்பலுக்கு வேண்டிய போதிய நிபந்தனையானது அதன் மூலக்கூறுகள் அதே இனத்து மூலக்கூறுகளைக் காட்டிலும் நீர்மூலக்கூறு களையே கூடுதலாகக் கவர்தல் வேண்டும் என்பதே என அறிவோம். பரப்பானது போதிய அளவு பெரிதாயின் பரவும்பொருள் ஒரு மூலக்கூறு தடிப்புடைய படலமொன்றை ஆக்குகிறது; அப்பொழுது அது **ஒருமூலக் கூற்றுப் பரப்புப் படலம்** எனப்படும். முழுப் பொருளும் இத்தகைய படல மொன்றாய் இருப்பதற்கு பரப்பானது போதிய அளவு பெரிதாய் இரா

விட்டால் பொருளானது பெரும்பாலும் ஒருமூலக்கூற்றுப் பரப்புப் படலமாக வும் ஆனல் ஆங்காங்கே அதனினும் மிகத்தடிப்பான, சிறிய ஆனல் கட்புலனகும் துளிகளைக் கொண்டுமிருக்கும்.

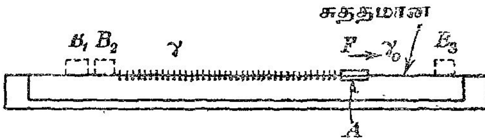
பொதுவாகக் கூறுமிடத்து இவ்வொருமூலக்கூற்றுப் படலங்கள் எளிய அமைப்பு உடையவையாகக் காணப்படுகின்றன ; எனவே அவற்றின் நடத்தையை ஆராய்ந்தால் தனித்தனியான மூலக்கூறுகளின் பருமன், வடிவம், வேறு இயல்புகள் பற்றிய செய்திகள் தெரியவரும.

வரலாறு.—பழங்காலத்திலேயே நீர்மீது பரப்புப படலங்களைப் பற்றித் தெரிந்திருந்தனர் ; ஏனெனில் சிறிதளவு எண்ணெயை விட்டுப் பரப்பு அலைகளை அமைதியாக்கிக் கொந்தளிக்குங் கடலில் கப்பல்களுக்குப் பாது காப்பு அளிக்கமுடியும் என அக்காலதது மக்கள் நன்கு அறிந்திருந் தனர். தாவரப்பொருள் நெய்களிலிருந்து வேறுபட்ட கனிச நெய்கள் இம்முயற்சியில் அவ்வளவு ஆற்றல் உடையவை அல்ல. பரப்பிழுவை பற்றிய கருத்தை நன்கு விளங்கிய பின், நீர்மீது எண்ணெய்ப் படலமானது பரப்பிழுவையைப பெரிதும் குறைககிறது எனத் தெரியவந் துள்ளது. குறிப்பிட்ட அளவிற்கு நீரின் பரப்பிழுவையைக் குறைததற்கு தேவையான எண்ணெயின் மிகக்குறைநத அளவை றேலி என்பவரே முதன்முதலாக 1890 இல் அளநதவா ஆவர். நீர்ப் பரப்பு மீது புகுத்தப்பட்ட கற்பூரத்துண்டுகள் அப்பரபபு மீது விரைவாக அசை கின்றன என்பது நனகு தெரிந்ததே ; பரப்புப் படையில் கரைந்த கறபூரத்தின் செறிவு சீரானதாக இல்லை ; எனவே ஒரு கரைசலின் பரப்பிழுவை செறிவுடன மாறுகிறபடியால், பரப்பு அப்பொருளால் முற்றிலும் நிரம்பியிருக்கும்வரை கற்பூரத துணிக்கை ஒவ்வொன்றும் பரப்பு வேற்றுமை உதைப்பொன்றை அனுபவிக்கும். அந்நிலையில் பரப்பிழுவை 62 தைன். சமீ.$^{-1}$ ஆகும். $5{\cdot}5 \times 10^{3}$ சமீ.^{2} பரப்பளவுடைய ஒரு நீர்ப்பரப்பு மீது $0{\cdot}81 \times 10^{-3}$ கி. திணிவுடைய ஒலிவெண்ணெய் பரம்பியிருந்தால் அது நீர்ப் பரப்புமீதுள்ள கற்பூரத் துணிக்கைக.ரின் அசைவை நிறுத்துதற்குப் போதியது என றேலி கண்டார் ; நீர்ப்பரப்பில் இதேயளவு எண்ணெயைச் சோப்பதால் அந்நீரின் பரப்பிழுவை கிட்டத்தட்ட 16 தைன். சமீ.$^{-1}$ குறைக்கப்படுகிறது ; இது 16×10^{-8} சமீ. தடிப்புள்ள ஓர் எண்ணெய்ப் படையினல் ஆகிறது.

ஓராண்டுக்குப் பின் மேற்படி ஆராய்ச்சியைத தொடர்ந்து செல்வி பொக்கெல்ஸ் என்பவரின் மிக முதன்மையான கண்டுபிடிப்பொன்றும் உளது. “தடுப்பு” ஒன்றல் ஒரு பரபபுப் படலத்தின் பரப்பைப் போதிய அளவு கட்டுப்படுத்தலாம் என அவர் கண்டுபிடித்தார் ; இங்கு, தடுப்பு எனபது பரபின் மெழுகு பூசியுள்ள ஒரு குறுகிய கண்ணடித் துண்டா கும். தடுப்பானது நீர்மீது இருத்தல் வேண்டும் ; தடுப்பின் அப்பக்கத்தி லுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அது நீரைத் தொடுதல் வேண்டும் ; அத்துடன் பரப்பின் அகலம் முழுதிலும் அது அளாவியிருத்தல் வேண்டும்.

நீர்ப் பரப்பொன்றைத் துப்புரவாக்குதற்கு இத்தகைய தடுப்புக்களின் இன்றியமையாமை பற்றி பக்கம் 536 இல் வற்புறுத்திக் கூறப்பட்டுள்ளது ; மெல்லிய நீர்ப் படலங்கள் தொடர்பான எல்லாத் திருத்தமான பரிசோதனைகளிலும் இத்தகைய தடுப்புக்கள் முதலிடம் பெறுகின்றன. 1899 இல் றேலி என்பார் செல்வி பொக்கெல்சின ஆராய்ச்சியை மீண்டுஞ் செய்து அதைக் கருதத்தக்களவில் விரிவாக்கினர். ஒரு நீர்ப் பரப்பு மீது தெரிந்த திணிவையுடைய ஒலிவெண்ணெயால் கொள்ளப்பட்ட பரப்பளவை, தடுப்புக்களை அணுகச் செய்வதனல் குறைத்து, வரையறுத்த அவதிப் பரப்பொன்றைப் பெறும் வரை பரப்பிழுவையானது கிட்டத்தட்ட மாருமல் இருக்கினறது எனனும் உண்மையை அவர் உறுதிப்படுத்திஞர் ; அவதிப்பரப்பையடைநத பின்பு தூயநீரினது பரபபிழுவையின் அரைவாசியால் பரப்பிழுவையின் பெறுமானம் திடீரென இறங்குகிறது. பரபபுமீது வைக்கப்பட்ட எண்ணெயின தெரிநத கனவளவு, பரப்பிழுவை குறையும் போதுள்ள பரப்பின் அவதிப் பெறுமானம் என்பவறறிலிருந்து இக கட்டத்தில படலத்தின் தடிப்பைக் கணிக்கலாம். அது 10×10^{-8} சமீ. ஆகும் எனக் காணப்பட்டது ; இத்தடிப்பின் பெறுமானததிற்கும், மூலக கூறுகளுக்கு எளிய இயக்கக் கொள்கையிலிருந்து கிடைககின்ற விட்டங் களுக்கும் உள்ள இயல்பொப்புமையிலிருந்து இச் சூழ்நிலையில் படலமானது ஒரு மூலக்கூற்றுத் தடிப்புள்ளது என றேலி முடிவு செய்தார்.

பரப்புப் படலங்களின் ஒருமூலக்கூற்றுத் தன்மை.—வேற்றுமைப் பரப் பிழுவை, அல்லது பரப்பு அமுக்கம்.—A ஆனது நீளம் l உடையதும், விறைப்பான ஓரங்கள் உடைய தொட்டியொனறில் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்ற ஒரு திரவத்தின பரப்பு மீது மிதந்திருக்கினறதுமான இலேசான குறுகிய



படம் 10·38. வேற்றுமைப் பரப்பிழுவை அல்லது பரப்பமுக்கம்.

துண்டொன்று ஆகுக. அததுண்டு வரிப்படத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாய இருக்கிறது. A யின வலப் பக்கத்துப் பரப்பு துப்புரவாய் இருக்க ; A யின் இடது பக்கத்துப் பரப்பானது படலமொனறுல போர்ககப்பட்டிருக்கிறது ; தடுப்பு B_2 ஐ இயக்கிப் படலத்தின் பரப்பளவை மாற்றலாம். பரப்பைத் துப்புரவாக்குதலுக்கும் அதைப் பராமரிப்பதற்குமாக எல்லா மூன்று தடுப்புக்களையும் பயன்படுத்துதல் வேண்டும். A யினல் அனுபவிக்கப் படுகின்ற வெளிமுகமான விசை F ஆகுக ; γ_0 உம் γ உம் முறையே தூய திரவம், படலம் மூடிய பரப்பு என்பவற்றின் பரப்பிழுவைகள் ஆகுக. A ஆனது விசை F இனல் வலப்புறமாக ஒரு தூரம் δx இறகுப் பெயர்க்கப்படுமிடத்து வெப்பநிலை மாருது இருக்கும் வண்ணம் போதிய

வெப்பச்சக்தி ஊட்டப்படின், அவ்விசையால் செய்யப்படும் வேலையானது தொகுதியின் முழுச் சுயாதீனச் சக்திக் குறைவுக்குச் சமன் ஆகும். எனவே

$F\,\delta x =$ முழுச் சுயாதீனச் சக்திக்குறைவு

$=$ " தூய பரப்பின் " சுயாதீனச் சக்திக்குறைவு

$+$ " அழுக்கான பரப்பு " இன் சுயாதீனச் சக்திக்குறைவு

$= \gamma_0 l\,\delta x - \gamma l\,\delta x$;

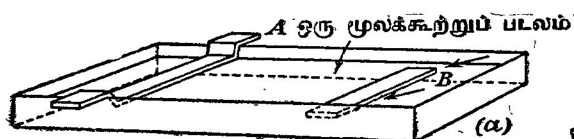
இங்கு சயக்குறியானது தொகுதியின் இபபாகத்தில் முழுச் சுயாதீனச்சக்தி கூடுகிறது என்பதைச் சுட்டுகிறது. எனவே

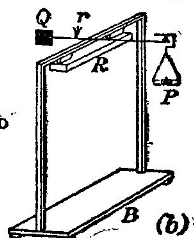
$$\frac{F}{l} = \gamma_0 - \gamma.$$

$\frac{F}{l} = \psi$ ஆகுக ; ψ, பரப்பமுக்கம் என அடிக்கடி அழைக்கப்பட்ட போதிலும் அதை **வேற்றுமைப் பரப்பிழுவை** என அழைப்போம்.

மிதக்கும் தடுப்பொனறு மீது பரப்புப் படலமொன்றல் ஒவ்வோர் அலகுநீளத்திலும் உஞற்றப்படும் விசைக்கும் ஒரு கரைசலின பிரசாரண அமுக்கத்துககும் இடையேயுள்ள நெருஙகிய ஒப்புமையை ஆதாம் எனபார் சுட்டிக் காட்டியுள்ளார் ; மிதப்பானது குறையூடுபுகவிடுகின்ற சவ்வின் இடத்தை எடுக்கிறது ; மிதப்பு மூலமாகவே வேற்றுமைப் பரப்பிழுவை புலஞகிறது.

ஒருமூலக்கூற்றுப் படலம் பற்றிய லாங்முயரின் ஆராய்ச்சி.—எண்ணெய் களுக்குப் பதிலாக லாங்முயர்† என்பார் தெரிந்த அமைப்பையுடைய தூய





படம் 10·39. (வரிப்படமுறைப்படி) லாங்முயரின் தொட்டி.

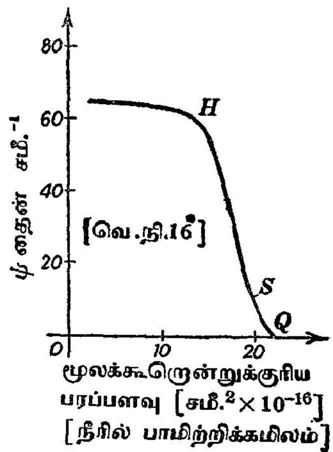
பொருட்களைப் பயன்படுத்தினர் ; இதனல் அவர் பரப்புப் படல ஆராய்ச்சியில் பெரும் முன்னேற்றம் அடைந்தார். திரவங்களும் திண்மங்களும் பென்சீனில் கரைக்கப்பட்டுப் பரவப்பட்டுள்ளன ; நீர்ப் பரப்பு மீது ஒரு " துளி " இடப்பட்டபோது கரைசலானது விரைவில் பரவிற்று ; ஒரு சில செக்கன்களில் (பென்சீன்) கரைப்பான் ஆவியாயிற்று. ψ ஐ அளப்பதற்கு லாங்முயர் பயன்படுத்திய ஆய்கருவி படம் 10·39 (a) யிற் காட்டப்பட்டிருக்

† *J. A. C. S.*, 39, 1848, 1917.

கிறது. ஆய்கருவி நீண்ட ஒடுங்கிய, ஆழமில்லாத தொட்டியைக் கொண்டது; அதன் ஒரு பகுதி மட்டும் நீரால் நிரப்பப் பட்டிருக்கிறது. A, மெழுகு பூசியுள்ள குறுகிய அட்டைத்துண்டொன்றுகும்; அது தொட்டியின ஒரு முனைககு அணித்தாய், நீர்ப்பரப்புமீது ஒய்வாய் இருக்கிறது. தொட்டியின் மறுமுனையில் மெழுகு பூசியுள்ள குறுகிய அட்டைத்துண்டு B நீர்மீது மிதக்கிறது; அதன நீளம் தொட்டியின் அகலத்துக்குக் கிட்டத்தட்டச் சமம். தடுப்பு A ஐ அசைத்து எண்ணெயால் போர்க்கப் பட்ட பரப்பளவை மாற்றமுடியும; அம்புகளால் காட்டியுள்ளது போல, தக்கவாறு வைககப்பட்டுள்ள இரு ஊதைககாற்றுக்களால் B யிற்கும் தொட்டியின் பக்கங்களுக்குமிடையே படலம் பரவாவண்ணம் தடுக்கப்படுகின்றது.

விறைப்பான மேடை R இல் ஒய்வாய் இருக்கின்ற இரு கத்தியோரங்களிலிருந்து, இலேசான கண்ணுடிச் சட்டப்படலொன்றல் துண்டு B ஆனது தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது, படம் 10·39 (b). சட்டப்படலின் மேற்பாகமானது அதன் ஒரு முனையில் தராசுத்தட்டு P யையும் அதன் மறுமுனையில் ஈடுசெய்திணிவு Q வையும் கொண்ட நெம்பொன்றைக் காவுகிறது.

பரிசோதனையை நடாததும் பொருட்டு, மிதப்பானது அதனது ஒய்வு நிலையினின்றும் பெயாககப்படுமாறு தெரிந்த திணிவையுடைய ஒரு சிறு சுமை P யில் வைக்கப்படுகிறது. பினபு மிதக்கும தடுப்பு B அதனது பூச்சிய நிலையை அடையும் வரை தடுப்பு A ஆனது B யை நோக்கி அசைத்து வைக்கப்படுகிறது. இவ்வண்ணம் ψ யின் தரப்பட்ட ஒரு பெறுமானத் தொகுதிக்குப் படலத்தின் பரப்பளவுகள துணியப்படுகின்றன; இங்கு ψ யின் பெறுமானமானது P யிலுள்ள திணிவு, ஆய்கருவியின் பரிமாணங்கள் என்பவற்றிலிருந்து பெறப்படுகின்றது.



படம் 10·40. மெல்லிய படலங்களிடத்து லாங்முயரின் சில பேறுகள்.

நிரம்பிய கொழுப்பமிலங்கள், அ ற்ககோல்கள் ஆகியவற்றினிடத்து ψ ஆனது முடிவுள்ளதாய் வருகின்றது என்னும் அவதிப் பரப்பளவில் உண்மையை லாஙமுயர் உறுதியாக நிலைநிறுத்திஞர்; றேலியின் பரிசோதனைகளில் பரப்பிழுவை குறைவுறும் கட்டத்தை இது ஒத்திருக்கிறது. படலத்திரவியத்தின் ஒரு மூலக்கூறிஞல் கொள்ளப்படுகின்ற பரப்பையும் அதற்கு ஒத்த வேற்றுமைப் பரப்பிழுவை ψ யையும் குறித்து லாங்முயர் தனது பேறுகளை வரைபு முறைப்படி

உணர்த்துகிறூர். தெரிந்த ஒரு பரப்பளவு மீது பரவியிருக்கின்ற எண்ணெயின திணிவு, அதன் மூலக்கூற்று நிறை, அவகாதரோ எண் என்பனவற்றிலிருந்து தனித்த மூலக்கூருென்ருல் கொள்ளப்பட்ட பரப்பளவு கணிககப்படுகிறது. படம 10·40 எடுத்துக்காட்டு வளையியொனருகும். மூலக்கூருென்ருல் கொள்ளப்படுகினற பரப்பளவு வரிப்படத்தில் Q என்னும் புள்ளியால் காட்டப்படும் அளவை, அதாவது 21×10^{-16} சமீ.^{2} ஐ மீறுமிடத்து ψ யின் பெறுமானம் கண்டுணர்வதற்கு மிகச் சிறிதாகும்; அதாவது நீரின் பரப்பிழுவையானது அளக்கக் கூடிய அளவிற்கு மாறுவதில்லை. கொள்ளப்பட்ட பரப்பளவைக் குறைத்தபோது ψ யின் பெறுமானம் தொடக்கத்தில் மெதுவாகவும், பின்பு H எனனும் புள்ளியால் எடுத்துக்காட்டப்படும் கட்டம் அடையும்வரை விரைவாகவும உயர்கிறது. பரப்பளவைத் தொடர்ந்து குறைததபோது, ψ யின பெறுமானம கட்டத்தட்ட மாருமல் இருக்கிறது; ஆனுல் இக்கட்டத்திற்ருன் படலம் கட்புலனுகின்றது; ஏனெனில் அதன் பரப்பிலே விகாரக் கோடுகள் தோனறும் வண்ணம் அது பொடியாகிறது.

Q விற்கும் நன்கு வரையறுக்கப்படாத புள்ளி S இற்குமிடையே, படலம் " திரவ நிலையில் " இருககிறது எனக் கருதப்படுகிறது; ஏனெனில், பரப்புமீதுள்ள தூசுகளின் சுயாதீன இயக்கததைக் காணமுடிகின்றது. S இல் படலம் திண்மமாகின்றது; ஏனெனில் அக்கட்டத்திலிருந்து பரப்பளவைக் குறைக்கும்போது தூசுத் துணிக்கைகள் சலனமற்றிருக்கின்றன.

ஒடுங்கிய படலம்.—பல்மிற்றிக்கமிலம் ($C_{15}H_{31}.COOH$) முதலாகச் சிரேட்டிக்கமிலம் ($C_{25}H_{51}.COOH$) ஈருகவுள்ள கொழுப்பமிலத் தொடரினிடத்து படம் 10·40 இல் Q விஞல் எடுத்துக்காட்டப்படும் கட்டத்தில், ஒரு மூலக்கூற்றினுற் கொளளப்படும் பரப்பளவானது எப்பொழுதும் கிட்டத்தட்ட (21×10^{-16}) சமீ.$^{-2}$ ஆகும் என லாங்முயர் கண்டார். மேற்படி பொதுவான நிரம்பிய கொழுப்பமிலத் தொடரினிடத்து ஐதரோகாபன் சங்கிலியின் நீளம் மாற்றப்படும்போது அவதிப் பரப்பளவு மாருமல் இருக்கின்றது என்னும் உண்மை, மூலக்கூறுகள் பரப்போடு உயர்சாய்வில் உள்ளன என்பதைக் காட்டுகின்றது; சங்கிலியின் திசையளி நிலைக்குத்தாய் இருக்கக்கூடும்.

இனி மொத்தமாகப் 16 காபன் அணுக்கள் கொண்ட பாமிற்றிக்கமிலமானது மூலக்கூற்றுக் கனவளவு 300 சமீ.^{3} மூல்.$^{-1}$ உடையது; எனவே இவ்வமிலத்தின் மூலக்கூறு ஒவ்வொன்றினதும் கனவளவு

$$300 \div 6{\cdot}02 \times 10^{23} = (498 \times 10^{-24}) \text{ சமீ.}^3.$$

லாங்முயரின் கருத்துப்படி அதன் வெட்டுப்பரப்பு $20{\cdot}5 \times 10^{-16}$ சமீ.^{2} ஆகும்; எனவே பொருளானது படலமாகவோ கனவளவுடையதாகவோ இருப்பினும் அதன் அடர்த்தி அதில் தங்கியிராது எனின் பரப்பிற்குச் செங்குத்தான திசையில் அதன் நீளம் 24×10^{-8} சமீ. ஆகும். பாமிற்றிக்

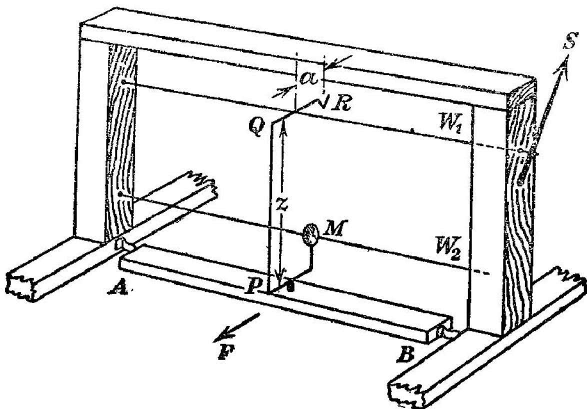
கமிலத்தின் மூலக்கூற்றின் நீளம் அதன் தடிப்பின் கிட்டத்தட்ட ஐந்து மடங்கு ஆகும். இப்பேறுகள் X கதிர்களைப் பயன்படுத்திய ஆராய்ச்சிகள் தரும் பேறுகளுடன ஒத்திருக்கின்றன ; எனவே இம்மூலக்கூறுகளிலுள்ள நெடுஞ் சங்கிலிகள் அம்மூலக்கூறுகள் ஓய்வாயிருக்கினற பரப்பிற்கு ஒன்றில் செங்குத்தாக அல்லது உயர்சரிவில் உள்ளன என்னும் கருத்து உறுதிப் படுத்தப்பட்டுள்ளது.

என். கே. ஆதாமினதும், அவருடன் சேர்ந்து உழைத்தவர்களினதும் ஆராய்ச்சி.—கிட்டத்தட்ட 1920 இல், ஆதாம் என்பார் பரப்புப் படலங்கள் பற்றிய ஆராய்ச்சித் தொடரொன்றைத் தொடக்கி வைத்தார் ; அதன் விளைவாக லாங்முயரின் ஆராய்ச்சி உறுதிப்படுத்தப்பட்டதுமன்றி அது பெரிதும் விரிவாக்கப்பட்டுமுளது. தொடக்கத்தில் ஆதாம் லாங்முயரின் ஆய்கருவிபோன்றதொன்றைப் பயன்படுததினுர் ; ஆனல் மெழுகிட்ட குறு கிய கண்ணுடித்துண்டுகளே இஙகு தடுப்புகளாகப் பயன்படுத்தப்பட்டன. 1926 இல் ஆதாமும் யெசப்பும் அதனினும் கூடிய உணர்திறனும் நம்பக்கூடிய தன்மையும் உடைய ஆய்கருவியொன்றைத் திட்டமிட்டமைத் தனர். சிலிக்காவாலான ஒரு தொட்டி விரும்பத்தக்கதாயினும் பித்தளையா லேயே தொட்டி ஆக்கபபட்டுள்ளது ; தொட்டியும் தடுப்புக்களும் வன்பரபின் மெழுகால் பூசப்பட்டுள்ளன ; அதனல் நீர் தாண்டிப் பரவமுடியாதவாறு ஈரமாகாத படையொன்றை அது அளித்தது. தடுப்புக்களும் தொட்டியின் மேற்பாகங்களும் ஈரமாகக்கூடாது என்பது இனறியமையாததாகும் ; இல்லாவிடில் படலத்தைக் கொண்டுள்ளது எனக் கருதப்படும் பரப்பள விற்கு அப்பால் அப்படலஞ் செல்லுதலைத் தடுக்கமுடியாது.

மிதப்புக்கு அப்பால் படலம் செல்லாவண்ணம் தடுப்பதற்கு, மிதப்புக் கும் தொட்டியின் பக்கங்களுக்கும் இடையேயுள்ள வெளியானது–அது ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் 1 சமீ. ஆகும்–மிக்க இலேசான பிளாற்றின நாடாக்களால் அடைக்கப்படுகின்றது. மிதப்புமீது உஞற்றுகின்ற விசையை அளத்தற் பொருட்டுப் படம் 10·41 இல் காட்டியுள்ள ஒழுங்கு முறை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. விறைப்பான, நிலைக்குத்தான ஒரு சட்டப்படல் இரு கிடையான முறுக்கற் கம்பிகள் W_1, W_2 என்பவற்றைக் கொண்டுள்ளது. ஆடி M ஐக் காவுகின்ற கீழ்க் கம்பியானது, காட்டப்பட்டிருக்கின்ற வடி வத்தைக் கொள்ளுமாறு வளைத்தெடுத்த வெள்ளிக் கம்பி PQR இஞல் மிதப்புடனும் மேலான கம்பியுடனும் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. AB என்பது மிதப்பாகும் ; அதனுடன் பற்றப்பட்டிருக்கின்ற பிளாற்றின நாடாக்கள் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன ; தொட்டியின் எஞ்சிய பாகங்களும் ஆதாம் பயன்படுத்திய சீர்திருத்தங்களைப் பற்றிய விவரங்கள் பலவும் இங்கு தவிர்க்கப்பட்டுள்ளன.

மிதப்புமீது விசை F உஞற்றுங்காலே, ஆடியானது கிடையான அச் சொன்று பற்றிச் சுழற்றப்படுகிறது ; முறுக்கற் குடுமியொன்ருல் மேற் கம்பியை முறுக்கி, விசை F இன் திருப்பத்திற்கு ஈடுசெய்து, மிதப்பையும்

ஆடி M ஐயும் அவ்வவற்றின் பூச்சிய நிலைகளுக்கு மீளச்செய்யலாம். கம்பி W_1 இற்கு அளிக்கப்பட்ட முறுக்கலின் அளவு, பாகைகளில் அளவு கோடிட்ட ஒரு வட்டவளவிடைமீது அசையும் சுட்டி S இனால் காட்டப்படுகிறது.

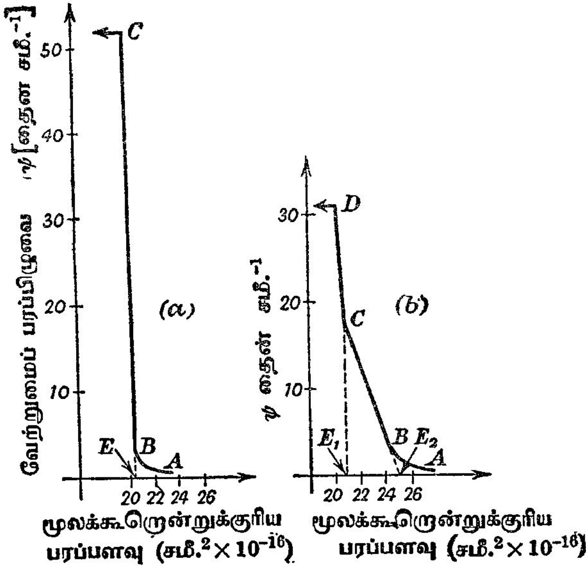


படம் 10·41. ஆதாமால் அமைக்கப்பட்ட ஒரு தொட்டியில் பரப்புப் படலத்தின் மிதப்பும், முறுக்கற் கம்பிகளும்.

ஆய்கருவியை அளவுகோடு திருத்தும்பொருட்டு W_1 இன் அச்சிலிருந்து தூரம் a யிலுள்ள கொளுக்கி R இல் தெரிந்த திணிவு μ வைக்கப்படுகிறது. z ஆனது தூரம் PQ வும், $\widehat{PQR}=\frac{\pi}{2}$ உம ஆயின், மிதப்புமீதுள்ள விசை X என்பது $Xz=a\mu g$ யினால் தரப்படும். எனவே X அல்லது அதனினும் சிறந்த $\frac{X}{l}$ என்பது, அறியப்படும். இங்கு $l=AB$ யின் நீளம் சக ஒரு பக்கத்திலுளள வெளியிடம். தொகுதியை அதன் பூச்சிய நிலையை அடையச் செய்யும் பொருட்டு S ஐக் கோணம் ϕ யினூடாக அசைத்து வைத்தால் அப்பொழுது S இன் 1° அளவு சுழற்சியானது மிதப்பு AB யின் ஓர் அலகுநீள மீதுள்ள விசை $\frac{X}{l\phi}$ ஐ ஒத்திருக்கும். இவ்வாறு அலகு நீளமொன்றில் 0·01 தைன். சமீ.$^{-1}$ போன்ற அத்துணைச் சிறிய ஒரு விசையை உணர முடிகிறது.

படம் 10·42 (a) ஆனது கூடத்து வெப்பநிலையிலுள்ள காய்ச்சிவடித்த நீர்மீது இருக்கின்ற ஒருகொழுப்பமிலப் படலத்திற்குரிய "விசை–பரப்பளவு" வளையியாகும். இது லாங்முயர் பெற்றதைப் போன்றது; ஆனால் ஒரு வேறுபாடு உளது; புள்ளி Q ஆனது லாங்முயர் கருதியதுபோல் அத்துணை வரையறுத்ததொன்று அன்று, படம் 10·40. கோடு BC நிலைக்குத்து

அச்சுடன் சற்றுச் சாய்ந்திருக்கிறது ; அது ஒடுங்கிய படலத்தின் நெருக்கலை உணர்த்துகிறது. கிடையான அச்சை E இல் வெட்டுமாறு CB யை நீட்டி பூச்சிய நெருக்கலுக்கு ஒரு மூலக்கூற்றிற்குரிய பரப்பளவு பெறப்படுகிறது. C யில் படலம் சிதறுகிறது.

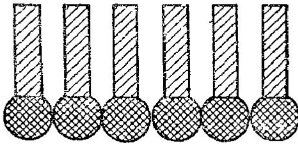


படம் 10·42. (a) நீரின்மீது, (b) ஐதான ஐதரோகுளோரிக்கமிலமீது உள்ள கொழுப்பமிலமொன்றின் ஒருமூலக்கூற்றுப் படலங்களுக்குரிய "விசைப் பரப்பளவு" வளையிகள்.

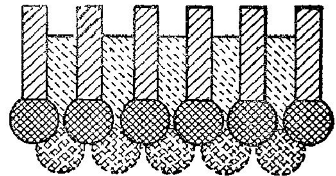
ஐதான ஐதரோகுளோரிக்கமிலமீது படலங்கள்.— ஏற்கெனவே லாங்முயர் ஐதான ஐதரோகுளோரிக்கமிலமீதுள்ள ஒருமூலக்கூற்றுப் படலங்களின் பின்வருகின்ற குறிப்பிடத்தக்க இயல்பைக் கண்டுபிடித்துள்ளார் ; அதே தோற்றப்பாட்டை ஆதாம் இன்னும் நுணுக்கமாக ஆராயலானர். 0·1 N. முதல் 0·01 N. வரையுள்ள ஐதரோகுளோரிக்கமிலமீதுள்ள கொழுப்பமிலப் படலமொன்றிற்குரிய "விசை–பரப்பளவு" வளையி படம் 10·42 (*b*) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. அதனது மேற்பாகம் CD ஆனது மிகு நெருங்கிய கட்டுநிலையில் படலத்தை எடுத்துக்காட்டுகிறது ; அத்துடன் ஒரு மூலக்கூற்றிற்குரிய பரப்பளவானது இன்னும் $20{\cdot}5 \times 10^{-16}$ சமீ.^{2} எனவும் காட்டுகின்றது ; அது புள்ளி E_1 இனல் காட்டப்படுகிறது ; இங்கு DCE_1 ஒரு நேர்கோடாகும் ; தூயநீர் மீதுள்ள படலங்களுக்குப் பெற்ற அதே பெறுமானத்தைப் போல் எல்லாக் கொழுப்பமிலங்களும் இங்கும்

தருகின்றன. நீர்மீதுள்ள படலங்களிடத்துப் பாகம் BC தோற்றுவதில்லை; அதை E_2 வரை நீட்டுமிடத்துக கிடைககின்ற பெறுமானம் $25{\cdot}1 \times 10^{-16}$ சமீ.[2] ஆனது, பயன்படுத்திய கொழுப்பமிலத்தின ஐதரோகாபன் சங்கிலியின் நீளத்தைச் சாராதிருககக் காணப்பட்டது.

மேற்படி பேறுகளின விளககத்தையிட்டு ஆதாம் கீழ்வருகின்ற கொள்கையை எடுத்துக் கூறியுள்ளார். படலத்தைத் தாங்கும் திரவம் அமிலமாதலின், மேற்பரப்பிலிருந்து COOH அல்லது காபொட்சைற்றெருகுதிகள் தள்ளப்படுந் தன்மையுடையன; எனவே, வளையியில் C என்னும் புள்ளியிலுள்ள முதலாவது முறிப்பால் எடுத்துக்காட்டப்படும் கட்டம் அடையப்படும்வரை, காபொட்சைற்றெருகுதிகள் அல்லது மூலக்கூறுகளின் முடிகள கூடியமட்டில் நெருக்கமாக அடுக்கப்பட்டிருககினறன; அத்தகைய அடுககு முறையானது படம 10·43 (a) யில் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. படலமீதுள்ள நெருக்கலின தரம் உயர்த்தபபடுமிடத்து முடிகள சிலவறறை கரைசலில் தள்ளி மூலக்கூறுகள் தம்மை மீணடும் வரிசைப்படுத்துகின்றன. இவ்வாறு ஒன்றேடொன்றிணைதல நடைபெறும்பொழுது ஐதரோகாபன சங்கிலிகள் நெருக்கமாக அடுக்கப்பட்டு வரும; அநநிலையில் ஒரு கொழுப்பமில மூலக்கூறில் கொள்ளபபடும் பரப்பளவு அதன் பொதுப பெறுமானததைப் பெறுகிறது, படம் 10·43 (b) யைப் பார்க்க.



(a) சங்கிலிகள் ஒன்றெடொன்று முற்றிலுந் தொடுகையிலிராதபோது ஒரு மூலக்கூற்றுப் படலமொன்றின் அமைப்பை வகைக் குறிக்கும் வரிப்படம்.



(b) உயர் நெருக்கலின் கீழ் ஓர் ஒருமூலக்கூற்றுப் படலம். இப்பொழுது, சங்கிலிகள் ஒனறேடொன்று தொடுகையில் உள்ளன.

படம் 10·43. ஒருமூலக்கூற்றுப் படலங்களின் அமைப்பைப் பற்றி ஆதாமின் கொள்கை.

ஒருமூலக்கூற்றுப் படலங்களின் இற்றைநாட் பிரயோகம்.—கடந்த சில ஆண்டுகளாகச் சீற்றைல் அற்ககோல் $CH_3(CH_2)_{14}CH_2OH$ அல்லது $C_{16}H_{33}OH$ என்பது பரந்த நீர்ப்பரப்புக்கள் மீது ஒருமூலக்கூற்றுப் படலமாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது. இத்தகைய ஒரு படலம் இருக்கும்போது நீரின் ஆவியாகும் வேகம் பெரிதும் தடைசெய்யப்படுகிறது எனத் தெரிய வந்தது. அயனமண்டலங்களில் இச்செயன்முறைகள் பொருளாதார முதன்மையுடையவை,

எண்ணெயால் அலைகளை அடக்குதல்.—கடலில் புயற்காற்று வீசும்போது நீர்ப்பரப்பு மீது தாவரவெண்ணெயொன்றை வார்த்து அலைகளைப் பெருமளவில் அடக்கலாம் ; இச்செய்தியைப் பண்டைக்காலத்தில் தெரிந்திருந்தனர். கி. பி. 79 இல் வெசூவியஸ் மலையின் கக்குதலால் மூச்சுத்திணறிய பிளினி (Pliny) என்பார் "முழுக்கடலும் எண்ணெயால் அமைதியுறுகிறது ; அதையிட்டே நீரில் மூழ்குபவர் எண்ணெயை முகங்களில் பூசுகின்றனர்" எனக் குறித்துள்ளார். அதே நூற்றாண்டில் அல்லது கி. பி. இரண்டாம நூற்றாண்டின் தொடக்கத்தில் புளூட்டாக்கு (Plutarch) என்பார் "கடல்மீது எண்ணெய் தெளிக்கப்படுமிடத்து எப்படித் தெளிவும் அமைதியும் நிலைபெறுகின்றன" என்ற கேள்வியைக் கேட்டார். அவரது விளக்கம் இதன் காரணமாக நீர்ப்பரப்புமீது காற்று நழுவுகிறது என்பதேயாம் ; எவ்வாறு நீரில் மூழ்குபவனொருவன் ஒலிவெண்ணெயை தன் வாயில் எடுத்துக் கொண்டு நீர்ப்பரப்பிற்குக்கீழே இருக்கும்போது அதைக் கக்குகிறான எனபது பற்றியும் அவர் தெரிவித்தார்.

எண்ணெய்ப் படலஙகள பெரும் ஈர்ப்பலைகளின் உயரத்தைக் குறைக்கமாட்டா ; ஆனால் பெரும் அலைகள் மீது வேறொரு முறையில் அது தோன்றுகின்ற குற்றலைகளைத் தணிக்கின்றது ; இதுவே மேற்படி அமைதியாக்கலுக்குரிய இற்றைநாள் விளக்கம். குற்றலைகளிடத்துக் காற்றின் விளைவானது விருத்தியாகுந் தன்மையுடையதாதலின் எண்ணெய் பயன் படுத்தப்படாதபோது அலைகள் மோதுங்காலே காற்றால் ஆக்கப்படுகின்ற குற்றலைகள் நாவாய்களுக்கு ஆபத்தான நிலையை ஏற்படுத்துகின்றன. நீர்ப் பரப்பிற்குப் பலமான திடீர்க் காற்றால் அளிக்கபபடும் இயக்கத்தைச் சீர்ப்படுத்துவதே பெரும்பாலும் எண்ணெயின் செயல் என எயிற்கின் (Aitken) என்பார் 1883 இல் காட்டினார். திடீர்க்காற்று அடிக்கும்போது பரப்புப் படலமில்லாத் துப்புரவான ஒரு பரப்பு வெவ்வேறு திசைகளில் மாறும் விசையுடன் ஊதப்படுகிறது ; இதுவே பெரும்பாலும் ஒழுங்கற்ற, தலையிடுகின்ற குற்றலைகளின் ஆககத்துக்குக் காரணம். மற்றப்படி எளிதில் நெருக்கமுடியாத எண்ணெய்ப் படலமானது பரந்த பரப்பளவுகள் மீது இயக்கத்தைக் கூடுதலாகச் சீர்ப்படுத்திப் பரம்புவதால் குற்றலைகளின் ஆக்கம் பெரிதும் குறைக்கப்படுகினறது. மேற்படி முடிவுகளை ஹாடி (Hardy) என்பார் (1926) சற்று வேறு வகையில் உணர்த்துகிறார் ; எண்ணெயானது கடற்பரப்பை அத்துணை அழுத்தமாக்குகிறபடியால் அப்பரப்பைக் "கவ்விப் பிடிக்கும் ஆற்றல்" காற்றுக்கு இல்லை என்பதே அவரது கூற்று. எண்ணெய்ப் படலம் இல்லாதபோது பேரலையொன்றால் எண்ணற்ற சிற்றலைகளும் குற்றலைகளும் காவப்படுகின்றன ; பரப்புமீது காற்றால் நேரான உதைப்பு உண்டாவதற்கு அவை ஒவ்வொன்றும் உதவுகின்றன. இச்சிற்றலைகளையும் குற்றலைகளையும் அடக்குதலாலேயே அவ்வியல்பான அழுத்தம் ஆகிறது ; அவை இல்லாதபோது கடல்மீது காற்றுக்கு முதன்மையான "பிடி" யில்லை.

ஏற்கெனவே ஆக்கப்பட்டிருக்கின்ற குற்றலைகளை எண்ணெய்ப் படலங்கள் ஓரளவிற்குத் தணிக்கவும் கூடும். கிடைக்கக்கூடியதாயுள்ள ஒரு பரப்பின் சிறுபாகத்திற்கு மேலாக மூடமுடியாத அளவில் இருக்கின்ற பிணைந்த படலமொன்று ஒரு தொட்டியில் எந்திரமொன்றால் தூண்டப்படும் சிற்றலைகளைத் தணிக்கிறது எனப் பொக்கெல்ஸ் (Pockels) என்பார் காட்டினார்; மேற்பரப்பின் மூடுதல் முடிவடையும்வரை, அது கூடக்கூடத் தணித்தலின் அளவும் கூடுகிறது. முழுப் பரப்பும் மூடப்பட்டதும் படலத்தைத் தொடர்ந்து நெருக்கலினால் தணித்தல் விளைவு மேலும் தோற்றுவதாகக் காணப்படவில்லை. முழுப்பரப்பும் படலத்தால் மூடப்படும்வரை ஆரம்பியாத பரப்பிழுவைக் குறைவு மட்டுமே தணித்தல் நிகழ்வதற்குக காரணம் அன்று என இது காட்டுகிறது.

இத்தோற்றப்பாடு தொடர்பாக அலைகளைத் திறமையுடன் தணிப்பதற்குச் சிறந்த பரம்பல்வலு இன்றியமையாதது என்பது வெளிப்படை. இதை யிட்டே நாவாய்களுக்கும் அவற்றின் உயிர்காப்புப் படகுகளுக்கும் மீன் எண்ணெய்கள் வழங்கப்படுகின்றன. கனிச எண்ணெய்கள் சிறந்தனவாகா; ஆனால் அவசரநிலையில் சிறிதளவு தீயரின் மெழுகுதிரிகளை உருக்கி, அவ்வெண்ணெயுடன் அதைக் கலந்து அவற்றைச் செம்மையாக்கலாம்; தீயரினிலுள்ள காபொட்சைல் தொகுதி (COOH) ஆனது நீருடன் தேவையான ஒட்டற்பண்பைத் தருகிறது.

பயிற்சி X†

10·01. உளளீடுப பரபபுச சக்தி, பரபபிழுவை என்பவற்றை வேறுபடுத்திக் கூறுக.

ஆய்கூடத்து வெபபநிலையில் நீரின பரப்பிழுவையைத் துணிதலுககுரிய இரு திருத்தமான முறைகளின் கொள்கைகளைத தருக.

10·02. ஆரை r கொண்ட சவர்க்காரக குமிழியொனறில அமுககமிகை $4\gamma r^{-1}$ ஆகும் எனக் காட்டுக; இங்கு γ, சவாக்காரக கரைசலின் பரபபிழுவையாகும.

அடர்த்தி 0·75 கி.சமீ.$^{-3}$ கொண்ட எண்ணெயைக் கொண்டிருககின்ற திறந்த U குழாய் வாயுவமுக்கமானியின் ஒரு முனை இனனொரு குழாயுடன் தொடுக்கபபட்டிருக்கிறது; குழாயின் மறுமுனையில விட்டம் 2 மிமீ. கொண்ட கோளவடிவமுளள சிறு சவர்க்காரக் குமிழியொன்று இருககிறது. மானியின் இரு புயங்களுக்கிடையேயுளள மட்ட விததியாசத்தைக கணிக்க. $\gamma = 25$ தைன். சமீ.$^{-1}$ எனக் கொள்க.

[1·36 சமீ.]

10·03. மயிாத்துளைக் குழாயொன்று அதன் ஒரு முனை திரவமொன்றின் பரப்பிற்குக் கீழே இருக்குமாறு, நிலைக்குத்தான நிலையில வைக்கப்பட்டிருககிறது. குழாயில் அத்திரவம் ஏறிச் சமநிலை நிலைநிறுத்தபபட்டபின்பு, பரபபு மட்டத்தைக் குறித்துக் குழாயினுள்ள பிறையுருவின் உயரமானது அபபிறையுருவுக்குக் கீழேயுள்ள குழாயின் வடிவத்தைச் சாராது எனக் காட்டுக.

†லண்டன் பல்கலைக்கழகத்தாரால் ஆக்கப்பட்ட வினாத்தாள்களிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட வினாக்களில் உள்ள பரப்பிழுவைக் குறியீடு T ஆனது இங்கு γ ஆக மாற்றபபட்டிருக்கிறது.

நிலைக்குத்தான ஓர் ஓரம் வழியே ஒன்றையொன்று தொடுகின்றதும் ஒன்றோடொன்று சிறுகோணம் θ வை ஆக்குகின்றதுமான இரு தட்டையான கண்ணாடித் தட்டுக்கள் அவற்றின் கீழ் ஓரங்கள் நீரில் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. ஓரத்திலிருந்து தூரம் x இல நீர் ஏறுகின்ற உயரத்துக்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக.

10·04. சவர்க்காரக் குமிழியொன்றின் ஆரை 1 சமீ. இலிருந்து 10 சமீ. ஆகும்வரை அது மெதுவாக விரியச்செய்யப்படுகிறது. மேற்படி செய்கையின்போது செலவாகும் வேலையை இரு முறைகளாற் கணிக்க. செய்கையானது மிகுந்த வேகத்துடன் நடைபெறின் வேலை கூடுதலாகவா, குறைவாகவா செலவாகும் என்பதை ஆராய்க. $\gamma = 26$ தைன். சமீ. $^{-1}$.

[$6{\cdot}46 \times 10^4$ எக்கு.]

10·05. ஒரு திரவப் பரப்பிற்கு உள்ளேயும் வெளியேயும் உள்ள அமுக்கங்கள் முறையே p யும் π யும் எனின், அப்பொழுது $(p-\pi) = \gamma\ (1/r_1 + 1/r_2)$ ஆகும்; இங்கு γ ஆனது பரப்பிழுவையும், r_1, r_2 என்பன தலைமை வளைவாரைகளும் ஆகும். கோளவடிவமுடைய ஒரு சவர்க்காரக் குமிழியினிடத்து இப்பேற்றைப் பிரயோகிக்க.

பரப்பிழுவை γ வை உடைய கரைசலொன்றைப் பயன்படுத்தி ஒரு குழாயில் ஆரை r கொண்ட சவர்க்காரக் குமிழியொன்று ஊதப்படுகிறது. வளிமண்டல அமுக்கம் P ஆகும். பின்பு குமிழி ஊதப்பட்ட குழாயானது வளிமண்டலவமுக்கத்தில் இருக்கிற வளியால் நிரப்பப்பட்டதும் கனவளவு V கொண்ட ஒரு பாத்திரத்துடன் தொடுக்கப்படுகிறது.

$$2\pi r^2\gamma + \tfrac{7}{12}\pi r^3 \mathrm{P} = 4\gamma \mathrm{V} r^{-1}$$

எனின், அதன் ஆரை $\frac{1}{2}$ ஆகும் வரை குமிழி ஒடுங்கும் எனக் காட்டுக.

10·06. ஆரைகள் முறையே a யும் b யும் கொண்ட இரு சவர்க்காரக் குமிழிகள், ஆரை r கொண்ட தனித்த ஒரு குமிழி உண்டாகும் வண்ணம் ஒன்றுகக் கூடுகின்றன. புற அமுக்கம் P எனின், குமிழிகளை ஆக்கப்பட்ட கரைசலின் பரப்பிழுவை

$$\tfrac{1}{4}\mathrm{P}\ (r^3 - a^3 - b^3) \div (a^2 + b^2 - r^2)$$

ஆகும் எனக் காட்டுக.

10·07. நிலைக்குத்தான U குழாயொன்று ஒரு திரவத்தைக் கொண்டிருக்கிறது. குழாயின் ஒரு கிளை வளிமண்டலமுகமாகத் திறந்திருக்கிறது; மற்றைக் கிளை முனையின் குறுக்கே சவர்க்காரப் படலமொன்று ஆக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஊதுதலால் சவர்க்காரப் படலத்தை விரிவாக்கும் பொருட்டு U குழாயுடன் ஒரு பக்கக் குழாய் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. வெவ்வேறு குமிழிகளுக்கு, குமிழியின் ஆரை, U குழாயிலுள்ள திரவமட்டவுயர வித்தியாசம் என்பவற்றின் பெருக்கம் ஒரு மாறிலி எனக் காட்டுக. U குழாயில் இருக்கின்ற திரவமானது நீரும், மேற்படி மாறிலி 0·123 சமீ.^{2} உம் ஆயின், சவர்க்காரக் கரைசலின் பரப்பிழுவைக்குப் பெறுமானமொன்றைக் கணிக்க.

[30·2 தைன். சமீ. $^{-1}$.]

10·08. பரப்புச் சக்தி (ϵ), பரப்பிழுவை (γ) என்பவற்றிற்கு வரைவிலக்கணம் கூறுக.

அறிமுறைக் கருத்துக்களைப் பயன்படுத்தி

$$\epsilon = \gamma - \mathrm{T}\frac{d\gamma}{d\mathrm{T}}$$

என்னும் தொடர்பை நிலைநிறுத்த முடிகின்றது; இங்கு T தனியளவிடையில் வெப்பநிலையாகும். 40° ச. இல் நீருக்கு ϵ யின் பெறுமானத்தைத் துணியும் பொருட்டு நடாத்தவேண்டிய பரிசோதனைகளை விவரித்து விளக்குக.

10·09. மெல்லிய வட்டமான றப்பர் வார் ஒன்று அதனது ஈாக்கப்படாத நிலையில், ஆரை 3·8 சமீ. கொண்டதாய் இருக்கிறது. ஒரு சவர்க்காரப் படல மீது அதை வைத்து அவ்வளையத்துள்ளே இருக்கின்ற படலம் அழிக்கப்படுகிறது. வளையத்தின் புது ஆரை 3·9 சமீ. எனத் தெரியக்கிடக்கின்றது. வளையமானது ஓர் இடத்தில் வெட்டப்படுகிறது; அதன் இயல்பான

நீளத்தை 1 சமீ. ஆல் கூடச்செய்வதற்கு 0·28 கி. நிறையான ஒரு விசை தேவைப்படுகிறது. படலம் ஆக்கப்பட்ட சவர்க்காரக் கரைசலின் பரப்பிழுவைகருப் பெறுமானமொன்றைக் காண்க.
[22·7 தைன். சமீ. $^{-1}$.]

10·10. சீரான துளையுடைய நிலைக்குத்தான ஒரு மயிர்த்துளைக் குழாயில் பரப்பிழுவை 72 தைன். சமீ. $^{-1}$ கொண்ட நீரானது 20 சமீ. உயரம் ஏறுகிறது. நீரிலிருந்து மேற்படிக் குழாயை வெளியே எடுத்து, அதை உலர்த்தி, அதன் மேல் முனை உருகி மூடப்படுகிறது. பின்பு 40 சமீ. முழு நீளமுடைய அக்குழாயானது, அதன் கீழ் முனை நீர்ப் பரப்பொன்றை சரியாகத் தொடும் வண்ணம் நிலைக்குத்தாகப் பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது. வளிமண்டலவமுக்க மானது 10 மீற்றர் உயரமான நிலைக்குத்தான நீர் நிரலொன்றுலாகிய அமுக்கத்துக்குச் சமன் எனின், எவ்வுயரத்திற்குக் குழாயில் நீர் ஏறும் ? [0·75 சமீ.]

10·11. ஒரு திரவத்தின் பரப்பிழுவையைத் துணிவதற்கான மயிர்த்துளையேற்றமுறையின் அடிப்படையான கொள்கையைத் தருக.

இம்முறைக்கும் அதனது வெவ்வேறு திரிபுகளுக்குமுள்ள தொடர்பு நயங்களை ஆய்க. நீர்பருகுமியல்புள்ளதும் எளிதில் ஆவியாகின்றதுமான சிறிதளவிலுள்ள ஒரு திரவத்திற்குப் பயன்படுத்தக் கூடிய ஒரு முறையை விவரித்துக் கூறுக.

10·12. பரப்புச் சக்தி, பரப்பிழுவை என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பை ஆய்க.

பரப்பிழுவை γ கொண்ட ஒரு சவர்க்காரக் கரைசல், நீளம் l கொண்ட கிடையான கோலொன்றிற்கும் அக்கோலின் முனையொவ்வொன்றிலும் இணைக்கப்பட்டிருக்கிற நிறையற்ற, நீட்டமுடியாத ஓர் இழைத்துண்டிற்குமிடையே ஒரு படலத்தை ஆக்குவதற்குப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இழையின் மையப்புள்ளியில் நிறை W இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. (a) இழையின் ஒவ்வோர் அரைவாசியும் வட்டவடிவமானது என்றும், (b) இழையில் இழுவை

$$\frac{l\gamma}{\text{கோசை }\theta_2-\text{சைன் }\theta_1}$$

என்பதற்குச் சமன் என்றும் நிறுவுக ; இங்கு θ_1, இழையின் நுனியொவ்வொன்றிலும் இழைக்கு வரைந்துள்ள தொடலி கிடையுடன் ஆக்கும் கோணமும், $2\theta_2$ ஆனது W இணைக்கப்பட்டிருக்கும் புள்ளியில், இழையின் தொடலிகளுக்கிடையேயுள்ள கோணமும் ஆகும். [L. Sch. மாற்று.]

10·13. உள்ளாரை 1 சமீ. உம் சுவர்த்தடிப்பு 0·5 மிமீ. உம் கொண்ட ஒரு பொட் கண்ணுடியுருளை அதன் இரு முனைகளிலும் திறந்து இருக்கிறது ; அதை ஒரு தராசின் புயமொன்றிலிருந்து நிலைக்குத்தாய்த் தொங்கவிட்டுத் தராசு சமநிலையாக்கப்படுகிறது. ஒரு பாத்திரத்திலுள்ள திரவத்தின் பரப்பானது தொங்கிய கண்ணுடியுருளையின ஓரத்தைச் சரியாகத் தொடுமாறு அப்பாத்திரம் கொண்டுவரப்படுகிறது. நிகழும் தோற்றப்பாட்டை விளக்குக.

தராசு மீண்டும் சமநிலையை அடையுமவரை திரவங்கொண்ட பாத்திரமானது உயர்த்தப்படுகிறது. திரவத்தின் பரப்பிழுவை 30 தைன் சமீ. $^{-1}$ எனவும், கண்ணுடியுடன் அதன் தொடுகைக் கோணம் பூச்சியம் எனவும், திரவத்தின் அடர்த்தி 1·02 கி. சமீ. $^{-3}$ எனவும் தரப்பட்டிருந்தால் உருளையின் அமிழ்ப்பாழத்தைக் கணிக்க. [1·22 சமீ.]

10·14. நிலைக்குத்தான ஒரு குழாயின் முனையினின்று தொங்கும் ஒரு திரவத்துளியின் அலைவுக்காலம் T ஆனது ஆரை r, அடர்த்தி ρ, பரப்பிழுவை γ என்பவற்றில் மட்டுமே பொறுத்திருக்கிறது. இம்மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பானது

$$T=\kappa\sqrt{\frac{\rho r^3}{\gamma}}$$

ஆக இருத்தல் வேண்டும் என நிறுவுக ; இங்கு κ ஒரு மாறிலி. $\left[\text{ந. கு. } \kappa=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi.\right]$

10·15. ஆரை 0·10 சமீ. கொண்ட ஒரு கோளக்குமிழி 10^6 தைன். சமீ.$^{-2}$ அமுக்கம் கொண்ட வளிமண்டலமொன்றில் ஊதப்படுகிறது. படலத்துத் திரவத்தின் பரப்பிழுவை 50 தைன். சமீ.$^{-1}$ ஆயின், குமிழியின் ஆரையை இரட்டிக்கும்பொருட்டு அதைச் சூழும் வளி மண்டலத்தின் அமுக்கத்தை எவ்வளவாக்கல் வேண்டும்? சமவெப்பச் சூழல் உளது எனவும், குமிழியூடே பரவல் இல்லை எனவும் கொள்க. [$1·24 \times 10^5$ தைன். சமீ.$^{-2}$.]

10·16. இரு கிடையான தட்டைக் கண்ணாடித் தட்டுக்களிடையே இரண்டு கிராம் இரசத்தை வைத்து அவ்விரசமானது 7 சமீ. ஆரை கொண்ட வட்டத் தட்டாகும்வரை அக்கண்ணாடித் தட்டுக்கள் ஒன்றோடொன்று அழுத்தப்படுகின்றன. இரசத்தட்டானது சீரான தடிப்பு உடையது எனவும், இரசத்தின் பரப்பிழுவை 435 தைன். சமீ.$^{-1}$ எனவும், கண்ணாடியுடன் அதன் தொடுகைக் கோணம் 140° எனவும், அதன் அடர்த்தி 13·6 கி.சமீ.$^{-3}$ எனவும் கொண்டு, மேல் தட்டுமீது இரசத்தால் ஆகும் உதைப்புக்குப் பெறுமானமொன்றைக் கணிக்க.

10·17. ஒவ்வொரு முறையின்போதும் அளக்கவேண்டிய கணியங்களைச் சுட்டிக்காட்டி, ஒரு திரவத்தின் பரப்பிழுவையை அளத்தலுக்கான மூன்று முறைகளைச் சுருக்கமாகக் கூறுக. இம்முறைகளுள் எது வெப்பநிலையுடன் பரப்பிழுவை மாறுதலின் ஆராய்ச்சிக்குச் சிறப்பாகத் தகுந்தது என நீர் கருதுகிறீரோ அதனையே விபரித்துக் கூறுக.

10·18. எவ்வாறு ஒரு திரவத்தினூடாக வளிக்குமிழிகளைச் செலுத்தி அத்திரவத்தின் பரப்பிழுவையை அளக்கலாம் என்பதை விவரித்துக்கூறி விளக்குக. இம்முறையால் கிடைக்கின்ற பேறானது மயிர்த்துளைக்குழாய முறை தரும் பேற்றுடன் ஒத்திருக்கவேண்டுமா என்பதை ஆராய்க.

10·19. இரசத்திற்கு $\gamma = 435$ தைன். சமீ.$^{-1}$, $\rho = 13·6$ கி. சமீ.$^{-3}$ எனக் கொண்டு, ஆரை 0·015 சமீ. ஐ உடைய நிலைக்குத்தான கண்ணாடி மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றில் ஓய்வாயிருக்கக்கூடிய இரசநிரலின் உயர்வு நீளத்தைக் கணிக்க. இங்கு கண்ணாடியில் இரசத்தின் "முன்னேறும", "பின்வாங்கும" தொடுகைக் கோணங்கள் முறையே 150° யும் 110° யும் ஆகும். [2·23 சமீ.]

10·20. மிகச்சிறிய துளிகள் கோளவடிவமுடையனவாய் இருக்கும்பொழுது பெரிய துளிகள் வழக்கமாக அவ்வாறு இன்றியிருப்பதற்குக் காரணம் யாது?

எவ்வாறு பெரிய கோளத் துளிகளைப் பெறமுடிகின்றது?

ஆரை R சமீ ஐ உடைய நீராலான கோளமொன்று சமகனவளவுடைய 1,000 சிறு துளிகளாக விசிறப்படுகிறது. இதன்பொருட்டுத் தேவையான வேலையின் இழிவுப் பெறுமானத்திற்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக. [$36\pi R^2\gamma$ எக்.]

10·21. வளைவுற்ற திரவப்பரப்பு மூலகமொன்றிற்குக் குறுக்கேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசத்துக்கு பரப்பிழுவை, மூலகத்தின் தலைமை வளைவாரைகள் எனபவை தொடர்பாக ஒரு கோவையை நிறுவுக. மேற்படி பேற்றைப் பயன்படுத்தி வட்ட வெட்டுடைய, ஒடுங்கிய, நிலைக்குத்தான குழாயில மயிர்த்துளைப் பெயர்ச்சி h ஐத் துணிக. குழாயின் அமிழ்த்தப்படாத நீளமானது h ஐக் காட்டிலும் சிறிதாயின் திரவம் ஏறும்போது யாது நிகழும்?

10·22. (*a*) ஒரு கரைசலினது வெவ்வேறான செறிவுகளில அதன் பரப்பிழுவைகளை ஒப்பிடத் தக்கமுறையொன்றையும், (*b*) திரவமொன்று சில துளியளவில மட்டுமே கிடைக்கும்போது அத்திரவத்தின் பரப்பிழுவையைத் துணிவதற்கான முறையொன்றையும் விவரித்துக் கூறுக.

10·23. நீளம் 12 சமீ. உம், விட்டம் ஒரு முனையில் 0·12 சமீ. உம் மறுமுனையில் 0·04 சமீ. உம் உடைய கண்ணாடிக் கூம்புக் குழாயொன்று, அதன் அகன்றமுனை நீர்ப் பரப்பைச் சரியாகத் தொடும்வண்ணம் நிலைக்குத்தாக நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது; நீரின் பரப்பிழுவை 72 தைன். சமீ.$^{-1}$ ஆகும். குழாயில் எவ்வுயரத்திற்கு நீர் ஏறும்? [2·82 சமீ.]

10·24. திரவப் பரப்புடன் தொடுகை வைததிருககின்ற கிடையான வட்டத் தட்டைப் பிரித்தெடுப்பதற்கு வேண்டிய இழுப்பை அளந்து அததிரவத்தின் பரப்பிழுவையைத் துணிதலுக்கான பரிசோதனையொன்றை விவரித்துக்கூறி விளக்குக.

ஒவ்வொன்றும் 4 சமீ. விட்டம் கொண்ட இரு வட்டக கணணுடித்தட்டுககள் 0·1 மிமீ. தடிப்பான ஒரு நீர்படலத்தால் வெவ்வேருக்கபபட்டிருககின்றன. நீரின் பரப்பிழுவையை 73 தைன். சமீ.$^{-1}$ எனக கொண்டு தடடுக்களைப் பிரிதது வைத்தற்குச் செஙகுத்தாக உஞற்றவேண்டிய இழுப்பை கி. நிறையில் கணிகக. கணிப்புமுறையை விளககுக.

(G) [374 கி. நிறை.]

10·25. ஓர் உருளைககுழாயிலிருநது ஒரு திரவததாரை பாய்கிறது ; குழாயின் குறுக்கு வெட்டானது சற்று நீள்வளைய வடிவமாகவே இருககிறது. பரபபிழுவையின் விளைவாகத் தாரையானது வட்டவுருளை வடிவததைப் பற்றி அலைகிறது. அலைவுககாலம T, தாரையின் விட்டம் d, திரவததின் அடாத்தி ρ, அதன் பரப்பிழுவை γ எனபவற்றிறகிடையேயுள்ள தொடா்பைக காணக. [$T = k\sqrt{\rho d^3 \gamma^{-1}}$.]

10·26. ஈா ஊடகங்களுககிடையே, எடுத்துககாட்டாக நீருககும் வளிக்கும இடையேயுள்ள பொதுமுகத்தில, பரபபிழுவை என்பதால யாது அறியக் கிடைக்கிறது ? அதன் பரிசோதனை முறை துணிதல பற்றிச சற்று விவரித்துக கூறுக.

ஆழமான நீர்மீது ஈாப்பலைகளின் வேகமானது

$$c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது. அலைகளின வேகத்தில பரபபிழுவையால் ஆகும் விளைவையும் எடுத்துக் கொண்டால் இச்சூத்திரத்தில் பிரயோகிககவேண்டிய திருத்தத்தை ஆராய்க. (G)

10·27. சற்றுக கூம்பான துளையுடைய நிலைககுத்தான ஒரு கணணுடி மயிாத்துளைக் குழாய், அடாததி ρ வும், பரப்பிழுவை γ வும், கண்ணுடியுடன் பூச்சியத் தொடுகைக் கோணமும் உடைய திரவததில் அதன உச்சி மேல்முகமாக இருக்குமாறு சரியாக அமிழ்த்தபபட்டிருக்கிறது. குழாயிலிருந்து வளியை வெளியேறறும் பொருட்டு உச்சியில் ஒரு சிறு துளையொன்று விடப் பட்டிருககிறது. குழாயின் உயாவுக் குறுக்குவெட்டாரை a யும், அதன் நீளம் l உம் ஆயின் திரவமானது உயரம்

$$h = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{2\gamma l}{g\rho a}}$$

இனூடாக ஏறும் எனக் காட்டுக ; இங்கு g புவியீாப்புச் செறிவு ஆகும்.

10·28. வளியிலே கிடையான பரப்பொன்றுமீது ஒரு பெரிய திரவத்துளி இருக்கிறது. துளியின் மேற்பரப்பின் மையததில உற்பத்தியை எடுத்து, ஒரு நிலைக்குத்தான தளவெட்டு முகத்தில் எந்தப புள்ளி P யிலும், நிலைக்கூறு y யும், தளமும் மேற்பரப்பும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் வளையியினது தொடலியின சாய்வு ψ யும்,

$$g\rho y^2 = 2\gamma\,(1 - \text{கோசை}\ \psi)$$

என்னும் சமன்பாட்டால் தொடர்புபடுததபபடுகின்றன எனக காட்டுக ; இஙகு ρ திரவத்தின் அடர்த்தியும், γ அதன் பரப்பிழுவையும் ஆகும். P யூடே செலலுகின்ற கிடையான வெட்டில் வளைவு மிகச்சிறிது எனக் கொளக. (S)

10·29. பௌதிக எடுத்துக்காட்டுக்களைத தீர்க்குமுகமாகப பரிமாணப் பகுப்பு முறையை விளககுக. அதன் உபயோகங்களைப் பற்றியும் வரையறைகளைப பற்றியும் எடுத்துக கூறுக. எவ்வாறு ஒரு திரவததுளியின் அலைவுக் காலமானது அவ்வெடுத்துக்காட்டுடன் தொடர்புள்ள மாறிலிகளில தங்கியுள்ளது என்பதைக் காண்க

10·30. கண்ணாடிமீதுள்ள பெரிய அடியிலிணைந்த ஓர் இரசத்துளிக்கு, துளியின் மிக வுயர்ந்த புள்ளியைக் குறித்து அதன் மிக நீண்ட விட்டத்தின் ஆழமானது துளியின் உயர்வு உயரத்தின் $\frac{\sqrt{3}}{2}$ மடங்கு ஆகும் எனத் தெரியவந்தது. கண்ணாடியில் இரசத்தின் தொடுகைக் கோணம் $\pi -$ கோசை$^{-1}$ $(\frac{1}{3})$ எனக் காட்டுக.

10·31. இரு திரவங்களின் தொடுகைப் பரப்பின் சமன்பாட்டை

$$\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)-\rho g y = \text{மாறிலி}$$

என்னும் வடிவத்தில் பெறலாம் எனக் காட்டுக; இங்கு y ஏதேனுமொரு வசதியான மட்டத்திலிருந்து நிலைக்குத்தாக அளக்கப்படும் தூரமும், R_1, R_2 என்பன பரப்பின் தலைமை வளைவாரைகளும், γ பரப்பிழுவையும், ρ இரு திரவங்களின் அடர்த்தி வித்தியாசமும் ஆகும். பரப்பானது கிடையான அச்சுடைய உருளையாய் இருக்குமிடத்து அச்சுக்குச் செங்குத்தான தளமொன்று அதை

$$2\gamma\,(1 - \text{கோசை}\ \psi) = \rho g y^2$$

என்னும் வளையியில் வெட்டுகிறது எனக் காட்டுக; இங்கு, உற்பத்தியானது தக்கவாறு எடுக்கப்பட்டிருக்கிறது; மேலும் ψ கிடையுடன் y யிலுள்ள தொடலி ஆக்கும் சாய்வுக் கோணமாகும். தெளிவான ஒரு திரவத்தில், கிடையான ஒரு கண்ணாடித் தட்டின் அடியில், வளிக்குமிழியொன்று ஊதப்பட்டிருக்கின்றது. குமிழியை நோக்கி எவ்வாறு திரவத்தின் பரப்பிழுவையையும் கண்ணாடியில் அதன் தொடுகைக் கோணத்தையும் துணியமுடியும் என்பதை விளக்கி இம்முறை பற்றிய நயத்தையுங் கூறுக.

10·32. நிலைக்குத்தான ஒரு மயிர்த்துளைக் குழாயின் கீழ் முனையில் ஆரை r கொண்ட நீர்த்துளியொன்று ஆக்கப்பட்டிருக்கிறது. குழாயில் துளியின் மிகக்கீழ்ப் புள்ளியைக் குறித்து நீரின் உயரம் h_1 ஆகும். மயிர்த்துளைக் குழாயிலுள்ள மட்டம் மாறாமல் இருக்குமாறு துளியும் குழாயின் கீழ் முனையும் ஒரு முகவையிலுள்ள நீரில் தக்க ஆழத்திற்கு அமிழ்த்தப்பட்டபோது அம்மட்டமானது முகவையிலிருந்த மட்டத்தைக் குறித்து உயரம் h_2 இல் இருந்தது. எனின்

$$2\gamma/g\rho = r\,(h_1 - h_2) - r^2/3$$

எனக் காட்டுக; இங்கு γ, நீரின் பரப்பிழுவையும் ρ அதன் அடர்த்தியும் ஆகும்.

திரவமொன்று ஒரு சில துளியளவிலே கிடைக்குமிடத்து அத்திரவத்தின் பரப்பிழுவையைத் துணிதலுக்குத் தக்க முறையொன்றை விவரித்துக் கூறுக.

10·33. திரவப் பரப்புக்கள் மீது தியரிக்கமிலம் போன்ற பொருள்கள் திண்மப் படலங்களை ஆக்கமுடியும் என்னும் கூற்றுக்குப் பரிசோதனைச் சான்று யாது?

எவ்வாறு இப்பரிசோதனைகள் படலத்து மூலக்கூறொன்றின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பின் மதிப்பீட்டைத் தருகின்றன?

10·34. இரு கிடையான கண்ணாடித் தட்டுகளுக்கிடையே சிறிதளவு இரசம் இருக்கிறது. தட்டுக்களின் இடைத்தூரம் எங்கும் 0·1 மிமீ. உம், தட்டொவ்வொன்றிலும் இரசத்துடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற பரப்பளவு 40 சமீ.^{2} உம் ஆயின், மேற்றட்டுமீது எச்சுமையானது இருத்தல் வேண்டும்? இரசத்தின் பரப்பிழுவை 430 தைன் சமீ.$^{-1}$ எனவும், கண்ணாடியுடன் அதன் தொடுகைக் கோணம் 135° எனவும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். [2·48 கிகி.]

500 சமீ.^{3} கொள்ளளவுடைய சவர்க்காரக் குமிழியொன்றைச் சமவெப்புச் சூழலில் ஊதுதற்குச் செய்யவேண்டிய வேலையைக் கணிக்க; சவர்க்காரக் கரைசலின் பரப்பிழுவை 30 தைன் சமீ.$^{-1}$ உம் பாரமானியுயரம் 76 சமீ. இரசமும் ஆகும். [$1{\cdot}83 \times 10^4$ எக்கு.]

10·35. கண்ணாடிப் பாத்திரமொன்று தட்டையான முடியுடையது. முடியின் அடியில் அதன் மையப்பகுதியில் பெரிய தட்டையான வளிக்குமிழியொன்று இருக்கப் பாத்திரமானது நீரால் நிரப்பப்படுகிறது. அதன் மையப்பகுதியிற் குமிழியின் ஆழம் 0·542 சமீ. எனத்

தெரிய வந்தது. கணணுடி முடியின் கீழப் பரபபிற்கு 0·152 சமீ. கீழே குமிழியின் மிகக அகன்ற பாகம் இருந்தது. நீரின் பரபபிழுவைககும் கணணுடியுடன் அதன் தொடுகைக் கோணத்துககும் பெறுமானஙகள் காணக. [74·5 தைன். சமீ. $^{-1}$, 5·1°.]

10·36. உள்ளாரை $2r$ உடைய சீரான மயிர்த்துளைக குழாயொனறு நிலைக்குத்தாகப பிடிக்கபபட்டிருககிறது ; அடர்த்தி ρ உடைய திரவமொனறைக கொணடிருககின்ற அகன்ற பாததிரமொன்று, அத்திரவததின் மேற்பரபபானது குழாயின் கீழ முனையைச் சரியாகத் தொடும்வரை மெதுவாக உயாததபபடுகிறது. குழாயில ஏறியுள்ள திரவநிரலின் உயரம் h ஆனதும அது சமநிலையில இருககிறது. சிறு திருத்தஙகளைப் புறககணிததுத் தரப்பட்ட கணியஙகள, g என்பன தொடாபாக (a) மயிாததுளையேறறததினபோது மயிர்த்துளை விசை களாற செய்யப்பட்ட வேலை, (b) ஏறறததின விளைவாக உணடாகியுள்ள ஈர்ப்பு நிலைச் சகதியுயர்வு என்பவற்றிறகுக கோவைகள பெறுக. இககோவைகள் ஏன் வேறுபடுகின்றன என்பதை விளககுக. [(a) $\pi r^2h^2g\rho$, (b) $\frac{1}{2}\pi r^2h^2g\rho$.]

10·37. கிடையான தட்டொனறுமீது திரவததுளியொன்று அதை ஈரமாககாது, ஓயவாய் இருககிறது. துளியின் தரப்பட்ட இரு நேர்கோடடுப பரிமாணஙகள் எதுவாகினும, எடுத்துக் காடடாக அதன மிகப்பெரிய கிடைக குறுககுவெட்டின விட்டம, துளியின் மிககவுயர்ந்த புள்ளியைக குறித்து அககுறுககு வெட்டின ஆழம் எனபவற்றின விகிதம் (p) ஆனது துளியின் கனவளவு (V), திரவததின் அடாததி (ρ), அதன பரபபிழுவை (γ), புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகல் (g) என்னும நான்கு கணியங்களைப் பொறுததுளளதாம்.

$$p=a\mathrm{V}^{w}\rho^{x}\gamma^{y}g^{n}$$

ஆகுக ; இங்கு a, w, x, y, n என்பவை மாறு எண்கள் ஆகும். பரிமாணப் பகுப்பு முறையைப் பயன்படுத்தி n தொடர்பாக w, x, y என்பவற்றைக் காண்க.

வெவ்வேறன திரவங்கள் A, B என்பவற்றால் இரு துளிகள் ஆக்கப்பட்டிருககினறன ; ஒவ்வொரு துளியும் p யின் அதே பெறுமானத்தைப் பெறும் வரை அவ்வவற்றின் கன வளவுகள் செப்பஞ்செய்யப்படுகின்றன. (இசைவான அலகுகளிற் கூறப்பட்ட) கீழ்வருகினற தரவுகளைப் பயன்படுத்தி B யின பரப்பிழுவைககுப் பெறுமானமொனறைக் கணிக்க.

திரவம்	துளியின் கனவளவு	அடர்த்தி	பரப்பிழுவை
A	6·75	0·99	72
B	1·55	0·88	—

ஒளியியற் படமெறிதலைப் பயன்படுத்தி p யின் பெறுமானங்களின் சமத்துவத்தைச சோதிக கலாம். இயலுமான செயன்முறையொனறை எடுத்துரைக்க. [ஒளியியற்றெகுதியின் நுட்ப மான விவரங்கள் தேவைபபடா.] [$n, n, -n$. 24·0.]

10·38. பக்கமொனறின் நீளம 4·0 சமீ. உடைய சதுரம் ABCD என்பதன் வடிவமாகக் கமபித் துண்டொன்று வளைக்கப்பட்டிருக்கிறது. சதுரத்தின் பககம் AD யை அகறறிக் கம்பியின் சுயாதீன இரு நுனிகளும் 2 ($\pi+1$) சமீ. நீளமுள்ள இலேசான வளையுந் தன்மையுடைய நீட்ட முடியாத இழையொன்றால் இணைக்கப்படுகின்றன. பின்பு கம்பிச் சட்டப்படலிற்கும் இழைககுமிடையே சவர்க்காரப் படலமொன்று ஆக்கப்படுகிறது. இழையின வடிவத்தை விவரித்துக் கூறுக.

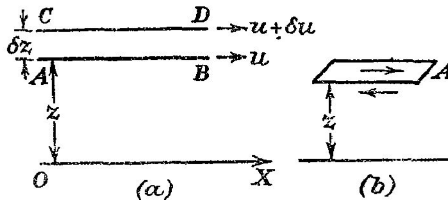
அடுத்து நேர்கோடு AD யின் மையத்தை நோக்கி, இழையானது அதன் மையப்புள்ளியில தூரம் 2·0 சமீ. இழுக்கப்படுகிறது. சமவெப்புச் சூழலிலேயே படலத்தின் விரிவு நிகழ கின்றது எனவும், சவர்க்காரக் கரைசலின் பரப்பிழுவை 40 தைன். சமீ. $^{-1}$ எனவும் கொண்டு (a) படலத்தின் பரப்பளவுயர்வு, (b) படலத்தை ஈர்த்தலின்போது செய்யப்பட்ட வேலை, (c) அதன் புது நிலையில் படலத்தை நிலைநிறுத்துவதற்கான விசை என்பவற்றிற்குப பெறுமானங்கள் கணிக்க. [(a) 6·3 சமீ.^{2}, (b) 251 எக்கு, (c) 160 தைன்.

அதிகாரம் XI

பிசுபிசுப்பும் பாயிகளின் நியூற்றன பாய்ச்சலும்

பிசுபிசுப்புக்கான பண்பறிதற் சோதனைகள்.—கொள்பாத்திரமொன்றை அசைக்குமிடத்து அதில் இருக்கின்ற எண்ணெயில் உண்டாகும் கிளம்பலை நோக்குவதால் அனுபவமுள்ள தொழிலாளனொருவனுல் இலேசான எண்ணெய்களைப் பாரமானவற்றிலிருந்தும், மெல்லிய எண்ணெய்களைத் தடிபபானவற்றிலிருந்தும் வகைப்படுத்திக் கூறமுடியும். சோதிக்கப்படுகின்ற எண்ணெய்களின் தொடர்படர்த்தியைக் குறிக்கும் பொருட்டு இச்சொற்கள் பயன்படுத்தப்படுவதில்லை ; ஆனுல் எந்திரங்களுக்கு எண்ணெய் இடுதலுக்கோ வேறு பிரயோகங்களிடத்து அவற்றின் பயன்படுந் தன்மையை ஓரளவிலேனும் காட்டுவதறகாகவோ அவை வழக்கில் உள. சிலவேளைகளில் எண்ணெயொன்று கணுடித்தட்டொன்றுமீது வார்க்கப்பட்டபோது அது பாயும் முறையை நோக்கி அல்லது கலக்கியொன்றை அவ்வெண்ணெயிற் பயன்படுததுமிடத்து அது அனுபவிக்கும் தடையை உணர்ந்து, அதன் தகைமை பற்றி அனுபவமுள்ளவொருவர் மதிப்பிடமுடியும். இருந்தாலும் நியமமில்லா இம்முறைகளை விஞ்ஞான நோக்குடன் பார்க்கப் போனுல் அவை திருப்தியளிக்கமாட்டா ; ஏனெனில் பிரயோகிக்கப்படும் சோதனையில் எண்ணெயின் ஒன்றிற்கு மேலான பௌதிக இயல்புகள் தொழிற்படுகின்றன ; எடுத்துக்காட்டாக பரப்பிழுவையையும் அடர்த்தியையும் கூறலாம் ; இவை உண்மையில் சோதனையில் தொழிற்படுகின்றன. எனவே, தனிமுறையொன்றைத் திட்டமிடுமுன் திரவங்களில் அடுத்துள்ள அடுக்குகளுக்கிடையே தொடர்பியக்கம் நிகழுங்காலே அத்திரவங்களின் செயலாற்றலைப் பற்றிக் கருதுகோளொன்று இருத்தல் வேண்டும் என்பது தெளிவாயிற்று. இத்தகையவொரு கருதுகோளை முதலிற் சூத்திரித்தவர் நியூற்றன் ஆவர்.

பிசுக்குப் பாய்ச்சல் பற்றி நியூற்றனின் கருதுகோள்.—பிசுபிசுப்பளவை



படம் 11·01. நியூற்றனின் பிசுக்குப் பாய்ச்சல் விதி.

யியலின் முழுக் கொள்கையும் செய்முறையும் இக்கருதுகோளை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளன. அது பின்வருமாறு : கொந்தளிப்பின்றித்

தளம் OX மீது பாயியொன்று அசைகிறது எனவும், தளத்துடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற பாயியானது ஓய்வு நிலையில் இருக்கிறது எனவும் கொள்க, படம் 11·01 (a). OX இலிருந்து முறையே தூரங்கள் z இலும் $z+\delta z$ இலுமுள்ள தளங்கள் AB, CD என்பவற்றில் பாய்ச்சல் வேகங்கள் u வும் $u+\delta u$ வும் ஆகுக. அப்பொழுது $\frac{du}{dz}$ என்பது தளம் AB யிலுள்ள புள்ளிகளுக்கான வேகப் படித்திறன் எனப்படும். [u ஆனது வேறு மாறிகளின் சார்பாகவும் இருந்தால் அப்பொழுது $\frac{\partial u}{\partial z}$ என்பதால் வேகப் படித்திறன் குறிக்கப்படவேண்டும்.]

இனி நிலைத்த தளமொன்றிற்கு மேலே, உயரம் z என்பதிலே தள மேற்பரப்பொன்றைக் கருதுக, படம் 11·01 (b) யிற் காண்க. தளத்திற்கு மேலேயுள்ள பாயியானது தொடலி விசை F ஐ அத்தளமீது பிரயோகித்து அதை முன்னேக்கிச் செல்லுமாறு தூண்டுகிறது; தளத்திற்குக் கீழேயுள்ள பாயியானது, எதிர்த்திசையில் விசை F ஐ உஞற்றுகிறது. நியூற்றனின் கருதுகோளின்படி தளத்திற்குக் குறுக்கேயுள்ள தொடலித் தகைப்பானது அத்தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையிலுள்ள **வேகப் படித்திறனுக்கு** விகிதசமமாகும்; அதாவது

$$\frac{F}{A}\propto\frac{\partial u}{\partial z} \text{ அல்லது } \frac{F}{A}=\eta\frac{\partial u}{\partial z};$$

இங்கு η ஒரு மாறிலி, அது **பாயியின் பிசுபிசுப்புக் குணகம்** எனப்படுகிறது. η வின் பரிமாணங்கள் $[ML^{-1}T^{-1}]$ ஆகும்; எனவே ச.கி.செ. அலகுத்திட்டத்தில் அதற்குரிய அலகானது கி.சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$ ஆகும்; புவாசேய் (Poiseuille) என்பவரை மரியாதை செய்யுமுகமாக அது சில வேளைகளில் **போயிசு** என அழைக்கப்படுகிறது. **சதமப்போயிசு** எனப்படும் பெற்ற அலகும் பெரிதும் வழக்கில் உளது.

$\frac{\eta}{\rho}$ என்பதைக் கணிதரும் எந்திரிகளும் **பாயியொன்றின் இயக்கத்தியற் பிசுபிசுப்புக் குணகம்** (ν) என அழைக்கின்றனர்; இங்கு ρ ஆனது பாயியின் அடர்த்தி ஆகும். ν இன் பரிமாணங்கள் $[L^2T^{-1}]$ ஆகும்; இவற்றை எளிதில் ஞாபகப்படுத்திக் கொள்ளலாம்; ஏனெனில் பாயியொன்றின் இயக்கத்தியற் பிசுபிசுப்புக் குணகத்தை ஏக்கர்—ஆண்டு$^{-1}$ என எடுத்துரைக்கலாம்! இயக்கத்தியற் பிசுபிசுப்புக் குணகத்திற்கான அலகு **ஸ்ரோக்சு** எனப்படும்.

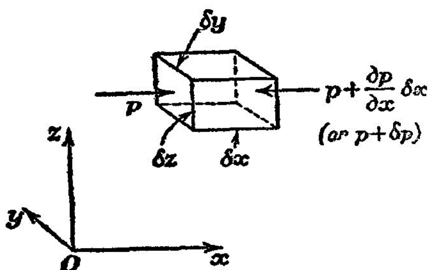
ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் பாய்ச்சல் வேகம் u வின் சிறு பெறுமானங்களிடத்தில் மட்டுமே நியூற்றனின் கருதுகோளானது சரியென வற்புறுத்தல் வேண்டும்; மேலும் இக்கருதுகோளின் உண்மையை மெய்ப்பித்துக் காட்டுவதற்கு நேரடியான பரிசோதனை வழியில்லை; ஆனால் பல பாயிகளிடத்தில் அதிலிருந்து கிடைக்கப்பெற்ற சமன்பாடுகள் பரிசோதனையால் உறுதிப்படுத்

தப்பட்டிருக்கின்றன ; எனவே அப்பொருள்களிடத்தில் நியூற்றனின் கருது கோள் பற்றி ஐயுறலாகாது. குழாயொன்றூடே பாயும் திரவமொன்றினது பாய்ச்சல் வேகத்திற்கான மேலெல்லையானது பின்னர் ஆராயப்படும்.

பாயியொன்றிலே அதனது அருவிக்கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாக அமைந் திருக்கின்ற முகமொன்றுடைய செவ்வகக் கனவளவு மூலகமொன்று மீது பிசுபிசுப்பாலாகும் விசைகள்.—படம் 11·02 இல், $\delta x, \delta y, \delta z$ என்பது ஒரு செவ்வக மூலமாகுக ; திரவப் பாய்ச்சலானது x திசைக்குச் சமாந்தர மாக இருக்க. தளங்கள் $x, x+\delta x$ என்பவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட மூலகத்தின் முனைகளிலுள்ள அமுக்கங்கள் முறையே p யும் $p+\delta p$ யும் ஆகுக. மூலகத்தின் கீழான முகத்திலுள்ள புள்ளிகளிற் பாய்ச்சல் வேகம் u எனின், அப்பொழுது அம்முகமீது பிசுபிசுப்பாலாகும் தொடலி விசையா னது x குறைகின்ற திசையில் தாக்கும் ; அது $\eta \dfrac{\partial u}{\partial z}\,\delta x\,\delta y$ என்பதால் தரப்படுகிறது. மேலான முகம் $\delta x \delta y$ என்பதில் பிசுக்கு விசை $\eta \dfrac{\partial}{\partial z}\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial z}\delta z\right)\delta x\,\delta y$ ஆகும் ; இது x இன் நேர்த்திசைவழியே தாக்கு கிறது. மூலகத்தின் '$\delta y\,\delta z$' முனைகளில் அமுக்கத்தால் ஆகின்ற விசை கள் $p\,\delta y\,\delta z$ உம் $(p+\delta p)\,\delta y\,\delta z$ உம் ஆகும் ; இவ்விசைகளின் திசை முறையே x இன் நேர்த்திசையும் மறைத்திசையும் ஆகும். பாயிமூலக மானது x இன் திசையில் ஆர்முடுகல் இன்றி அசைகிறபடியால் அத்திசை யில் விசை பூச்சியமாய் இருத்தல் வேண்டும் ; எனவே

$$\eta\frac{\partial}{\partial z}\left(u+\frac{\partial u}{\partial z}\delta z\right)\delta x\,\delta y-\eta\frac{\partial u}{\partial z}\delta x\,\delta y+p\,\delta y\,\delta z$$
$$-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\,\delta z=0\,;$$

அதாவது
$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial p}{\partial x}=0.$$



படம் 11·02. $\eta\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\dfrac{\partial p}{\partial x}=0$ என்னுஞ் சமன்பாடு.

பிசுக்குப பாய்ச்சல் தொடர்பான விடயங்களின் ஆராய்ச்சியில் அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படுகின்ற ஆய்வு முறையை எடுத்துக்காட்டவும், பாயிகளிடத்து முழு இயக்கமும் அமுக்கப் படித்திறன் இருக்கிறபடியாலேயே நிகழ்கின்ற படியால் u ஆனது z இன் ஏகபரிமாணச் சார்பாக ஒருபோதும் அமைய மாட்டாது என்பதை நிறுவவும் இச்சமன்பாடானது பெறப்பட்டுள்ளது. ஏனெனில் அப்பொழுது $\frac{\partial p}{\partial x}$ பூச்சியம் ஆகும்; எனவே குறிக்கப்பட்ட சூழலில் இயக்கம் எதுவும் நிகழமாட்டாது.

கிடையான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே நெருக்கருந் திரவமொன்றின் உறுதிப் பாய்ச்சல்.—ஆரை a யும் நீளம் l உம் உடைய கிடையான செவ்வுருளைக் குழாயொன்றைக் கருதுக; குழாயின முனைகளுக்கிடையே P என்னும உறுதியான அமுக்க விததியாசத்தின் பிரயோகத்தால் நெருக்கருந் திரவமொன்று கொந்தளிப்பின்றிச் செலுத்தப்படுக.

(a) பாய்ச்சலானது எங்கும் குழாயச்சுக்குச் சமாந்தரம் எனவும்,

(b) ஓய்வு நிலையில் இருந்தபோது அளிக்கபபட்ட ஆர்முடுகலினுலான தொடக்கக குழப்பம தணிக்கப்பட்டுப் பாய்ச்சலானது உறுதிநிலையை அடைந்திருக்கின்றது எனவும்,

(c) குழாயின் சுவருடன தொடுகை வைத்திருக்கினற திரவமானது ஓய்வாயிருக்கின்றது எனவும்,

(d) மிகச் சிறிய ஒரு கொய்விசைக்கு ஆளாகும்போதும் திரவம் பாய்கின்றது எனவும் கொள்ளப்படும்.

இவ்வெடுகோள்களின் பொருட்டுக் குழாய் வழியே அமுக்கப் படித்திறனது மாறாது இருத்தல் வேண்டும். குழாயின் அச்சானது x அச்சாக எடுக்கப்படுக; அப்பொழுது குழாயின் முனைகள் $x=0$ என்பதாலும $x=l$ என்பதாலும் வரையறுக்கப்படுகின்றன; அவ்விடங்களில் அமுக்கம் முறையே p_1 உம் p_2 உம் ஆகும்; இங்கு $p_1 > p_2$. அப்பொழுது $p_1 - p_2 = \mathrm{P}$. அமுக்கப் படித்திறன் மாறாமல் இருக்கிறபடியால்

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha \quad \text{என்க.}$$

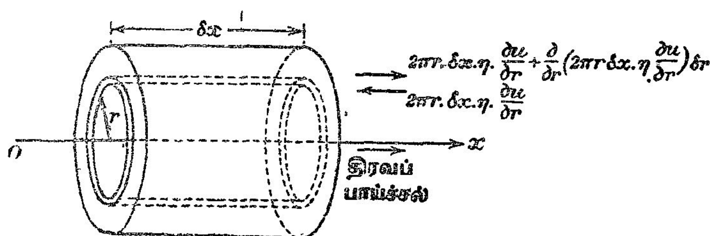
$$\therefore \; p = \alpha x + \beta;$$

இங்கு, β ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி. இனி $x=0$ ஆனபோது $p=p_1$; எனவே $\beta = p_1$; மேலும் $x=l$ ஆனபோது $p=p_2$; எனவே $p_2 = \alpha l + p_1$. ஆகவே

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_1 - p_2}{l} = -\frac{\mathrm{P}}{l}.$$

அடுத்து ஆரைகள் r உம் $r+\delta r$ உம் உடைய குழாயச்சை அச்சாகக் கொண்ட குழாயச்சுக்குச் செங்குத்தானவையும் இடைத்தூரம் δx

உடையவையுமான தளங்களால் முடிவுகட்டப்பட்ட, ஈர் உருளைகளுக்கிடையே உட்பட்டிருக்கின்ற சிறிதளவான திரவமீது தாக்குகின்ற விசைகளைக் கணிப்போம். மேலும் குழாயானது கிடையாயிருத்தல் வேண்டும்; அப்பொழுது புவியீர்ப்பானது திரவத்தின பாய்ச்சலைப் பாதிக்க மாட்டாது.



படம் 11·03. கிடையான மயிர்த்துளைக் குழாயூடே நெருக்கருந் திரவமொன்றின் பாய்ச்சல்.

உருளையான மூலகத்தைக் காட்டிலும் அச்சுக்கு அணித்தாயுள்ள திரவமானது அம்மூலகத்தின் உட்கங்கணப் பரப்புமீது, x அச்சின் மறைத் திசையில், $2\pi r\,\delta x\,\eta\dfrac{\partial u}{\partial r}$ என்னும் விசையொன்றை உஞற்றுகிறது. கங்கண மூலகத்திற்குப் புறத்தேயுள்ள திரவமானது அம்மூலகத்தின் வெளிமேற் பரப்புமீது, மேற்படிதிசைக்கு எதிரான திசையில்,

$$2\pi r\,\delta x\,\eta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(2\pi r\,\delta x\,\eta\frac{\partial u}{\partial r}\right)\delta r$$

என்னும் விசையொன்றை உஞற்றுகிறது. அன்றியும் மூலகமீது திரவத்துள் ஆற்றுகின்ற அமுக்கத்தால் உண்டாகின்ற விசைகள், x வளர் திசையில $[p.\ 2\pi r\,\delta r]$ உம் x தேய்திசையில்

$$\left[2\pi r\,\delta r\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\right]$$

உம் ஆகும். திரவமானது ஆர்முடுகலின்றி அசைகின்றபடியால் அதன் மீது தாக்குகின்ற முழு விசையும் பூச்சியமாகும்; அதாவது

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(2\pi r\,\delta x\,\eta\frac{\partial u}{\partial r}\right)\delta r-2\pi r\,\delta r\,\delta x\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

அதாவது
$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\eta}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

அல்லது
$$-\frac{\mathrm{P}}{l}\,\frac{r}{\eta}=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

இரு தொகையீடுகளுக்குப் பின்பு இது

$$u = -\frac{Pr^2}{4\eta l} + A \text{ இ. மட } r + B$$

ஆகின்றது ; இங்கு A யும் B யும் தொகையீட்டு மாறிலிகள் ஆகும். $r=0$ என்னுமிடத்து வேகமானது முடிவிலியாகாமையால் $A=0$. $r=a$ ஆகுமிடத்து $u=0$ என்னும் நிபந்தனையானது

$$u = \frac{P}{4\eta l}(a^2 - r^2)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தருகிறது.

இனி நேரவலகொன்றில் குழாயூடே பாயும் திரவத்தின் கனவளவு Q ஆனது

$$Q = \int_0^a u.2\pi r\, dr = \frac{2\pi P}{4\eta l}\int_0^a (a^2 - r^2) r\, dr = \frac{\pi a^4 P}{8\eta l} = \frac{\pi a^4(p_1 - p_2)}{8\eta l}$$

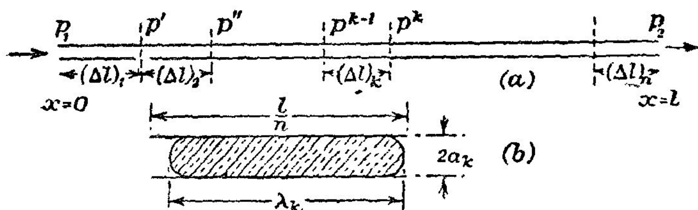
என்பதால் தரப்படுகிறது.

நேரம் t யில் குழாயூடே பாயும் கனவளவு V எனில்,

$$V = \frac{\pi a^4(p_1 - p_2)t}{8\eta l}$$

எனப் பெறுவோம். இது **புவாசேயின் சமன்பாடு** எனப்படும்.

பிசுபிசுப்புமானியொன்றில் பயன்படுத்தும் நோக்குடன் குழாயொன்றின் அளவைதிருத்தல்பற்றிய குறிப்பு.—நீளம் l உம் தட்டையாக்கப்பட்ட முனைகளும் உடைய மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று n பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கின்றது எனக் கருதுவோம் ; k ஆம் பாகத்தின் நீளம்



படம் 11·04 பிசுபிசுப்புமானியொன்றிற் பயன்படுத்துவதற்கென குழாயொன்றின் அளவை திருத்தல்.

$(\Delta l)_k$ ஆகுக, படம் 11·04 (a) யைப் பார்க்க. குழாயின் இப்பாகமானது படம் 11·04 (b) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; அதன் சராசரிக் குறுக்கு வெட்டாரை a_k ஆகுக. மயிர்த்துளைக் குழாயின் உள்ளீட்டு வெளியீட்டு முனைகளினுள்ள அமுக்கங்கள் p_1 உம் p_2 உம் ஆகுக ; அதே நேரம்

முதலாவது, இரண்டாவது முதலிய பாகங்களின் வெளியீட்டு முனைகளி லுள்ள அமுக்கங்கள் p', p'',... முதலியவை ஆகுக. எனவே நேரம் t யில், குழாயூடே பாய்கின்ற திரவத்தின் கனவளவு V எனின்

$$V=\frac{\pi a^4(p_1-p_2)t}{8\eta l}$$
$$=\frac{\pi a_1{}^4(p_1-p')t}{8\eta(\Delta l)_1}=\frac{\pi a_2{}^4(p'-p'')t}{8\eta(\Delta l)_2}=\ldots$$
$$\ldots=\frac{\pi a_k{}^4(p^{k-1}-p^k)t}{8\eta(\Delta l)_k}=\ldots \ n \text{ உறுப்புக்கள் வரை,}$$

இங்கு a என்பது குழாயின் பலித ஆரை ஆகும்.

$$\therefore\ V=\frac{\pi t}{8\eta}\frac{p_1-p'}{\frac{(\Delta l)_1}{a_1{}^4}}=\frac{\pi t}{8\eta}\frac{p'-p''}{\frac{(\Delta l)_2}{a_2{}^4}}=\ldots$$
$$\ldots=\frac{\pi t}{8\eta}\frac{(p^{k-1}-p^k)}{\frac{(\Delta l)_k}{a_k{}^4}}=\ldots \ n \text{ உறுப்புக்கள் வரை,}$$

$$\therefore\ V=\frac{\pi t}{8\eta}\frac{p_1-p'+p'-p''+\ldots+p^{k-1}-p^k+\ldots \ n \text{ உறுப்புக்கள் வரை}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{(\Delta l)_k}{a_k{}^4}}$$
$$=\frac{\pi t}{8\eta}\cdot\frac{(p_1-p_2)}{\sum_{k=1}^{n}\frac{(\Delta l)_k}{a_k{}^4}}.$$

குழாயின் குறுக்குவெட்டானது சீராகவில்லாதபோது எதற்காக $\Sigma\frac{(\Delta l)_k}{a_k{}^4}$ என்னும் கோவையைக் கருதுதல் வேண்டும் என்பதை இது விளக்கிக் காட்டுகிறது.

அளவை திருத்தலையிட்டு மயிர்த்துளைக் குழாயூடே குரோமிக்கமிலத்தை யும், அடுத்து வடிகட்டிப் பம்பியொன்றால் நீரையும் இழுத்து அது சுத்தஞ் செய்யப்படுகிறது. பமபியின் செயலாற்றல் ஒழியாது இருப்பதற்கு மயிர்த்துளைக் குழாயின் முனையொனறைத் துப்புரவாக்குகின்ற கரைசலில் அமிழ்த்தி அதை அடுத்த கணத்தில் வெளியே எடுத்துக் கொள்வது புத்தியாம். இச்செயன்முறை மீண்டும் மீண்டும் விரைவாகச் செய்யப் படுகிறது ; எனவே குழாயூடே செல்லுகின்ற திரவச் சிறுநிரல் ஒவ்வொன் றையும் வளிக் குமிழியொன்று பின்தொடரும். அடுத்து மயிர்த்துளைக் குழாயுடன் நொய்யால் அடர்த்தியாக நிரப்பப்பட்ட குழாயொன்றைத் தொடுத்து, இளஞ்சூடான உலர் வளி இழுக்கப்படுகின்றது. பின்பு மீற்றரளவிடையொன்றுமீது குழாயானது கிடையாகக் கட்டப்படுகிறது.

நீளம் l ஆனது n சம பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்க. அதன் நீளமானது $\frac{l}{n}$ இற்குச் சற்றுக் குறைவாயிருக்கிற இரசச் சிறு நிரலொன்றை மயிர்த்துளைக் குழாயுள் புகுத்தி, ஒன்றன்பின் ஒன்றாக n பாகங்களையும் கொண்டிருக்குமாறு அது செலுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு நிலையிலும் சிறுநிரலின் வளைந்த முனைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரமானது அளக்கப்படுகிறது. குழாயின் k ஆம் பாகத்தில் சிறுநிரல் இருக்கும்பொழுது இத்தூரம் λ_k ஆகுக. அப்பொழுது குழாயானது நியாயமானவளவில் சீராக இருக்குமாயின், n பாகங்களுள் எதைக் கருதினாலும் அது வழியே ஆரை மாறாமல் இருக்கின்றது எனக் கொள்ளலாம் ; k ஆம் பாகத்தில் அது a_k ஆகுக. அளவை திருத்தம் செய்யும்போதுள்ள வெப்பநிலையில் இரசத்தின் அடர்த்தி ρ எனின்

$$\pi\rho a_k{}^2\lambda_k = \mathrm{C}$$

ஆகும் ; இங்கு C ஆனது முழுக் குழாய்க்கும் அதே மாறிலி ஆகும் ; அது கிட்டத்தட்ட இரசச் சிறுநிரலின் திணிவு ஆகும். இவ்வாறு

$$\Sigma(a_k)^2 = \frac{\mathrm{C}}{\pi\rho}\,\Sigma\left(\frac{1}{\lambda_k}\right).$$

குழாயின் நீளம் l ஐ நிரப்புவதற்குத் தேவையான இரசத்தின திணிவு M எனின்,

$$\mathrm{M} = \pi\rho l\,\overline{a^2}\ ;$$

இங்கு $\overline{a^2}$ ஆனது வெவ்வேறான பாகங்களுக்கு ஒத்த ஆரைகளுடைய வர்க்கங்களின் சராசரிப் பெறுமானம் ஆகும். [வழக்கில் நீளம் l_0 ($l_0 \doteq l$) என்பதை நிரப்பும் இரசத்தின் திணிவு M_0 ஐக் கண்டு தனி விகித சமத்தால் M ஐக் காண்பது வசதிமிக்கதாகும்.]

ஆனால்

$$\overline{a^2} = \frac{1}{l}\left[\Sigma(a_k)^2\,\frac{l}{n}\right].$$

$$\therefore\ \mathrm{M} = \pi\rho\,\Sigma(a_k)^2\,\frac{l}{n} = \mathrm{C}\cdot\frac{l}{n}\,\Sigma\left(\frac{1}{\lambda_k}\right).$$

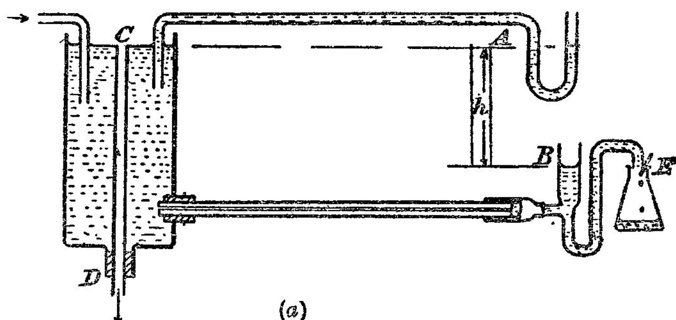
$$\therefore\ \frac{1}{\mathrm{C}} = \frac{l}{n\mathrm{M}}\,\Sigma\left(\frac{1}{\lambda_k}\right).$$

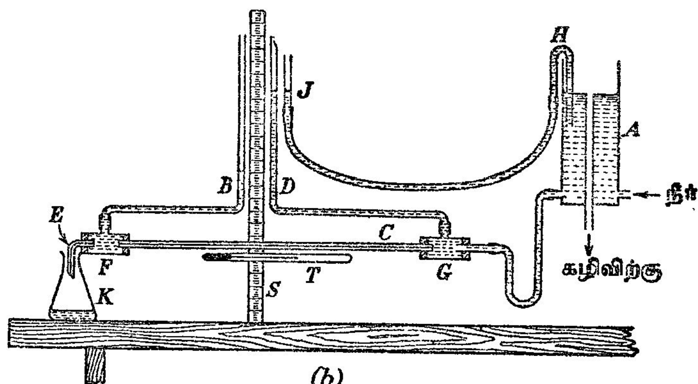
மயிர்த்துளைக் குழாயினது ஆரையின் பலிதப் பெறுமானம் a_0 ஆகுக. அப்பொழுது

$$\frac{l}{a_0{}^4} = \Sigma\left(\frac{1}{a_k{}^4}\right)\frac{l}{n} = \frac{\pi^2\rho^2}{\mathrm{C}^2}\,\Sigma(\lambda_k)^2\left(\frac{l}{n}\right)$$

$$= \pi^2\rho^2\frac{l^3}{n^3\mathrm{M}^2}\left[\Sigma\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)\right]^2\Sigma(\lambda_k)^2.$$

ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் குழாய்நீரின் பிசுபிசுப்பைப் பரிசோதனை முறைப்படி துணிதல்.—*ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் குழாய் நீரின் பிசு பிசுப்பைத் துணியும் பொருட்டுப் படம்* 11·05 (*a*) *யிற் காட்டியுள்ள ஆய்கருவியைப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். அது மிகைப்பாய்ச்சற் குழாய்* CD *யுடன்கூடிய உயரமான உலோகவுருளையொன்றுலானது.*





படம் 11·05. பரிசோதனைமுறைப்படி குழாய்நீரின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதல்.

வழக்கமான முறைகளால் நெய்ச்சாயை நீக்கப்பட்ட நீளம் l *உம் சராசரிக் குறுக்குவெட்டாரை* a *யும் உடைய, மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று கிடையான நிலையில் வைக்கப்பட்டு உருளையுடன் தொடுக்கப்படுகிறது. காட்டியுள்ள உள்ளீட்டுக் குழாய்மார்க்கமாக நீரானது உருளையிற் புகுகிறது ; மிகையாக இருந்தால் அது* CD *வழியே அப்புறப்படுத்தப்படுகிறது. மயிர்த்துளைக் குழாயின் வெளியீட்டு முனையுடன், காட்டியுள்ளவாறு வளைக்கப்பட்ட*

கண்ணாடிக் குழாயொன்று தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. மயிர்த்துளைக் குழாயின் முனைகளுக்கிடையேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசமானது B யிலும் C யிலுமுள்ள நீர்மட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள நிலைக்குத்துத் தூரத்திற்கு விகிதசமமாகும். மிமீ. இற் கோடிட்ட அளவிடையொன்றையும் நீரால் நிரப்பப்பட்டதும் காட்டியுள்ளவாறு வைக்கப்பட்டதுமான U குழாயொன்றையும் பயன்படுத்தி இத்தூரம் துணியப்படுகிறது ; இங்கு A யிலும் C யிலும் உள்ள மட்டங்கள் அதுவேயாம். மயிர்த்துளைக் குழாய் வழியே நீர் செல்லுங்கால், E யினின்று துளியொவ்வொன்றும் பிரியும்பொழுது E யிலுள்ள நீர்மட்டம் மாறுகின்றது ; இது நீர்த்துளிகள் வடிவ மாற்றமுறுங்கால் E யில் உண்டாகின்ற அமுக்க மாற்றங்களாலாகின்ற விளைவாம். வெளியீட்டுக் குழாயின் முனை E யைத் தொட்டுக் கொண்டிருககுமாறு துப்புரவான கண்ணாடிக் கோலொனறை வைத்தால் இக்குழப்பத்தைத் தவிர்க்கலாம். அப்பொழுது நீர் குழாயினின்று சொட்டுச் சொட்டாகப் பிரியும் ; அத்துடன் B யிலுள்ள மட்டம் மாறாது இருக்கும்.

படம் 11·05 (b) யில் ஆய்கருவியின் மாற்றுவடிவமொனறு காட்டபபட்டிருக்கிறது. C ஆனது விட்டம் கிட்டத்தட்ட 0·1 சமீ. உம், நீளம் ஒரு மீற்றரும் உடைய மயிர்த்துளைக் குழாயாகும். வழக்கம்போல் அதைத் துப்புரவாக்கி அதன் முனையொவ்வொன்றிலும் றப்பா அடைப்பானொன்று பொருத்தப்படுகிறது. F உம் G யும் இரு அகனற பித்தளைக் குழாய்கள் ஆகும் ; அவற்றுள் ஒன்று நீர்த் தாங்கியுடன் மயிர்த்துளைக் குழாயைத் தொடுப்பதற்குப் பயனபடுகிறது ; மற்றதுடன், காட்டியுளளவாறு, மிகவும் ஒடுங்கிய மயிர்த்துளைக் குழாய் E பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. அதனின்றும் திரவம் வரையறுத்த துளிகளாகப் பிரியும் வண்ணம் E யின் முனையானது சாய்வாய் வெட்டப்பட்டிருக்கிறது. F உம் G யும் இரு இறுக்கிகளாற் காவப்படுகின்றன ; C கிடையாய் இருக்குமாறு இவை செப்பஞ் செய்யப்படுகின்றன. ஆய்கருவித் தொகுதியிலிருந்து நீர் உறுதியாகப் பாயும்பொழுது, குழாய் C வழியேயுள்ள அமுக்க இறக்கத்தை அளக்கும்பொருட்டுப் படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு கண்ணாடிக் குழாய்கள் B யும் D யும் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. குழாய் E யைப் பயன்படுத்தாதவிடத்து நீர் ஒருபோதும் B யிலே சேரமாட்டாது. தொகுதியில் மாறு நீர் அமுக்கத்தை நிலைநிறுத்தும் பொருட்டு நீர் வழங்கியுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற நீர்த் தாஙகி A யுடன மிகைப்பாய்ச்சற் குழாயொன்று தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது ; தாங்கியை உயர்த்தி அல்லது தாழ்த்தி நீர் அமுக்கத்தின் பெறுமானம் செப்பஞ் செய்யப்படுகிறது.

தொடுக்குங் குழாய்களில் வளிக்குமிழிகள் இருக்கின்றனவோ என்பதைச் சோதிக்கும் பொருட்டு, குழாய் E யை மூடி, B யில் நீர் எறும்படி விடப்படுகிறது ; குமிழிகள் அகற்றப்படாமல் இருந்தால் பாய்ச்சலின் உறுதி நிலை பாதிக்கப்படும். தாங்கி A யிலுள்ள நீர்மட்டத்தைக் குழாய் J இல் மீட்கவும், அதை B யிலும் D யிலுமுள்ள மட்டங்களுடன ஒப்பிடவும்,

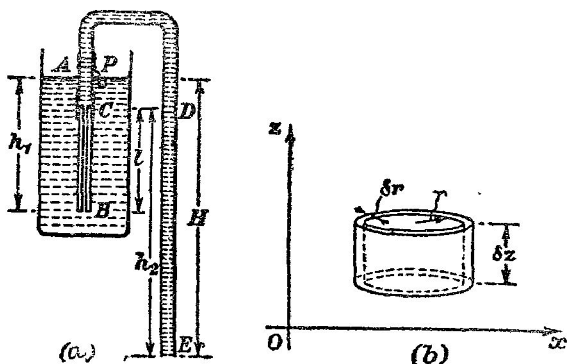
நீரால் நிரப்பியுள்ள நீரிறக்கிக்குழாய் HJ இன் முனையொன்று தாங்கியில் இருக்கிறது. மட்ட வித்தியாசம் ஏதேனும் உளதாயின் அது வளிக் குமிழிகள் உள எனக் காட்டும்; பரிசோதனையைத் தொடர்ந்து நடாத்து முன் குழாய்களைச் சாய்த்து அவற்றை அப்புறப்படுத்தல் வேண்டும்.

பிசுபிசுப்புமானியில் உறுதிநிலையுளது என்பதை நிச்சயப்படுத்தும் பொருட்டு முதன்முதலாக மயிர்த்துளைக் குழாயின் முனைகளுக்கிடையே யுள்ள அமுக்க வித்தியாசம் குறைந்தபட்சத்தில் 20 சமீ. நீராக இருக்குமாறு செப்பஞ்செய்து, பத்து நிமிடத்தில் வெளியேறும் நீரைச் சேர்த்து அதை நிறுத்து நேரவலகொன்றில் வெளியேறும் நீரின் திணிவு துணியப்படு கிறது; இது மீண்டுஞ் செய்யப்படுகிறது; பேறுகள் இசையுமாயின் பிசு பிசுப்புமானியில் வளிக்குமிழிகளில்லை என நாம் எதிர்பார்க்கலாம். இதை நன்கு உறுதிப்படுத்தும் பொருட்டு, அமுக்கவுயரத்தைக் கிட்டத்தட்ட 5 சமீ. நீர் அளவிற்குக் குறைத்து, நேரவலகொன்றில் வெளியேறும் திரவத்தின் திணிவு காணபபடுகிறது. அடுத்து அமுக்கவுயரத்தைக் குறித்து பாய்ச்சல் வீதத்தின் இரு பெறுமானஙகளும் குறிக்கப்படுகின்றன; நீருக்கு அளிக்கப்பட்ட சக்தியானது புறக்கணிக்கத்தக்க அளவில் இருக்குமாறு மயிர்த்துளைக் குழாயில் நீர் மெதுவாகப் பாயுமிடத்து, அப்பெறுமானங்கள் உற்பத்தி ஊடே செல்லும் நேர்கோடொன்றிற் கிடக்குமாயின், ஆய் கருவித் தொகுதியில் வளிக் குமிழிகள் கண்டிப்பாய் இருககமாட்டா என முடிவு செய்யலாம். அடுத்து வெவ்வேறுன அமுக்கவுயரங்களுக்கான பாய்ச்சல் வீதங்களைத் துணிக; வரைபில் அவ்வாசிப்புகளைக் குறிக்க; அதிலிருந்து அலகு அமுக்கவுயரமொன்றிற்கான பாய்ச்சல் வீதத்தின் சராசரிப் பெறுமானத்தைப் பெறுக; கடைசியாகப் பிசுபிசுப்புமானியின் வெப்பநிலையில் குழாய் நீரின் பிசுபிசுப்புக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறுக.

மேற்படி இரு முறைகளுள் ஏதேனுமொன்றில், பக்கம் 624 இற் கூறியுள்ளவாறு மயிர்த்துளைக் குழாய்க்கு அளவுகோடு திருத்தஞ் செய்யப் படாமல் இருந்தால், குழாயின் சராசரி ஆரையைக் கூடிய திருத்தத்துடன் துணிதல் வேண்டும்; ஏனெனில் கணிப்பில் ஆரையின் நான்காம் வலு வருகின்றமையால் எனத் தெளிக. குழாய் உலர்த்தப்பட்டுத் துப்புரவாக்கப் படுதல் வேண்டும்; அதைக் கிட்டத்தட்ட முற்றிலும் நிரப்பும் வண்ணம் தூய இரசம் போதிய அளவில் புகுத்தப்படுதல் வேண்டும். இரச நிரலின் நீளத்தை அளந்தபின் அவ்விரசம் தெரிந்த திணிவுடைய நிறுவைப் போத்தல் ஒன்றில் புகுத்தப்படுகிறது; இதைப் பன்முறை மீண்டும் மீண்டுஞ் செய்து, எல்லா இரசநிரல்களினதும் மொத்த நீளம், மொத்தத் திணிவு என்பவற்றிலிருந்து குழாயின் சராசரி ஆரை பெறப்படுகிறது.

ஒரு திரவத்தின் வெப்பநிலையுடன் அல்லது ஒரு கரைசலின் செறிவுடன் பிசுபிசுப்பு மாறும் விதம்பற்றி ஆராய்தற்கான ஒஸ்பேண் றெனல்சின் முறை.—ஆரம்ப ஆய்கருவியானது 1886 இல் திட்டமிடப்பட்டது;

"மிதமான எல்லா வெப்பநிலைகளிலும் நீருக்கு η இன் பெறுமானம் தெரிந்திருக்கிறபடியால், எண்ணெய்க்குப் பெறுமானம் காணுமிடத்து, அதே தவாளிப்பு வழியே, அதே கனவளவு எண்ணெயும் நீரும் செல்லு தலுக்கான தொடர்பு நேரங்களை மட்டுமே துணிதல் வேண்டும்; இங்கு சுரியல் ஓட்டங்கள் உண்டாகாதவாறும், அமுக்கவுயர நட்டத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் இயக்கத்தின் சக்தி சிறிதாய் இருக்குமாறும், தவாளிப்பின் அமைப்புமீது கவனஞ் செலுத்துதல் வேண்டும்" என றெனல்ஸ் இவ்வாய் கருவி பற்றிக் குறித்துள்ளார். இதன்பொருட்டு அல்லது திரவமொன்றி னது பிசுபிசுப்பின் தனி நிர்ணயத்தின் பொருட்டு, ஆய்கருவியானது வழக்கமாகச் சிறு மயிர்த்துளைக் குழாய்த்துண்டு BC யுடன் றப்பர்க் குழாயால் தொடுக்கப்பட்டுள்ள கண்ணாடியாலானதொரு நீரிறக்கியாகும், படம் 11·06 (a). தக்க பாத்திரமொன்றில் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்ற



படம் 11·06. பிசுபிசுப்பு அளத்தலுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் ஓஸ்பேண் றெனல்சின் ஆய்கருவி பற்றிய கொள்கை.

சோதனைக்கான திரவத்தில் மயிர்த்துளைக் குழாயானது முற்றிலும் அமிழ்த் தப்பட்டிருக்கிறது; குழாய் BC ஆனது நிலைக்குத்தாகவும் கண்ணாடி —றப்பர் மூட்டுக்கள் நீர் கசியாதவண்ணமும் இருத்தல் வேண்டும். (ஒப்பீட்டு அளவீடுகள் மட்டுமே தேவைப்படின், கண்ணாடிக் குழாய்களை உருககிப் பொருத்தி அமைக்கலாம்; அவ்வாறு செய்தால் பிசுபிசுப்பின் தனி நிர்ணயத்தில் மயிர்த்துளைக் குழாயின் தேவைப்படுகின்ற பயன்படு நீளத்தைத் துணிதல் கடினமிக்கது; ஆனால் சுரியல் ஓட்டங்கள் குறை வாகவே உண்டாகக்கூடும்.) P ஆனது காட்டியுள்ளவாறு வளைக்கப்பட்ட கண்ணாடியாலான ஓர் ஊசியாகும்; அது ஊசி முனையுடன் பொருந்தி யிருக்குமாறு முகவையிலுள்ள நீரின் மட்டம் A ஆனது செப்பஞ் செய்யப்படுகிறது. நீர் மட்டத்தில் தெறிப்பால் உண்டாகும் அதன் விம்பத துடன் ஊசிமுனை பொருந்துமாறு எளிதிற் செப்பஞ்செய்ய முடிகிறது; ஊசியை இவ்வாறு பயன்படுத்துவது இம்முறையின் நயமாகும். சோதனைக்

கான திரவத்தால் நீரிறக்கியை நிரப்பிக் குறிப்பிட்ட நேரமொன்றில் வெளியேறும் திரவத்தின் திணிவு துணியப்படுகிறது. பரிசோதனையின் போதுள்ள வெப்பநிலையில், திரவத்தின் பிசுபிசுப்புக் குணகம் η ஐ, நாம் நிலைநிறுத்தப் போகின்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இப்பேறுகளிலிருந்தும் ஆய்கருவியின் பரிமாணங்களிலிருந்தும் கணிக்கலாம்.

வளிமண்டல அமுக்கம் P_0 ஆகுக. அப்பொழுது B யிலுள்ள அமுக்கம் $P_0+g\rho h_1$ ஆகும்; இங்கு $h_1=AB$ யும், g புவியீர்ப்புச் செறிவும், ρ பரிசோதனையின்போதுள்ள வெப்பநிலையில் திரவத்தின் அடர்த்தியும் ஆகும். E யில் அமுக்கம் P_0 ஆகும்; D யிலுள்ளது = C யிலுள்ளது $=P_0-g\rho h_2$; இங்கு $h_2=DE$.

$$\therefore\ P_B-P_C=g\rho(h_1+h_2).$$

B யிலிருந்து மயிர்த்துளைக் குழாயின் புள்ளியொன்றின் தூரம் z ஆகுக; இங்கு z இன் நேர்த்திசை மேல்முகமானது. பிசுக்குப் பாய்ச்சலுக்கான வழக்கமான நிபந்தனைகள் நிறைவேற்றப்பட்டிருக்குமாறால் குழாய் வழியே அமுக்கப் படித்திறன் மாறுது இருக்கும். எனவே

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\alpha \quad \text{அல்லது} \quad p=\alpha z+\beta\,;$$

இங்கு α வும் β வும் முனைநிபந்தனைகளிலிருந்து துணியப்பட வேண்டிய மாறிலிகள் ஆகும். மயிர்த்துளைக் குழாயின் நீளம் l ஆகுக. அப்பொழுது $z=0$ இல் $p=P_0+g\rho h_1$; எனவே

$$\beta=P_0+g\rho h_1\,;$$

மேலும், $z=l$ இல், $p=P_0-g\rho h_2$;

எனவே
$$\alpha=-\frac{g\rho(h_1+h_2)}{l}.$$

$$\therefore\ \frac{\partial p}{\partial z}=-g\rho\frac{(h_1+h_2)}{l}.$$

இச்சமன்பாடானது அமுக்கப் படித்திறனின் குறியையும் பருமனையும் நிர்ணயிக்கிறது. குழாயூடே திரவத்தின் பாய்ச்சல் வீதத்தைக் கணிக்கும் பொருட்டு, உள்ளாரை r உம் வெளியாரை $(r+\delta r)$ உம், நீளம் δz உம் உடைய சிறு உருளை மூலகமொன்றைக் கருதுக, படம் 11·06(b) யைப் பார்க்க. அம்மூலகத்தின் கீழான முனையில் அமுக்கம் p ஆகுக. அப்பொழுது மூலகத்தின் கீழான தட்டை முகத்தில் திரவவமுக்கத்தால் ஆகும் விசை

$$2\pi r\,\delta r.p$$

யாகும்; அது மேல்முகமாகத் தாக்குகிறது. மேலான தட்டை முகமீது விசை

$$2\pi r\,\delta r\left[p+\frac{\partial p}{\partial z}\,\delta z\right]$$

ஆகும் ; அது கீழ்முகமாகத் தாக்குகிறது. எனவே z வளர்திசையில் அமுக்கத்தால் ஆகின்ற விளையுள் விசையானது

$$-2\pi r \frac{\partial p}{\partial z}\delta r\,\delta z$$

ஆகும்.

உருளையான மூலகத்தின் நிறை $2\pi r\rho g\ \delta r\ \delta z$ ஆகும் ; அது நிலைக்குத்துக் கீழ்முகமாகத் தாக்குகிறது.

மூலகத்தின் அச்சிலிருந்து r, $(r+\delta r)$ என்னும் தூரங்களிலுள்ள புள்ளிகளில் பாய்ச்சல் வேகங்கள் முறையே u வும் $(u+\delta u)$ வும் எனின் அப்பொழுது வளைவுற்ற உள்ளான பரப்புமீது பிசுபிசுப்பு காரணமாகத் தாக்குகின்ற விசை

$$2\pi r\,\delta z\,\eta\frac{\partial u}{\partial r}=2\pi\eta\,\delta z\,r\frac{\partial u}{\partial r}$$

எனப் பிசுபிசுப்புப் பற்றிய நியூற்றனினது வரைவிலக்கணத்தினின்றும் பெறுகிறோம்; இவ்விசை கீழ்முகமாகத் தாக்குகிறது. [இங்கு வற்புறுத்திக் கூறவேண்டிய செய்தி யாதெனில், $\frac{\partial u}{\partial r}$ என்பது மறையாதலின், வளைவுற்ற உட் பரப்புமீதுள்ள விசையானது உண்மையில மேல்முகமாகவே தாக்குகிறபோதிலும், நடைமுறை வழக்கு, நுண்கணித முறைகள் என்பவற்றைக் கைவிடலாகாது ; எனவே விசைக்கான மேற்படிக் கோவையில் சயக் குறியைப் புகுத்தலாகாது.] மூலகததின் வளைவுற்ற வெளிப் பரப்புமீது பிசுபிசுப்பால் ஆகும் விசையானது

$$2\pi\eta\,\delta z\left[r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\delta r\right] \text{ ஆகும் ;}$$

இது மேல்முகமாகத் தாக்குகிறது. திரவமானது ஆர்முடுகலின்றி அசைகிறபடியால்

$$2\pi r.\delta r.\delta z.\frac{\partial p}{\partial z}+2\pi r.\delta r.\delta z.\rho g-2\pi\eta.\delta z.\delta r.\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0\ ;$$

அதாவது, $$\eta\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=r\rho g+r\frac{\partial p}{\partial z}=r\left(g\rho+\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

$\frac{\partial p}{\partial z}$ என்பது r ஐச் சாராமல் இருக்கிறபடியால், தொகையிட்டு

$$\eta\left[r\frac{\partial u}{\partial r}\right]=\frac{r^2}{2}\left[g\rho+\frac{\partial p}{\partial z}\right]+\text{A}$$

எனப் பெறுகிறோம் ; இங்கு A ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி.

$$\therefore\ \eta\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{r}{2}\left[g\rho+\frac{\partial p}{\partial z}\right]+\frac{\text{A}}{r}.$$

மீண்டும் தொகையிட்டு

$$\eta u=\tfrac{1}{4}r^2\left(g\rho+\frac{\partial p}{\partial z}\right)+A\ \text{இ.ம}\ r+B$$

எனப் பெறுகிறேம் ; இங்கு B இன்னுமொரு தொகையீட்டு மாறிலி. இனி $r=0$ ஆகுமிடத்து u ஆனது முடிவுள்ளதாதலாலும், $r=a$ ஆகுமிடத்து $u=0$ ஆதலாலும், $A=0$ ஆகும்.

$$\therefore\ B=-\frac{a^2}{4}\left(g\rho+\frac{\partial p}{\partial z}\right);$$

$$\therefore\ u=-\frac{1}{4\eta}\left(g\rho+\frac{\partial p}{\partial z}\right)(a^2-r^2).$$

செக்கனென்றிற் பாயும் திரவத்தின் கனவளவு Q ஆகுக. அப்பொழுது

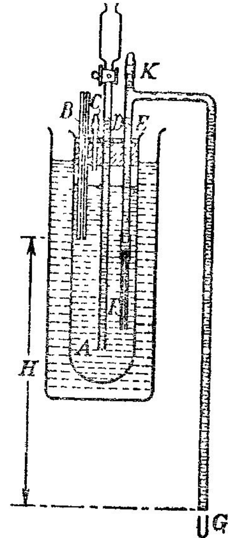
$$Q=-\int_0^a 2\pi r.\frac{1}{4\eta}\left(g\rho+\frac{\partial p}{\partial z}\right)(a^2-r^2)\,dr=\frac{\pi}{2\eta}\left(g\rho+\frac{\partial p}{\partial z}\right)\left(-\frac{a^4}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi a^4}{8\eta l}g\rho H;$$

இங்கு H ஆனது A யைக் குறித்து E யின் ஆழம் ஆகும்.

$$\therefore\ Q=\frac{\pi a^4 P}{8\eta l};\ \text{இங்கு}\ P=g\rho H.$$

திரவப்பரப்பை ஊசிநுனி எப்பொழுதும் தொடும் பொருட்டு, நீரிறக்கி வழியாகத் திரவம் பாயுங்காலே மயிர்த்துளைக் குழாயானது தாழ்த்தப்படுதல் வேண்டும். எப்படியாயினும் இம்முறையானது P யை அண்ணளவாகவே மாருமல் நிலைநிறுத்தும்.



படம் 11·07. ஒஸ்பேண்றெனல்சினது பிசுபிசுப்பு மானியின் புத்தமைப்பு.

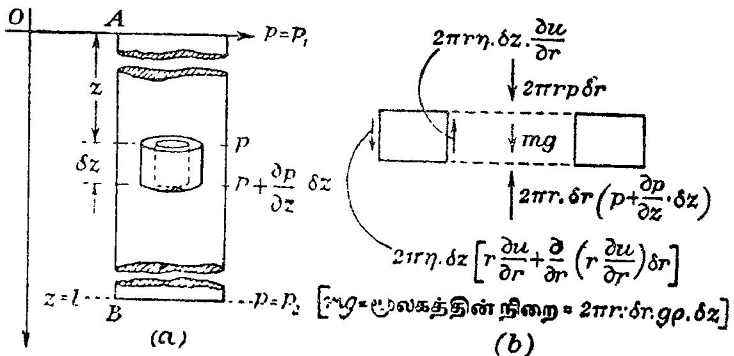
எவ்வாறு வெப்பநிலையுடன் திரவமொன்றின் பிசுபிசுப்பு மாறுகின்றது என்பதை ஆராயும் பொருட்டு இவ்வாய்கருவி பயன்படுத்தப்பட்டால், அப்பொழுது நீரிறக்கியிலுள்ள திரவத்தின் வெப்பநிலையானது மயிர்த்துளைக் குழாயூடே சென்று கொண்டிருக்கின்ற திரவத்தின் வெப்பநிலைக்குச் சமன் அன்று; எனவே திருத்த வரிசை எதுவாகிலும் திருத்தஞ் செய்தல் கடினமாம். எவ்வாறு ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் கரையத்தின் செறிவுடன் கரைசலொன்றின் பிசுபிசுப்பு மாறுகின்றது என்பதை ஆராயுமிடத்து இத்தொல்லை எழாது.

இந்நூலாசிரியரால் மாற்றியமைக்கப்பட்ட ஒஸ்பேண் றெனல்ஸ் பிசுபிசுப்பு மானி வகையொன்று படம் 11·07 இற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. ஏற்கெனவே கூறியுள்ள முதலாவது பிரச்சினையானது இங்கு தீர்க்கப்படவில்லை என்பது உண்மையே ; ஆனாலும் ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் பரிசோதனைகளை நடாத்தும்பொழுது அமுக்கவுயரத்தை நிலைநிறுத்த முடிகின்றது. அகன்ற குழாய் A யுடன் றப்பர் அடைப்பானொன்று பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது ; அவ்வடைப்பானூடே நான்கு குழாய்கள் செல்லுகின்றன. குழாய் B ஆனது 1 மிமீ. விட்டமுடைய ஒரு மயிர்த்துளைக் குழாயாகும் ; அதனது கீழ்முனை குழாய் A யின் நடுவை அடைந்திருக்கிறது. C ஒரு கட்டையான குழாய் ; C யுடன் றப்பர்க் குழாயால் தொடுக்கப்பட்டுள்ள திண்மக் கண்ணாடிக் கோலைப் பயன்படுத்தி வளிமண்டலத்தைக் குறித்து C யை மூடி அல்லது திறந்து வைக்கலாம். பிசுபிசுப்புமானியில் திரவத்தைப் புகுத்தும் பொருட்டு C யைக் காட்டிலும் அகன்ற குழாய் D யானது சிறு சேமிப்புக்கலமொன்றுடன் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. பரிசோதனையைத் தொடங்குமுன் இக்குழாயூடே வளியைச் செலுத்தி A யிலுள்ள திரவத்தை நன்கு கலக்கமுடிகின்றது. இவ்வாறு செய்தல் அவசியம் ; ஏனெனில், பெரும்பான்மையான திரவங்களிடத்து வெப்ப நிலையுடன் பிசுபிசுப்பு உயர் வீதத்தில் மாறுகின்றபடியால் A எங்கணும் வெப்பநிலை மாறாமலும் சீராகவும் நிலைநிறுத்தப்படல் வேண்டும் எனத் தெளிக. E ஒரு நீரிறக்கி. அதன் முனையுடன், ஒன்றில் றப்பர்க் குழாய் மூலம் அல்லது கண்ணாடிக் குழாய்களை உருக்கி ஒட்டி, திரவம் பாய்கின்ற மயிர்த்துளைக் குழாய் F ஆனது தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. மயிர்த்துளைக் குழாயானது நீளம் கிட்டத்தட்ட 10 சமீ. உம் உள்விட்டம் கிட்டத்தட்ட 0·02 சமீ. உம் உடையது. நீரிறக்கியுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற குழாய் K யைப் பயன்படுத்தி பரிசோதனையைத் தொடங்கு முன் பிந்தியதை நிரப்பமுடிகின்றது ; அதற்குப் பின் அது மூடப்படுகிறது ; பரிசோதனை நடக்கும்பொழுது பிசுபிசுப்புமானியில் தோற்றக்கூடிய குமிழிகளைச் சேமிக்க பயன்படுகின்றது. இக்குமிழிகளை நீரிறக்கியில் ஒன்றுசேரவிடில் திரவத் தின் உறுதிப்பாய்ச்சலின் உறுதி பெரிதும் பாதிக்கப்படக்கூடும்.

A யில் வெப்பநிலை (வெப்பமானியானது படத்திற் காட்டப்படவில்லை) உறுதிநிலையை அடைந்ததும், செருகியை C யிற் புகுத்தி, D யிலுள்ள குழாயடைப்பு மூடப்படுகிறது. நீரிறக்கியின் கீழ்முனையிலுள்ள செருகி G நீக்கப்பட்டதும் திரவம் ஆய்கருவியினின்று கசியும் ; B யூடே புகுகின்ற வளி அதன் இடத்தைக் கொள்ளும் ; A யிலுள்ள திரவத்தின் மட்ட மானது B யின் கீழ்முனையின் மட்டத்திற்குக் கீழே ஒருபோதும் இறங்காமல் இருக்குமானால் திரவவுச்சி மாறாமல் இருக்கும். ஏற்கெனவே நிலைநிறுத்தியுள்ள சூத்திரத்தினின்று பிசுபிசுப்புக் குணகம் பெறப்படு கின்றது.

குழாய் A யின் கீழான முனையில் தக்கையொன்றைப் பொருத்தி, நீரிறக்கி அக்குழாயில் கிட்டத்தட்ட முற்றிலும் இருக்குமாறு செய்தல் முடியும் ; ஆனால் நீண்ட திரவநிரலொன்றை மாரு வெப்பநிலையில் நிலைநிறுத்துவதற்கான முயற்சிகள் பற்றிய பிரச்சினைகள் நன்கு தெரிந் திருக்கிறபடியால் இவ்வேறுபடுத்துகையால் நயம் பெற முடியும் என்னும் நம்பிக்கை சாத்தியமன்று.

நிலைக்குத்தான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே நெருக்கருந் திரவ மொன்றின் பாய்ச்சல் பற்றிய உரை.—திரவமானது AB என்னும் குழாயூடே உறுதியாய்ப் பாய்க, படம் 11·08 (a). சிறு உருளைவடிவ மூலகமொன்று மீதுள்ள விசைகளைக் கருதுக ; மூலகத்தின் முனைகள் A யிலிருந்து z, $(z+\delta z)$ என்னும் தூரங்களில் இருக்கின்றன ; அதன் வளைந்த பரப்புகளின் ஆரைகள் r உம் $(r+\delta r)$ உம் ஆகும். திரவத்திலே மேற்படி மூலகத்தின் உள்ளான வளைந்த பரப்புமீதுள்ள புள்ளியொன்றிலே வேகம் u ஆகுக. வெளியான வளைந்த பரப்பு மீதுள்ள புள்ளியொன் றில் வேகம் $\left(u+\frac{\partial u}{\partial r}\delta r\right)$ ஆகும். மூலகமீது தாக்குகின்ற விசைகள் படம் 11·08 (b) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன ; அங்கு திரவத்தின் பிசுபிசுப்பாலாகும் விசைகள் உண்மையில் வளைபரப்புகள் மீது பரவியிருக் கின்றன என்பதை ஞாபகப்படுத்தல் வேண்டும். அதேபோல் திரவத்தில் அமுக்கத்தால் உற்பத்தியாகின்ற விசைகள் மூலகத்தின் தடையான முனை கள் மீது பரவியிருக்கின்றன. திரவம் ஆர்முடுகலின்றி அசைகின்றபடியால் உறுதிநிலையில் கீழ்முகமாகத் தாக்குகின்ற விளையுள் விசை பூச்சியமா கும்.



படம் 11·08 நிலைக்குத்தான மயிர்த்துளைக் குழாயூடே திரவமொன்றின் உறுதிப் பாய்ச்சல் பற்றிய கொள்கை.

ஆகவே,

$$-2\pi r\eta.\delta z.\frac{\partial u}{\partial r}+2\pi\eta.\delta z\left[r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\delta r\right]$$
$$+2\pi r.\delta r.g\rho.\delta z+2\pi r.p\;\delta r-2\pi r.\delta r\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)=0\;;$$

இங்கு g யும் ρ வும் அவற்றின் வழக்கமான கருத்துக்கள் உடையன.

$$\therefore\; g\rho r+\eta\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)-r\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

இனி
$$\frac{\delta p}{\partial z}=-\left(\frac{p_1-p_2}{l}\right);$$

எனவே,
$$\left(g\rho+\frac{p_1-p_2}{l}\right)r=-\eta\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

$$\therefore\;\left(g\rho+\frac{p_1-p_2}{l}\right)\frac{r}{2}+\frac{A}{r}=-\eta\frac{\partial u}{\partial r}.$$ [A = தொகையீட்டு மாறிலி].

$$\therefore\;\left(g\rho+\frac{p_1-p_2}{l}\right)\frac{r^2}{4}+A\ \text{இ.ம}\ r+B=-\eta u,$$ [B = தொகையீட்டு மாறிலி].

ஆனால் $r\to 0$ ஆகுமிடத்து $u\neq\infty$ ஆதலால் $A=0$; மேலும் $r=a$ ஆகுமிடத்து $u=0$.

$$\therefore\; B=-\left[g\rho+\left(\frac{p_1-p_2}{l}\right)\right]\frac{a^2}{4}.$$

$$\therefore\; u=\left[g\rho+\left(\frac{p_1-p_2}{l}\right)\right]\left(\frac{a^2-r^2}{4\eta}\right).$$

செக்கனொன்றிலே, குழாயூடே பாய்கின்ற திரவத்தின் கனவளவு Q எனின்,

$$Q=\int_0^a u.2\pi r.dr$$

எனப் பெறுகிறோம் ; தொகையிட்டபின் அது

$$Q=\frac{\pi a^4}{8\eta}\left[\frac{p_1-p_2}{l}+g\rho\right]$$

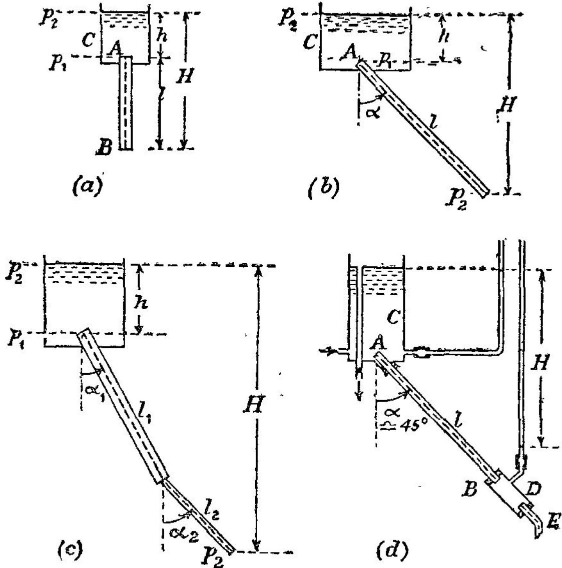
ஆகிறது.

இச்சமன்பாட்டின் உட்கருத்தை முற்றிலும் உணரும் பொருட்டுப் படம் 11·09 (a) யிற் காட்டியுள்ள நிலைக்குத்தான இலட்சியப் பிசுபிசுப்புமானியைக் கருதுவோம். வெளிவாயில் B யிற்கு மேலே தாங்கி

C யிலுள்ள திரவப்பரப்பின் உயரம் H உம், மயிர்த்துளைக் குழாயின் புகுவாயில் A யிற்கு மேலே குறித்து அதன் உயரம் h உம் ஆயின்,

$$Q=\frac{\pi a^4}{8\eta}\cdot\frac{g\rho h+g\rho l}{l}=\frac{\pi a^4}{8\eta l}\cdot g\rho H$$

எனப் பெறுவோம்.



படம் 11·09. நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் சாய்ந்திருக்கின்ற குழாய்களூடே நெருக்கருந் திரவமொன்றின் பாய்ச்சல்.

படம் 11·09 (b) யில் இருப்பது போல, மயிர்த்துளைக் குழாயானது நிலைக்குத்துக் கோட்டுடன் சாய்வுக்கோணம் α ஆக்குமுகமாக இருக்கும் பொழுது குழாயின அச்சு வழியே புவியீர்ப்புச் செறிவின் கூறுனது g கோசை α ஆகும்; ஆதலின் பக்கம் 636 இலுள்ள சூத்திரம்

$$\begin{aligned}Q&=\frac{\pi a^4}{8\eta}\left[\frac{p_1-p_2}{l}+g\text{ கோசை }\alpha.\rho\right]\\&=\frac{\pi a^4}{8\eta}\left[\frac{g\rho h+g\rho l\text{ கோசை }\alpha}{l}\right]\\&=\frac{\pi a^4}{8\eta l}.Hg\rho\end{aligned}$$

ஆகின்றது ; எனவே திரவவுயரம் H என்பதே தரப்பட்ட மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே தரப்பட்ட திரவமொன்றின் பாய்ச்சல் வீதத்தைப் பயன் படும் வகையில் நிர்ணயிக்கிறது.

திரவம்பாய் குழாயானது படம் 11·09 (c) யில் காட்டியுள்ள விவரங் களுடைய தொடரான இரு மயிர்த்துளைக் குழாய்களால் அமைக்கப்பட்டி ருப்பின், அப்பொழுது மயிர்த்துளைக் குழாய்களின் மூட்டில் அமுக்கம் p எனின், செக்கனொன்றில் குழாய் ஒவ்வொன்றினூடேயும் பாய்கின்ற திரவத்தின் கனவளவு Q ஆதலால்

$$Q.\frac{8\eta l_1}{\pi a_1^4}=p_1-p+g\rho l_1 \text{ கோசை } \alpha_1 \text{ உம்}$$

$$Q.\frac{8\eta l_2}{\pi a_2^4}=p-p_2+g\rho l_2 \text{ கோசை } \alpha_2 \text{ உம்}$$

ஆகும்.

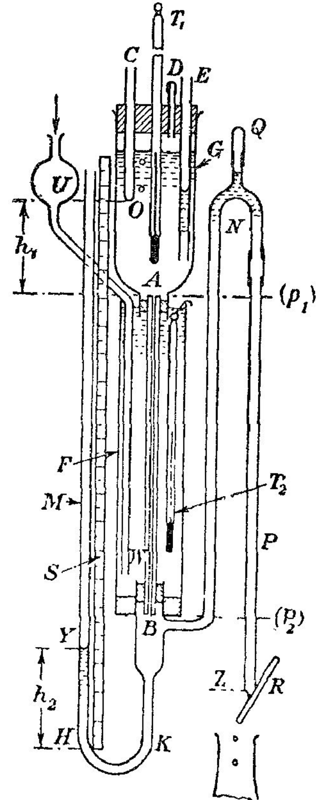
$$\therefore\ Q.\frac{8\eta}{\pi}\left[\frac{l_1}{a_1^4}+\frac{l_2}{a_2^4}\right]=g\rho[h+l_1 \text{ கோசை } \alpha_1+l_2 \text{ கோசை } \alpha_2]$$

$$=g\rho\text{H}.$$

குழாய்நீரின் பிசுபிசுப்பு : சாய்ந்த மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே பாய்ச்சல்.—ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் குழாய்நீரின பிசுபிசுப்பைத் துணிதற்கென இந்நூலாசிரியர் திட்டமிட்ட ஆய்கருவியொன்று படம் 11·09 (d) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. வழக்கமான, மாறுத் திரவவுயரம் தருகின்ற உபகரணமாகப் பயன்படுகின்ற, உலோகக் கொள்பாத்திரம் C யின் அடியில் மயிர்த்துளைக் குழாய் AB ஆனது பொருத்தப்பட்டிருக் கிறது. AB யின் கீழ் முனையில் அமுக்கம் p_2 ஆனது மாறுமல் இருக்கும் பொருட்டு B யுடன் நுண்மயிர்த்துளைக் குழாய் E உடைய பித்தளையா லான சிறு குழாய் D தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. p_1, p_2 என்பவற்றின் பெறுமானங்கள் பற்றி எதையும் கொள்ளாது H இன் பெறுமானத்தை நேரடியாகத் துணியும் பொருட்டு, அமுக்கமானிக் குழாய்கள் அங்குக் காட்டியுள்ளவாறு அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன ; உதாரணமாக, p_2 ஆனது வளிமண்டல அமுக்கத்திற்குச் சமன் அன்று ; D யைப் பயன்படுத்தாத விடத்துத் துளிகள் பிரியுங்காலே p_2 ஆனது உணரத்தக்க அளவில் மாறுகின்றது. E யிற்கு நுண்குழாயொன்றைப் பயன்படுத்தினுல் அமுக்கமானியில் வ. கை. ப. குழாயிலுள்ள நீர்மட்டத்தைப் பாதிக்கு முகமாக D யின் வெளிவாயிலிலே தோன்றும் அமுக்கமாற்றங்கள் 'தெறிக்கப்படமாட்டா' ; முந்திய பந்தியில் ஏற்படுத்தியுள்ள சூத்திரத் தைப் பயன்படுத்தி பிசுபிசுப்பு கணிக்கப்படுகிறது.

திரவங்களுக்கான நிலைக்குத்துப் பிசுபிசுப்புமானி.—நிலைக்குத்தாக அமைந்திருக்கின்ற மயிர்த்துளைக் குழாய் உடைய பிசுபிசுப்புமானியொன்று படம் 11·10 இற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. முதலிடத்தில் மாணுக்கரின்

தேவையையிட்டே அது திட்டமிடப்பட்டிருக்கிறது ; அதனைத் திட்டமான ஓர் ஆய்கருவியாக அமைப்பதற்குத் தேவையான சிறு மாற்றங்கள் தெளிவாம். அகன்ற கண்ணுடிக்குழாய் G ஆனது சோதனைக்கான திரவத்தைக் கொண்டிருக்கிறது ; G யின் கீழ்ப்பகுதியுடன் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்ற ஒரு றப்பர் அடைப்பானல் மயிர்த்துளைக் குழாய் AB ஆனது நிலைக்குத்தாகக் காவப்படுகிறது. குழாய் G யின் மேல் முனையில் பொருத்தப் பட்டிருக்கின்ற இரண்டாவது றப்பர் அடைப்பான் வெப்பமானி T_1 ஐயும் கண்ணுடிக் குழாய்கள் C, D, E என்பவற்றையும் காவுகின்றது. தேவைப்படும் பொழுது E வழியாகத் திரவம் புகுத்தப்படுகிறது ; அப்பொழுது ஆய்கருவியினின்று பெயர்க்கப்பட்ட வளியானது தப்பும் பொருட்டு D மீதுள்ள றப்பர்க் கவிப்பு அப்புறப்படுத்தப்படுகிறது. நோக்கல்களை எடுக்குமுன் திரவமானது நன்கு கலக்கப்பட்டிருக்கும் பொருட்டு அதன் ஊடே வளி ஊதப்படுகிறது ; அதற்குக் குழாய் E பயன்படுகிறது. D மூடப்பட்டிருக்க, மயிர்த்துளைக் குழாய் AB யூடே திரவம் பாயும் பொழுது C யால் ஆய்கருவியுள் வளி புகுகின்றது ; எனவே C யின் கீழ் முனையிலுள்ள அமுக்கமானது கிட்டத்தட்ட மாருது இருக்கும் ; கீழே கையாளப்படுகின்ற முறையால் இச்சிறு மாறலின் விளைவு நீக்கப்படுகிறது.



படம் 11·10. திரவங்களுக்கான நிலைக்குத்துப் பிசுபிசுப்புமானி.

இனி, B யினின்று திரவத்துளிகளை வளியுள்ளே நேரடியாக விழவிட்டால், திரவத்தில் B யிலுள்ள அமுக்கம் மாருது இருக்கமாட்டாது. இத்தொல்லையைத் தீர்க்கும் பொருட்டு, காட்டியிருக்கின்ற வடிவமுடைய கண்ணுடிக்குழாயொன்றுள்ளே மயிர்த்துளைக் குழாய் AB யின் கீழ் முனை பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. அது அமுக்கமானியாகப் பயன்படுகின்ற குழாய் M உடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது ; அத்துடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற தலைகீழான U குழாய் BNZ ஆனது திரவம் தப்பிச் செல்லப் பயன்படுகிறது. பிசுபிசுப்புமானியை நிரப்புங்காலே, U குழாயின் உச்சியிற் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்ற குழாய் Q ஆனது

வளிக்குமிழிகள் தப்பும் வண்ணம் இடங்கொடுக்கின்றது ; பிசுபிசுப்புமானி செயலாற்றும் பொழுது Q ஆனது றப்பர்க் கவிப்பொன்றால் மூடப்பட்டிருக்கிறது.

குழாய் Z இன் முனையில் உறுதிநிலையை நிச்சயிக்கும்பொருட்டு, Z மீது சிறு கண்ணாடிக் கோல் R என்பது விறைப்பாகப் பிடிக்கப்படுகிறது ; R இலிருந்து பிரிகின்ற துளிகள் நிறுக்கப்பட்ட குடுவையொன்றிலே சேர்க்கப்படுகின்றன.

வளிமண்டல அமுக்கம் P ஆகுக. அப்பொழுது குழாய் C யின் கீழ் முனை O விலுள்ள திரவத்தில், அமுக்கமானது $(P-\alpha)$ ஆகும் ; இங்கு α ஆனது பரப்பிழுவையாலாகும் அமுக்கச் சுருக்கத்தையும் குமிழியின் பரப்பு நிலையான தானத்தில் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறதில்லை என்பதற்கான ஒரு திருத்தத்தையும் உணர்த்துகிறது. உண்மையில் α மாறுந்தன்மையுடையது ; ஆனால் வசதியாக அளக்கக்கூடிய அளவு திரவம் தப்பத் தேவையான நேரத்தில் அது மாறாச் சராசரிப் பெறுமானமொன்றை அடையலாம். எனவே மயிர்த்துளைக் குழாயின் மேல் முனை A யில் அமுக்கம் p_1 ஆனது,

$$p_1 = P - \alpha + g\rho h_1$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு h_1 என்பது O விற்குக் கீழே A யின் ஆழம் ஆகும் ; g யும் ρ வும் அவற்றின் வழக்கமான அர்த்தங்கள் உடையன. இனி B யில் அமுக்கம் p_2 ஆனது

$$p_2 = P + g\rho h_2 + \beta$$

என்பதால் தரப்படுகிறது ; இங்கு β என்பது, h_2 ஐ அளப்பதற்குப் பயன்படுகின்ற பூச்சியத் தானமானது B யில் அமையாதபடியால் ஆகின்ற ஒரு திருத்தவுறுப்பாகும் ; மேலும் திரவத்தில் Y யிலுள்ள அமுக்கமானது சரியாக வளிமண்டல அமுக்கத்துக்குச் சமன் இல்லாதபடியாலும் அது தேவைப்படுகின்றது ; முந்தியதையிட்டுக் குழாய் HK யின் கீழான பாகமீது ஒய்வாய் இருக்கின்றதும் சமீ. முதலியவற்றில் அளவுகோடிடப்பட்டிருக்கின்றதுமான அளவுத்திட்டம் என்பதைப் பயன்படுத்துதல் வசதியாம்.

எனவே பக்கம் 636 இல் நிறுவியுள்ள சூத்திரத்தை

$$Q = [(\pi a^4)/(8\eta l)]\,[P - \alpha + g\rho h_1 - P - g\rho h_2 - \beta + g\rho l]$$
$$= [(\pi a^4)/(8\eta l)]\,[C - g\rho h_2]$$

என்றவாறு எழுதலாம் ; இங்கு C, தரப்பட்ட ஆய்கருவியொன்றிற்கான மாறிலியாகும்; குழாய் NZ என்பதற்கு வெவ்வேறு நீளங்களைப் பயன்படுத்தி நோக்கற்றொடரொன்றைப் பெறுவோமாயின், $x = h_2$ எனவும் $y = Q$ எனவும் எழுதி நேர்கோட்டு வரைபொன்றைப் பெறலாம். இந்நேர்கோட்டின் சரிவு $-[(\pi a^4)/(8\eta l)]g\,\rho$ ஆகும் ; எனவே η ஐக்

காணமுடிகின்றது. குழாய் AB சரியாகச் சீராக இராவிட்டால், பக்கம் 626 இல் கூறியுள்ளவாறு அதனை அளவுகோடிடுதல் வேண்டும்; அப்பொழுது வரைபின் சரிவு

$$-\left[(\pi g\rho)\Big/\left\{8\eta\ \Sigma\left(\frac{\Delta l}{a^4}\right)\right\}\right]$$

என்பதாகும்.

ஆய்கருவியை வசதியாக வெப்பநிலைநிறுத்தியொன்றில் அமைக்க முடியாதபடியால், வெப்பநிலை கிட்டத்தட்ட மாறுது இருக்கின்ற அறையொன்றில் ஆராய்ச்சியை நடாத்துதல் இன்றியமையாததாகின்றது. மேலும், மயிர்த்துளைக் குழாயை நீர் கொண்டிருக்கின்ற அகன்ற கண்ணுடிக் குழாய் F ஆற் சுற்றிவைத்தல் வேண்டற்பாலது. கண்ணுடிக்குழாய் UW வழியாக வளியைச் செலுத்தி நீர் கலக்கப்படுகிறது; இங்கு வளிக்கு அமுக்கம் அளித்தற்கான ஆய்கருவியில் நீர் புகாவண்ணம் U விலுள்ள குமிழ் பயன்படுகின்றது. இரச வெப்பமானி T_2 ஆனது மயிர்த்துளைக் குழாயின் வெப்பநிலையைத் தருகின்றது.

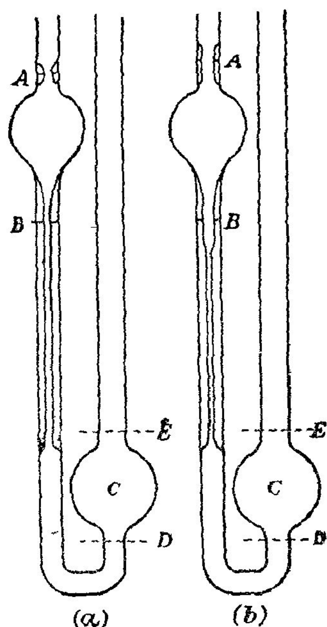
துளிகளைச் சேர்க்குமிடத்து, R இன் முனையினின்று துளியொன்று விழுந்ததும் குடுவையை அதனது இடதில் வைத்துச் சிறிது நேரத்தின் பின் இன்னொன்று விழுந்ததும் அக்குடுவையைப் பெயர்த்தல் அறிவுடையதாம். மேற்படி துளிகளின் வீழ்ச்சிகளுக்கிடையேயுள்ள நேரத்தைத் திருத்தமான நிறுத்தற்கடிகாரமொன்ருல் அளத்தல் வேண்டும்.

23·0° ச. இல், (வளியில்லாத) காய்ச்சி வடித்தநீருடன் கீழ்வருகின்ற பேறு கிடைத்துள்ளது. h_2 எனபது 18·55 சமீ. இலிருந்து 52·70 சமீ. வரை, அதாவது Y யின் நிலையானது H இற்கு அணித்தாயுள்ளதொன்றிலிருந்து A யிற்கு அணித்தாயுள்ளதொன்று வரை மாற்றிவைக்கப்பட்டுள்ளது என்பது தெரியவருகிறது. பரிசோதனையின்போது வெப்பநிலையானது 22·9° ச. இலிருந்து 23·1° ச. வரை மாறிற்று.

நீரின் திணிவு (கி.)	பாய்ச்சல் நேரம் (செக்.)	பாய்ச்சல் வீதம் (கி.செக். $^{-1}$)	h_2 (சமீ.)
13·723	604·1	0·0227	18·55
13·651	604·6	0·0226	18·55
3·600	610·5	0·0059	52·70
3·475	603·6	0·0058	52·70
12·240	605·0	0·0202	23·80
10·682	607·0	0·0176	29·20
8·568	602·1	0·0142	34·95
6·730	603·0	0·0112	41·00

இவை 23·0° ச. இல் $\eta=(9\cdot43\pm0\cdot07)\times10^{-3}$ கி.சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$ எனத் தருகின்றன.

தொடர்புமுறை அளவீடுகளுக்கான பிசுபிசுப்புமானிகள்.—ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் குழாய்நீரின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்குப் பயன்படுத்தப் படுகின்ற ஆய்கருவியில், குறிப்பிட்ட ஏதேனுமொரு பாய்ச்சல் வீதத்தினிடத்துத் திரவவுயரம் மாறுது இருக்கின்றது; எனவே மயிர்த்துளைக் குழாயின் முனையொன்றிலுள்ள அமுக்கத்துக்கு மேலாக அதன் மறுமுனையிலுள்ள அமுக்க மிகையானது மாற்றமில்லாமல் இருக்கின்றது. வேற்றுத் திரவங்களின் சோதனையின்போது திரவ வழுங்கல் கட்டுப் படுத்தப்பட்டிருக்கின்றது; எனவே பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்ற ஒஸ்போண் றெனல்ஸ் பிசுபிசுப்புமானியில் இருப்பது போலவே திரவவுயரமானது மாறுது இராது. தொடர்புப் பிசுபிசுப்புக்களைத் துணியுமிடத்து இம்மாறும் அமுக்க வுயரமானது கிட்டத்தட்ட முற்றிலும் நீக்கப்படுகிறது. பிசுபிசுப்புக்களின் ஒப்பீட்டுக்கான மிகப் பழைமைவாய்ந்த பிசுபிசுப்புமானிகளுள் ஒஸ்வால் என்பவரால் ஆனது ஒன்றுகும்; அப்பிசுபிசுப்புமானியானது இன்றும் பொதுவாகப் பயன்படுகிறது; பின்வந்தோர் இக் கருவியின் அமைப்பிலே பல சிறு மாற்றங்களைப் புகுத்தியுள்ளனர். பிசுபிசுப்பின் தனித்துணிதலில் தோன்றும் வழுக்களைக் காட்டிலும் அக்குணகத்தின் தொடர்புத் துணிதலில் தோன்றுவன மிகச் சிறிதே எனப் பௌதிகவியலின் இத்துறையில் ஈடுபடுகின்ற ஆராய்ச்சியாளர் வற்புறுத்துகின்றனர். இதையிட்டு ஐயமேயில்லை; தொடர்பு அளவீடுகளின் போதுள்ள அதிநுட்பமானது நீட்டலளவைகளை எடுக்கும்போது நிகழ்கின்ற வழுக்களின் துணிதலைத் தவிர்ப்பதாலும், ஆய்கருவி அத்துணைச் சிக்கல் இல்லாதபடியால் வெப்பநிலையாளுகை எளிமைமிக்கதாதலாலும் ஆகின்றதாம்.

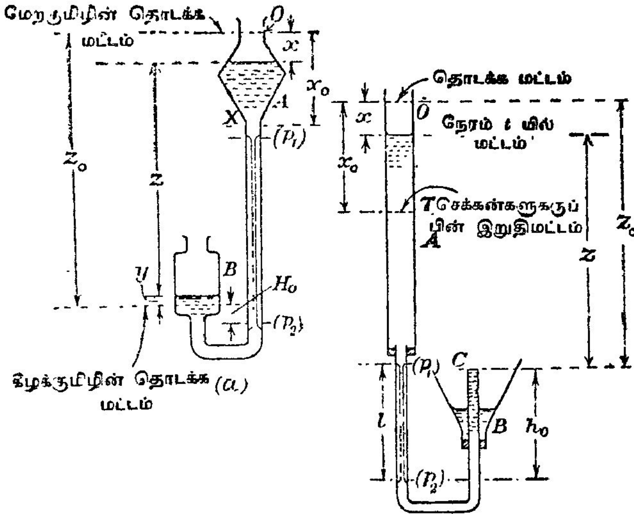


படம் 11·11. ஒஸ்வாலின் பிசுபிசுப்புமானிகள்.

இப் பிசுபிசுப்புமானியின் எளிய வகைகள் படங்கள் 11·11 (*a*) யிலும் (*b*) யிலும் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. ஆய்கருவியின் வலப்பக்கத்துப் பகுதியில் குழாயியொன்றல் மாறுக் கனவளவுடைய திரவத்தைப் புகுத்தி, அது பிசுபிசுப்புமானியில் A யிற்குச் சற்று மேலிருந்து குறி D யிற்குச் சற்று மேல் வரையுள்ள பாகத்தை நிரப்புமாறு செய்யப்படுகிறது. அடுத்துத் திரவத்தை இறங்கவிட்டு A யினின்று B வரை அதன் இறக்கத்துக்கான

நேரம் துணியபபடுகிறது. பிசுபிசுப்புமானியில் இரு திரவங்களின் இப் பாய்ச்சல் நேரத்தை நோக்கி எவ்வாறு அவற்றின் தொடர்புப் பிசுபிசுப்பின் பெறுமானத்தைப் பெறலாம் என்பதை அறியக் கீழ்வருகின்ற கொள்கை தேவைப்படுகிறது.

ஒஸ்வாலின் பிசுபிசுப்புமானியொன்றிற்கான கொள்கை.—படம் **11·12** (a) ஆனது ஒஸ்வாலின் பிசுபிசுப்புமானியொன்றின் படமாகும்; அங்கு



படம் 11·12. ஒஸ்வாலின் இருவகைப் பிசுபிசுப்புமானிகளுக்கான கொள்கை.

பொதுமையையிட்டு, மேலான குமிழும் கீழான குமிழும் சர்வசமன் அன்று எனக் கொள்ளப்படுகின்றது; மேலான குமிழ் **A** யின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு A ஆனது x ஐ மட்டுமே சார்ந்த ஒரு சார்பாகும்; அதாவது $A=\phi(x)$, அதேபோல் **B** யிற்கு $B=\psi(y)$ என நாம் எழுதலாம்; இங்கு x ஆனது நேரம் t யில் A யிலுள்ள பிறையுரு இறங்கும் நிலைக்குத்துத் தூரமும் y ஆனது அதே நேரத்தில் **B** யிலுள்ள பிறையுரு ஏறும் தூரமும் ஆகும். அலகு நேரத்தில் நிலைக்குத்தான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே பாய்கின்ற திரவத்தின் கனவளவானது

$$dV=\frac{\pi a^4 g\rho z}{8\eta l}\,dt \qquad \text{[பக்கம் 636 பார்க்க]}$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது; இங்கு z, கருதப்படும் கணத்தில் **A** யிலும் **B** யிலும் உள்ள திரவ மட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள நிலைக்குத்துத் தூரமாகும்; மற்றைக் குறியீடுகள் அவற்றின் வழக்கமான கருத்துக்கள் உடையன.

ஆனால், நேரம் dt யில் A யில் இறக்கம் dx உம் B யில் அதற்கு ஒத்த ஏற்றம் dy யும் எனின், $A\,dx = dV = B\,dy$ ஆகும். நேரம் $t=0$ இல் திரவமட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள நிலைக்குத்துத் தூரம் z_0 எனின்,

$$A\,dx = \left[\frac{(\pi a^4 g\rho)}{(8\eta l)}\right][z_0 - x - y]dt$$

$$= k\left(\frac{\rho}{\eta}\right)f(x)dt$$

ஆகும் ; இங்கு $(z_0 - x - y)$ யிற்குப் பதிலாக $f(x)$ ஐ எழுதலாம் ;

$$dV = \phi(x)\,dx = \psi(y)\,dy$$

ஆதலின், அது x ஐ மட்டுமே சார்ந்த ஒரு சார்பாகும்.

$$\therefore \quad V = \int_{t=0}^{t} dV = \int_0^x \phi(x)\,dx = \int_0^y \psi(y)\,dy.$$

எனவே, y ஆனது x ஐ மட்டும் சார்ந்த சார்பொன்றாகும்.

ஆகவே $$\frac{A\,dx}{f(x)} = k\left(\frac{\rho}{\eta}\right)dt.$$

∴ A யிலுள்ள திரவத்தின் மட்டமானது அதன் தொடக்க நிலையினின்று $x = x_0$ என்னும் நிலைவரை இறங்குவதற்கான நேரம் τ எனின்

$$\int_0^{x_0} \frac{A\,dx}{f(x)} = k\left(\frac{\rho}{\eta}\right)\tau\ ;$$

[பிந்திய நிலையானது ஆய்கருவியின் தண்டில் X என்னும் குறியால் காட்டப்பட்டிருக்கிறது.]

இனி மாறா வெப்பநிலையில், தரப்பட்ட பிசுபிசுப்புமானியொன்றிற்கு $\int_0^{x_0} \frac{A\,dx}{f(x)}$ என்பது மாறிலியாகும் ; எனவே அத்தகைய சூழலில் $\rho\tau\eta^{-1}$ என்பது மாறாத்தன்மையுடையது ; ஆகவே, பிசுபிசுப்புமானியில் ஒன்றன் பினனொன்றாக இரு திரவங்கள் சோதிக்கப்பட்டால்

$$(\eta_1/\eta_2) = (\rho_1\tau_1)/(\rho_2\tau_2)$$

ஆகும். இவ்வகையைச் சேர்ந்த வேறொரு பிசுபிசுப்புமானி ஒஸ்வால், அயர்பாக்கு† என்பவர்களால் கூழ்நிலைக கரைசல்கள் பற்றிய அவர்க ளின் ஆராய்ச்சியிற் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அதற்கான சூத்திரத்தைப் பின்வருமாறு பெற்றுக்கொள்ளலாம். படம் 11·12 (b) ஆனது ஒஸ்வால், அயர்பாக்கு பிசுபிசுப்புமானியின் குறுக்குவெட்டொன்றைக் காட்டுகிறது. அகன்ற குழாய் A ஆனது சீரான குறுக்குவெட்டு உடையது எனக்

†ஒஸ்வாலும் அயர்பாக்கும், *Koll. Zeitsch.*, 41, 56, 1927.

கொள்ளப்படும் ; அதனிலுள்ள திரவத்தின் பிறையுருவானது நேரம் t யில் இறங்கும் தூரம் x ஆகுக. அப்பொழுது பரப்பிழுவை விளைவுகளுக் கான திருத்தங்கள் எல்லாவற்றையும் புறக்கணிக்குமிடத்து

$$dV = \frac{\pi a^4 g\, \rho z\, dt}{8\eta l}$$

ஆகும். மேலும் $dV = A_0\, dx$; A_0 ஆனது குழாய் A யின் மாறுக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு ஆகின்,

$$A_0\, dx = \frac{\pi a^4 g\rho(z_0 - x)}{8\eta l}\, dt$$

ஆகும் ; இங்கு z_0 ஆனது நிலைக்குத்துத் தூரம் OC யைக் குறிக்கிறது. எனவே, A யிலுள்ள திரவமட்டமானது தூரம் x_0 இறங்கத் தேவைப் படுகின்ற நேரம் τ எனின்,

$$A_0 \int_0^{x_0} \frac{dx}{z_0 - x} = \frac{\pi a^4}{8\eta l} g\rho \int_0^{\tau} dt.$$

$$\therefore \quad A_0\ இ.ம. \Big[(z_0 - x)\Big]_{x_0}^{0} = \frac{\pi a^4}{8\eta l} g\rho\tau\ ;$$

அதாவது
$$A_0\ இ.ம. \left(\frac{z_0}{z_0 - x_0}\right) = \frac{\pi a^4}{8\eta l} g\rho\tau\ ;$$

எனவே η இற்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறலாம்.

உதாரணம். (i) நிலைகுத்தாக இருக்கின்ற அதனது அரைச் சிறியச்சைக் குறித்து நீள்வளையமொன்றைச் சுழற்றி நீள்வளைய வடிவமுடைய பாத்திரமொன்று ஆக்கப்படுகிறது. பாத்திரத்தின உச்சியில சிறு துவாரமொன்று இருக்கிறது ; நீளம் l உம் ஆரை r உம் உடைய கிடையான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று பாத்திரத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில பொருத்தப் பட்டிருக்கிறது. பாததிரமானது அடர்ததி ρ வும் பிசுபிசுப்பு η வும் உடைய திரவமொன்றால் தொடக்கத்தில் நிரப்பபபட்டிருந்தால அது வெறிதாகும் நேரததைக் கணிக்க. [a யும் b யும் முறையே நீள்வளையத்தின் அரைப் பேரியச்சு எனவும் அரைச் சிறியச்சு எனவும் கொள்க.]

O ஆனது நீள்வளையத்தின் மையம் ஆகுக ; அப்பொழுது மையவகற்சிக் கோணம் ϕ எனின், (a கோசை ϕ, b சைன ϕ) என்பது அதன பரிதியிலுள்ள புள்ளி P யைக் குறிக்கும். $\phi + \delta\phi$ என்பது P யிறகு அணித்தாயுள்ள புள்ளி Q வைக் குறிக்குமாயின் P யிற்கும் Q விற்கும் ஊடே செலகின்ற இரு கிடையான தளங்களுக்கிடையே கொள்ளப்பட்டி ருக்கினற திரவத்தின் கனவளவானது

$$\delta V = \pi x^2 \delta z$$

என்பதால் தரப்படும் ; இங்கு $x = a$ கோசை ϕ ; z உம் $z + \delta z$ உம் முறையே நீள்வளையத் தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியூடே செல்கின்ற கிடையான தளத்தைக்குறித்து P, Q என்ப வற்றின் உயரஙகள ஆகும். எனவே

$$z = b + b\ சைன்\ \phi\ ;\quad \delta z = b\ கோசை\ \phi . \delta\phi.$$

$$\therefore \quad \delta V = (\pi a^2\ கோசை^2\ \phi)\ b\ கோசை\ \phi . \delta\phi.$$

ஆனால் $-\delta V$ யே நேரம் δt யில் மயிர்த்துளைக் குழாயூடே பாய்கின்ற திரவத்தின் கனவளவாகும்.

$$\therefore \quad -\delta V = \frac{\pi r^4 (g\rho z)\,\delta t}{8\eta l}. \quad [\because\ p = g\rho z]$$

$$\therefore \quad -\pi a^2 b \text{ கோசை}^3\,\phi\,.\,\delta\phi = kb\,(1 + \text{சைன் }\phi)\delta t\,;$$

இங்கு $$k = \pi r^4 g\rho \div 8\eta l.$$

$$\text{கோசை}^3\,\phi = (1 - \text{சைன்}^2\,\phi)\text{ கோசை }\phi \text{ ஆதலின்}$$

$$k\,.\,\delta t = -\frac{\pi a^2(1 - \text{சைன}^2\,\phi)d\,(\text{சைன் }\phi)}{1 + \text{சைன }\phi}$$

எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே பாத்திரத்தை வெறிதாக்க எடுக்கும் நேரம் t ஆனது

$$kt = -\pi a^2 \int_{\phi=\frac{1}{2}\pi}^{\phi=-\frac{1}{2}\pi} (1 - \text{சைன }\phi)\ d\ (\text{சைன் }\phi) = 2\pi a^2$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

$$\therefore \quad t = \frac{16a^2\eta l}{r^4 g\rho}\,;$$

இது அரைச் சிறியச்சின் நீளத்தைச் சாராது.

உதாரணம். (ii) விட்டம் $2b$ உடைய நீண்ட கிடையான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றில், அதன் நீளம் வழியே, விட்டம் $2a(a<b)$ உடைய கம்பியொன்று அககுழாயுடன் ஒரச்சுடையதாய் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டிருக்கிறது ; முதற்றத்துவங்களிலிருந்து அக்குழாயூடே அருவிக் கோட்டியககததுடன் பாயகின்ற நெருக்கரும் பாயியொன்றின பாய்சசல வீதத்திறகுக் கோவை யொன்றைப் பெறுக

கிடைக்கப் பெறுகின்ற சூத்திரத்தில் a என்பது பூச்சியமாக ஆக்கப்படின், அவ்வழி வரும் சூத்திரமானது குழாயொன்றூடே பாயகின்ற நெருககரும் பாயியொன்றிற்குப் புவாசேயின் சமன்பாட்டைத் தருமா ?

$$u = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\,r^2 + A\ \text{இ.ம.}\ r + B$$

எனப் பெறுகிறோம் ; பக்கம் 624 பார்க்க ; அது $-\dfrac{P}{4\eta l}\,r^2 + A\ \text{இ.ம.}\ r + B$ இற்குச் சமன் என்க.

இனி $r = a$ எனனுமிடத்தும் $r = b$ என்னுமிடத்தும் $u = 0$; எனவே

$$A = \frac{P(b^2 - a^2)}{4\eta l}\left[\frac{1}{\text{இ.ம.}\left(\dfrac{b}{a}\right)}\right]; \quad B = \frac{Pa^2}{4\eta l} - \frac{P(b^2 - a^2)}{4\eta l}\left[\frac{\text{இ.ம. } a}{\text{இ.ம.}\left(\dfrac{b}{a}\right)}\right].$$

$$\therefore\ u = \frac{P}{4\eta l}\left[(a^2 - r^2) + \frac{b^2 - a^2}{\text{இ.ம.}\left(\dfrac{b}{a}\right)}\ \text{இ.ம}\left(\frac{r}{a}\right)\right].$$

∴ செக்கனென்றிலே பாய்கின்ற திரவத்தின கனவளவு

$$=\int_a^b u.2\pi r dr=\frac{\pi}{8\eta}\frac{(p_1-p_2)}{l}\left[b^4-a^4-\frac{(b^2-a^2)^2}{\text{இ.ம.}\left(\frac{b}{a}\right)}\right].$$

இவ்வினவின் கடைசிப் பகுதிக்கான விடையை

Andrade, *Trans. Far. Soc.*, 27, 201, 1931.

என்பதில காண்க.

புவாசேயின் சூத்திரத்திற்குரிய திருத்தங்கள்.—இரு முதன்மையான காரணிகள் புறக்கணிக்கப்பட்டிருப்பதால், நீண்ட மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றிலே திரவமொன்றின் உறுதிப் பாய்ச்சல் வீதத்திறகான புவாசேயின் சமன்பாடு

$$Q=\frac{\pi a^4(p_1-p_2)}{8\eta l}$$

என்பது அண்ணளவானது என்றே கருதல் வேண்டும். முதலாவதாக p என்று எழுதப்படுகின்ற அமுக்க வித்தியாசம் p_1-p_2 என்பதில் ஒரு பகுதியானது திரவத்திற்கு இயக்கச் சக்தியூட்டுவதிற் பயன்படுத்தப்படுகிறது ; இரண்டாவதாகத் திரவமானது மயிர்ததுளைக் குழாயின் நுழைவழிக்கு அணித்தாயுள்ள ஒரு சிறு தூரம் செல்லும் வரை, அதனது ஆர்முடுகல்கள் மறையாமல் இருக்கிறபடியால் அக்குழாயின் அச்சுவழியே ஆர்முடுகல்கள் இல்லை எனக் கொள்ளல் சரியன்று. இதற்கான திருத்தத்தையிட்டுக் குழாயின் நீளத்துடன் ஒரு நீளம் α வழக்கமாகச் சேர்க்கப்படுகிறது ; இங்கு $\alpha=1{\cdot}64a$.

இயக்கச் சக்தித் திருத்தம் எனப்படுவதை மதிப்பிடும் பொருட்டு வில்வர்ஃபோர்ஸ் (Wilberforce) என்பார் † கீழ்வருமாறு செல்லலானர். சேமிப்புக் கலனிலிருந்தும் மயிர்த்துளைக் குழாயின் நுழைவழிக்கு அணித்தாயும் அக்குழாயுள் கனவளவு $Q\,\delta t$ உடைய திரவத்தைச் செலுத்தும்போது செலவாகின்ற வேலை $pQ\,\delta t$ ஆகும் ; இங்கு p ஆனது மயிர்த்துளைக் குழாயின் நுழைவழியிலுள்ள அமுக்கமிகை ஆகும் : இனி மிகப்பெரிய சேமிப்புக் கலனென்றினின்றும் மயிர்த்துளைக் குழாயுள் திரவம் புகுங்காலே அதற்குச் செக்கனென்றிலே வழங்கப்படுகின்றதும், குழாயினின்று வெளியேறும் வரை அத்திரவத்தாற் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்றதுமான இயக்கச் சக்தியானது செக்கனென்றிலே குழாயின் எந்தக் குறுக்கு வெட்டையும் கடந்து செல்கின்ற திரவ மூலகங்களுக்குக் கணித்து வருகின்ற இயக்கச் சக்திகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். தரப்பட்ட குறுக்கு வெட்டொன்றில், ஆரை r உம் அகலம் δr உம் உடைய சிறு கங்கணமொன்றூடே செக்கனென்றில் பாய்கின்ற திரவத்தின் கனவளவு $u.2\pi r.\delta r$ ஆதலால் அத்திரவத்தின் இயக்கச் சகதியானது

$$\tfrac{1}{2}\rho u.2\pi r\,\delta r.u^2$$

† *Phil. Mag.*, 31, 407, 1891.

என்பதாகும் ; இங்கு

$$u=\frac{\bar{p}}{4\eta l}(a^2-r^2),$$

பக்கம் 624 பார்க்க ; இங்கு திரவத்தின் பிசுக்குத் தடையை வெல்லுதற்கான விசைகளைத் தோற்றுவிக்கின்ற பலித அமுக்கமிகை $\bar{p}$ ஆகும்.

எனவே, செக்கனென்றில் முழுக் குறுக்குவெட்டூடே பாய்கின்ற திரவத்தின் இயக்கச் சக்தியானது,

$$\int_0^a \pi\rho u^3 r\,dr=\pi\rho\left(\frac{\bar{p}}{4\eta l}\right)^3\int_0^a (a^2-r^2)^3 r\,dr$$
$$=\pi\rho\left(\frac{\bar{p}}{4\eta l}\right)^3\cdot\frac{a^8}{8}$$

ஆகும். ஆனால் $Q=\frac{\pi a^4\bar{p}}{8\eta l}$. எனவே செக்கனென்றில் குழாயினின்று வெளியேறுகின்ற திரவத்தின் இயக்கச் சக்தி $\rho\frac{Q^3}{\pi^2 a^4}$ ஆகும்.

இனி, செக்கனென்றிலே செய்யப்படுகின்ற முழுவேலையும் பிசுக்குவிசைகளுக்கு எதிராகச் செய்யப்படுகின்ற வேலை, அதாவது பலித அமுக்கம் $\times$ செக்கனென்றில் வெளியேறுகின்ற கனவளவு, $+$ மயிர்த்துளைக் குழாயினின்று பிரியும்போது திரவம் கொண்டிருக்கின்ற இயக்கச் சக்தி ஆகும். இவ்வண்ணம்,

$$pQ=\bar{p}Q+\frac{\rho Q^3}{\pi^2 a^4},$$

அல்லது

$$\bar{p}=p-\frac{\rho Q^2}{\pi^2 a^4}.$$

எனவே புவாசேயின் சமன்பாடானது

$$Q=\frac{\pi a^4}{8\eta(l+\alpha)}\cdot\left(p-\frac{\rho Q^2}{\pi^2 a^4}\right)$$

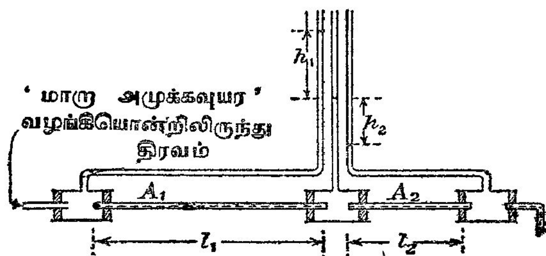
ஆகின்றது.

திரவமொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்குக் கூயேற்றின் முறை ; சில திருத்தங்களை நீக்கல்.—மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே திரவமொன்று உறுதியாய்ப் பாயுங்காலே அக்குழாய் வழியேயுள்ள பலித அமுக்க வித்தியாசத்துக்கான சூத்திரத்தை, அதாவது

$$\bar{p}=p-\frac{\rho Q^2}{\pi^2 a^4}$$

என்பதைச் சோதித்தால் திருத்தமானது குழாயின் நீளத்தைச் சாராது எனத் தெரியவரும். எனவே $\bar{p}=p-\beta$; இங்கு β ஆனது ஆரை

a யுடைய குழாய்களுக்கு ஒரு மாறிலியாகும். முந்திய பந்தியில் எடுத் துரைத்த இரு திருத்தங்களை நீக்கும் பொருட்டுக் கூயேற்று (Couette) என்பார் பின்வரும் பரிசோதனையைத திட்டமிட்டார். A_1 உம் A_2 உம்



படம் 11·13. திரவமொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்குக் கூயேற்றின் முறை.

அதே விட்டமும் ஆனால் முறையே வெவ்வேறான நீளங்கள் l_1 உம் l_2 உடைய இரு மயிர்த்துளைக் குழாய்கள் ஆகும்; அவை படம் 11·13 இற் காட்டியுள்ளவாறு ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டிருக்கின்றன. உயரங்கள் h_1, h_2 என்பவற்றை நோக்கிக் குழாய்களின் முனைகளுக்கிடையேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசங்கள் பெறப்படுகின்றன. இவ்வமுக்க வித்தியாசங்கள் P_1 உம் P_2 உம் எனின், அப்பொழுது செக்கனொன்றில் திரவத்தின் அதே கன வளவு குழாய் ஒவ்வொன்றிலும் பாய்கிறபடியால்

$$Q=\frac{\pi a^4}{8\eta(l_1+\alpha)}(P_1-\beta)=\frac{\pi a^4}{8\eta(l_2+\alpha)}(P_2-\beta)$$

எனப் பெறுவோம்; ஆனால்

$$Q(l_1+\alpha)=\frac{\pi a^4}{8\eta}(P_1-\beta) \quad \text{உம்}$$

$$Q(l_2+\alpha)=\frac{\pi a^4}{8\eta}(P_2-\beta) \quad \text{உம்}$$

ஆகும்.

$$\therefore \quad Q(l_1-l_2)=\frac{\pi a^4}{8\eta}(P_1-P_2)=\frac{\pi a^4}{8\eta}g\rho(h_1-h_2).$$

இப்பரிசோதனையிலுள்ள முதன்மையான பிரச்சினை சமமான மாறாக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவுகள் உடைய குழாய்கள் பெறுதலேயாம்.

ஒஸ்வாலின் பிசுபிசுப்புமானி வகையொன்றால் பிசுபிசுப்புக்களை ஒப்பிடுதல்.—திரவத்தின் இயக்கச் சக்தியையும் குழாயின் பலித நீளத்தையும் இட்டு திருத்தமொன்றும் அங்கு செய்யப்படாமல் இருக்கிறபடியால் பக்கம் 643 இல் ஒஸ்வாலின் பிசுபிசுப்புமானிக்குத் தந்துள்ள ஆரம்பக்

கொள்கையானது சற்றுப் பிழைபடுகின்றது. இப்பொழுது பக்கம் 648 இல் தந்துள்ள திருத்திய புவாசேயின் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி,

$$\eta=\frac{\pi a^4 pt}{8V(l+\alpha)}-\frac{\rho V}{8\pi(l+\alpha)t}$$

என எளிதிலே காட்ட முடியும்; இங்கு V ஆனது நேரம் t யில் வெளி யேறுகின்ற திரவத்தின் கனவளவு ஆகும்.

p ஆனது $g\rho h$ என்னும் அமைப்பு உடையதாதலின் மேற்படி சமன் பாட்டை

$$\eta=\rho\left(At-\frac{B}{t}\right)$$

என எழுதலாம்; இங்கு A யும் B யும் மாறிலிகள் ஆகும்.

இம்மாறிலிகளுக்குப் பெறுமானங்கள் பெறும்பொருட்டுத் தெரிந்த இயக் கவியற் பிசுபிசுப்புக்கள் ν_1 உம் ν_2 உம் உடைய இரு திரவங்களால் ஒன்றன்பின்னென்ருகப் பிசுபிசுப்புமானி நிரப்பப்படுகிறது. திரவமொன் றினிடத்தும் அதே கனவளவு V யை வெளியேற்றுவதற்கான நேரங்கள் முறையே t_1 உம் t_2 உம் எனின்,

$$A=\frac{\nu_2 t_2-\nu_1 t_1}{t_2^2-t_1^2}\ ;\quad B=\frac{t_1 t_2}{t_2^2-t_1^2}(\nu_2 t_1-\nu_1 t_2)$$

எனப் பெறுகிருேம்.

இனி, வேருெரு திரவத்தின் அடர்த்தி தெரிந்திருந்தால் இப் பிசுபிசுப்பு மானியைப் பயன்படுத்தி அத்திரவத்தின் பிசுபிசுப்பைத் துணியலாம்.

மயிர்த்துளைக் குழாய்கள் ஊடே வாயுக்கள், ஆவிகள் என்பவற்றின் ஆவியுயிர்ப்பு

(வழக்கமான அமுக்கங்களில்) மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே நெருக் கத்தகு பாயியொன்றின் உறுதிப் பாய்ச்சல்—மேயரின் சூத்திரம்.—மயிர்த் துளைக் குழாயொன்றூடே திரவமொன்றின் பாய்ச்சல் பற்றிய மேற்படி பரிசோதனைகளில் திரவமானது நெருக்கமுடியாதது எனவும் அதனது அடர்த்தியானது மாருது இருக்கின்றது எனவும் கொள்ளப்படுகிறது. ஆவியுயிர்க்கும் பொருளானது வாயுவாயிருக்குமாளுல் இதை உண்மை யில் ஏற்றுக்கொள்ளலாகாது. திரவங்களிடத்துக் குழாயச்சிலிருந்து சமதூரங்களில் இருக்கின்ற புள்ளிகளில் வேகம் u மாருது இருக்கின்றது எனக் காணப்படுகிறது; வாயுக்களைக் கருதுமிடத்துத் தரப்பட்ட நேரவிடை யொன்றில், குறுக்குவெட்டு ஒவ்வொன்றினதும் குறுக்கே, வாயுவின் சமதிணிவுகள் கடந்து செல்கின்றன என்னும் உண்மையிலிருந்தே நாம் தொடங்குகிருேம். இதன்பொருட்டுக் குழாயின் அச்சிலிருந்து ஒரு நிலை

யான தூரத்திலிருக்கின்ற எல்லாப் புள்ளிகளிலும் ρu என்னும் கணியம் மாருது இருத்தல் வேண்டும் ; இங்கு ρ ஆனது கருதப்படும் புள்ளியில் வாயுவின் அடர்த்தியைக் குறிக்கின்றது. எனவே அமுக்கம் குறைகிறபோது ρ வும் குறைகிறபடியால், குழாயின் வெளிவாயிலே அணுகும்போது பாய்ச்சல் வேகமானது கூடிக் கொண்டே போகும். $\rho \propto p$ ஆதலின், pu ஆனது x ஐச் சாராது ; இங்கு p அமுக்கமும், x குழாயின் நுழைவழியிலிருந்து புள்ளியின் தூரமும் ஆகும். மேலும், p ஆனது r ஐச் சாராது எனக் கொள்வோம்.

(*a*) அடிப்படைத் தத்துவங்களினின்றும் நிறுவுதல்.—திரவமொன்றிற்கு உள்ளதுபோல் இங்கும் இயக்கத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

ஆகும், பக்கம் 623 இற் காண்க.

$$\therefore\ p\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta p}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\eta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot \frac{\partial (pu)}{\partial r}\right].$$

x ஐக் குறித்துத் தொகையிட,

$$\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} = \frac{\eta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot \frac{\partial (pu)}{\partial r}\right](x_2 - x_1),$$

அல்லது

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2l} = -\frac{\eta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot \frac{\partial (pu)}{\partial r}\right];$$

இங்கு $l = (x_2 - x_1)$.

மேற்படி சமன்பாட்டின் இடப்பக்கத்தை A எனக் கூறி, r ஐக் குறித்துத் தொகையிட்டு

$$A\int \frac{r}{\eta} \cdot dr = -\int d\left[r \cdot \frac{\partial (pu)}{\partial r}\right]$$

எனப் பெறுகிரேம்.

$$\therefore\ \frac{A}{\eta} \cdot \frac{r^2}{2} = -r \cdot \frac{\partial (pu)}{\partial r} + \kappa_1 ;$$

இங்கு κ_1 ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி.

$$\therefore\ \frac{A}{2\eta} \cdot r\, dr = -d(pu) + \frac{\kappa_1}{r} \cdot dr.$$

$$\therefore\ \frac{A}{4\eta} \cdot r^2 = -pu + \kappa_1 \text{ இ.ம. } r + \kappa_2 ;$$

இங்கு κ_2 ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி.

இனி 'மூனே' நிபந்தனைகளிலிருந்து $\kappa_1 = 0$ உம் $\kappa_2 = \frac{A}{4\eta} a^2$ உம் ஆகும்.

$$\therefore \; pu = \frac{A}{4\eta}(a^2 - r^2) = \frac{p_1^2 - p_2^2}{8\eta l} \cdot (a^2 - r^2).$$

அமுக்கம் p_2 இலே, செக்கனொன்றில் வெளியேறுகின்ற கனவளவு Ω_2 எனின், அப்பொழுது

$$p_2 \Omega_2 = p\Omega \; ;$$

இங்கு Ω ஆனது அமுக்கம் p ஆய் இருக்கின்ற அதே குறுக்குவெட்டிற்குக் குறுக்கே செக்கனொன்றில் செல்கின்றதும், அமுக்கம் p யில் அளக்கப் பட்டதுமான கனவளவாகும். ஆனால்

$$\Omega = 2\pi \int_0^a ru \, dr.$$

$$\therefore \; p_2 \Omega_2 = \frac{\pi a^4}{16\eta l}(p_1^2 - p_2^2) = p_1 \Omega_1 = \mu \, \mathscr{R} \, T \; ;$$

இங்கு μ என்பது செக்கனொன்றில் பாயும் திணிவும், $\mathscr{R} = \frac{R}{M}$ உம், T ஆனது தனிவெப்பநிலையும், [R என்பது அகில வாயு மாறிலியும், M ஆனது மூலக்கூற்று நிறையும்] ஆகும்.

(b) திரவமொன்றிற்கான சூத்திரத்தினின்றும் வாயுவொன்றிற்கு மேயரின் சூத்திரத்தை நிறுவுதல்.—திரவமொன்றிறகுப் புவாசேயின் சமன் பாட்டை அறிமுறைப்படி நிலைநாட்டும்போது கையாண்டுள்ள எடுகோள்கள் வாயுக்களிடத்துப் பயன்படமாட்டா என ஏற்கெனவே கூறப்பட்டுள்ளது. வாயுக்களை எளிதில் நெருக்கமுடிகின்றபடியால், குழாயூடே அதாவது குழாயின் உயர்வமுக்கப்பாகத்தினின்று தாழ்வமுக்கப்பாகத்துக்கு வாயு வானது பாயும்போது அதன் வேகம் கூடிக்கொண்டே போகும் என எதிர்பார்க்கப்படுகிறது. உண்மையிலே வேகங்களுக்கு ஆரைக்கூறுகள் இருக்கிறபடியால் குழாயின் எந்தக் குறுககுவெட்டிலுமுள்ள வேகங்க ளின் பரம்பலுக்கான பரவளைவுச் சூத்திரத்தை ஓரளவு மாற்றியமைத்தல் வேண்டும் ; இருந்தாலும் குழாயில் முறையே x, $x + \delta x$ என்பவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட குறுக்கு வெட்டிலுள்ள அமுக்கங்கள் p யும் $p + \delta p$ யும் ஆயின், அப்பொழுது குழாயின் கருதப்படுகின்ற மூலகத்தினூடே செக்க னொன்றில் பாய்கின்றதும் அமுக்கம் p யில் அளக்கப்பட்டதுமான வாயுவின் கனவளவு Ω ஆனது

$$\Omega = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx}$$

என்பதால் முதலண்ணளவாகத் தரப்படுகிறது என மேயருடன் நாமும் கொள்ளலாம் ; இங்கு $\frac{p}{l}$ இற்குப் பதிலாக $-\frac{dp}{dx}$ எழுதப்படுகிறது.

செக்கனொன்றிற் பாய்கின்ற வாயுவின் திணிவு μ எனின், அப்பொழுது $\mu=\rho\Omega$; இங்கு ρ ஆனது அமுக்கம் p யிலும் தனி வெப்பநிலை T யிலுமிருக்கின்ற வாயுவின் அடர்த்தியாகும்.

$$\therefore\ \mu=-\frac{\pi a^4}{8\eta}\cdot\rho\cdot\frac{dp}{dx}=-\frac{\pi a^4}{8\eta}\cdot\frac{p}{\mathscr{R}\mathrm{T}}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

$$\therefore\ \mu\int_0^l dx=-\frac{\pi a^4}{8\eta}\cdot\frac{1}{\mathscr{R}\mathrm{T}}\int_{p_1}^{p_2}p\cdot dp.$$

$$\therefore\ \mu\mathscr{R}\mathrm{T}=\frac{\pi a^4}{8\eta l}\left(\frac{p_1^2-p_2^2}{2}\right)=p_1\Omega_1=p_2\Omega_2 \text{ (முன்போலவே).}$$

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து கால இடை t யில் மயிர்த்துளைக் குழாயூடே பாய்கின்ற வாயுவின் கனவளவு V ஆயின்

$$p_1\mathrm{V}_1=\frac{\pi a^4}{8\eta l}\left(\frac{p_1^2-p_2^2}{2}\right)=p_2\mathrm{V}_2$$

எனப் பெறுவோம்.

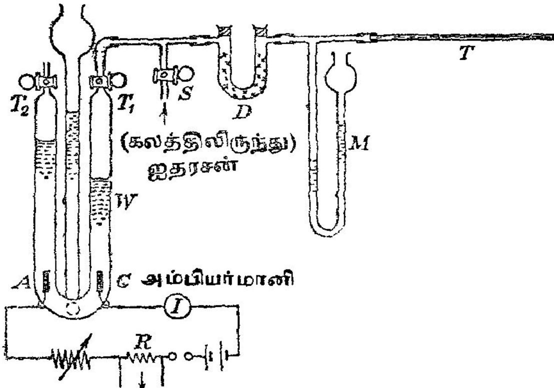
நழுவலுக்கான திருத்தம்.—மேயரின் சூத்திரத்திற்கான மேற்படி நிறுவல்களில் பாயியானது குழாயூடே பாயுங்காலே, குழாய்ச் சுவர்களுடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற பாயி ஓய்வாயிருக்கின்றது எனக் கருதப்பட்டுள்ளது. திரவங்களிடத்தே நடாத்தியுள்ள பரிசோதனைகள் இவ்வெடுகோளை ஆதரிக்கின்றன ; ஆனாலும் வாயுக்களிடத்தே நழுவல் நிகழ்கிறது. அதாவது குழாயின் ஆரை λ அளவு உயர்த்தப்பட்டிருக்கிறதுபோல் வாயு பாய்கின்றது என்பதற்குச் சான்றுளது ; இங்கு λ என்பது இடைச் சுயாதீனப் பாதையாகும். கருத்து என்னவென்றால், நழுவல் இருக்கும் போது ஆரை a யுடைய குழாயூடே வாயுவொன்றின் பாய்ச்சலும் நழுவல் இல்லாதபோது ஆரை $a+\lambda$ உடைய குழாயூடே அதன் பாய்ச்சலும் அதுவேயாம். எனவே மயிர்த்துளைக் குழாயூடே வாயுவொன்றின் ஆவியுயிர்ப்பிற்கான மேயரின் சூத்திரமானது

$$\mu\mathscr{R}\mathrm{T}=\frac{\pi a^4}{16\eta l}(p_1^2-p_2^2)\left(1+\frac{4\lambda}{a}\right),\ \left[\therefore\ (a+\lambda)^4\simeq a^4\left(1+4\,\frac{\lambda}{a}\right)\right]$$

என்பதாகின்றது.

ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் ஐதரசன் (ஒட்சிசன்) இன் பிசுபிசுப்பைப் பரிசோதனை முறைப்படி துணிதல்.—லேஃபல்ட் (Lehfeldt) என்பாரால் திட்டமிடப்பட்டதும் படம் 11·14 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றதுமான ஆய்கருவியானது நீர் வோல்ற்றுமானி W வைக் கொண்டிருக்கின்றது ; அதில் உறுதியான மின்னோட்டமொன்று செலுத்தப்படுகிறது. கதோட்டு C யிலே பிறப்பிக்கப்படுகின்ற ஐதரசனானது குழாயடைப்பு T_1 வழியே வோல்ற்றுமானியினின்று வெளியேறுகின்றது. அடுத்து அது கல்சியங் குளோரைட்டு கொண்ட உலர்த்து குழாய் D வழியாகச் செல்லுகிறது ; ஈற்றில் அது

அளவு கோடிட்ட மயிர்த்துளைக் குழாய் T யினூடாகச் சென்று வெளியேறு கிறது. வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் குறித்து T யின் வாயிலையடையும் ஐதரசனின் அமுக்கமிகையானது சைலல் கொண்ட அமுக்கமானி M ஆல் அளக்கப்படுகிறது. ஐதரசன் வளிமண்டல அமுக்கத்திலேயே T யினின்று வெளியேறுகிறது.



படம் 11·14. ஐதரசனின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்கு லேஃபல்டின் ஆய்கருவி.

முதன்முதலாகக் கலமொன்றிலிருக்கின்ற ஐதரசனை ஆய்கருவியூடே செலுத்தி அதனில் இருக்கின்ற வளியானது அப்புறப்படுத்தப்படுகிறது; கலத்துடன் தொடுப்பானது பக்கக்குழாய் S ஆல் ஆகின்றது. பரிசோதனை யின் இப்பகுதியின் போது C யிற்கு மேலேயுள்ள அமிலந்துமித்த நீரானது T_1 ஐ அடைந்திருத்தல் வேண்டும்; T_1 அடைக்கப்பட்டிருத்தல் வேண்டும்; மேலும் அமுக்கமானியின் இடக்கைப்பக்க உறுப்பானது சைல லால் முற்றிலும் நிரப்பப்பட்டிருத்தல் வேண்டும்; ஐதரசனின் பாய்ச்ச லானது வேகத்துடன் நிகழும் பொருட்டு T அப்புறப்படுத்தப்பட்டிருத்தல் வேண்டும். அடுத்து, பொசிவைவிட்டு ஆய்கருவியைச் சோதித்தல் வேண் டும். இதன்பொருட்டு றப்பர்க் குழாய், கண்ணுடிக் கோல் என்பவற்றுல் மயிர்த்துளைக் குழாயின் திறந்த முனையை அடைத்து அமுக்கமானது வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் காட்டிலும் 10 சமீ. சைலல் அமுக்கம் கூடுதலாக ஐதரசன் கிடைக்கப்பெறும் வரை அவ்வாயுவைப் பிறப்பித்தல் வேண்டும். அடுத்து, அமுக்கமானியில் திரவமட்டங்களை நோக்குதல் வேண்டும்; கிட்டத்தட்ட பத்துநிமிட இடைவேளைகள் விட்டு, இவ்வாசிப்பு களை மீண்டும் மீண்டும் எடுத்தல் வேண்டும். உணரத்தக்க அளவில் மட்டமாற்றங்கள் தோன்ருவிட்டால், தேவைப்படுகின்ற அமுக்கங்களைப் பொறுத்தமட்டில் ஆய்கருவி பொசிவில்லாததாம்.

[$l = 50$ சமீ. உம் சராசரி ஆரை $= 0{\cdot}014$ சமீ. உம் உடைய மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றினிடத்து] 0·2–0·25 அம். என்னும் வீச்சில் இடக்குமாறு வோல்ற்றுமானியிலுள்ள உறுதியோட்டமானது செப்பஞ்செய்யப்படுகிறது. நியாயமான குறுகிய காலத்தில் அமுக்கமானி வாசிப்புகள் மாறாது இருத்தல் வேண்டும்; அது வோல்ற்றுமானியில் ஐதரசன் பிறப்பிக்கப் படும் வீதமும் மயிர்த்துளைக் குழாயூடே அதன் பாய்ச்சல் வீதமும் சமன் என்பதை உணர்த்துகிறது. ஓட்டத்தை அண்ணளவாக அளத்தலுக்கு அம்பியர்மானி G யைப் பயன்படுத்தலாம்; ஆனால் ஈற்றில் ஓட்டத்தை ஓர் அழுத்தமானியாலேயே அளத்தல் வேண்டும்.

பரிசோதனையின் போதுள்ள சராசரி ஆய்கூடத்து வெப்பநிலை, சராசரிப் பாரமானியுயரம் என்பவற்றைக் குறித்தல் வேண்டும்.

பயன்படுத்திய உறுதியோட்டம் I அம். எனின், செக்கனென்றிலே பிறப்பிக்கப்பட்ட ஐதரசனின் திணிவானது Iz ஆகும்; இங்கு z ஐதரச னின் மின்னிரசாயனச் சமவலுவாகும். இது செக்கனென்றில் குழாயூடே பாய்கின்ற ஐதரசனின் திணிவு μ விற்குச் சமன்; μ ஆனது

$$\mu \mathscr{R} \mathrm{T} = \frac{\pi a^4 (p_1{}^2 - p_2{}^2)}{16 \eta l}$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாலும் தரப்படுகிறது; இங்கு

$\mathscr{R}$ என்பது ஒரு கிராம் ஐதரசனுக்கான வாயுமாறிலி.

T என்பது வாயுவின் (அதாவது கூடத்தின்) தனிவெப்பநிலை,

a என்பது மயிர்த்துளைக் குழாயின் பலித ஆரை, l அதன் நீளம்,

η என்பது வெப்பநிலை T யில் ஐதரசனின் பிசுபிசுப்பு.

p_1, p_2 என்பவை முறையே மயிர்த்துளைக் குழாயுட் புகும்போதும், அதனின்றும் வெளியேறும் போதும் வாயுவின் அமுக்கங்கள். எனவே

$$\mathrm{I}z = \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)}{16 \eta \mathscr{R} \mathrm{T}} \cdot \frac{\pi a^4}{l}.$$

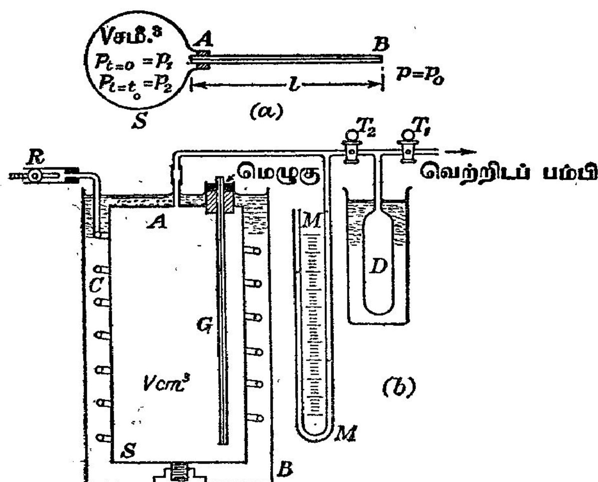
இவ்வண்ணம், கூடத்து வெப்பநிலையில் ஐதரசனின் பிசுபிசுப்புக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறலாம்.

D யையும் T யையும் T_2 உடன் தொடுத்து, கூடத்து வெப்பநிலையில் ஒட்சிசனின் பிசுபிசுப்பைத் துணியலாம். பரிசோதனையொவ்வொன்றின் போதும் T_1, T_2 ஆகிய இரு குழாயடைப்புக்களும் திறந்திருத்தல் வேண்டும்.

ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் வளியின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்கு அன்டசனின் முறை.—வளியின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்கான கீழ்வரு கின்ற எளியமுறை அன்டர்சன்† (Anderson) என்பவரால் ஆனது; அதற்கான கொள்கை பின்வருமாறு. படம் 11·15 (a) யில், S கண்ணாடியால் அல்லது உலோகத்தால் ஆனதும் கனவளவு V உடையதுமான ஒரு கலமாகும்;

† *Phil. Mag.*, **92**, 1022, 1921.

அதனுடன் நீளம் l உம் சராசரி ஆரை a யும் உடைய மயிர்த்துளைக் குழாய் AB தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஆய்கருவிக்கு வெளியேயுள்ள மாறு அமுக்கம் p_0 ஆகுக. t_0 செக்கனில் S இலுள்ள வளியின் அமுக்கம் p_1 இலிருந்து p_2 இற்கு இறங்கிற்று எனக் கொள்க. நேரம் t யில் S இலுள்ள அமுக்கம் p ஆகுக. அப்பொழுது $pV = m\mathscr{R}T$; இங்கு $\mathscr{R}$



படம் 11·15. வளியினது பிசுபிசுப்பைப் பரிசோதனைமுறையாய்த் துணிதலுக்கு நூலாசிரியர் மாற்றியமைத்துள்ள அண்டர்சன் முறை.

ஒரு கிராம் வளிக்கான வாயு மாறிலியும், T ஆனது தனிவெப்பநிலையும், m ஆனது S இலுள்ள வளியின் திணிவும் ஆகும். நேரம் $t+\delta t$ யில், S இலுள்ள அமுக்கம் $p+\delta p$ யும் வாயுவின் திணிவு $m+\delta m$ உம் ஆகுக. அப்பொழுது $V\,\delta p = \mathscr{R}\,T.\delta m$.

∴ செக்கனொன்றில் தப்புகின்ற வாயுவின் திணிவு

$$= \mu = -\frac{dm}{dt} = -\frac{V}{\mathscr{R}T}\cdot\frac{dp}{dt}$$

$$= \frac{(p^2 - p_0^2)}{16\eta l}\cdot\frac{\pi a^4}{\mathscr{R}T}.$$

$$-V\cdot\frac{dp}{dt} = \frac{\pi a^4}{16\eta l}(p^2 - p_0^2).$$

$$\therefore \frac{1}{2p_0}\text{ இ. ம. }\frac{p+p_0}{p-p_0} = \frac{\pi a^4 t}{16\eta l V} + C\ ;$$

இங்கு C ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி ; அது, $t=0$ ஆகுமிடத்து $p=p_1$ என்னும் உண்மையைப் பயன்படுத்தித் துணியப்படுகிறது. மேலும் $t=t_0$ ஆகுமிடத்து $p=p_2$ ஆதலின்,

$$\text{இ.ம.}\quad \frac{(p_2+p_0)}{(p_2-p_0)}\cdot\frac{(p_1-p_0)}{(p_1+p_0)}=\frac{t_0}{\eta}\cdot\kappa$$

எனப் பெறுகிறேம் ; இங்கு $\kappa=\frac{\pi a^4 p_0}{8l\mathrm{V}}$.

அமுக்க மாற்றங்களை அளத்தற்பொருட்டு S உடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற குழாயிலே பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள அமுக்கமானித் திரவத்தின் பெயர்ச்சியால் பலிதக் கனவளவில் உண்டாகின்ற மாற்றங்கள் காரணமாக இப்பரிசோதனையை நடாத்தும்போது V யை மாருது வைத்திருப்பது கடினமாகும் ; ஆனல் V ஆனது பெரிதாயும் அமுக்கமானியின் உறுப்புக்கள் அத்துணை அகலமற்றனவாயும் இருக்குமாயின் இவ்வழிவரும் வழு புறக்கணிக்கத்தக்கது. நூலாசிரியரால் திட்டமிடப்பட்டதும் வசதியானதுமான ஆய்கருவியொழுங்கு முறை படம் 11·15 (b) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. S, 5 இலிருந்து 10 லீற்றர் வரை கனவளவு உடைய ஒரு பொட் பித்தளையுருளை ஆகுக. அதன் வாய்மீது பித்தளை மூடி A யானது மென்பற்றுசாற் பற்றப்பட்டிருக்கிறது ; அமுக்கமானி M இற்கும், சைக்கிள்–தயர் வால்வு R, தேவையான தொடுக்குங் குழாய்கள் என்பவற்றிற்கும் A யினின்று குழாய்கள் செல்லுகின்றன. துவாரங்கள் இல்லாத ஆனல் அதேபோன்ற மூடியொன்று பிசுபிசுப்புமானியின் அடியாகின்றது. வெப்பநிலை நியாயமானவளவு மாருமல் இருக்கும்பொருட்டு உருளை S ஆனது அதனிலும் அகன்ற பித்தளைக் கலம் B யாற் சூழப்பட்டிருக்கிறது ; பிந்தியது நீரால் நிரப்பப்பட்டிருக்கிறது. S மீது பாயியுதைப்பாலாகும் விளைவுகளை வெல்லும் பொருட்டு அது காட்டியுள்ளவாறு B யின் அடியுடன் திருகால் இறுக்கப் பட்டிருக்கிறது.

ஆய்கருவியிற் புகுத்தவேண்டிய வளியானது உலர்த்து குழாயொன்றூடே செலுத்தப்படுகிறது ; வால்வு R ஐக் கடந்ததும் அவ்வளியானது B யிலுள்ள நீரின் அதே வெப்பநிலையில் S இல் உட்புகும்பொருட்டு நீண்ட, செம்பாலான சுருளிவடிவக் குழாயொன்றூடே அது செல்கின்றது.

நன்கு நெய்யிட்ட றப்பர்த் தொடுப்புக்கள் ஆய்கருவியை அமைத்தலை எளிதாக்குகின்றன.

V யின் கனவளவைத் துணியும்பொருட்டுத் தெரிந்த கனவளவுடைய கண்ணுடிக் குமிழ் D யும் குழாயடைப்புக்கள் T_1 உம் T_2 உம் ஆய் கருவியுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. T_1 திறந்தும் T_2 அடைத்தும் இருக்கும்பொழுது குமிழ் D ஆனது வெறிதாக்கப்படுகிறது ; வளியினிடத்து போயிலின் விதி சரியெனக் கொள்ளமுடியுமானல், T_1 ஐ அடைத்து T_2 ஐத் திறந்தபோதுள்ள அமுக்கமானிப் பாயியின் மட்ட மாற்றங்கள் S இன் கனவளவைத் துணிவதற்குப் பயன்படுகின்றன.

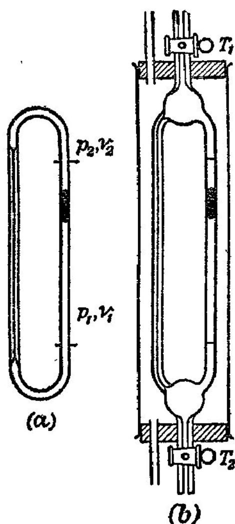
அளவுகோடு திருத்திய மயிர்த்துளைக் குழாய் G ஆனது A யின் மூடியிலுள்ள ஒரு துவாரத்தூடே செல்கின்றது ; அது அங்கு மெழுகால் அல்லது சட்டற்றன் சேர்வையால் நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது. S இன் கனவளவைக் காணும்பொழுது G யின் வளிமண்டலமுகமாகத் திறந்திருக்கின்ற முனையானது றப்பர்க் குழாய், கண்ணுடிக் கோல் என்பவற்றுல் அடைக்கப்பட்டிருக்கிறது.

கண்ணுடிக் கோலானது அப்புறப்படுத்தப்பட்டதும் பிசுபிசுப்புமானியினின்று வளி பாய்கிறது ; தெரிந்த காலவிடையொன்றில் நிகழ்கின்ற அமுக்கமாற்றத்தை அளந்தால் ஏற்கெனவே நிறுவப்பட்டுள்ள சூத்திரத்திலிருந்து பரிசோதனையின்போதுள்ள வெப்பநிலையில் வளியின் பிசுபிசுப்பைக் காணமுடிகின்றது.

இனி வாயுவொன்றின் பிசுபிசுப்பானது வெப்பநிலை (T° கெ.) யுடன்

$$\eta = \frac{\kappa T^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{S}{T}}$$

என்னுஞ் சூத்திரத்தின்படி மாறுகின்றது என இயக்கப்பாட்டுக் கொள்கை கற்பிக்கிறது ; இங்கு κ யும் S உம் மாறிலிகள் ஆகும் ; பிந்தியது சதலண்டின் மாறிலியென அழைக்கப்படுகிறது ; பக்கம் 703 இற் காண்க.



படம் 11·16. சிறிதளவிற் கிடைக்கும் வாயுக்களுக்கு ராங்கினின் பிசுபிசுப்புமானி.

ஏற்கெனவே விவரித்துக் கூறியுள்ள பிசுபிசுப்புமானியால் 0° ச. இலும் 50° ச. இலும் வளி (அல்லது நிலக்கரிவாயு) இன் பிசுபிசுப்பைத் துணிந்து, பரிசோதிக்கப்படுகின்ற வாயுவுக்கான சதலண்டின் மாறிலியைக் காண முடிகிறது ; ஏனெனில்

$$\frac{\eta_{50}}{\eta_0} = \left(\frac{323}{273}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{S+273}{S+323}\right)$$

ஆகும்; எனவே η_0 உம் η_{50} உம் தெரிந்திருக்கிறபோது S ஐக் கணிக்கலாம்.

(சிறிதளவிற் கிடைத்திருக்கின்ற) வாயுவொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்கு ராங்கினின் முறை.—ஆய்கூட வெப்பநிலையில் நேயன், ஆகன், கிரித்தன், சேனன் ஆகிய அருவாயுக்கள் ஒவ்வொன்றின் பிசுபிசுப்பையும் துணிதலையுமிட்டு இவ்வாய்கருவியானது ராங்கின்† (Rankine) என்பவரால் திட்டமிடப்பட்டுள்ளது.

† *Proc. Roy. Soc.*, A, 83, 265, 1910.

ஒன்றோடொன்று தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற இரு பகுதிகளாலான மூடிய கண்ணாடிப் பாத்திரமொன்றைக் கருதுக; அப்பகுதிகளுள் ஒன்று ஒரு நுண்மயிர்த்துளைக் குழாயாகும்; குறுக்குவெட்டுப் பரப்பில் இரண்டாவது மிகப் பெரிதாயிருக்கிறபோதிலும் அதனுள் சிறு இரச நிரலொன்று கெடாதவண்ணம் இருக்கும்பொருட்டு அது போதியவளவு குறுகியிருக்கிறது. படம் **11·16** (a) யிற் காண்க. (மயிர்த்துளையின் கனவளவானது புறக்கணிக்கத்தக்கதெனக் கருதுமிடத்து) இரசத்தாற் கொள்ளப்படாத கனவளவு V ஆகுக. ஆய்கருவியானது கிடையாய்ப் பிடிக்கப்பட்டிருக்கும் போது அதில் வாயுவின் உறுதியமுக்கம் P ஆகுக; ஆய்கருவி நிலைக் குத்தாயிருக்கும்போது இரசநிரலால ஆன அமுக்க வித்தியாசமானது p ஆகுக. அப்பொழுது எக்கணத்திலும் இரசத்துக்குக் கீழே அமுக்கம் p_1 உம் கனவளவு v_1 உம், இரசத்துக்கு மேலே அவற்றிற்கு ஒத்த கணியங்கள் p_2 உம் v_2 உம் எனின்

$$V = v_1 + v_2 \text{ உம், } p_2 = p_1 - p \text{ உம் ஆகும்.}$$

மேலும் வெப்பநிலையானது மாறாது இருக்கின்றது என நாம் கொள்வோமானால்

$$PV = p_1 v_1 + p_2 v_2$$

என்னுஞ் சமன்பாடானது எப்பொழுதும் உண்மையாகும்.

கணம் ஏதேனுமொன்றில், ஆய்கருவியில், இரச நிரலுக்கு மேலேயுள்ள வாயுவின் திணிவு m ஆகுக. அப்பொழுது $m\mathscr{R}T = p_2 v_2$; இங்கு $\mathscr{R}$ என்பது வாயுவின் திணிவலகு ஒன்றிற்கான வாயு மாறிலியாகும். காலவிடை δt யில் உயிர்ப்பாகின்ற வாயுவின் திணிவு δm ஆனது

$$\begin{aligned}\mathscr{R}T\,\delta m &= \frac{\pi a^4}{16\eta l}(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)\,\delta t \\ &= \frac{\pi a^4}{8\eta l}(p_1 - p_2)\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)\delta t \\ &= \kappa(p_1 - p_2)\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)\delta t\end{aligned}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது; இங்கு $\kappa = \dfrac{\pi a^4}{8\eta l}$.

ஆனால் $\mathscr{R}T\,\delta m = \delta(p_2 v_2)$.

$$\therefore\ p_2\,dv_2 + v_2\,dp_2 = \kappa p\left(\frac{2p_2 + p}{2}\right)dt.$$

இனி சமவெப்ப நிபந்தனையிலிருந்து

$$\begin{aligned}PV &= p_1 v_1 + p_2 v_2 = (p_2 + p)(V - v_2) + p_2 v_2 \\ &= p_2 V + pV - pv_2\end{aligned}$$

எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore\ p_2 = P - p + \frac{p}{V}\cdot v_2.$$

எனவே p_2 ஆனது v_2 இன் ஓர் ஏகபரிமாணச் சார்பாகும்; மேலும், p_1 உம் v_1 இன் ஓர் ஏகபரிமாணச் சார்பாகும்.

$$\therefore\ \left(P - p + \frac{pv_2}{V}\right) dv_2 + v_2\frac{p}{V}\cdot dv_2 = \kappa p\left[\frac{2P - 2p + 2\frac{p}{V}\cdot v_2 + p}{2}\right]dt,$$

$$\therefore\ \left(P + 2v_2\cdot\frac{p}{V} - p\right) dv_2 = \kappa p\left[\frac{2P - p + \frac{2P}{V}\cdot v_2}{2}\right]dt.$$

$2P - p + \frac{2pv_2}{V} = \xi$ ஆகுக. அப்பொழுது $d\xi = \frac{2p}{V}\cdot dv_2$.

$$\therefore\ \frac{V}{2p}(\xi - P)\, d\xi = \tfrac{1}{2}\kappa p\xi\, dt,$$

அல்லது
$$\frac{V}{p}\left(1 - \frac{P}{\xi}\right) d\xi = \kappa p\, dt.$$

0 இலிருந்து t வரையுள்ள கால இடையில் ξ ஆனது ξ_0 இலிருந்து ξ_t இற்கும், v_2 ஆனது $(v_2)_0$ இலிருந்து $(v_2)_t$ இற்கும் மாறுக; அப்பொழுது

$$\therefore\ \frac{V}{p}\int_{\xi_0}^{\xi_t}\left(1 - \frac{P}{\xi}\right) d\xi = \kappa\int_0^t p\, dt.$$

$$\therefore\ \frac{V}{p}\left[\xi - P\ \text{இ.ம.}\ \xi\right]_{\xi_0}^{\xi_t} = \kappa pt.$$

$$\therefore\ \frac{V}{p}\left[\xi_t - \xi_0 - P\ \text{இ.ம.}\ \frac{\xi_t}{\xi_0}\right] = \kappa pt.$$

$$\therefore\ \frac{V}{p}\left[\frac{2p}{V}\{(v_2)_t - (v_2)_0\} - P\ \text{இ.ம.}\left\{\frac{2P - p + \frac{2p}{V}\cdot(v_2)_t}{2P - p + \frac{2p}{V}\cdot(v_2)_0}\right\}\right] = \kappa pt.$$

இனி இரசநிரலானது சமச்சீரான இடப்பெயர்ச்சியொன்றைப் பெறுகிறது எனக் கொள்க. அத்தகைய பெயர்ச்சியொன்றை வீழ்ச்சிக் குழாயிலுள்ள இரு குறிகள் சுட்டிக்காட்டுகின்றன; அவற்றிற்கிடையேயுள்ள கனவளவு v ஆகுக. அப்பொழுது

$$V = (v_2)_0 + (v_2)_t\ ; \qquad (v_2)_t - (v_2)_0 = v.$$

$$\therefore\ (2v_2)_t = V + v\ ; \qquad (2v_2)_0 = V - v.$$

அப்பொழுது மேற்படி சமன்பாட்டின் இடக்கைப் பக்கமானது

$$2v - \frac{PV}{p} \text{ இ.ம.} \left\{ \frac{1 + \frac{pv}{2PV}}{1 - \frac{pv}{2PV}} \right\}$$

என ஆகின்றது.

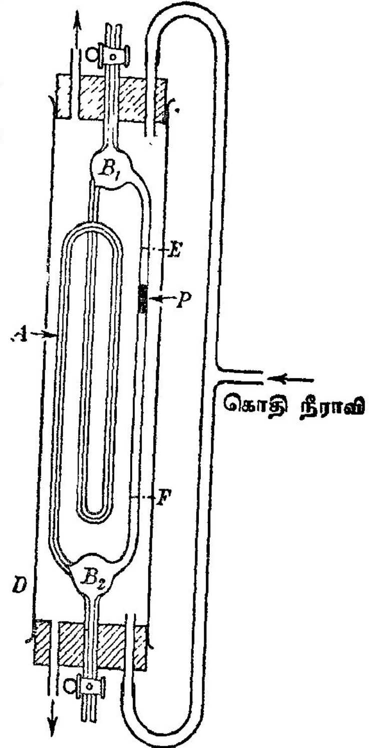
$\frac{pv}{2PV}$ ஆனது ஒன்றைக் காட்டிலும் சிறிதாதலின் மடக்கையுறுப்பை நாம் விரிக்கலாம். நடைமுறையிற பயன்படுத்தக்கூடிய எல்லா இரச நிரல்களினிடத்தும் $\frac{\alpha^2 v^2}{12} \to 0$ ஆதலின், $\frac{p}{PV}$ ஐ α என அழைத்து உறுப்புக்களை மூன்ருவது வலு வரை தான் கணக்கிற் சேர்த்தால்,

$$2v - \frac{2}{\alpha}\left[\frac{\alpha v}{2} + \frac{\alpha^3 v^3}{24}\right] = v\left[1 - \frac{\alpha^2 v^2}{12}\right] = v$$

என மேற்படி கோவையானது சுருங்குகிறது.

$$\therefore \frac{\pi a^4 pt}{8\eta l} = v.$$

ஆய்கூட வெப்பநிலையிலும் கொதிநீராவி வெப்பநிலையிலும் பயன்படக்கூடிய வகையில் மாற்றியமைக்கப்பட்ட ராங்கின் பிசுபிசுப்புமானி.— எவ்வாறு வெப்பநிலையுடன் சடத்துவ வாயுக்களின் பிசுபிசுப்பு மாறுகின்றது என்பதை ஆராயும்பொருட்டு இப்பிசுபிசுப்புமானியானது 1910 இல் ராங்கினுல் திட்டமிடப்பட்டது. இப் பிசுபிசுப்புமானி படம் 11·17 இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; அது இரு கண்ணுடிக் குழாய்களாலான மூடிய சுற்றென்றைக் கொண்டுள்ளது ; அவற்றுள் ஒன்று மயிர்த்துளையுடையது ; மற்றையது அகன்றது ; பிசுபிசுப்புமானியானது நிலைக்குத்தாக இருக்கும் பொழுது பிந்தியதிலுள்ள இரசநிரல் ஆய்கருவியிலிருக்கின்ற வாயுவை மயிர்த்துளைக் குழாயூடே செலுத்துகிறது. மயிர்த்துளைக் குழாய்



படம் 11·17. வெப்பநிலையுடன் வாயுவொன்றின் பிசுபிசுப்பு எவ்வாறு மாறுகின்றது என்பதை ஆராய ராங்கினின் பிசுபிசுப்புமானி.

A ஆனது கிட்டத்தட்ட ஒரு மீற்றர் நீளம் உடையது; ஆய்கருவியின் மொத்த நீளத்தைக் குறைக்குமுகமாக, ஆனல் இரசநிரல் P யின் இறக்கத்துக்கான நேரம் கவனிக்கத்தக்கவளவில் மாருமல் இருக்கும் வண்ணம், அது படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு இருமுறை வளைக்கப்பட்டிருக்கிறது; ஆய்கருவியை வெறிதாக்கும்போதும் அல்லது அதை வாயுவால் நிரப்பும்போதும், இரச நிரலைக் கொண்டிருக்கும்பொருட்டு, ஒவ்வொன்றும் கிட்டத்தட்ட 1 சமீ.[3] கனவளவுடைய இரு சிறு குமிழ்கள் B_1 உம் B_2 உம் பயன்படுகின்றன.

ஆய்கருவியானது ஒரு கொதிநீராவிக் கஞ்சுகக் குழாய் D யாற் சூழப்பட்டிருக்கிறது; ஆய்கூட வெப்பநிலையை மட்டுமே அளத்தற்கு ஒரு வெப்பமானி உள்ளே செலுத்தப்படும்; கொதிநீராவி பாயுங்காலே அவ் வெப்பமானிக்கு ஒருபோதும் அங்கு இடம் கொடுக்கப்படமாட்டாது; பாரமானியுயரத்திலிருந்தே கொதிநீராவியின் வெப்பநிலை கணிக்கப்படுகிறது.

ஒருசில சிறு திருத்தங்கள் ஒருபுறமிருக்க, இரு வெவ்வேருன வெப்பநிலைகளில் வாயுவொன்றின் பிசுபிசுப்புக்களின் விகிதமானது அவ்வவ் வெப்பநிலைகளில் வீழ்ச்சிக் குழாயிலுள்ள அடையாளக் குறிகள் E, F என்பவற்றிற்கிடையே இரசநிரலின் இறக்க நேரங்களின் விகிதத்துக்குக் கிட்டத்தட்ட சமம் ஆம்.

நோக்கன் முறையில் முதன்மையான வேறுபடுத்துகையொன்று இன்றியமையாததாகும் என ராங்கினும் இந்நூலாசிரியரும் 1921 இல் ஆராய்ந்து காட்டியுள்ளனர். பிசுபிசுப்புமானியில் வாயுவை மாற்றியபோது மட்டுமன்றி அதே வாயுவின் வெப்பநிலை மாற்றமடையும் போதுங்கூட இரச நிரல்களின முனைகளின் வளைவுகளில் மிகவும் கவனிக்கத்தக்க மாற்றங்கள் ஏற்படுகின்றன எனக் காணப்பட்டது. நிரலின் நிறையால் ஆகின்ற முழு நீர்நிலையியல் அமுக்கமானது மயிர்த்துளைமையால் மாருவளவிற் குறைக்கப்படுகின்றதெனத் தொடக்கத்திற் கொள்ளப்பட்டிருந்தது. செலுத்தும் அமுக்கத்தில் தோன்றும் மாற்றங்கள் இரசத்தின் பரப்பிழுவை மாற்றத்தாலல்லாது இரசத்திற்கும் கண்ணுடிக்கும் இடையேயுள்ள தொடுகைக் கோணத்தின் மாற்றங்களாலேயும் நிகழக்கூடியன. ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் நிரலை முதல் முழுதாகவும் பின்பு அதைக் கிட்டத்தட்ட சமநீளமுடைய இரு துண்டுகளாகவும் பயன்படுத்தி நோக்கல்களை எடுத்தால் மேற்படி விளைவு நீக்கப்படுகிறது.

(பரிசோதனையானது உண்மையில் உறுதியாகக் காட்டுகிறதுபோலவே) நிரலானது இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கும்போது மயிர்த்துளைமையால் ஆகின்ற விளைவு இருமடங்காகின்றது எனவும், துண்டுகளின் எண்ணிக்கை மூன்று எனின் அவ்விளைவு மும்மடங்காகின்றது எனவும் கொண்டால், அவ்விளைவை இரசநிரலின் நிறையால் ஆகின்ற நீர்நிலையியல் அமுக்கத்தின் ஒரு வரையறுத்த பின்னம் α என நாம் குறித்துக்கொள்ளலாம். நிரலானது ஒரு, இரு, மூன்று துண்டுகளாக இருக்கும்போது அதன் இறக்க நேரங்கள் முறையே t_1, t_2, t_3 ஆயின் அது மயிர்த்துளைக்

குழாயூடே வாயுவின் சம கனவளவுகளைச் செலுத்துகின்றபடியால்

$$(1-\alpha)t_1=(1-2\alpha)t_2=(1-3\alpha)t_3 \ ;$$

எனவே
$$\alpha=\frac{t_2-t_1}{2t_2-t_1}=\frac{t_3-t_1}{3t_3-t_1} \ ;$$

இவ்விரு பின்னங்களின் சமமே மயிர்த்துளைமையாலாகின்ற விளைவானது நடைமுறையில் கூட்டற்குரியது என உணர்த்துகிறது. எல்லா மயிர்த்துளை விளைவுகளுமில்லாவிடத்து, அதாவது இரசத்தின் முழு நீர்நிலையியலமுக்கமும் செயலாற்றும்போது, எதிர்பார்க்கக்கூடிய இறக்கநேரம் t எனின்,

$$t=t_1(1-\alpha)$$

ஆகும்.

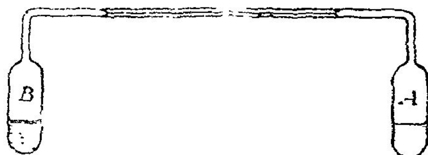
அப்பொழுது (நழுவலையிட்டுப் புறம்பாகப் பிரயோகிக்கக்கூடிய சிறு திருத்தமொன்றைத் தவிர்த்தால்) இந்நேரம் t ஆனது ஆய்கருவியிலுள்ள வாயுவின் பிசுபிசுப்புக்குச் சரியாக விகிதசமமாகும்.

நிரலை வேண்டிய அளவு துண்டுகளாக்குவதற்குக் குமிழ்கள் B_1, B_2 என்பவற்றுள் ஏதேனுமொன்றைப் பயன்படுத்தலாம்.

ஆவியொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதற்கும் வெப்பநிலையுடன் அதன் மாறலை ஆராய்தற்கும் ராங்கினின் முறை.—(புரோமீன்போல்) எளிதிலாவியாகின்ற திரவமொன்றினது ஆவியின பிசுபிசுப்பையளத்தற்கு இம்முறையானது ராங்கின்† எனபவரால் திட்டமிடப்பட்டது ; இம்முறையில் மிகை வெப்பம்பெற்ற ஆவியானது மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே வெளிப்படுகிறது. மயிர்த்துளைக் குழாயின் இரு பக்கங்களிலுமுள்ள அமுக்கங்களை அளத்தற்கும் குறிப்பிட்ட நேரமொனறில் வெளிப்படுகின்ற ஆவியினது திணிவை மதிப்பிடுதறகும் கையாளப்பட்ட உபகரணங்களே இம்முறையின் சிறப்பான அம்சங்களாகும். அதனது மிக எளிய அமைப்பில் ராங்கினின் பிசுபிசுப்புமானியானது இரு குமிழ்கள் A, B என்பவற்றைத் தொடுக்கின்ற மயிர்த்துளைக் குழாயொனறுலாகலாம் ; அக்குமிழ்கள் திரவத்தையும் அதன் ஆவியையும் மட்டுமே கொண்டிருக்கின்றன, படம் 11·18. குமிழ்கள் இரண்டும் வெவ்வேறன வெப்பநிலைகளிற் பேணப்படுகின்ற தொட்டிகளில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்றன ; மயிர்த்துளைக் குழாயின் வெப்பநிலை குமிழ்களின் வெப்பநிலைகளைக் காட்டிலும் உயர்ந்தது. இவ்வாறு மயிர்த்துளைக் குழாயின் இரு முனைகளுக்கிடையே ஒரு பொருத்தமான அமுக்க வித்தியாசம் ஏற்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது ; எனவே உயர்வெப்பநிலைப் பக்கத்தில் ஆவியாகலாலும் தாழ்வெப்பநிலைப் பக்கத்தில் ஒடுங்குதலாலும் ஆவியானது ஒருபுறமிருந்து மறுபுறமாக மயிர்த்துளைக் குழாயூடே செல்கின்றது. A யின் வெப்பநிலையில் திரவத்தின் அடர்த்தி தெரிந்திருந்தால், உறுதிநிலை ஏற்பட்டதும் மிக்க வெப்பமான பக்கம் A யினின்று மறைகின்ற திரவத்தின் கனவளவை நோக்கிக் குறிப்பிட்ட நேரமொன்றில் வெளிப்படுத்தப்பட்ட ஆவியின் திணிவைத் துணியமுடியும்.

† *Proc. Roy. Soc.*, A, 88, 575, 1913

A யினின்று வெளியேறியுள்ள திரவத்தின் திணிவைத் திருத்தமாகத் துணிய விரும்புவோமானால் A யானது ஒடுங்கிய துளையுடைய ஒரு சீரான குழாய்வடிவமாய் இருத்தல் வேண்டும் என்பது தெளிவாம். இத்தகைய திட்டமொன்றில் ஆவியாகலால் ஆகின்ற வெப்பநட்டம் காரணமாகவும்,

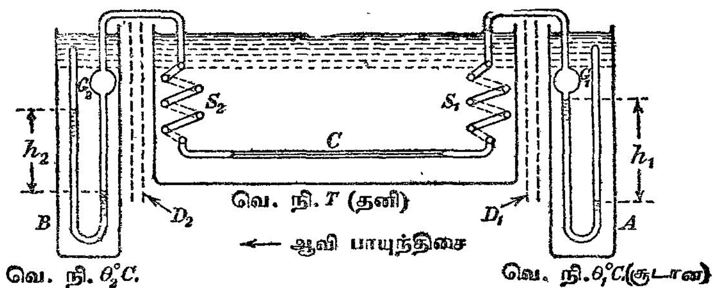


படம் 11·18. மிகைவெப்பம் பெற்ற ஆவிகளுக்கான ராங்கினின் பிசுபிசுப்புமானியின் தத்துவம்.

அத்துணை ஒடுங்கிய குழாயொன்றில் கடத்தல், உடன்காவுகை என்பவற்றால் வெப்பநிலைச் சமத்தை நிலைநிறுத்தல் இயலாமை காரணமாகவும், திரவப் பரப்பின் வெப்பநிலையானது சூழ்ந்திருக்கின்ற தொட்டியின் வெப்ப நிலையைக் காட்டிலும் குறைவாயிருக்கிறது. இருந்தாலும், நிரம்பலமுக்க மானது தெரிந்திருக்கிறபடியால், மேற்படி குறைவை அளந்து மயிர்த் துளைக் குழாயூடே ஆவியைச் செலுத்தலுக்கு உண்மையாகப் பயன்படுகின்ற அமுக்கத்தைக் காணமுடிகின்றது.

இருநதாலும் நடைமுறையில் இப்பரிசோதனையானது அத்துணை எளிய தொன்று அன்று ; எனெனில் ஆவியொனறினிடத்து அதன் கனவளவு பெரிதாய் இருக்கிறபோதிலும் அதறகு ஒத்த திரவத்தின் கனவளவானது சிறிதாய் இருக்கிறபடியால் A யும் B யும் ஒடுங்கிய துளையுடைய குழாய் வடிவமாக இருத்தல் வேண்டற்பாலது ; ஆனாலும் அத்துளையும் மயிர்த் துளையும் அதே வரிசையில் வரமாட்டா. அப்பொழுது மயிர்த்துளையின் இரு முனைகளிலுமுள்ள அமுக்கங்கள் முறையே A யும் B யும் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்ற தொட்டிகளின வெப்பநிலைகளில் திரவத்தின் நிரம்பல் ஆவியமுக்கங்களுக்கு ஒருபோதும் சமனாக இருக்கமாட்டா. இதற் குக் காரணம் யாதெனில், மயிர்த்துளையூடே உயர்வீதத்துடன் காய்ச்சி வடித்தல் நிகழும்போது திரவத்திற்கும் அதன் ஆவிக்குமிடையே சம நிலையைப் பெறுவதற்கு வெப்பம் போதிய வீதத்துடன A யுட் புகவோ B யிலிருந்து வெளியேறவோ முடியாது என்பதே. இதன் விளைவு A யிலும் B யிலுமுள்ள அமுக்கங்கள் முறையே அவ்வவற்றிற்கொத்த நிரம்பலமுக்கத்தைக் காட்டிலும் குறைவாகவும் கூடுதலாகவும் இருக் கின்றன ; எனவே உண்மையமுக்கங்களைக் காணும்பொருட்டு மேற்படி வித்தியாசங்களை மதிப்பிடுவதற்கான முறைகளைக் கையாளல் வேண்டும். பயன்படுத்தியுள்ள ஆய்கருவியின் விளக்கப்படத்தைப் படித்தால் எவ் வாறு இம்மதிப்பீடு நிறைவேற்றப்பட்டுள்ளது எனத் தெரியவரும், படம் 11·19 ஐப் பார்க்க. பாத்திரங்கள் A யும் B யும் மயிர்த்துளைக்குச் சேய்மையான முனைகளில் அடைக்கப்பட்ட U குழாய்கள் எனக் குறித்துக்

கொள்கிறேம். அவை நீர்த்தொட்டிகளில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்றன ; அத்தொட்டிகளின் வெப்பநிலை வித்தியாசம் பல பாகைகள் ஆகும். அவற்றுள் A யைக் கொண்டிருக்கின்ற தொட்டியே மிக்க வெப்பநிலையி லுள்ளது எனக் கொள்வோம். A யைக் கொண்டிருக்கின்ற தொட்டியின் வெப்பநிலையானது ஆய்கருவியின் B ஒழிந்த எந்தப் பாகத்தின் வெப்ப நிலையைக் காட்டிலும் குறைவாக இருத்தல் வேண்டும் ; இக்கட்டுப்பாட்டுடன், மயிர்த்துளைக் குழாயைக் கொண்டிருக்கின்ற தொட்டி C யின் வெப்ப நிலையை ஆவியின் பிசுபிசுப்பு துணிதலுக்கான வெப்பநிலையிற் பேண லாம். A யிலிருந்து உற்பத்தியாகின்ற ஆவியை விரும்பிய வெப்ப நிலைக்கு உயர்த்திவைக்கும் பொருட்டு அது மயிர்த்துளையுள் புகுமுன் கண்ணுடிச் சுருளி S_1 ஊடே பாய்கின்றது. மற்றை முனையினின்று அது வெளியேறி ஈற்றில் திரவமாக B யில் ஒடுங்குகிறது.



படம் 11·19. எளிதிலாவியாகின்ற திரவங்களின் ஆவிகளினிடத்துப் பயன்படும் ராங்கின் பிசுபிசுப்புமானி (பெரிய குமிழ்கள் G_1 உம் G_2 உம் பிசுபிசுப்புமானியின் குளிர்ச்சிமிக்க பக்கத்தில் ஒடுக்கத்தை எளிதாக்குகின்றன : கலக்கிகளும் வெப்ப மானிகளும் காட்டப் படவில்லை).

இனி, பாத்திரங்கள் A, B யின் மூடிய கிளைகளில் யாது நிகழ்கின்றது என்பதைக் கருதுவோம். இக்கிளைகளில் திரவம அனுபவிக்கின்ற மட்ட மாறல்களின் விளைவாக அங்கு உணரத்தக்க அளவில் ஆவியாகலோ ஒடுங்குதலோ நிகழமாட்டாது. எனவே நிரம்பலமுக்கங்கள் நிலைநிறுத்தப் படுகின்றன. இருந்தாலும், மயிர்த்துளைக்கு அணித்தாயுள்ள கிளைகளில் விரைவான ஆவியாகலாலும் ஒடுங்குதலாலும் அமுக்கங்கள் நிரம்பற் பெறுமானங்களினின்று வேறுபடுகின்றன ; ஆனல் U குழாய்களின் ஈர் உறுப்புக்களிலுமுள்ள மட்ட வித்தியாசங்களை நோக்கி அவ்வித்தியாசங்களை எளிதில் மதிப்பிடலாம். உதாரணமாக, θ_1 உம் θ_2 உம் $(\theta_1 > \theta_2)$ முறையே A யையும் B யையும் கொண்டிருக்கின்ற தொட்டிகளின் வெப்ப நிலைகளும், ρ_1 உம் ρ_2 உம் அவ்வவ் வெப்பநிலைகளில் திரவத்தின் அடர்த்திகளும், p_1 உம் p_2 உம் மயிர்த்துளையின் இரு முனைகளிலுமுள்ள அமுக்கங்களும், h_1 உம் h_2 உம் முறைப்படியான U குழாய்களிலுமுள்ள

திரவத்தின் மட்ட மாற்றங்களும் ஆகுக ; அப்பொழுது θ_1, θ_2 ஆகிய வெப்ப நிலைகளில் திரவத்தின் நிரம்பலாவியமுக்கங்கள் முறையே P_1, P_2 எனின்,

$$p_1 = P_1 - g\rho_1 h_1 ;$$
$$p_2 = P_2 + g\rho_2 h_2 .$$

எனவே, சிறு வெப்பநிலை வீச்சொன்றில் நிரம்பலாவியமுக்கங்களும் திரவத்தின் அடர்த்திகளும் தெரிந்திருந்தால், பொது அமுக்கமானி போன்ற எதனையும் பயன்படுத்தாது ஆவியுயிர்ப்பை ஆளுகின்ற அமுக்கங்களைக் காணமுடிகின்றது. மேலும் ஆவி, திரவம் ஆகியவற்றின் தற் கனவளவுகள் தெரிந்திருந்தால், ஆவியாகியுள்ள திரவத்தின் கனவளவையும் ஒடுங்கியுள்ள திரவத்தின் கனவளவையும் நோக்கி, மயிர்த்துளையிற் பாய்ச்சல் வீதத்தைத் துணியும் வழிவகைகள் பெறப்படுகின்றன.

ஆவியொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணிவதற்கான இம்முறையில் மேயரின் ஆவியுயிர்ப்புச் சூத்திரம் அடிப்படை ; அது

$$\eta = \frac{\pi a^4}{16l} \cdot \frac{(p_1{}^2 - p_2{}^2)t}{p_1 V_1}$$

என்பதாகும் ; இங்கு t ஆனது (அமுக்கம் p_1 இல்) கனவளவு V_1 உடைய ஆவியை வெளிப்படுத்தற்கான நேரம் ஆகும். பயன்படுத்தப் படுகின்ற பதார்த்தம் ஓர் இலட்சிய வாயுவாகும் எனக் கொண்டே இச் சூத்திரம் பெறப்பட்டுள்ளது. இப்பரிசோதனைகளில் ஆவியானது மிகை வெப்பம் பெற்றும் தாழ்வமுக்கத்தில் இருக்கிறபடியாலும் விலகல்கள் கண்டிப்பாய்க் கிட்டத்தட்டச் சிறிதாய்த்தான் இருக்கும். 100° ச. – 260° ச. என்னும் வீச்சில், நீராவியின் பிசுக்குப் பண்புகளை ஆராயும்பொருட்டு இந்நூலாசிரியர் 1924† இல் ஒருசில சிறு மாற்றங்களுடன் இம்முறையைப் பயன்படுத்திச் சில பரிசோதனைகளை நடாத்தினர் ; அப்பரிசோதனைகளில் மயிர்த்துளையின் முனைகளிடையேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசமானது அரைவாசியாக்கப்பட்டுள்ளது ; இம்முறைக்குச் சிறப்பாக உரிய வழுவெல்லைகளுக்கு மேலாக η வின் பெறுமானம் பாதிக்கப்படவில்லை.

கணித்தலின் பொருட்டு மேற்படி சூத்திரம் தகுதிமிக்கதொன்று அன்று ; நேரம் t யில் வெளிப்படுகினற பொருளின் திணிவு m தொடர்பாக அதை மாற்றியமைத்தல் வேண்டும். $p_1 V_1 = m\,\mathcal{R}\,T_1 = m \cdot \frac{R}{M} \cdot T_1$ ஆதலின்,

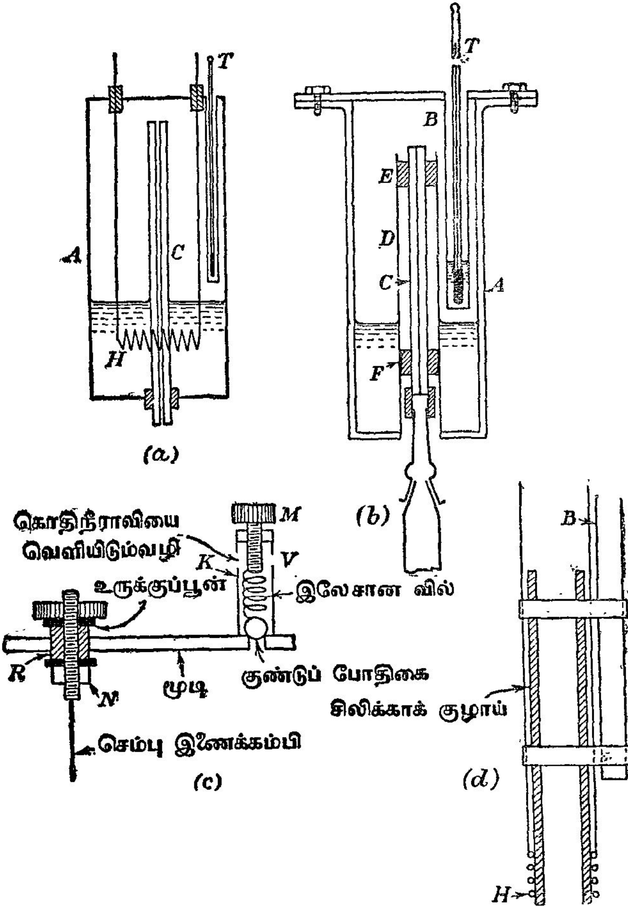
$$\eta = \frac{\pi a^4}{16\,l} \cdot \frac{(p_1{}^2 - p_2{}^2)t}{m} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}\,T_1} = \frac{\pi a^4}{16\,l} \cdot \frac{(p_1{}^2 - p_2{}^2)t}{m} \cdot \frac{M}{RT_1}$$

எனப் பெறுகிறோம் ; இங்கு R ஆனது அகில வாயு மாறிலியும், $\mathcal{R}$ ஆனது ஒரு கிராம் திரவத்திற்கான வாயு மாறிலியும், M ஆனது திரவத்தின் மூலக்கூற்று நிறையும், T_1 ஆனது மயிர்த்துளைக் குழாயூடே ஆவி செல்லுங்காலே தனியளவிடையில் அதன் வெப்பநிலையுமாகும்.

† *Proc. Roy. Soc.*, **A**, **106**, **83**, **1924**.

பல சிறு திருத்தங்களைப் பிரயோகிக்க வேண்டும் ; அவற்றைப் பற்றிய ஆராய்ச்சி வெளியீடுகளைப் பார்க்க.

வளிமண்டல அமுக்கத்தில் கொதிநீராவியின் பிசுபிசுப்பை பரிசோதனை முறைப்படி துணிதல்.—கொதிநீராவியின் பிசுபிசுப்பைக் கிட்டத்தட்ட 100° ச.



படம் 11·20. கொதிநீராவிக்கான பிசுபிசுப்புமானி (நூலாசிரியரின் திட்டம்).

இல் அளத்தலுக்கான இம்முறையின் தத்துவமானது கிறெகரி என்பவரால் தரப்பட்டுள்ளது ; ஆனால், கீழே விவரித்துக் கூறப்பட்டுள்ள ஆய்கருவி

யின்து இந்நூலாசிரியராலேயே திட்டமிடப்பட்டது; அது கவிழ்க்கப் பட்ட டிவார் குப்பியொன்றைப் பயன்படுத்தியுள்ள முதல் ஆய்கருவியைக் காட்டிலும் பல கவனிக்கத்தக்க நயங்கள் உடையது. இம்முறையின் தத்துவத்தைப் படம் 11·20 (a) எடுத்துக்காட்டுகிறது. வளி முற்றிலும் அப்புறப்படுத்தப்பட்டுள்ள உலோகப் பாத்திரம் A யில் நீர் கொதிக்க வைக்கப்படுகிறது. அளவுகோடு திருத்தப்பட்டுள்ள மயிர்த்துளைக் குழாய் C யினின்று கொதிநீராவியானது வெளியேறுகிறது; தண்ணீரில் ஒரு பகுதி அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்ற ஒரு U குழாயில் அந்நீராவியை ஒடுக்க லாம். உணர்ச்சியுள்ள இரசங்கொண்ட கண்ணாடி வெப்பமானி T யானது ஆவியின் வெப்பநிலையைத் தருகிறது; ஆனால் ஆவியின அமுக்கத்தால் வெப்பமானியின் குமிழானது வடிவமாற்றமடையாமல் இருக்கும்பொருட்டு அதன் கீழான முனை மூடப்பட்ட குழாயொன்றில் வெப்பமானி வைக்கப் பட்டது; குமிழுக்கும் வெப்பமாக்கப்பட்ட குழாய்க்கும் இடையே தக்க வெப்பத் தொடுகை அளிக்கும்பொருட்டுக் குழாயானது [கொ. நி. > 100°ச. உடைய] ஓர் எண்ணெயைக் கொண்டிருக்கிறது. வெப்பநிலை தெரிந்திருந் தால் அட்டவணைகளிலிருந்து அந்த ஆவியின் அமுக்கத்தை அறியலாம்; பின்பு, பக்கம் 652 இல் தரப்பட்டுள்ள மேயரின் சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்தி ஆவியின் பிசுபிசுப்பு கணிக்கப்படுகிறது.

பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள பிசுபிசுப்புமானியின் விவரங்கள் படம் 11·20 (b) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. A ஒரு பித்தளைப் பாத்திரம்; இடையான றப்பர் இணைப்பிறுக்கியொன்று உள்ளீடாகப் பித்தளை மூடியொன்றைத் திருகுகளால் நிலையாக்கி வைத்தற்பொருட்டு அம்மூடியானது தட்டையான பட்டியாகத் திருப்பப்பட்டிருக்கிறது. இம்மூடி வெபபமானி T வைக்கப்படு கின்ற குழாய் B யைக் காவுகிறது. மேலும், அதே மூடி வெப்பமாக்குஞ் சுருள் H இற்குச் செல்கினற கண்டிதத இணைக்கம்பிகளையும் பினபு விவரித்துக் கூறவிருக்கின்ற காவல் வால்வு V யையுங காவுகின்றது. குழாய் A யின் அடியில் அதனூடே செல்லுகினற பித்தளைக் குழாய் D ஆனது பற்றுசு பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது. D யுடன பொருத்தப்பட்டிருக்கின்ற றப்பர் அடைப்பான் E யானது மயிர்த்துளைக் குழாய் C யைத் தாங்கி நிறகிறது. F ஆனது தளர்ச்சியாய்ப் பொருத்தப்பட்ட ஒரு தக்கையாகும்; அது C ஊசலாடுவதைத் தடுககிறது. ஒரு சிறு றப்பர்க் குழாய்த் துண்டால் C யின் வெளியீட்டு செல்வழியுடன U குழாயைத் தொடுக்கலாம்; ஒரு பாகம் தண்ணீரில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கும் போது அளந்த கால இடையொன்றில் வெளியேறுகின்ற கொதிநீராவியை அது ஒடுக்கிச் சேமிக் கின்றது.

படம் 11·20 (c) ஆனது காவல் வால்வைப் பற்றியும் வெப்பமாக்குஞ் சுருள் H இற்குச் செல்கின்ற கண்டித்த இணைக்கம்பிகளுள் ஒன்றைப் பற்றியும் விவரங்கள் தருகின்றது. பிசுபிசுப்புமானியின் மூடியிலுள்ள துளையொன் றிற் சரியாகப் பொருந்தியிருக்கின்றதும் தடித்த சுவருடையதுமான ஒரு றப்பர்க் குழாய்த் துண்டு R இனூடே திருகுப் புரியுடைய ஒரு பித்தளைக்

கோல் செல்கிறது. பித்தளைத் தகட்டுப் பூண்கள் காட்டியுள்ளவாறு அமைக் கப்பட்டிருக்கின்றன ; சுரை N ஐத் திருகி நிலையாக்கினால் றப்பர் விரி வடைந்து மூட்டானது வாயு நுழையவியலாததாகிறது. வால்வு V சிறு பித்தளைக் குழாய்த்துண்டு K யால் ஆனது ; அதன் அடியில் சிறு துளையொன்றுமீது ஓர் உருக்குக் குண்டு ஒய்வாயிருக்கின்றது. இலேசான வில்லொன்று குண்டை அழுத்துகிறது ; குண்டுமீதுள்ள அழுத்தமானது திருகு M ஆல் ஆளப்படுகிறது.

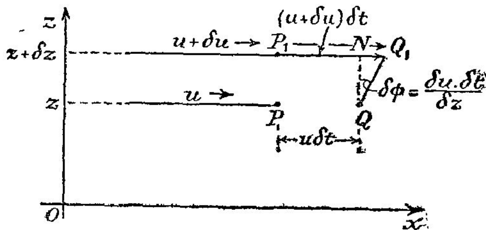
மின்வெப்பமாக்கி பற்றிய விபரங்கள் படம் 11·20 (*d*) யிற் காட்டப்பட்டிருக் கின்றன. சுருளானது ஒருசில சுற்றுகளாகச் சுற்றப்பட்டிருக்கின்ற கொன்ஸ் தாந்தன் கம்பியாலானது. அது செப்பிணைக்கம்பிகளுடன் வன்பற்றுச பிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது. பித்தளைக்குழாய் D மீது எளிதில் நழுவுதற்கான அளவு உடைய சிலிக்காக் குழாயொன்றுமீது சுருள் சுற்றப்பட்டிருக்கின் றது. குழாய் B யுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற செப்புக் கட்டுக்களாற் சிலிக்காக் குழாயானது நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது. இவ்வண்ணம் ஆய் கருவியானது உடனே இணைக்கப்படுகிறது ; மேலும் மயிர்த்துளை முத லியவற்றைத் துப்புரவாக்கும் பொருட்டு அதைக் கூறுகூறுகப் பிரித் தெடுக்கலாம்.

பரிசோதனையைத் தொடக்கிவைக்குமுகமாக நீரானது விரைவாகக் கொதிக்க வைக்கப்படுகிறது ; அப்பொழுது ஆய்கருவியினின்று வளியை அப்புறப்படுத்தும்பொருட்டு வால்வு V ஆனது திறந்தவண்ணம் இருக்கின் றது. அடுத்து வில் மீதுள்ள அமுத்தம் சிறிதளவு உயர்த்தப்படுகிறது ; இதனால் பிசுபிசுப்புமானியில் நிரம்பிய நீராவியின் அமுக்கம் கூடுகின் றது. இவ்வமுக்கமானது வெப்பமானியின் உறுதியான வாசிப்பினின்று கிடைக்கப்பெறுகின்றது. அப்பொழுது வால்வு வழியாகவும் மயிர்த்துளைக் குழாய் மார்க்கமாகவும் கொதிநீராவி வெளியேறுகின்றது. இனி முன்பு காட்டியுள்ளவாறு கொதிநீராவியின் பிசுபிசுப்பு கணிக்கப்படுகிறது. பின்பு கிட்டத்தட்ட 102·5° ச. ஐ விஞ்சாத வெப்பநிலைகளில் பரிசோதனை திரும்பச் செய்யப்படுகிறது.

சுழற்சிப் பிசுபிசுப்புமானிகளும் அலைவுப் பிசுபிசுப்புமானிகளும்

முகவுரை.—ஆய்கூடத்து வெப்பநிலைகளில் லைல் (Lyle) என்பாரின் “வெல்லப்பாகு” அல்லது கிளிசரோல் போன்ற பொருளொன்றின் பிசுபிசுப்பானது அத்துணை உயர்ந்ததாதலின் மயிர்த்துளைக் குழாய்ப் பிசுபிசுப்புமானியானது நடைமுறையில் பெரிதும் வசதி குறைந்ததொன்றா கும். அப்பொழுது சுழற்சிப் பிசுபிசுப்புமானியொன்றைப் பயன்படுத்தலாம். அது பின்வருமாறு அமைந்துள்ளது : தெரிந்த ஆரையுடைய உருளையொன் றில், தெரிந்த பரிமாணங்கள் உடைய உருளையொன்று நிலைக்குத்தாக இருக்கின்றது ; ஈர் உருளைகளின் அச்சுக்களும் ஒன்றே ; பிந்திய உருளையா

னது சீராகச் சுழற்றப்படுகிறது ; ஈர் உருளைகளிடையேயுள்ள கங்கண இடமானது சோதனைக்கான திரவத்தைக் கொண்டிருக்கிறது. உள்ளுருளை அமிழ்ந்துள்ள ஆழம் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும்; உள்ளுருளைமீது உறுதியானவோர் இணை பிரயோகிக்கப்படும்போது அவ்வுருளையின் மாருக் கோண வேகத்தைத் துணிதலே இப்பரிசோதனையின் நோக்கு. இத்தகைய பிசுபிசுப்புமானியின் தொழிற்பாட்டிற்கான ஆரம்பக் கொள்கையில் அமிழ்ப்பாழம் முடிவில்லாததாக இருக்கும்பொழுது திரவத்தின் இயக்கமும் இவ்வுதாரணத்திலுள்ள இயக்கமும் ஒன்றே எனக் கொள்ளப்படுகிறது ; எனவே முனைத் திருத்தம் எனப்படும் திருத்தமொன்று வழக்காகிறது ; அம்முனைத் திருத்தத்தை நீக்குமுகமாகவே பரிசோதனை வழக்கமாக நடாத்தப்படுகின்றது. இவ்வுதாரணம் தொடர்புச் சுழற்சியின் பாற்படும் ; எனவே உள்ளுருளையை நிலையாக்கி வெளியுருளையைச் சுழற்றுதலும் அல்லது அதன் மறுதலையும் ஒன்றே. உயர் பிசுபிசுப்புடைய திரவங்களிடத்து நிறைகளாலும் கப்பிகளாலுமான தொகுதியொன்றால் உள்ளுருளைமீது ஒரு தெரிந்த இணையைப் பிரயோகித்து, உறுதி நிலையடைந்தபின் சுழற்சி வேகத்தை அளத்தலே எளிமைமிக்க முறை. தக்க வேகமொன்றை அளித்தலுக்கான முறுக்கம் சிறிதாகிக் கம்பி



படம் 11·21. நியூற்றனின் கருதுகோள்–வேறொரு கருத்து.

களிடத்துள்ள உராய்வானது குழப்பக்கூடிய அளவில் தோற்றும்போது, உள்ளுருளை ஒரு முறுக்கற் கம்பியால் தொங்கவிடப்பட்டிருக்க வெளியுருளையை மாரு வேகத்துடன் சுழற்றக்கூடியவகையில் ஆய்கருவியை அமைக்கலாம். உள்ளுருளையின் திரும்பலானது அவ்வுருளை மீதுள்ள திருப்பத்தை உணர்த்துகிறது.

எவ்வாறு மேற்படி உருளைகளுக்கிடையேயுள்ள பாயியின் பிசுபிசுப்புடன் இத்திருப்பத்தைத் தொடர்புபடுத்தலாம் என்பதைக் காட்டுமுன் பிசுக்குப் பாய்ச்சலைப் பற்றிய நியூற்றனின் கருதுகோளை நாம் மீண்டும் கருதல் வேண்டும். இக்கருதுகோளானது $\frac{F}{A} = \eta \frac{du}{dz}$ (பக்கம் 620) என்னுஞ் சூத்திரத்தாற் சுருக்கிக் கூறப்படுகின்றது. இச்சூத்திரத்திற்கு வேறொரு வடிவம் கொடுத்தால் அது பெரிதும் அறிவூட்டும். அதாவது திரவத்தில் δz

என்னும் இடைத்தூரம் உடைய இரு தளங்கள் கருதப்படுக; அத் தளங்களிலுள்ள வேகங்கள் முறையே u வும் $u+\delta u$ வும் ஆகுக; அப்பொழுது நேரம் δt யில் வேகங்கூடிய தளத்திலுள்ள துணிக்கை யொன்று மற்றைத் தளத்திலுள்ள துணிக்கையொன்றைக் காட்டிலும் தூரம் $\delta u\,\delta t$ கூடுதலாகச் சென்றுவிடும், படம் 11·21 இற் காண்க. நேரம் δt யில் துணிக்கைகளின் நிலைகளைத் தொடுக்கும் நேர்கோடு PP_1 ஆனது கோணம் $\delta\phi$ இனூடு சுழன்று QQ_1 என்னும் நிலையை அடையுமானால், அப்பொழுது

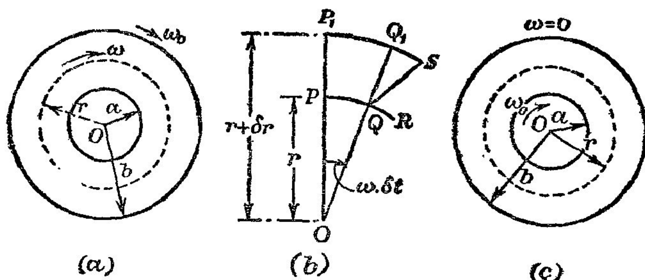
$$\delta\phi=\frac{\delta u\,\delta t}{\delta z} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{d\phi}{dt}=\frac{du}{dz}.$$

எனவே

$$\frac{F}{A}=\eta\frac{d\phi}{dt};$$

அதாவது பிசுபிசுப்பு η மாறாமல் இருந்தால் தகைப்பானது கொய்வு வீதத்துக்கு நேரடி விகிதசமமாம்.

சுழலும் பாயியொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ள ஓர் உருளைமீது தாக்குகின்ற முறுக்கம்.—ஓரச்சுருளைகள் இரண்டிற்கிடையேயுள்ள இடமானது பிசுக்குப் பாயியொனறால் நிரப்பப்பட்டிருக்க. வெளியுருளையை மாறாக் கோண வேகத்துடன் சுழலச் செய்தால் அதனால உள்ளுருளைமீது உஞற்றப் படுகின்ற இணையைக் கணிக்கலாம்; எனவே இவ்விணையை அளந்தால் பாயியின் பிசுபிசுப்பைக் காணும் வழிவகை கிடைக்கப்பெறுகின்றது. உள்



படம் 11·22. உறுதியாகச் சுழலும் பாயியொன்றில் வைக்கப்பட்டுள்ள உருளைமீதான முறுக்கம்.

ளுருளை, வெளியுருளை ஆகியவற்றின் ஆரைகள் முறையே a யும் b யும் ஆகுக, படம் 11·22 (a); உருளைகளில் நீளம் l ஐக் கருதுக; இப்போதைக்கு முனைவிளைவுகள் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன. உள்ளுருளைமீது உஞற்றப்படுகின்ற இணையை அதன் தொங்கலிலுள்ள முறுக்கலாலாகின்ற இணை சமமாக்குகிறபடியால் அவ்வுருளை ஓய்விலிருக்கின்றது. வெளியுருளை

யின் கோண வேகம் ω_0 ஆகுக ; அவ்வேகமானது வலஞ்சுழியாக எடுக்கப்படுகின்றது ; மிகவும் உள்ளான திரவவடுக்கு ஓய்வில் இருக்கும்.

பாயியிலுள்ள உருளைவடிவப் பரப்பொன்றின் ஆரை r ஆகுக. இப்பரப்பிலுள்ள புள்ளியொன்றின் கோண வேகம் ω ஆனுல் அச்சிலிருந்து தூரம் $r+\delta r$ இலுள்ள புள்ளிகளின் கோண வேகம் $\omega+\delta\omega$ ஆகுக. PQR உம் P_1Q_1S உம் முறையே ஆரைகள் r உம் $r+\delta r$ உம் உடைய வட்டங்களின் விற்கள் ஆகுக, படம் 11·21 (b). $\widehat{POQ}=\omega.\delta t$ ஆகுக. எனவே நேரம் t யில் P, P_1 என்னுமிடங்களில் இருந்த துணிக்கைகள் நேரம் $t+\delta t$ யில் முறையே Q, S என்னுமிடங்களை அடைந்துவிடும்.

இனி
$$PQ=r.\omega.\delta t;$$
$$P_1S=(r+\delta r)(\omega+\delta\omega)\delta t.$$

எனவே $\delta\omega\,\delta r$ என்பது புறக்கணிக்கப்பட்டால்,
$$Q_1S=r.\delta\omega.\delta t.$$
$$\therefore\ Q_1\widehat{Q}S=r\frac{\partial\omega}{\partial r}\delta t.$$
$$\therefore\ \text{கொய்வு வீதம்}=r\frac{\partial\omega}{\partial r}.$$

$\therefore$ ஆரை r உடைய உருளைப் பரப்புமீதுள்ள தொடலித் தகைப்பானது $\eta r\frac{\partial\omega}{\partial r}$ ஆகும், (பக்கம் 671 இற் காண்க) ; இங்கு η பாயியின் பிசுபிசுப்பாகும்.

எனவே ஆரை r உம் நீளம் l உம் உடைய உருளைக்கு வெளியேயுள்ள பாயியானது அவ்வுருளைக்குரியதும் அகலம் δs உடையதுமான கீலமொன்றுமீது $l\eta.r\frac{\partial\omega}{\partial r}\delta s$ என்னும் விசையொன்றைப் பிரயோகிக்கின்றது ; இங்கு $\oint ds=2\pi r$ ஆகும். உருளையின் அச்சைப் பற்றி மேற்படி விசையின் திருப்பம்
$$\eta lr^2\frac{\partial\omega}{\partial r}.\delta s$$
ஆகும்.

எனவே கருதப்படுகின்ற உருளை மீதுள்ள முழு முறுக்கமும் $\eta lr^2\frac{\partial\omega}{\partial r}\oint ds$ இற்கு, அதாவது $2\pi\eta lr^3\frac{\partial\omega}{\partial r}$ இற்குச் சமன் ஆகும்.

உள்ளுருளையின் சுழற்சியைத் தடுக்குமுகமாக வெளியேயிருந்து இடஞ்சுழியாகப் பிரயோகிக்க வேண்டிய இணை Γ ஆகுக. உறுதிநிலையின்போது திரவமிடத்து கோண ஆர்முடுகல் இல்லை ; அதாவது $r=r$ என்பதாலும் $r=a$ என்பதாலும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள உருளைப் பரப்புகளிடையேயுள்ள

திரவமீதுள்ள முழு இணையும் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore\ 2\pi\eta l r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r} - \Gamma = 0 \text{ அல்லது } 2\pi\eta l\, d\omega = \Gamma \frac{dr}{r^3}\cdot$$

$$\therefore\ 2\pi\eta l\omega = -\frac{\Gamma}{2}\cdot\frac{1}{r^2} + \mathrm{A};$$

இங்கு A ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி; $r=a$ ஆகுமிடத்து $\omega=0$ என்னும் எல்லை நிபந்தனைப்படி அதனது பெறுமானம் $\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma}{a^2}$ என்பதால் தரப்படுகிறது.

$r=b$ ஆகுமிடத்து $\omega=\omega_0$ ஆதலின்,

$$2\pi\eta l\omega_0 = \tfrac{1}{2}\Gamma\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right].$$

$$\therefore\ \eta = \frac{\Gamma}{4\pi l\omega_0}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right].$$

உள்ளுருளையானது சுழலுங்காலே ஆரை r உடைய உருளைப்பரப்பிற்கு வெளியேயுள்ள திரவம் அப்பரப்புமீது மீண்டும் $2\pi\eta l r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r}$ என்னும் முறுக்கத்தைப் பிரயோகிக்கிறது, படம் 11·22 (c) யிற் காண்க; அது வலஞ்சுழியாகத் தாக்குகின்றது. உள்ளுருளையின் சுழற்சிக்கு ஏதுவாயிருக்கின்ற வலஞ்சுழி இணை Γ ஆனல், முறையே $r=a$ என்பதாலும் $r=r$ என்பதாலும் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள பரப்புக்களிடையேயுள்ள பாயியானது பூச்சியக் கோண ஆர்முடுகல் உடையதாதலால்,

$$\Gamma + 2\pi\eta l r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r} = 0$$

எனப் பெறுகிறோம்.

இச்சமன்பாட்டைத் தொகையிட்டும் $r=a$ ஆகுமிடத்து $\omega=\omega_0$, $r=b$ ஆகுமிடத்து $\omega=0$ ஆகிய எல்லை நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தியும்

$$\eta = \frac{\Gamma}{4\pi l\omega_0}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right]$$

எனக் காண்கிறோம்.

மாற்று நிறுவல்.—ஆரை r உம் நீளம் l உம் உடைய உருளையொன்றிற்கு வெளியே சுழலும் பாயியானது அவ்வுருளை மீது $2\pi\eta l r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r}$ என்னும் முறுக்கத்தைப் பிரயோகிக்கின்றது என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. அடுத்து r, $r+\delta r$ என்பவற்றுல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஈர் உருளைப் பரப்புக்களுக்கிடையேயுள்ள பாயியைக் கருதுக. பாயியானது சமநிலையில் இருக்கிறபடியால், உள்ளேயுள்ள பரப்பைத் தாக்கு

கின்ற முறுக்கம் வெளியேயுள்ள பரப்பைத் தாக்குகின்ற முறுக்கத்துக்குச் சமனகவும் எதிராகவும் இருத்தல்வேண்டும் ; அதாவது

$$\left[2\pi\eta l r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r}\right]_{r=r} = \left[2\pi\eta l r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r}\right]_{r=r+\delta r}$$

$$= \left[\ \cdots\ \right]_{r=r} + \frac{\partial}{\partial r}\left\{2\pi\eta l r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r}\right\}\delta r.$$

$$\therefore\ 3\frac{\partial \omega}{\partial r} + r\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = 0.$$

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்த்துவைக்கும்பொருட்டு அதை

$$\frac{\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial r}} = -\frac{3}{r}$$

என்றவாறு எழுதுவோம்.

தொகையிட,

$$\text{இ.ம.}\ \frac{\partial \omega}{\partial r} = \text{மாறிலி} - 3\ \text{இ.ம.}\ r,$$

அதாவது
$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = Ar^{-3}$$

எனப் பெறுகிறேம் ; இங்கு A ஒரு மாறிலி. எனவே $\omega = -\frac{1}{2}Ar^{-2} + B$; இங்கு B ஒரு மாறிலி. இவ்வுதாரணத்துக்குரிய எல்லை நிபந்தனைகள் $r = a$ ஆகுமிடத்து $\omega = 0$ உம் $r = b$ ஆகுமிடத்து $\omega = \omega_0$ உம் ஆகும் ;

எனவே
$$A = 2\omega_0\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right]^{-1}.$$

இனி ஆய்கருவியின் உள்ளுருளையானது இடஞ்சுழியான இணை Γ என்பதாலும் திரவத்தால் உஞற்றப்படுகின்ற வலஞ்சுழியான முறுக்கம் $2\pi\eta l\left[r^3\frac{\partial \omega}{\partial r}\right]_{r=a}$ என்பதாலும் தாக்கப்பட்டுச் சமநிலையில் இருக்கின்றது.

$$\therefore\ \Gamma = 2\pi\eta l.\ A,$$

அல்லது முன்னர்போல
$$\eta = \frac{\Gamma}{4\pi l\omega_0}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right].$$

நடைமுறையிலுள்ள உருளைப் பிசுபிசுப்புமானி.—ஓர் உருளைமீது அசையும் பிசுக்குப் பாயியொன்றுற் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற முறுக்கம் பற்றிய அறிமுறை ஆராய்ச்சியில் அவ்வுருளையின் முனைகள் மீது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற முறுக்கங்கள் புறக்கணிக்கப்பட்டுள்ளன ; நீளங்கள் l_1 உம் l_2 உம் உடைய ஈருருளைகளை ஒன்றன்பின் ஒன்முகப் பயன்படுத்தி வேறெரு மாற்றமும்

செய்யப்படாமல் இருந்தால், தெரியாமல் இருக்கின்ற மேற்படி முறுக்கத்தை நீக்கிவிடலாம் ; ஏனெனில்

$$\Gamma_1 = 4\pi\eta\omega_0 \cdot \frac{a^2b^2}{(b^2-a^2)}\, l_1 + \Gamma(\mathrm{B}) \text{ உம்}$$

$$\Gamma_2 = 4\pi\eta\omega_0 \cdot \frac{a^2b^2}{(b^2-a^2)}\, l_2 + \Gamma(\mathrm{B}) \text{ உம்}$$

ஆகும் ; இங்கு $\Gamma(\mathrm{B})$ என்பது முனைகள் மீதுள்ள முறுக்கமாகும் எனவே

$$\eta = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{4\pi(l_1 - l_2)\omega_0}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right].$$

முதன்முதலாக வெற்றிகரமாகச் செயலாற்றியுள்ள உருளைப் பிசுபிசுப்புமானியானது 1890 இல் கூயெற்று† (Couette) என்பவரால் திட்டமிடப் பட்டுள்ளதே ; எனவே இவ்வகையான கருவிகள் அவரது பெயரைப் பெற்றிருக்கின்றன. இங்கு அவரது மூலக்கருவியின் மாற்று வடிவங்களுள் ஒன்று அல்லது இரண்டு மட்டுமே கவனிக்கப்படும்.

ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் வாயுவொன்றினது பிசுபிசுப்பின் தனி நிர்ணயத்திற்கு மிலிக்கனின் முறை.—இப்பரிசோதனைகள் கில்கிறித்து‡ (Gilchrist) என்பவரால் நடாத்தப்பட்டன ; பின்பு ஆய்கருவியானது ஹரிங்ரன்§ (Harrington) என்பவராற் செம்மையாக்கப்பட்டது ; மூலக மின்னேற்றம் துணியப்படும் திருத்தமானது வளியின் பிசுபிசுப்புக் குணகமென ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட பெறுமானத்தில் அடங்கியுள்ள நிகழத்தக்க வழுக்களாற் பெருமளவில் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது என ஏற்கெனவே காட்டியுள்ள மிலிக்கன என்பவரின் மேற்பார்வையின் கீழே அவ்விருவரும் ஆராய்ச்சியை நடாத்தினர். மாருத் திரும்பல் முறையே பெரிதும் எளிதாகவும் நேரடியாகவும் இருக்கிறபடியாலும், η வின் தனித் துணிதலுக்கு மயிர்த்துளைக் குழாய் அல்லது அலையும் பொருள் முறைகளைக் காட்டிலும் அது மிக உகந்ததாக விளங்குகிறபடியாலும், அம்முறையே தெரிந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளது. [செம்பிளென்* (Zemplen) என்பார் இம்முறையையே பயன்படுத்தி வளிக்கு η ஐ நேரடியாகத் துணிந்தார் ; ஆனால் அவர் ஒருமையமுள்ள உருண்டைகளையே பயன்படுத்தினர் ; அவரது பேறுகள் உயர்வாக இருந்தன.]

†*Ann. Chim. Phys.*, 21, 433, 1890.

‡*Phys. Rev.*, 1, 124, 1913.

§*Phys. Rev.*, 8, 738, 1916.

**Ann. der Phys.*, 29, 869, 1909 ; 38, 71, 1912.

இரு காரணங்களையிட்டுக் கில்கிறித்து ஓரச்சுருளைகளைப் பயன்படுத்த முடிவு செய்தார் :—

(a) அது எளிமைமிக்க முறையாக விளங்கிறது ; அம்முறையில் வழுக்களை எளிதில் உணர்ந்து அவற்றின் விளைவுகளைக் கூடிய வரை குறைக்கலாம்.

(b) அம்முறையின கொள்கை எளிதானது ; அக்கொள்கை தருகின்ற சூத்திரம் திட்டமானது. முனைவிளைவை நீக்கமுடியுமானால், உள்ளுருளைமீது தாக்குகின்ற இணை Γ ஆனது

$$\Gamma = \frac{4\pi\omega_0 \eta l a^2 b^2}{(b^2 - a^2)}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டுள்ளது ; அது $b_0\phi$ இற்குச் சமன் ; இங்கு ϕ உள்ளுருளையின் உறுதிக் கோண விலகலும் b_0 தொங்கலில் திருகல் அலகொன்றிற்கான இணையும் ஆகும். வெளியுருளையில்லாதபோது, உள்ளுருளையின தொங்கலச்சைப்பற்றி அதன் சடத்துவத் திருப்பம் I யும் அலைவுக்காலம் T யும் ஆனால் அப்பொழுது

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{b_0}}.$$

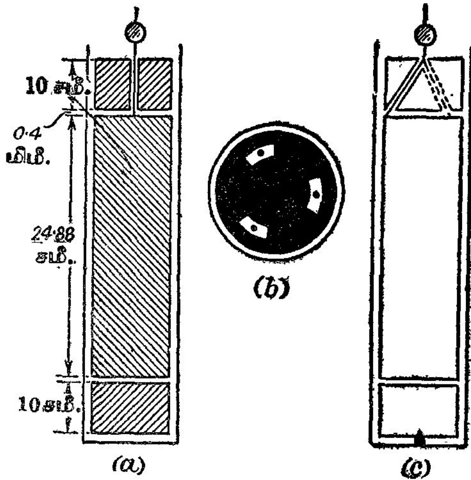
$$\therefore\ \eta = \frac{\pi\phi I(b^2 - a^2)}{a^2 b^2 T^2 \omega_0 l}.$$

உள்ளுருளை பித்தளையாலானது ; அதன் திணிவைக் குறைக்கும் பொருட்டு அதனது சுவர்கள் கூடியமட்டில் மெல்லிதாயிருந்தன. சுவரானது அச்சுக்குச் செங்குத்தாக அமைக்கப்பட்டுள்ள அலுமினியத் தகடுகளால் தாங்கப்பட்டிருந்தது. உருளையின் சுவரானது தொங்கற் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமாகவிருக்கும் வண்ணம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

முனைவிளைவுகளை நீக்கும்பொருட்டுப் பயன்படுத்திய காவல்வளையங்களின் தத்துவமானது விளக்கப்படம் 11·23 (a) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கிறது ; அப்படமானது முதன்மையான பரிமாணங்களையும் காட்டுகின்றது.

I யைக் காணும் பொருட்டு உள்ளுருளையை ஒரு பியானோ உருக்குக் கம்பியால் தொங்கவிட்டு அலைவுக்காலம் காணப்படுகின்றது. குறுக்குச் சட்டமொன்றுடையதும் அலுமினியத்தாலானதுமான கங்கண வளையமொன்று உருளைமீது சமச்சீராக வைக்கப்பட்டு, அலைவுக் காலம் மீண்டும் துணியப்படுகிறது. அப்பொழுது

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{b_0}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1 + I_2}{b_0}}$$ ஆகும்.



படம் 11·23. வாயுக்களுக்கு மிலிக்கனின் பிசுபிசுப்புமானி.

எடுத்துக்காட்டான நோக்கல்கள் பின்வருமாறு :—

$$T_1 = 19{\cdot}7183 \text{ செக். }; \; T_2 = 28{\cdot}239 \text{ செக்.}$$

$$I_2' = M'.\left[\frac{c^2+d^2}{3}\right] = 22{\cdot}157.\left[\frac{0{\cdot}376^2+9{\cdot}2265^2}{3}\right] \text{கி.சமீ.}^2;$$

அங்கு c ஆனது சட்டத்தின அரையகலமும் d ஆனது அதன் அரை நீளமும் ஆகும்.

$$I_2'' = M''.\left[\frac{e^2+f^2}{2}\right] = 97{\cdot}3771.\left[\frac{9{\cdot}2075^2+8{\cdot}1608^2}{2}\right] \text{கி. சமீ.}^2;$$

இங்கு e யும் f உம் முறையே வளையத்தின் வெளியாரையும் உள்ளாரையும் ஆகும்.

$$\therefore \; I_2 = I_2' + I_2'' = 8002{\cdot}4 \text{ கி. சமீ.}^2; \text{ எனவே } I_1 = 7615{\cdot}8 \text{ கி. சமீ.}^2.$$

வெளியுருளையின் செலுத்தன் முறை, உள்ளுருளையின் உண்மையான தொங்கன் முறை என்பவை படம் 11·23 (b) யிலும (c) யிலும் காட்டப் பட்டிருக்கின்றன.

வளிக்கு

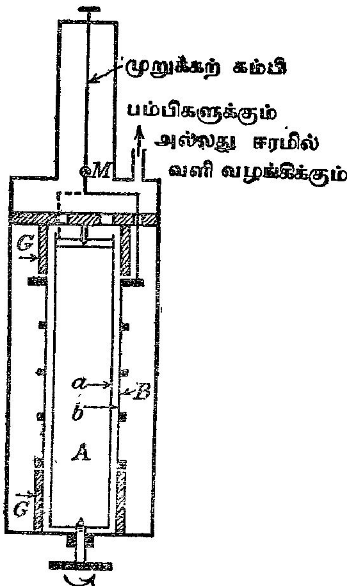
$$\eta_{23°\text{ச.}} = 1{\cdot}8226 \times 10^{-4} \text{ கி. சமீ.}^{-1} \text{ செக்.}^{-1}$$

என ஹறிங்ரன் என்பார் துணிந்தார்.

20°ச. இல் வளியின் பிசுபிசுப்பைத் திட்டமாகத் துணிதல்.—இலத்திரன் ஏற்றத்திற்கு மிலிக்கனின் எண்ணெய்த் துளி முறையாலும் **X**-கதிர்க

ளாலும் பெற்ற பெறுமானங்களுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசத்தின் பெரும்பகுதியானது வளியின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலிலுள்ள ஒரு வழுவினலானதெனலாம், தொகுதி VI இற காண்க. உருளையொன்றின் சுழற்சி அல்லது மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றில் சோதிக்கப்படுகின்ற வாயுவின் பாய்ச்சல் என்பவற்றைப் பொறுத்துள்ள முறைகள் மட்டுமே வாயுவொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் திட்டமாகத் துணிதலுக்குப் பயன் படுகின்றன. பிந்தியதே நடைமுறையில் எளிமைமிக்கது; ஆனல் செய்ய வேண்டிய திருத்தங்கள் மிகுதியாக இருக்கின்றபடியால் அம்முறையானது திட்டமான துணிவிற்குத் தக்கதொன்றன்று. ஆய்கருவியின் பொறி முறையமைப்பிலுள்ள திட்டம், அறிமுறையெதிர்ப்பின்மை என்பவற்றைப் பொறுத்தமட்டில் சுழலுமுருளை முறையானது தனிப்பட்ட நயங்கள் உடையது.

20·00°ச. இல் வளியின் பிசுபிசுப்பை பியர்டன் (Bearden) என்பார் 1939 இல் திட்டமாகத் துணிந்துள்ளார் ; அவர் பயன்படுத்திய சுழலுமுருளை முறையானது மிலிக்கன் கையாண்ட முறையினின்று ஒரேயொரு விடயத்தில் மட்டுந்தான் பெருமளவில் வேறுபட்டது. நீண்டவுருளையொன்றின் உள்விட்டத்தைக் காட்டிலும் அதன் வெளி விட்டத்தைக் கூடிய திட்டத்துடன் ஆக்கவும் அளக்கவும் முடியுமாதலால் சுழலுமுருளை A யே உள்ளுருளையாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்டுள்ளது, படம் 11·24. அதனது உட்பரப்பின் திட்டமான ஆக்கலின் பொருட்டுத் திரும்பலுருளை B ஆனது குறுகியதாய் இருந்தது ; காவல்வளையங்கள் G என்பவை அதற்குக் காப்பு அளித்தன ; தட்டையான பீடமொன்றில் அது ஓய்வாயிருக்கும்போது அதை நிரப்புவதற்கான நீரின் திணிவைத் துணிந்து அதன் உள்ளாரை காணப்பட்டுள்ளது. ஒரு மின்காந்தச் செலுத்தியால் A சுழற்றப்பட்டுள்ளது ; இதனல் அதை வெற்றிடத்திற் சுழற்றவும் அத்துடன் செலுத்தியின் பொறியமைப்பைக் குலையாமல் ஆய்கருவியை உலர் வளியால் நிரப்பவும் முடிந்தது. எல்லா அளவீடுகளும் 20·00° ச. இலே செய்யப்பட்டுள்ளன ; ஆய்கருவியிலுள்ள பெக்மான் வெப்பமானியொன்று அங்குள்ள வெப்ப



படம் 11·24. வாயுக்களுக்கேற்ற திட்டமான பிசுபிசுப்புமானி.

நிலையானது நாளொன்றில் 0·01°ச. இற்குக் கூடுதலாக மாறவில்லை எனக் காட்டிற்று. ஆய்கருவியின் உருக்காலான பீடமானது கிடையாக இருக்கும் படி செய்யப்பட்டுள்ளது; தொங்கியவுருளையானது காவல்வளையங்களுடனும் சுழலுமுருளையுடனும் ஓரச்சுடையதாய் இருக்குமாறு ஒழுங்கு செய்யப்பட்டுள்ளது.

வெளியுருளையின் திரும்பலை அளத்தற்பொருட்டுப் பயன்படுத்தியுள்ள ஒளித்தொகுதியானது ஒரு தொலைகாட்டியும் ஒப்பீட்டுமானியும் ஆகும். ஆடியின் பூச்சிய நிலையில் அத்தொகுதியானது ஆடிக்குச் சமாந்தரமாக விருக்கும்படி செய்யப்பட்டுள்ளது; வழுக்களையிட்டுக் குறுக்கு மயிர்கள், ஒப்பீட்டுமானி என்பவற்றின் திருகுகள் அளவுகோடு திருத்தப்பட்டுள்ளன. ஒரு நியமச் சட்டத்தைப் பயன்படுத்தி ஒளிமுதலுக்கு எதிரேயுள்ள நிலைக்குத்தான கம்பியிலிருந்து ஆடி M வரையுள்ள தூரம் அளக்கப் பட்டுள்ளது. ஆடிக்கு எதிரேயுள்ள யன்னலின் கண்ணாடியின் முறிவுச் சுட்டியையிட்டு இத்தூரமானது திருத்தஞ் செய்யப்பட்டுள்ளது.

அதனது ஓய்வுநிலையிலோ திரும்பிய நிலையிலோ உருளை B யை முற்றிலும் ஒய்வாயமையுமாறு எளிதிற் செய்ய முடியாததலின் விம்பத்தைக் கிட்டத்தட்ட 0·005 சமீ. பெயர்த்து வைக்கக்கூடிய அளவிற்கு உருளையை அலையுமாறு செய்து நோக்கல்கள் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. வேணியர் குறுக்கு மயிர்களாற் பல அலைவுகளின் திரும்பற் புள்ளிகளை அளந்து அவற்றின் சராசரியானது கிட்டத்தட்ட விம்பத்தின் உறுதி நிலையில் நிறுத்தியுள்ள ஒப்பீட்டுமானியின் அளவீட்டுடன் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது. உருளை A யின் செலுத்தியானது மிக்கவுறுதியாயிருந்தது; தைரேற்றன் சுற்றொன்றைப் பயன்படுத்தி அதன ($\frac{1}{2}$ ப.வ.) மோட்டரானது எலின்வாராலான, திட்டமான, மின் விசைக்கவரொன்றுடன் ஒருகாலங் காட்டுமாறு செப்பஞ் செய்யப்பட்டுள்ளது. சடத்துவத் திருப்பம் கணிக்கக் கூடிய தொங்கிய பொருள்களின் அலைவுக் காலத்தை அளந்து தொங்கற் கம்பியின் முறுக்கற் குணகம் காணப்பட்டுள்ளது. பிந்திய அளவீடுகள் வேறொரு மணிச்சாடியிலே செய்யப்பட்டுள்ளன; புறக்கணிக்கக்கூடிய அளவுக்குத் தணித்தலைக் குறைத்தற் பொருட்டு அம்மணிச்சாடியிலுள்ள அமுக்கமானது கிட்டத்தட்ட 10 மிமீ. இரசம்வரை குறைக்கப்பட்டுள்ளது. முறுக்கற் கம்பியானது இப்பரிசோதனைக்கென உயர்வெப்பநிலையில், உலர் ஐதரசனில் தோய்த்தெடுத்த தங்குதனால் ஆக்கப்பட்டுள்ளது; அதில் ஒரு சிறு இழுவை எப்பொழுதும் இருக்கும் வண்ணம் ஒழுங்கு செய்யப்பட்டுள்ளது. இம்முறையாற் பூச்சியப் பெயர்ச்சியானது தடுக்கப் படுகின்றது எனக் காணப்பட்டுள்ளது. முறுக்கற் குணகத்தின் நிலையியற் பெறுமானத்துக்கும் அதனது இயக்கவியற் பெறுமானத்துக்குமிடையே யாதொரு வித்தியாசமும் இல்லை எனப் பரிசோதனையாற் காட்டப் பட்டுள்ளது. இருந்தாலும் தொங்கலின் முறுக்கற் குணகத்தைத் துணியுமிடத்து வழுவொன்று தோற்றக்கூடும்; ஏனெனில் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலிற் கம்பியானது நிலையியல் முறைப்படி பயன்படுத்தப்படுகிறபோதி

லும் அலைவுக் காலத்தைத் துணியும்போது அது இயக்கவியல் முறைப் படியே பயன்படுத்தப்படுகிறது என்பதேயாம். இவ்விரு மாறிலிகளும் சம மாக இராவிட்டால் முறுககற் குணகமானது அலைவுக் காலத்தின் ஒரு சார்பாக விளங்கும் என நாம் எதிர்பார்க்கக்கூடும். சுழற்சியச்சைப் பற்றி வெவ்வேருன சடத்துவத் திருப்பங்களுடைய ஆறு பொருள்களைப் பயன்படுத்தியுள்ளபோதிலும் சோதிக்கப்பட்ட கம்பியானது யாதொரு மாறலையும் காட்டவில்லை.

திரும்பலுறும் உருளையின் பலித நீளமானது அதன் உண்மை யான நீளம், காவல்வளையங்களுககிடையேயுள்ள தூரம் என்பவற்றின் சராசரியெனப் பரிசோதனையால் உறுதிப்படுத்தப்பட்டுளளது. எடுத்துக்காட் டான துணிதலொன்றில, ஆய்கருவியிலுள்ள அமுக்கத்தை 10 மிமீ. இரசம் வரை தாழ்ததிப் பொசிவுளளதோவெனப் பார்க்கப்பட்டது. 74·5 மிமீ. இரச அமுக்கம் உண்டாகும் வரை உலர் வளி உள்விடப் பட்டுள்ளது. உறுதிநிலை அடையும்பொருட்டு ஆய்கருவியானது பலமணித் தியாலகாலம் ஓய்வாயிருந்தது. பின்பு பூச்சியநிலை நோக்கப்பட்டு உருளை யானது முதல் ஒரு திசையிலும் அடுத்து மற்றைத் திசையிலும் சுழலும் போது திரும்பல்கள் நோக்கப்பட்டுள்ளன.

வளியின் பிசுபிசுப்புக்குப் பக்கம் 676 இல் நிறுவியுள்ள சூத்திரத்தாற் கணிக்கப்பட்ட இடைப் பெறுமானமானது 20·00°ச. இல்

$$(1819{\cdot}20 \pm 0{\cdot}06) \times 10^{-7} \text{ கி.சமீ.}^{-1} \text{ செக்.}^{-1}$$

எனக் காணப்பட்டுள்ளது.

வளியின் பிசுபிசுப்புக்கான மேற்படி பெறுமானத்துடன் மிலிக்கனின் எண்ணெய்த்துளித் தரவுகளைப் பயன்படுத்துமிடத்து

$$e = -4{\cdot}815 \times 10^{-10} \text{ நி. மி. அ.}$$

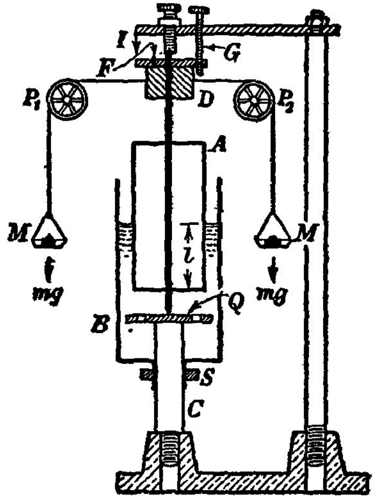
எனக் காண்கிரேம் ; ஆனல் டணிங்ரனற் கணிக்கப்பட்டுள்ள X—கதிர்ப் பெறுமானம்

$$e = -4{\cdot}8025 \times 10^{-10} \text{ நி. மி. அ.}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

திரவங்களுக்குச் சேளின் பிசுபிசுப்புமானி.— இப்பிசுபிசுப்புமானியின் குறுக்கு வெட்டானது படம் 11·25 இல் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. உள்ளுருளை A யானது நிலையான போதிகைகள் மீது தொழிற்படுகின்ற ஓர் அச்சாணியாற் காவப்படுகிறது ; தாழ்ந்த போதிகையானது வெளியுருளை B யைத் தாங்குகினற தூண் C யின் முடியில் அமைந்திருக்கிறது. திருகு S ஆல் உருளை B யை உயர்த்தி அல்லது தாழ்த்தி விரும்பிய நிலையில் இறுக்கலாம். உள்ளுருளையைத் தாங்குகின்ற அச்சாணியானது உருளை D யைக காவுகின்றது ; அவ்வுருளைமீது சுற்றப்பட்டு, P_1, P_2 என் னும் இரு கம்பிகள் மீது செல்கின்ற கயிற்றுடன், தெரிந்த திணிவுடைய தட்டுக்கள் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன ; அத்தட்டுக்களால் தாங்கப்படுகின்ற

M என்னும் இரு சம திணிவுகளால் A யைச் சுழலச் செய்யலாம். வெளியுருளை இறுக்கப்பட்டிருக்கின்ற தூணின் முடியானது அவ்வெளியுருளையுடன் தளர்ச்சியாகப் பொருந்தியிருக்கின்ற துளையிட்ட தடக்குத்தட்டு Q வைக் காவுகின்றது. தடக்குத்தட்டிற்குக் கீழேயுள்ள இடமும் ஈருருளைகளிடையேயுள்ள இடத்தின் ஒரு பகுதியும் சோதிக்கப்படுகின்ற திரவத்தால் நிரப்பப்பட்டிருக்கின்றன. வெளியுருளையை மேல்முகமாக அசைத்துத் திரவத்தால் உள்ளுருளையிற் சூழப்பட்ட நீளத்தை மாற்றலாம். உள்ளுருளையின் அமிழ்ப்பு ஆழத்தை எளிதில் மாற்றி வைக்கும்பொருட்டு வெளியுருளையானது அதனது அடியினின்று நீட்டிக்கொண்டிருக்கின்ற ஒரு குழாய் மீது தொழிற்படுகின்ற திருகு-இறுக்கி S ஆல் தூண் C யில் இறுக்கப்பட்டிருக்கிறது. நீட்டிக்கொண்டிருக்கின்ற குழாயானது பகுதியாக அக்குழாயின் அச்சுக்குச் சமாந்தரமாகத் துவாரமிடப்பட்டிருக்கின்றது; எனவே திருகு S ஆல் தூணுடன் திரவம் புகா மூட்டொன்று ஆக்கப்படுகிறது. தடக்குத் தட்டு Q ஆனது உள்ளுருளையின் சுழற்சியால் அத்தட்டுக்குக் கீழேயுள்ள திரவத்தில் உணரத்தக்க அளவில் அசைவு



படம் 11·25. பிசுபிசுப்புமிக்க திரவங்களுக்குச் சேனின் சுழலும் பிசுபிசுப்புமானி.

ஏற்படாத வண்ணம் ஆற்றுகின்றது ; எனவே உள்ளுருளையின் கோணவேகம் ω_0 இன் தரப்பட்ட பெறுமானமொன்றினிடத்து வரையறுத்த முனைவிளைவு α என்பது உளது ; அதாவது A யின் தாழ்ந்த முனைக்கு அணித்தாயுள்ள வேகப் பரம்பலானது நடைமுறையில் அதனது தாங்கி மீது B கொண்டிருக்கின்ற நிலையிலே தங்கியிராது.

உள்ளுருளைமீது மிமீ. அடையாளங்கொண்ட ஓர் அளவிடை பொறிக்கப்பட்டிருக்கிறது ; அதை வெளியுருளையின் சுவரிலுள்ள நிலைக்குத்தான நீண்ட துவாரம் வழியாக நோக்கலாம். இத்துவாரமானது B யுடன் ஒட்டப்பட்டு ஒரு பித்தளைச் சட்டத்தால் உறுதியாக்கப்பட்டுள்ள மெல்லிய கண்ணாடித் தட்டொன்றால் மூடப்பட்டுள்ளது. இவ்வண்ணம் திரவத்தில் உள்ளுருளையின் அமிழ்ப்பு ஆழத்தைத் துணியலாம். உருளைக்கு மேலே அச்சாணியானது பித்தளைத் தட்டொன்றைக் காவுகின்றது ; தட்டின் ஓரத்தில் F என்னும் மாட்டேற்றுக் குறியுளது. பூட்டு ஊசி G என்பது அதன் நிலையில் இருக்கும்போது உள்ளுருளை நிலைப்படுத்தப்

பட்டிருக்கும் ; அப்பொழுது F ஆனது ஆய்கருவியிலுள்ள நிலைத்த குறி I யுடன் பொருந்தியிருக்கிறது. உள்ளுருளையின் சுழற்சிக் காலத்தைத் துணிவதற்கு இவ்விரு குறிகளும் பயன்படுகின்றன.

உள்ளுருளை B யின் உள்விட்டம் $2b$ யையும் A யின் வெளிவிட்டம் $2a$ யையும் இடுக்கிமானியாற் பலவிடங்களில் அளந்து அவற்றின் இடைப் பெறுமானங்களைத் துணிதல் வேண்டும்.

அடுத்துப் பிசுபிசுப்புமானியில் திரவம் புகுத்தப்படுகின்றது ; வளிக் குமிழிகள் முற்றிலும் மறைந்த பின்னர் உள்ளுருளையின் நீளத்தில் ஒரு சிறு பாகம் மட்டுமே அமிழ்ந்திருக்கும் வண்ணம் வெளியுருளையானது செப்பஞ் செய்யப்படுகிறது ; திரவத்தினின்று உள்ளுருளையை உயர்த்த நேரிடின் அதிலிருந்து திரவம் வடிந்துபோவதற்குப போதிய நேரம் விடுதல் வேணடும். இனி உள்ளுருளையின் அமிழ்ப்பு ஆழம் மாறாமல் இருக்கும்போது வெவ்வேறான சுமைகளைப் பிரயோகித்துச் சுழற்சிக் காலம் T யைத் துணிதல் வேண்டும். போதிகைகளிலும் கப்பிகளிலு முள்ள உராய்வானது சிறிதாயும் மாறாமலும் இருந்தால் mT என்னும் பெருக்கமானது பயன்படும அமிழ்ப்பு ஆழம் $(l+\alpha)$ இற்கு விகிதசமமாக இருத்தல் வேண்டும் ; இங்கு m ஆனது ஒரு தட்டு, அதன் சுமை என்ப வற்றின் மொத்தத் திணிவு ஆகும். $m\mathrm{T}=x$, $l=y$ எனக் குறித்து வரு கின்ற வரையின் வெட்டுததுணடானது "மூனைத்திருத்தம்" α வைத் தரும்.

உருளை, கயிறு ஆகியவற்றின் விட்டத்தை அளத்தல் மட்டுமே எஞ்சி யிருக்கின்றது ; பிரயோகிக்கப்படுகின்ற இணையைப் பொறுத்தமட்டில் பயன் படும் விட்டம் அவ்விரு விட்டங்களின் கூட்டுத்தொகையாகும் ; அது δ ஆகுக ; அதாவது $\Gamma=gm\delta$; இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவு ஆகும்.

$$\eta=\frac{g\delta(b+a)(b-a)}{8\pi^2a^2b^2}\times\frac{m\mathrm{T}}{(l+\alpha)}$$

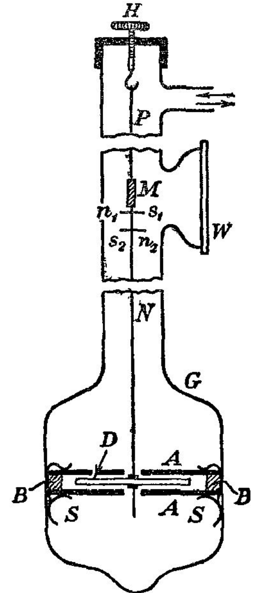
ஆதலின், $x=l$ எனவும் $y=m\mathrm{T}$ எனவும் குறித்து வருகின்ற ஏகபரிமாண வரையின் சரிவினின்றும் பிசுபிசுப்பு η வைப் பெறலாம். வெப்பநிலையிற் பெரும் மாறல்கள் நிகழ்தலாகாது ; எனவே நோக்கல் களைக் கூடியமட்டில் விரைந்தெடுத்தல் வேண்டும்.

T யைத் திருத்தமாகத் துணியும் பொருட்டு ஊசி G யை அப்புறப் படுத்தித் திணிவுகள் M என்பவற்றை விழவிட்டால் உள்ளுருளை சுழலும் போக்கிற்கு எதிரான போக்கில் அவ்வுள்ளுருளையைக் கையாற் கிட்டத்தட்ட காற்சுற்றொன்று சுற்றுதல் வேண்டும். மாட்டேற்றுக் குறி F ஆனது குறிகாட்டி I யைக் கடக்கும் போது நிறுத்தற் கடிகாரமொன்றைத் தொடக்கிவைத்து அதற்குப் பின்னர் நிகழ்கின்ற கடப்பொவ்வொன்றின் நேரத்தையும் நோக்கல் வேண்டும். உதாரணமாக, நான்காவது அள வீட்டை முதலாவதிலிருந்து, ஐந்தாவதை இரண்டாவதிலிருந்து என்ற வாறு கழித்து வழக்கம்போல் சுழற்சிக் காலத்தின் இடைப் பெறுமானம் காணப்படுகிறது.

தாழ்வெப்பநிலைகளில் வாயுக்களின் பிசுபிசுப்பு.—இனி விவரித்துக் கூறவிருக்கின்ற பிசுபிசுப்புமானியானது அலைவுப் பிசுபிசுப்புமானிவகை என்பதற்கோர் எடுத்துக்காட்டாகும்; அத்தகைய பிசுபிசுப்புமானியொவ்வொன்றிலும் தொங்கிய பொருளொன்று அதனது நிலைக்குத்தான ஒரு சமச்சீரச்சைப் பற்றி அலைகின்றது.

சிலவேளைகளில், ஓர் அலைவுப் பிசுபிசுப்புமானியின் எளிய திட்டத்தின் நயமானது அத்திட்டத்தில் அடங்கியுள்ள அறிமுறைக் குறைகளைக் காட்டிலும் முதன்மையானது. தாழ் (அல்லது உயர்) வெப்பநிலைகளில் பிசுபிசுப்பைத் துணிய வேண்டிய போது இப்பண்பானது சிறப்பாக விளங்கும். இத்தகைய காரணங்களையிட்டே வோகல்† (Vogel) என்பார் வாயுப் போக்கு முறைகளைத் தவிர்த்துள்ளார். பொதுவாக ஒப்பீட்டளவீடுகளை மட்டுந்தான் எடுக்க முடியும்; வோகலால் நடாத்தப்பட்ட பரிசோதனைகளிலே $0°$ ச. இல் வளியின் பிசுபிசுப்பானது $1{\cdot}724 \times 10^{-4}$ கி. சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$ எனக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. இது இடைப் பெறுமானமாகும்; அதுவும் ராங்கின் என்பவர் துணிந்துள்ள பெறுமானமும் ஒன்றே.

வோகல் பயன்படுத்தியுள்ள ஆய்கருவியின் தலைமையான கூறுகள் படம் 11·26 இற காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. A, A என்னும் இரு கண்ணாடித் தட்டுக்கள S, S என்னும் இரு விற்களாற் கண்ணாடியாய்கருவி G யின் குமிழான பகுதியில் நிலையாக்கப்பட்டிருக்கின்றன. B, B என்னும் உலோகத் துண்டுகளால் இத் தட்டுக்களுக்கிடையே நிலைத்த சீரான இடைத் தூரம் இருக்கும்வண்ணம் செய்யப்பட்டுள்ளது. D ஆனது கண்ணாடி அல்லது வெள்ளியாலான ஒரு தட்டாகும்; அது A, A என்பவற்றிற் கிடையேயுள்ள ஒரு கிடைத் தளத்தில் அலையும் வண்ணம் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. H ஒரு முறுக்கற் குடுமி; அது (0·05 மிமீ. விட்டமும் 20 சமீ. நீளமும் உடைய) பிளாற்றினத்தாலான நுண்கம்பியொன்றைக் காவுகின்றது; கம்பியின் கீழான நுனியில் (1 மிமீ. தடிப்பும் 22 சமீ. நீளமும் உடைய) நிக்கலாலான கம்பி N இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது; N உடன் தளவாடியொன்று விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. ஆய்கருவியிலுள்ள நிலையில் சோடிக்காந்தங்களுக்கு அணித்தாய்க் காந்தமொன்றைத் தற்காலிகமாகக் கொணர்ந்து தொகுதியானது இயங்குமாறு செய்யப்பட்டுள்ளது.



படம் 11·26. (தாழ்வெப்பநிலைகளில்) வாயுக்களுக்கு வோகலின் பிசுபிசுப்புமானி.

† *Ann. der Phys.*, 43, 1235, 1914.

கண்ணுடிப் பாத்திரம் G ஆனது மேற்படி தொகுதி முழுவதையும் காவுகிறது ; அதை வெறிதாக்கலாம் அல்லது சோதிக்கப்படுகின்ற வாயு வால் நிரப்பலாம். ஆய்கருவியின் கீழான பகுதி மட்டுமே உறைநிலை நிறுத்தியில் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது ; எனவே யன்னல் W வழியாக அலைவுகளை நோக்க முடியும். ஆய்கருவியின் மிகக்குளிரான பாகத்தி லிருந்து போதிய தொலையில் கம்பி P இருக்கிறபடியால் அதன் விறைப் பானது வெப்பநிலை மாறல்களால் உணரத்தக்க அளவில் பாதிக்கப் படவில்லை.

மக்ஸ்வெலின்† கணிப்பின்படி வாயுவின் பிசுபிசுப்பு η ஆனது

$$\eta=\frac{\lambda-\alpha}{\tau C(1+x)}$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் அரைச் சக்கரமொன்றிற்குரிய மடக்கைக் குறைப்பு λ உடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டிருக்கிறது ; இங்கு C ஒரு மாறிலியும், τ ஆடற் காலமும், x இவ்வாராய்ச்சியில் கிட்டத்தட்டப் பூச்சியப் பெறுமானமுடையதாய் இருக்கின்ற ஒரு திருத்தவுறுப்பும் α ஆனது உராய்வாலான பக்கவிளைவுகள் தொடர்பான ஒரு சிறு திருத்தமும் ஆகும். தொடர்பளவீடுகள் மட்டுமே எடுக்கப்படுகிறபடியால் C யின் பெறுமானம் தேவைப்படமாட்டாது. α என்பதே முதன்மைமிக்க திருத்த மாகும் ; அது பூச்சியம் ஆகும் என இவ்வாராய்ச்சித்துறையில் முன் சென்றோர் பெரும்பாலும் கருதியுள்ளனர். வோகலின் பரிசோதனைகளில் ஆய்கருவியின் பரிமாணங்கள் வழக்கத்துக்கு மாருகச் சிறுமை மிக்கதா யிருக்கிறபடியாலும், சிறப்பாகத் தாழ்வெப்பநிலைகளில் η வும் சிறிதா யிருக்கிறபடியாலும் α ஐத் துணிய வேண்டியது அவசியமாயிற்று. இதன் பொருட்டு வோகல் இரு பிசுபிசுப்புமானிகளைப் பயன்படுத்தி யுள்ளார் ; அவை சர்வசமனுக இருந்தபோதிலும் தொங்குந் தட்டானது ஒன்றில் கண்ணுடியாலும் மற்றதில் வெள்ளியாலும் ஆக்கப்பட்டிருந்தது ; எனினும் சுழற்சியச்சைப் பற்றி இரு தட்டுக்களின் சடத்துவத் திருப்பங் களும் சமம் ; அதாவது தட்டுக்களின் பரப்பளவுகள் மட்டுமே வேறுபட் டுள்ளன. குறிப்பிட்ட வாயுவொன்றில், இரு வெவ்வேருன வெப்பநிலை களில், ஆய்கருவியொவ்வொன்றுடனும் பரிசோதனைகள் நடாத்தப்பட்டுள் ளன ; அதன்பின் α கணிக்கப்பட்டது. பொதுவாக

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2;$$

இங்கு α_1 என்பது வாயுவில் ஆடி முதலியவற்றின் இயக்கத்தால் ஆகின்ற புறவுராய்வு விளைவுக்குரியது ; α_2 என்பது தொங்கற் கம்பியி லுள்ள மீள்தன்மைப் பின்னிடைவுக்குரியது. α_1 ஆனது $\eta^{\frac{1}{2}}$ இற்குக் கிட்டத்தட்ட விகிதசமன் எனக் காணப்பட்டது.

ஒரு பிளாற்றினத் தடை வெப்பமானியால் வெப்பநிலைகள் அளக்கப் பட்டுள்ளன.

† *Phil. Trans.*, **156**, **249**, **1866**.

λ வைக் காணும் முறை பின்வருமாறு. வலதுபக்கத்தில் முதலாவது ஊசலாடல் a_1 உம் இடது பக்கத்தில் முதலாவது ஊசலாடல் b_1 உம் ஆகுக. அப்பொழுது $\lambda =$ இ.ம. $\frac{a_1}{b_1} =$ இ.ம. κ என்க. எனவே, தானகவே விளங்குகின்ற ஒரு குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்த,

$$\frac{a_n}{a_{n+15}} = k^{30} \text{ உம் } \quad \frac{b_n}{b_{n+15}} = k^{30} \text{ உம்}$$

ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{a_n + b_n}{a_{n+15} + b_{n+15}} = k^{30}.$$

எனவே, மடக்கைகளை எடுத்து λ வைக் காணலாம். இங்கு பூச்சிய நிலையை அறிந்திருக்கவேண்டியதேயில்லை ; எனவே இம்முறைப்படி வாசிப்புகளை எடுத்தல் மிக வசதியாகும்.

கடைசியாக 0°ச. ஒழிந்த எந்த வெப்பநிலையிலும், ஒரு வாயுவின் அல்லது வளியின் பிசுபிசுப்பானது

$$\frac{\eta}{\eta_{\text{வளி}}} = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda_{\text{வளி}} - \alpha_{\text{வளி}}}$$

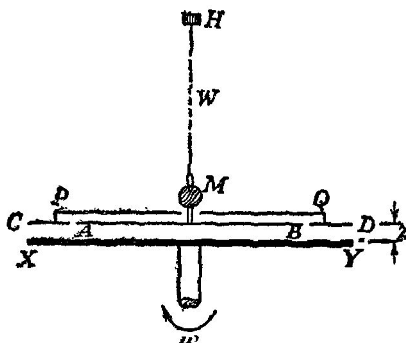
என்னுஞ் சூத்திரத்தினின்று கணிக்கப்பட்டுள்ளது ; இங்கு, வளியின் பிசுபிசுப்பைப் பொருத்தமான வெப்பநிலையில் எடுத்தல் வேண்டும்.

பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்கான வேறு முறைகள்

சுற்றுத்தட்டு முறையாற் பாயியொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதல்.— திரவங்களிடத்தும் வாயுக்களிடத்தும் பயன்படுத்தக்கூடிய இம்முறையில், பெரிய விட்டமுடைய, மெல்லிய, வட்டத்தட்டொன்று அதனது மைய மூடாகவும் அதனது தளத்துக்குச் செங்குத்தாகவும் செல்கின்ற ஒரு நிலைக்குத்தான அச்சைப் பற்றி மாருக் கோண வேகத்திலே சுழற்றக்கூடிய வகையில் ஏற்றப்பட்டிருக்கிறது. படம் 11·27 இற் காண்க. அதற்கு மேலே சிறுவுயரத்தில், ஒரு முறுக்கற் கம்பியால் வேறொரு தட்டு தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது ; இரு தட்டுக்களின் தளங்களும் கிடையாயிருக்கின்றன. முறுக்கற் கம்பியானது கீழ்த்தட்டின் சுழற்சியச்சுடன் பொருந்தியிருக்கின்றது. கீழ்த் தட்டு இயங்குங்காலே, மேல்தட்டுமீது ஓர் இணை தாக்குகிறபடியால் பிசுக்கிழுப்பால் ஆகின்ற இணையானது முறுக்கற் கம்பியிலுள்ள திருகால் ஆகின்ற மீள்தரு இணைக்குச் சமனுக வரும்வரை அம்மேற்றட்டு ஏதோவொரு கோணம் θ வினூடாக அசையும்.

இவ்விணைக்கான கோவையொன்றைப் பெறுமிடத்து, திரவ அடுக்கு எதுவாகிலும், அதனது கோணவேகமானது மேல் தட்டினின்று அவ்வடுக்கினது தூரத்தின் ஏகபரிமாணச் சார்பொன்றுகும் எனக் கொள்ளப்

படும். இதனை நிறைவேற்றற் பொருட்டுத் தட்டின் விட்டம் முடிவிலியாகவும் சுழற்சிவேகம் நுண்ணளவாகவும் இருத்தல் வேண்டும். தட்டுக்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் z உம், சுழலுந் தட்டின் கோண வேகம் ω வும் ஆனால் சுழற்சியச்சினின்று தூரம் r இல், மேற்படி சூழலில்



படம் 11·27. பாயியொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்கான சுழலுந் தட்டுடைய ஆய்கருவி.

நிலைக்குத்து வேகப் படித்திறனானது மாறாமலும் $\frac{r\omega}{z}$ இற்குச் சமனாகவும் இருக்கும். எனவே மேலான தட்டில் ஆரைகள் r உம் $r+\delta r$ உம் உடைய அடுத்தடுத்துள்ள வளையங்களால் வரையறுத்த பாகமீதுள்ள மூலக முறுக்கமானது

$$\delta\Gamma = \left[\oint \eta(\delta r\,.\,ds)\frac{r\omega}{z}\right].r = 2\pi r\,\delta r\,.\,\eta\,.\,\frac{r\omega}{z}\,.\,r = 2\pi r^3\,.\,\frac{\eta\omega}{z}\,.\,\delta r$$

என்பதால் தரப்படுகிறது, பக்கம் 672 ஐப பார்க்க.

$$\therefore \text{ தட்டுமீதுள்ள முழு முறுக்கம்} = \Gamma = 2\pi\eta\frac{\omega}{z}\int_0^a r^3\,dr = \tfrac{1}{2}\pi\eta\,.\,\frac{\omega}{z}\,.\,a^4;$$

இங்கு a ஆனது தட்டின் ஆரையாகும் [மக்ஸ்வெல்†].

சுழலுந்தட்டுப் பிசுபிசுப்புமானியொன்றின் நிலையான தட்டுமீது தாக்குகின்ற இணைக்கான கோவையைப் பெறுமிடத்து நிலையான தட்டின் மேலான பரப்புமீது பிசுக்கிழுப்பு இல்லையெனவும் வேகப் படித்திறனானது, (தட்டின் ஓரம்வரை கூட) எப்பொழுதும் $r\omega z^{-1}$ என்பதால் தரப்படுகிறது எனவும் இல்லாமலே கொள்ளப்பட்டுள்ளன. இந்த நிபந்தனைகளுக்கு இணங்குமுகமாக ஆய்கருவியானது படம் 11·27 இற் காட்டியுள்ளவாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. XY சுழலும் தட்டு ஆகும்; அதன் விட்டம் கிட்டத்தட்ட 40 சமீ. ஆகும்; வாயுக்களுடன் பயன்படுத்துமிடத்துச் செக்க

† ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகளின் தொகுதி அல்லது *Phil. Trans.*, 156, 249, 1866.

ஞென்றில் அது ஒன்று அல்லது இரண்டு முழுச்சுற்றுக்களைச் செய்யும். இத்தட்டுக்கு கிட்டத்தட்ட 3 மிமீ. மேலே, பிசுபிசுப்பு காரணமாக உண்டாகின்ற முறுக்கத்தால் தாக்கப்படுகின்ற மேற்றட்டு AB என்பது இருக்கிறது. இம்மேற்றட்டானது அதனினும் பெரிய தட்டு CD என்பதிலுள்ள வட்டமான துவாரமொன்றைக் கிட்டத்தட்ட முற்றிலும் அடைத்துக் கொண்டிருக்கிறபடியால் பாயியின் பாய்ச்சலும், AB யும் CD யும் ஒரே தட்டாக இருக்கின்றபோதுள்ள பாய்ச்சலும் கிட்டத்தட்ட ஒன்றேயாகும். இவ்வண்ணம் ஓரவிளைவுகள் நீக்கப்பட்டு முன்னர் நிறுவியுள்ள கொள்கையானது பயன்படுத்தப்படுகிறது. CD மீது தட்டையான கவிப்பு PQ அமர்ந்திருந்து AB யின் மேற்பரப்பானது பிசுக்கிழுப்பாற் பாதிக்கப் படா வண்ணம் காப்பளிக்கிறது. மேற்றட்டானது வழக்கம்போல் முறுக்கற் குடுமி H இனின்று நுண்கம்பி W ஆல் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றது ; மேற்றட்டுடன் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற ஆடி M ஆனது அத்தட்டின் கோணவிலகலைத் திருத்தமாக மதிப்பிட உதவுகின்றது.

தொங்கலில் அலகுத்திருகல் ஒன்றிற்கான இணை b ஆனால், தட்டு சமநிலையில் இருக்கும்போது

$$\Gamma = b\theta,$$

அல்லது

$$\eta = \frac{2zb\theta}{\pi\omega a^4}$$

ஆகும்.

மேற்றட்டின் ஆரை

$$a + \gamma\left[1 - \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\gamma}{z}\right]$$

எனக் கருதல் வேண்டும் என்று பிரியுவான் (Brillouin) என்பார் காட்டியிருக்கின்றார் ; இங்கு வளையத்திற்கும் தொங்குந் தட்டுக்கும் இடையேயுள்ள அகற்சி γ ஆனது z உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் சிறிதாகும்.

ஸ்ரோக்சின் விதி.—மாரு விசையொன்று ஒரு பொருளின்மீது தாக்குமிடத்து அப்பொருளின் இயக்கத்துக்கு அதன் வேகத்தின் எந்த வலுவுக்கும் விகிதசமமான தடையொன்று ஆற்றுமாஞல் ஈற்றில் அப்பொருளானது மாரு அல்லது முடிவுவேகமொன்றை அடையும் என நியூற்றன்† நிறுவியுள்ளார் ; அப்பொழுது இயக்கத்தை எதிர்க்கும் விசையானது பொருள் மீது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற மாரு விசைக்குச் சமனும் எதிருமாகும். முடிவில் பரிமாணங்களுடைய பிசுக்குப் பாயியொன்றிலே, சீரான வேகத்துடன் ஒரு கோளம் மெதுவாக அசையுங்காலே அதனது இயக்கத்தை எதிர்க்கின்ற தடையானது $6\pi r\eta u$ ஆகும் என முதன்முதலாக ஸ்ரோக்ஸ் என்பார் காட்டியுள்ளார் ; இங்கு r ஆனது கோளத்தின் ஆரையும், u ஆனது அதனது முடிவு வேகமும் ஆகும். லாம் என்

† *Principia*, Lib. II, Prop. viii, Cor 2.

பாரின் நீரியக்கவியல் நூலில் இச்சமன்பாடானது கணிதமுறைப்படி நிறுவப்பட்டிருக்கிறது ; விழுங் கோளமீது தாக்குகின்ற விசையைப் பிரதி செய்கின்ற கோவை வகையைக் காணும் பொருட்டுப் பரிமாணப் பகுப்பு முறையை மட்டுமே இங்கு பயன்படுத்த முடிகின்றது. எனவே

$$F = Ar^{\alpha}\eta^{\beta}u^{\gamma}$$

என எழுதுவோம் ; இங்கு A, α, β, γ என்பவை மாறிலிகள் ஆகும் ; இப்பொழுது பயன்படுத்தப்படுகின்ற முறையால் α, β, γ என்பவற்றை மட்டுமே துணியலாம்.

$$[F] = [M][L][T^{-2}] \text{ உம், } [r] = [L] \text{ உம்,}$$

$$[\eta] = [M][L^{-1}][T^{-1}] \text{ உம், } [u] = [L][T^{-1}] \text{ உம்,}$$

ஆதலின்

$$MLT^{-2} = L^{\alpha}.M^{\beta}L^{-\beta}T^{-\beta}L\ T^{-\gamma}$$

எனப் பெறுகிறேம்.

சுட்டிகளை ஒப்பிட்டு

$$1 = \beta,$$
$$1 = \alpha - \beta + \gamma,$$
$$-2 = -\beta - \gamma$$

எனப் பெறுகிறேம்.

$$\therefore \quad \alpha = 1 \text{ உம் } \gamma = 1 \text{ உம் ஆகும்.}$$

எனவே $$F = Ar\eta u ;$$

மேலும் பாயியானது எல்லையற்றதாயிருக்கும்போது

$$A = 6\pi$$

என ஸ்ரோக்ஸ் காட்டியுள்ளார்.

$$\therefore \quad F = 6\pi r\eta u.$$

விழுங் கோளம்.—முடிவில் பரிமாணங்களுடைய பிசுக்குவூடகமொன்றில் விழுகின்ற கோளமொன்று அதன் முடிவு வேகம் u வை அடைந்திருக்கின்ற நிலையில், அதன் இயக்கத்தை எதிர்க்கின்ற தடையானது $6\pi r\eta u$ ஆகும் என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டுள்ளது ; அவ்விசையானது கோளத்தின் பலித நிறைக்குச் சமனெதிராக இருத்தல் வேண்டும் ; அதாவது

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3(\rho - \sigma)g = 6\pi r\eta u,$$

அல்லது $$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{(\rho - \sigma)}{u} g \cdot r^2$$

ஆதல் வேண்டும் ; இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவும், ρ கோளத்துத் திரவியத்தின் அடர்த்தியும், σ பாயியின் அடர்த்தியும் ஆகும்.

மிலிக்கன் என்பார் இலத்திரன் ஏற்றத்தைப் பரிசோதனை முறைப்படி துணியுங்காலே எண்ணெய்த் துளிகளின் அளவைக் காணும் பொருட்டு இச்சூத்திரத்தைப் பிரயோகித்துள்ளார் ; இது இச்சூத்திரத்தின் முதன்மைமிக்கப் பிரயோகமாகக் கூடும் ; இதன்பொருட்டு ஆய்கூட வெப்ப நிலையில் வளியின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதல் வேண்டியதாயிற்று, [பக்கம் 675 ஐப் பார்க்க]; எனினும் எமது இப்போதைய நோக்கானது எவ்வாறு இச்சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி உயர் பிசுக்குப் பாயியொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணியலாம் என்பதேயாகும்.

ஆய்கூட வெப்பநிலையில் உயர்பிசுபிசுப்புடைய எண்ணெய்களின் பிசுபிசுப்பைப் பரிசோதனை முறைப்படி துணிதல்.— பிசுக்குவூடகமொன்றில் விழுகின்ற ஒரு கோளம் அடைகின்ற முடிவுவேகத்தை அளக்க முடியுமாறுல், η ஒழிந்து மற்றெல்லாக் கணியங்களையும் எளிதில் துணியமுடியுமாதலால், அவ்வூடகத்தின் பிசுபிசுப்புக் குணகத்தைக் காணும் வழி உண்டு என

$$\eta=\frac{2}{9}\cdot\frac{(\rho-\sigma)g}{u}\cdot r^2$$

என்னும் கோவை உணர்த்துகிறது.

ஆமணக்கெண்ணெயே பிசுபிசுப்பைக் காணவேண்டிய திரவம் எனக் கருதுவோம். அது 70 சமீ. நீளமும் 10 சமீ. அகலமும் உடைய கண்ணுடியுருளை A யில் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது (படம் 11·28). தெரிந்த விட்டமுடைய கோளங்கள் திரவத்தில் விழுமாறு போடப்படுகின்றன. இரு மாட்டேற்றுக் குறிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தைக் கடக்கும் பொருட்டுக் கோளம் எடுக்கும் நேரத்தை நோக்கி அதிலிருந்து முடிவுவேகம் துணியப்படுகின்றது. ஆனுல் திரவமானது பாத்திரத்தின் சுவர்களால் உட்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது ; மேலும் அது முடிவுள்ள ஆழமுடையது. எனவே, மேற்படி கொள்கைக்கென ஏற்படுத்தியுள்ள நிபந்தனைகள் நிறைவேற்றப்படாமல் இருக்கின்றன. இருந்தாலும் (முறையே திரவத்தின் பரப்பிலிருந்து 10 சமீ. ஆழத்திலும் அதன் அடியிலிருந்து 10 சமீ. உயரத்திலுமுள்ள) இரு மாட்டேற்றுக் குறிகள் B_1, B_2 என்பவற்றிற்கிடையே கோளமானது விழுமாயின், அப்பொழுது அதன் இயக்கம் சீராக அமைந்திருக்கும் எனக் காட்டலாம். அல்லாமலும், 10 சமீ. அகலமுடைய பாத்திரமொன்றைப் பயன்படுத்துமிடத்து கோளங்களின் விட்டமானது 0·2 சமீ. ஐ மீருமல் இருக்குமாயின் பாத்திரத்தின் சுவர் விளைவையிட்டு யாதொரு திருத்தமும் தேவைப்படமாட்டாது. மாட்டேற்றுப் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் λ வும் கடப்பு நேரம் t யும் ஆனுல்

$$\eta=\frac{2}{9}\cdot r^2g\left(\frac{\rho-\sigma}{\lambda}\right)t\,;$$

எனவே, வெப்பநிலையில் குறிப்பிட்ட திரவமொன்றிற்கு r^2t என்பது

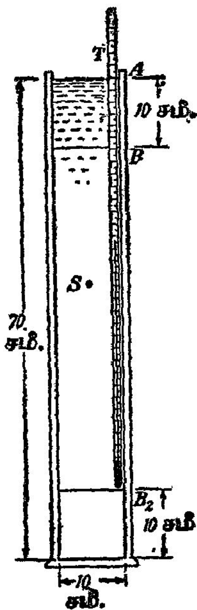
மாறுமல் இருக்கும். எனவே எமது கொள்கைக்கான நிபந்தனைகள் நன்கு நிறைவேற்றப்பட்டிருக்குமாறுல், $\frac{1}{t}$ என்பது தொடர்பாக r^2 ஐக் குறிக்குமிடத்து நேர்கோடொன்றைப் பெறவேண்டும். நேர்கோட்டின் சரிவி விருந்து η வைப் பெறலாம்.

பரிசோதனையில் அங்குலமொன்றின் 32 இல் 2, 3, 4, 5 என்னும் விட்டங்களுடைய உருக்குக் கோளங்களைப்† பயன்படுத்துக. திருகாணிநுண் மானியொன்றைப் பயன்படுத்திச் சதமமீற்றரில் கோளமொவ்வொன்றின் விட்டத்தையும் அளக்க. ஒவ்வோர் அளவிலும் மூன்று அல்லது நான்கு கோளங்களைச் சிறிதளவு எண்ணெய்கொண்ட கடிகாரக் கண்ணுடியொன்றில் வைத்து, அவற்றின் பரப்புக்கள் எண்ணெயால் நன்கு நனையும் வரை அவற்றையுருட்டுக; அடுத்து அவற்றுள் ஒன்றைக் கிட்டத்தட்ட 0·5 சமீ. விட்டம் உடையதும் பாத்திரம் B யின் அச்சுடன் அதன் அச்சு பொருந்தி யிருக்குமாறு எண்ணெய்க்குச் சற்று மேலே வைக்கப்பட்டிருக்கின்றதுமான குறுகிய கண்ணுடிக் குழாயொன்றின் மேல்முனையில் ஒரு பேனுக்கத்தி யின் கூரால் எடுத்துவைக்க. இவ்வண்ணம், அகன்ற பாத்திரத்திலுள்ள எண்ணெயிலே கோளமானது மேற்படி அச்சுவழியே விழுமாறு செய்யப் படுகின்றது. (பாத்திரத்தை ஒருமுறை சுற்றியிருக்கின்ற கறுத்த நூற்றுண் டாலான) முதலாவது மாட்டேற்றுக் குறியைக் கோளமானது அடைந்ததும் நேரமானியைத் தொடக்கிவைத்து B_1, B_2 என்னும் தூரத்திற்கான கடப்பு நேரத்தை நோக்குக. கிடைத்த எல்லாக் கோளங்களுக்கும் இவ்வாறு செய்து t^{-1} தொடர்பாக r^2 ஐக் குறித்தால் ஒரு நேர்கோட்டு வரைபு பெறப்படவேண்டும்; அந்நேர்கோட்டின் சரிவிலிருந்து ஆமணக்கெண் ணெய்க்கான η வைக் கணிக்கலாம்.

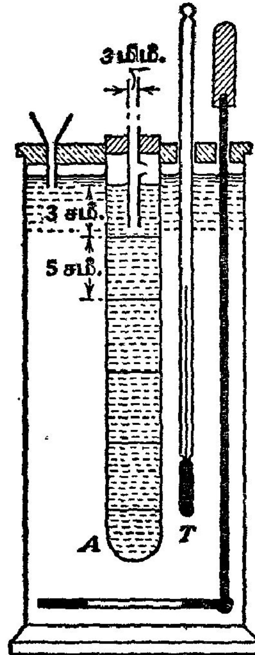
எண்ணெயொன்றினிடத்து அதன பிசுபிசுப்பானது வெப்பநிலையுடன் மிக விரைவாக மாறுகின்றபடியால், அவ்வெப்பநிலையை 0·1° ச. இற்கு மேலான திருத்தத்துடன் வாசித்தல் வேண்டும்; தவிரவும், அதே கார ணத்தையிட்டே எல்லாக் கோளங்களின் விட்டங்களையும் முதல் அளந்து, ஒன்றன்பின்ஞென்றுக வீழ்ச்சிப் பரிசோதனைகள் கூடிய மட்டில் விரைந்து நடாத்தப்படுகின்றன. [வெள்ளீயம் 1 பங்கு, ஈயம் 1 பங்கு, பிசுமது 2 பங்கு கொண்டதும் உ. நி. 94·5 ச. உடையதுமான] ரோசின் உலோகத் தாலான மிகச்சிறிய கோளங்களைப் பயன்படுத்தி ஒருசில பரிசோதனைகளையும் நடாத்துதல் வேண்டும்; பார்வைத்துண்டுத் திட்டமுடைய நுணுக்குக்காட்டி யொன்றைப் பயன்படுத்தி அக்கோளங்களின் விட்டங்களை அளத்தல் வேண்டும்; பார்வைத்துண்டுத் திட்டமானது அளவுகோடு திருத்தப்பட்டிருத் தல் வேண்டும். இத்தகைய கோளங்களைப் பயன்படுத்தி, அடுத்தடுத்துள்ள (5 சமீ. போன்ற) சிறு தூரங்களுக்கான வீழ்ச்சி நேரங்களை அளந்து முடிவு வேகத்தின் மாருத்தன்மையை உறுதிப்படுத்தலாம்.

† இவை குண்டுப்போதிகைகளிற் பயன்படுத்தப்படுகின்றவற்றைப் போன்றவை.

நடைமுறையில், விழுங் கோளங்களுக்கென ஏற்கெனவே தரப்பட்டுள்ள கொள்கையையிட்டு, இரு முதன்மையான திருத்தங்களைக் கருதுதல் வேண்டும். புவியீர்ப்பால் உந்தப்பட்டு, முடிவில் சமுத்திரமாக அமைந்திருக்கின்ற திரவமொன்றில் விழுகின்ற கோளமொன்றையிட்டே $6\pi r\eta u$ என்னும் பிசுக்கிழுப்பு ஸ்ரோக்சால் கணிக்கப்பட்டது. திரவத்தைக் கொண்டிருக்கின்ற



படம் 11·28. எண்ணெயொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணிவதற்கு விழுங் கோளப் பிசுபிசுப்புமானி—ஸ்ரோக்சின் முறை.



படம் 11·29. (கிப்சன், யேக்கப்ஸ் என்பவர்களின்) திருந்திய விழுங் கோளப் பிசுபிசுப்புமானி வகை.

உருளையின் சுவர்களுக்கும் அடிக்குமுரிய எல்லை நிபந்தனைகளையிட்டுத் திருத்தங்கள் எழுகின்றன. உண்மையான முடிவுவேகம் u_∞ என்பது, அதாவது திரவத்தாலான முடிவில் சமுத்திரமொன்றில் நிகழ்கின்ற வீழ்ச்சிக்குரிய முடிவுவேகமானது,

$$u_\infty = u\left[1 + 2{\cdot}4\frac{r}{R}\right]$$

எனபதால் தரப்படுகிறது என லாடன்பேக்† (Ladenburg) என்பவர் காட்டி

† *Ann. der Phys.*, 22, 287, 1907 ; 447, 1907.

யுள்ளார்; இங்கு u நோக்கியுள்ள வேகமும், R திரவத்தைக் கொண்டிருக்கின்ற உருளைப் பாத்திரத்தினது குறுக்கு வெட்டின் ஆரையும் ஆகும். உருளையின் உயரமானது முடிவுள்ளது என்பதற்கான திருத்தத்தையிட்டு நிறைவு அளிக்கக்கூடிய வகையில் முடிவு செய்யப்படவில்லை; ஆனால் அத்திருத்தமானது மிகச் சிறிதே.

இப்சன், யேக்கப்ஸ் என்பவர்களால் தரப்பட்டுள்ள திருந்திய விழுங் கோளப் பிசுபிசுப்புமானி வகையொன்று படம் 11·29 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. விவரம் வேண்டியதில்லை என்பது தெளிவு.

லாடன்பேக்கின் திருத்தத்தைப் பரிசோதனை முறைப்படி ஆராய்தல்.—இம்முறை ஃபிளட்† என்பவரால் ஆனது; அது பின்வருமாறு. எல்லாத் திருத்தங்களையும் புறக்கணித்தால் பாயியொன்றிலே புவியீர்ப்பால் உந்தப்பட்ட கோளமொன்றின் உறுதியியக்கத்திற்கான சமன்பாடானது

$$u = \frac{2}{9} \cdot \frac{(\rho - \sigma) g r^2}{\eta}$$

என்பதாகும்.

எனவே ρ வும் σ வும் η வும் மாறாமல் இருந்தால், திரவத்தில் வெவ்வேறான ஆரைகளுடைய கோளங்கள் விழுமிடத்து r^2u^{-1} மாறாது இருக்கும் எனத் தெளிவாம். இதனைச் சோதிக்கும்பொருட்டு நீளம் 75 சமீ. உம் விட்டம் 4·5 சமீ. உம் உடையதும், அதனது கீழ் முனையில் அடைப்பான் அளிக்கப்பட்டதும், நிலைக்குத்தான நிலையில் நிறுவப்பட்டதுமான குழாயொன்று கிளிசறின் (இன்று மாறாப் பிசுபிசுப்பு உடைய அல்லது மசகிடுகின்ற சிலிக்கோன் எண்ணெய்) என்பதால் கிட்டத்தட்ட நிரப்பப்பட்டு, வளிக்குமிழிகள் எல்லாம் வெளியேறும்வரை விடப்பட்டிருக்கின்றது. குழாயின் முனையொவ்வொன்றிலிருந்து கிட்டத்தட்ட 10 சமீ. தூரத்தில் இரு கிடைக் குறிகள் இடப்பட்டிருக்கின்றன; $\frac{1}{16}$ அங். முதல் $\frac{1}{4}$ அங். வரை விட்டமுடைய உருக்குக் கோளங்கள் குழாயின் அச்சு நெடுக விழுமாறு விடப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் வீழ்ச்சிவேகம் துணியப்பட்டது. u தொடர்பாக r^2 ஐக் குறித்து வருகின்ற வரைபானது சிறிய ஆனால் ஒழுங்கான வளைவொன்றைக்காட்டியது. ஒரு சிறிய திருத்தவுறுப்பு தேவைப்படுகின்றது என இவ்வுண்மை உணர்த்தியது; எனவே

$$\frac{r^2}{u} = \frac{9\eta}{2(\rho - \sigma) g} \cdot f\left(\frac{r}{R}\right)$$

எனப் ஃபிளட் பிரேரித்துள்ளார்; இங்கு $f\left(\frac{r}{R}\right)$ என்பது ஒரு துணியப்படாத பரிமாணமில்லாச் சார்பாகும்.

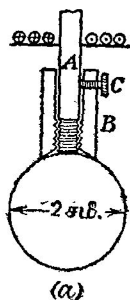
† ஃபிளட், *Sch. Sci. Rev.*, இல. 57, ஒக்ற்றோபர் 1933.

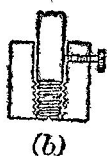
$$f\left(\frac{r}{R}\right)=a_0+a_1\left(\frac{r}{R}\right)+a_2\left(\frac{r}{R}\right)^2+\ldots$$

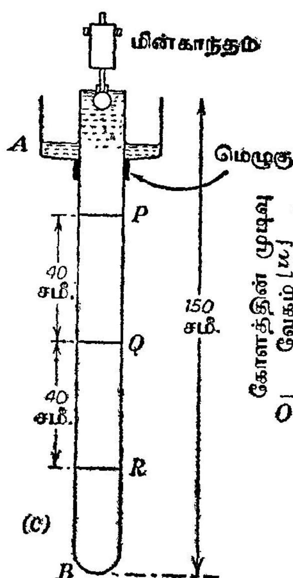
ஆயின், $\frac{r}{R}\to 0$ ஆகுமிடத்து $f\left(\frac{r}{R}\right)$ ஆனது 1 ஆக இருத்தல் வேண்டு மாதலால், அப்பொழுது $a_0=1$ ஆகும். $a_2=a_3=\ldots=0$ எனக் கொள் வோம். $\frac{9\eta}{2(\rho-\sigma)g}=\kappa$ என அழைத்தால்,

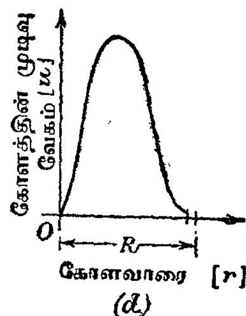
$$\frac{r^2}{u}=\kappa+\kappa a\left(\frac{r}{R}\right)$$

எனப் பெறுகிறோம்; இங்கு a_1 இற்குப் பதிலாக a எழுதப்பட்டிருக்கின்றது. எமது எடுகோள்கள் சரியானால் $\left(\frac{r}{R}\right)$ என்பது தொடர்பாக $\frac{r^2}{u}$ ஐக் குறித்து வருகின்ற வரைபானது நேர்கோடாக இருத்தல் வேண்டும். இது நிறுவப்பட்டு a ஆனது 2·33 ஆகும் எனக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இது லாடன்பேக்கின் பெறுமானம் 2·4 உடன் நன்கு ஒத்திருக்கின்றது.









படம் 11·30. எண்ணெயொன்றால் நிரப்பப்பட்ட நிலைக்குத்தான குழாயொன்றின் அச்சுவழியே இயங்குகின்ற கோளமொன்றைப் பற்றிய பரிசோதனைமுறை ஆய்வு.

நிலைக்குத்தான குழாயொன்றில் இருக்கின்ற உயர் பிசுபிசுப்புடைய ஊடகமொன்றில் விழுகின்ற உருக்குக் கோளங்களின் இயக்கத்தைப் பரிசோதனைமுறைப்படி ஆராய்தல்.—கோளமொன்றின் விட்டமானது மிகச் சிறிய பெறுமானமொன்றிலிருந்து கிட்டத்தட்ட வீழ்ச்சிக்குழாயின் குறுக்குவெட்டு வரை மாறுமிடத்து எவ்வாறு விழுங்கோளத்தின் முடிவு வேகமானது அக்கோளத்தின் விட்டத்தைப் பொறுத்திருக்கின்றது என்னும் விடயத்தை ஆராய்வதே இப்பரிசோதனையின் நோக்கு ; அதே நேரம் திரவத்தின் பிசுபிசுப்புப் பெறுமானமொன்றைத் துணிதலும் வேண்டும். கோளங்களின் வீழ்ச்சியின்போது அவற்றின் மையங்களைக் குழாய்களின் அச்சு வழியே அசையுமாறு செய்தற்கு மின்காந்தமொன்றால் அக்கோளங்களை அதே நிலையிலிருந்து விடுவித்தல் வேண்டற்பாலது. இவ்வண்ணம் முயலுங்காலே, மின்காந்தத்தில் அருட்டுகின்ற ஓட்டத்தைப் பூச்சியமாக்கியபோதும் பெரிய கோளங்களைத் தவிர்த்து மற்றவை அம் மின் காந்தத்தைப் பற்றிநிற்கின்றன என்னும் உண்மை தெரியவந்துள்ளது. இத்தொல்லையைத் தீர்க்கும்பொருட்டுக் கோளத்திற்கும் மின்காந்தத்தின அகணிக்குமிடையே காந்தப் பண்பில்லா இடைவெளியொன்றை அளித்தல் தேவையாயிற்று ; அவ்விடைவெளியானது மாற்றிவைக்கக்கூடியதாக இருத்தல் வேண்டும் என்பதும் விரைவில் தெரியவந்துள்ளது. படம் 11·30 (*a*) ஆனது மின்காந்தத்தின் கீழ் முனையையும் அம்மின்காந்தத்தின் பற்றுக்களையும் காட்டுகின்றது. அகணியின் முனை A மீது திருகுப் புரி வெட்டப்பட்டிருக்கிறது. அதன்மீது பித்தளைப் பட்டிகை B ஆனது அசையலாம் ; C ஓர் இறுக்கித் திருகாகும். பித்தளையாலான அப்பட்டிகையின் கீழ் முனைக்குக் கூம்பு வடிவம் அளிக்கப்பட்டிருக்கின்றது ; பெரிய கோளங்கள், அதாவது 0·3 மிமீ. இற்கு மேலான விட்டங்கள் உடைய கோளங்களிடத்து இது பெரிதும் பொருத்தமாயிருந்தது. பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, பயன்படுத்தப்படும் கோளம் ஒவ்வொன்றின் அளவுக்கேற்ப இடைவெளியைச் செப்பஞ்செய்ய வேண்டியதாயிற்று.

சிறிய கோளங்களிடத்துப் பித்தளையாலான வேறொரு பட்டிகை ஆக்கப்பட்டிருக்கின்றது ; அதற்கு ஒரு தட்டையான முனை அளிக்கப்பட்டிருக்கின்றது ; அம்முனையுடன் மிகமெல்லிய துப்பாக்கியுலோகத் துண்டொன்று பற்றுசுபிடிக்கப்பட்டிருக்கிறது, படம் 11·30 (*b*) யிற் காண்க. நிலைக்குத்தான திரவநிரலில் கோளங்களை அச்சு வழியே விழச்செய்யும் பொருட்டுத் துப்பாக்கியுலோகத் துண்டானது அதனது மையத்தில் சற்றுத் தாழ்த்தப்பட்டிருக்கின்றது. இருந்தாலும் சிறிய கோளங்களைக் காட்டிலும் பெரிய கோளங்களுக்கே இப்பிரமாணம் அத்துணை தேவைப்படுகின்றது.

இப் பரிசோதனையிற் பயன்படுத்தியுள்ள கண்ணாடிக்குழாயானது 1·5 மீ. நீளமும் 2·5 சமீ. உள்விட்டமும் உடையதாகும். அது படம் 11·30 (*c*) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது ; அதற்குப் பித்தளையாலான பட்டிகை A என்பது அளிக்கப்பட்டிருக்கின்றது. வீழ்ச்சிக்குழாய் B யை (மாறும் பிசுபிசுப்பு அல்லது சிலிக்கோன் எண்ணெய் என்னும்) திரவத்தால் முற்றிலும்

நிரப்பவேண்டியிருக்கின்றபடியால் அது தேவைப்படுகின்றது. ஏனெனில் மினகாந்தத்தினின்று விடுவிக்கப்படுமுன் கோளங்கள், முற்றிலும் அல்லது ஏறத்தாழ முற்றிலும், திரவத்தில் மூழ்கியிருத்தல் வேண்டும். இந்நட வடிக்கை எடுக்கப்படாவிட்டால் விழுங்கோளத்துடன் பெரிய வளிக் குமிழி யொன்று பெரும்பாலும் பற்றியிருக்கும் ; அப்பொழுது இயக்கத்தை விளக்குவது பெரிதும் கடினமாக அல்லது முடியாததாக இருக்கும்.

$PQ = QR$ ஆகுமாறு P, Q, R என்பவை, குழாய் மீதுள்ள மூன்று குறிகள் ஆகும். இவை திரவ நிரலின் மிக மையமான பகுதியில் இருக் கின்றன ; இத்தூரங்களைக் கடப்பதற்குக் கோளங்கள் எடுக்கும் நேரத்தை அளந்து, பயன்படுத்தியுள்ள கோளம் ஒவ்வொன்றும் முடிவுவேகத்தை அடைந்துவிட்டதா என உறுதியாக முடிவுசெய்ய முடிகின்றது.

கோளத்தின் ஆரை r தொடர்பாக முடிவுவேகம் u வைக் குறித்து வந்துள்ள எடுத்துக்காட்டான வளையியொன்றைப் படம் 11·30 (d) காட்டு கினறது. பக்கம் 692 இல் காட்டியுள்ளவாறு r தொடர்பாக $\frac{r^2}{u}$ ஐக் குறித்தால் லாடன்பேக்கின் திருத்தத்துக்கு ஒரு பெறுமானம் கிடைக்கப் பெறுகின்றது.

$f\left(\frac{r}{R}\right)$ என்பது அடு. $\left[\gamma\left(\frac{r}{R}\right)\right]$ என்பதன் வடிவத்துடன் ஒத்திருக் கின்றதா இல்லையா என்னும் எடுகோளின் உண்மையை உறுதிப்படுத்தும் பொருட்டுச் சோதனையொன்றை நடாத்துதல் வேண்டும் ; இங்கு γ ஒரு மாறிலி.

அடு. $(\gamma x) = 1 + \gamma x + \frac{1}{2}\gamma^2 x^2 +$ உயருறுப்புக்கள் ஆதலின், இத்தகைய தொடரொன்று பொருத்தமானது ; $\left(\frac{r}{R}\right)$ தொடர்பாக மட $\left(\frac{r^2}{u}\right)$ ஐக் குறித்து γ வைக் காணலாம்.

ஒரு புறம்பான முறையால் κ இற்குப் பெறுமானமொன்று துணியப் பட்டிருந்தால்,

$$\frac{r^2}{u} = \kappa\left[1 + \alpha_1\left(\frac{r}{R}\right) + \alpha_2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலிகள் α_1, α_2 என்பவற்றைத் துணியும் பொருட்டு வேறொரு சோதனையை நடாத்தலாம்.

இச்சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{r^2}{u\kappa} - 1\right) = \alpha_1\left(\frac{r}{R}\right) + \alpha_2\left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

அல்லது

$$\left(\frac{r^2}{u\kappa} - 1\right)\frac{R}{r} = \alpha_1 + \alpha_2\left(\frac{r}{R}\right)$$

என எழுதலாம்.

அடுத்து, $\left(\frac{r}{R}\right)$ தொடர்பாக $\left(\frac{r^2}{u\kappa}-1\right)\frac{R}{r}$ என்பது குறிக்கப்படுகிறது; இச்சூத்திரம் வழங்கும் வீச்சில் வரைபு ஏகபரிமாணமானது. லாடென் பேக்கின் சூத்திரத்திற்கு இணங்குகின்ற விட்டவீச்சைக் காட்டிலும் பெரிதான வீச்சொன்றில் கோளங்களின் இயக்கத்தை இச்சமன்பாடு உண்மையில் குறிக்கின்றது என்னும் உண்மை கிடைக்கப்பெறுகின்றது.

கோளம் விழுகின்ற திரவத்தைக் கொண்டிருக்கின்ற சாடியின் முடிவுள்ள விட்டத்தைப் பொருட்படுத்துகின்ற வேறொரு சூத்திரம்†

$$u_\infty = u_0\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-2\cdot 4}.$$

$\frac{r}{R}$ என்பது சிறிதாய் இருக்கும்போது இது

$$u_\infty = u\left(1+2\cdot 4\frac{r}{R}\right)$$

ஆகின்றது ; $\frac{r}{R}$ இன் பெரிய பெறுமானங்களிடத்தும் இது பரிசோதனைப் பேறுகளுடன் ஒத்திருக்கிறது. $\frac{r}{R}\rightarrow 1$ ஆகுமிடத்து $\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-2\cdot 4}$ என்னும் காரணி முடிவிலியாகின்றது என்பது இச்சமன்பாட்டின் கவனத்தைக கவர்கின்றதோர் இயல்பாகும் ; அது எதிர்பார்த்ததே. இச்சூத்திரத்தைச் சோதிக்கும்பொருட்டு அதை

$$u_\infty = u\left(1-\frac{r}{R}\right)^{\beta}$$

என எழுதலாம் ; இங்கு β ஒரு மாறிலி. மட $\left(1-\frac{r}{R}\right)$ என்பது தொடர்பாக மட u குறிக்கப்பட்டால் சரிவு β உடைய ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கவேண்டும்.

உதாரணம்.—ஒரு நீண்ட சாடியில் ஓய்விலிருக்கின்ற இலேசான பிசுக்குத் திரவமொன்றின பரப்பிற்குச் சற்றுக் கீழே வைக்கப்பட்டிருக்கின்ற கூர் நுனிக் குழாயொன்றிலிருந்து ஒழுங்கான காலவிடைகளில் சிறு சீரான திரவத்துளிகள ஓய்விலிருந்து விழுகின்றன ; பிந்திய திரவத்தின் அடர்த்தி முந்தியதன் அடர்த்தியைக் காட்டிலும் கூடியது. குறிப்பிட்ட கணமொன்றில் எவ்வாறு துளிகள் பரப்பப்பட்டிருககின்றன ?

விழுந்துளியொன்றின் பலிதத் திணிவு m எனின், வழக்கமான குறிப்பீட்டில்

$$m\ddot{x} = mg - \mu\dot{x} \quad \text{அல்லது} \quad \ddot{x}+\alpha\dot{x} = g$$

எனப் பெறுவோம் ; இங்கு $\alpha = \mu m^{-1}$.

நிரப்பு சார்பைமிட்டு

$$\lambda(\lambda+\alpha)=0$$

எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore \quad x = A + B \text{ அடு. } (-\alpha t),$$

இங்கு A யும் B யும் மாறிலிகள் ஆகும்.

† இது Dr. A. R. ஸ்ரோக்ஸ் என்பவரால் கடிதமூலம் தெரிவிக்கப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பிட்ட தொகையீட்டையிட்டு

$$x=\frac{g}{D^2+\alpha D}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{\alpha}+\frac{D}{\alpha^2}-\dots\right)g=\frac{gt}{\alpha}-\frac{g}{\alpha^2}.$$

$$\therefore \quad x=A+B\left[\text{அடு.}\ (-\alpha t)\right]+\frac{gt}{\alpha}-\frac{g}{\alpha^2}.$$

இனி $t=0$ ஆகுமிடத்து $x=0$; $\dot{x}=0$. எனவே $A=0$ உம் $B=\frac{g}{\alpha^2}$ உம் ஆகும்.

$$\therefore \ x=\frac{g}{\alpha^2}\left[\{\text{அடு.}\ (-\alpha t)\}-1+\alpha t\right].$$

முதலாவது துளியானது t செக்கனுக்கு விழுந்திருக்க ; அப்பொழுது, கூர்நுனிக் குழாயிலிருந்து அடுத்தடுத்துப் பிரிகின்ற துளிகளுக்கிடையேயுள்ள காலவிடை τ வும் n ஆம் துளி கடந்த தூரம் x_n உம் ஆனால்

$$x_n=\frac{g}{\alpha^2}\left[\text{அடு.}\ \{-\alpha(t-\overline{n-1}\,\tau)\}-1+\alpha(t-\overline{n-1}\,\tau)\right].$$

எனவே கணிசமான அளவு நேரம் விழுந்த துளிகளுக்கு

$$x_1-x_2=\frac{g}{\alpha^2}\alpha\tau=\frac{g\tau}{\alpha},$$

$$x_2-x_3=\qquad=\frac{g\tau}{\alpha}$$

முதலியவை ஆகும்.

எனவே இத்தகைய துளிகளின் இடைத்தூரங்கள் சமமாகும்.

தடுக்கும் ஊடகமொன்றில் நேர்கோட்டியக்கம்.—தடுக்கும் ஊடகமொன்றிலே, திணிவு m ஆனது சுழற்சியின்றி நேர்கோடொன்றில் அசைகின்றது எனக் கொள்ளப்படின், அது அனுபவிக்கின்ற தடை அதனது வேகத்தின் ஒரு சார்பாகும். தடை $\phi(v)$ யும் இயக்கக்கோடு வழியே தாக்குகின்ற புறவிசை F உம் ஆயின், இயக்கச் சமன்பாடு

$$m\dot{v}=F-\phi(v)$$

ஆகும்.

இனி, நியூற்றன் கருதியுள்ளது போல் $\phi(v)=kv^2$ எனக் கொள்வது வழக்காயிற்று ; இங்கு k ஊடகத்தின் அடர்த்தியையும் பொருளில் இயக்கத்திசைக்குச் செங்குத்தாகவிருக்கின்ற மிகப் பெரிய வெட்டின் பரப்பளவையும் பொறுத்திருக்கின்ற ஒரு மாறிலியாகும். எனவே, F ஆனது மாறாமல் இருக்கின்றது எனவும் அது kV^2 இற்குச் சமன் எனவும் கொள்வோமாயின்,

$$m\dot{v}=F-kv^2=k(V^2-v^2).$$

தொடக்க வேகமானது V யைக் காட்டிலும் சிறிதாயின் பொருளின் வேகம், பெறுமானம் V யை அடையும்வரை கூடிக்கொண்டே போகும். இக்காரணத்தாலேயே V பொருளின் முடிவு வேகம் என அழைக்கப்படுகின்றது.

மேற்படி சமன்பாட்டைத் தொகையிட்டு

$$t=\frac{mV}{2F}\text{ இ. ம.}\left(\frac{V+v}{V-v}\right)$$

எனப் பெறுகிறோம் ; பொருள் ஓய்வாயிருந்த கணத்திலிருந்து t அளக்கப் பட்டால் தொகையீட்டு மாறிலி சேர்க்கப்படுவதில்லை.

அதனது ஓய்வு நிலையிலிருந்து நிலைக்குத்தாய்க் கீழ்முகமாக எறியப்பட்ட பொருளொன்றின் இயக்கமானது, இத்தகைய இயக்கத்திற்குக் கருத்தைக் கவர்கின்றதும் முதன்மையானதுமான ஓர் உதாரணமாகும். இங்கு $F=mg$; எனவே

$$t=\frac{V}{2g}\text{ இ. ம. }\left(\frac{V+v}{V-v}\right)$$

எனப் பெறுகின்றோம் ; இது $v=V$ அதான் $\frac{gt}{V}$ எனத் தருகின்றது.

$v=\frac{dx}{dt}$ ஆதலின், $x=\frac{V^2}{g}$ இ.ம. அகோசை $\frac{gt}{V}$ எனக் காண்கின்றோம்.

நிலைக்குத்தாய் மேல்முகமாக எறியப்பட்ட பொருளொன்றினிடத்து இயக்கச் சமன்பாடானது

$$\frac{dv}{dt}=-g\left(1+\frac{v^2}{V^2}\right)$$

என்பதாகும்.

தொடக்க வேகம் V_0 எனின்,

$$t=\frac{V}{g}\left(\text{தான்}^{-1}\frac{V_0}{V}-\text{தான்}^{-1}\frac{v}{V}\right)$$

எனக் காண்போம்.

மேலும், அதியுயர்வான புள்ளியில் $v=0$ ஆதலின், அப்புள்ளியை எறி அடையும் நேரம்

$$\frac{V}{g}\text{ தான்}^{-1}\frac{V_0}{V}$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது.

பொருள் அசைந்துள்ள தூரம் z எனின்

$$v=\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}=\frac{dz}{dv}\left[-g\left(\frac{v^2+V^2}{V^2}\right)\right]$$

எனப் பெறுவோம் ; இங்கு z ஆனது எறியப் புள்ளியிலிருந்து மேல் முகமாக அளக்கப்படுகிறது.

$$\therefore\ z=\frac{V^2}{2g}\text{ இ. ம. }\left(\frac{V_0^2+V^2}{v^2+V^2}\right).$$

ஏற்றவுயரம் Z எனின், அப்பொழுது v பூச்சியமாயிருப்பதால்,

$$Z = \frac{V^2}{2g} \text{ இ. ம } \left(\frac{V_0^2 + V^2}{V^2}\right)$$

எனப் பெறுகிறோம்.

உதாரணம்.—அசைவற்றிருக்கின்ற நீரில் கப்பலொன்றின் இயக்கத்துக்கான தடை kv^3 எனக் கொள்ளலாம்; இங்கு v கப்பலின் வேகமும் k ஒரு மாறிலியும் ஆகும். உந்தியின் உதைப்பினுள்ள சிறு மாற்றங்களையிட்டு நேரம் t யில் இருக்கின்ற வேகமானது $v = a + b$ கோசை ωt என்பதால் தரப்படுகின்றது; இங்கு a, b, ω என்பவை மாறிலிகளாகும். கப்பலின் திணிவு m ஆயின், எந்தக் கணத்திலும் உந்தியின் உதைப்பையும் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற வலுவையும் காண்க. கப்பலின் வேகம் மாறாமல் இருக்கின்ற நிலையில், அதாவது $b \to 0$ இடத்தில், தேவையான வலுவுடன் சராசரி வலுவை ஒப்பிடுக.

எந்தக் கணத்திலும் உதைப்பானது

$$F = m\dot{v} + kv^3$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது.

எனவே

$$F = -m\omega b \text{ சைன் } \omega t + k(a + b \text{ கோசை } \omega t)^3;$$

ஆகவே பிறப்பிக்கப்பட்ட வலுவானது

$$P = Fv = -m\omega b \text{ சைன் } \omega t\,(a + b \text{ கோசை } \omega t) + k(a + b \text{ கோசை } \omega t)^4$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

இதை விரித்தால் சைன் ωt, சைன் ωt கோசை ωt, கோசை ωt, கோசை$^2 \omega t$, கோசை$^3 \omega t$, கோசை$^4 \omega t$ எனபவற்றைக் கொண்டுள்ள உறுப்புகளைப் பெறுவோம். எத்தொகை முழுச் சக்கரங்களிலும் சைன் ωt, சைன் ωt கோசை ωt, கோசை ωt, கோசை$^3 \omega t$ என்பவற்றின் இடைப் பெறுமானங்கள் யாவும் பூச்சியமாகும்; ஆனால்

$$\overline{\text{கோசை}^2\, \omega t} = \overline{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \text{ கோசை } 2\omega t} = \tfrac{1}{2} \text{ உம்}$$

$$\overline{\text{கோசை}^4\, \omega t} = \overline{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \text{ கோசை } 2\omega t)^2}$$

$$= \overline{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \text{ கோசை } 2\omega t + \tfrac{1}{4} \text{ கோசை}^2\, \omega t} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8} \text{ உம்}$$

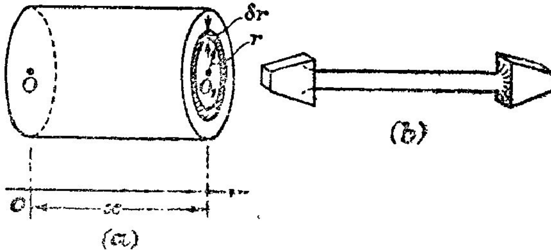
ஆகும்.

எனவே
$$\overline{P} = ka^4 + \tfrac{1}{2}(6ka^2b^2) + kb^4\,(\tfrac{3}{8})$$
$$= k(a^4 + 3a^2b^2 + \tfrac{3}{8}b^4) > ka^4.$$

கிசிலின் பிசுபிசுப்பு.—கிசில் (கரிப்பிசின்), பரபின்மெழுகு, கண்ணுடி ஆகியவற்றின் பிசுபிசுப்பானது திரௌற்றன், அன்ட்ரூஸ் (Trouton and Andrews)† ஆகியோர்களால் பரிசோதனை முறைப்படி துணியப்பட்டிருக்கின்றது. பரிசோதனை ஒவ்வொன்றிலும் பிசுபிசுப்பு துணியப்படுகின்ற பதார்த்தத்தாலான ஒரு சீரான உருளையின் முனையொன்றில் மாரு முறுக்கத்தைப் பிரயோகித்து உருளையின் இரு முனைகளின் தொடர்பியக்கம் அளக்கப்படுகிறது; உண்மையில் ஒரு முனை நிலையாக்கப்பட்டிருக்கிறது. இந்நோக்கல்கள் கோலின் விட்டம், அதன் நீளம், பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ள முறுக்கத்தின் அளவு என்பவற்றை, இனி நிலைநிறுத்தப் போகின்ற சமன்பாட்டிலே பயன்படுத்தி பிசுபிசுப்பு η ஐக் காணமுடிகின்றது.

† திரௌற்றனும் அன்ட்ரூசும், *Proc. Phys. Soc.* **19**, 47, 1903.

உருளையின் நிலைத்த முனையிலிருந்து தூரம் x இல், அவ்வுருளையின் செங்குத்தான குறுக்குவெட்டைக் கருதுக, படம் 11·31 (a) யைப் பார்க்க. குறுக்குவெட்டில், ஆரைகள் r உம் $r+\delta r$ உம் உடைய வட்டங்களால்



படம் 11·31. கிசிலின் பிசுபிசுப்பு.

வரையறுக்கப்பட்ட பாகமீது தாக்குகின்ற தொடலி விசை $\delta\mathbf{F}$ ஆகுக. அப்பொழுது நியூற்றனின் கருதுகோளின்படி

$\delta\mathbf{F}=\eta$ (பரப்பளவு) (வேகப் படித்திறன்) $=\eta\,(\delta r.\delta s)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$ பக்கம் 672 ஐப் பார்க்க.

r, $r+\delta r$ என்பவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட கங்கணத்திற்குரிய மூலகம் δs மீது இதனால் $\eta r\,(\delta r.\delta s)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$ இற்குச் சமனான முறுக்கம் பிறப்பிக்கப்படுகின்றபடியால் கங்கணமீதுள்ள முறுக்கம்

$$\delta\Gamma=\eta r\,\delta r\left[\oint ds\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது.

இனி $u=r\omega$; இங்கு ω ஆனது கருதப்படுகின்ற வெட்டின் எதேச்சைப் புள்ளியிலுள்ள கோண வேகமாகும். $x+\delta x$ என்பதால் துணியப்படுகின்ற தளத்தில் r, $r+\delta r$ என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படுகின்ற மூலகத்திற்கு

$$u+\delta u=r\left(\omega+\frac{\partial\omega}{\partial x}.\delta x\right).$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial x}=r.\frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

$$\therefore\ \delta\Gamma=2\pi\eta.r^3.\frac{\partial\omega}{\partial x}.\delta r\quad\left[\because\oint ds=2\pi r\right].$$

எனவே உருளையின் செங்குத்தான எந்தக் குறுக்கு வெட்டிலும் தாக்குகின்ற முறுக்கமானது

$$\Gamma=\int_0^a 2\pi\eta r^3.\frac{\partial\omega}{\partial x}.dr=\tfrac{1}{2}\pi\eta a^4.\frac{\partial\omega}{\partial x}$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது ; இங்கு a யானது உருளையின் வெளியாரை யாகும். இவ்விணையானது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற இணைக்குச் சமன். $\overline{\omega}=\frac{\partial\omega}{\partial x}=$ உருளையின் அலகுநீளமொன்றிற்கான தொடர்புக் கோணவேகம் எனின்

$$\eta=\frac{2\Gamma}{\pi\overline{\omega}.a^4}.$$

இசில் போன்றவற்றினிடத்துத் திரவியமானது படம் 11·31 (b) யிற் காட்டியுள்ள வடிவத்தில் வார்க்கப்படுகின்றது ; எனவே அதன் முனைகளை இதற்கெனச் சிறப்பாகத் திட்டமிடப்பட்ட இறுக்கிகளால் இறுக்கி நிலையாக்க முடிகின்றது. கண்ணாடிக் குழாயொன்றினிடத்து

$$\eta=\frac{2\Gamma}{\pi\overline{\omega}\,(r_1{}^4-r_2{}^4)}. \quad [(r_1>r_2).]$$

சமச்சீர்பறறிய கருத்துக்களையிட்டு, உருளையில் அதனது அச்சுக்குச் செங்குத்தான இரு தளங்கள் எவையாகிலும் அவை பொதுவச்சைக் குறித்து ஒன்றிற்குமேலே மற்றையது அசைகின்றன எனவும், அவற்றின் தளவடிவமானது மாருது இருக்கின்றது எனவும், இம்முறைக்கான கொள்கையில் திரௌற்றனும் அன்ட்றூசும் கருதியுள்ளனா என்பது குறித்தற்பாலது.

மாதிரிமீது இணையானது பின்வருமாறு பிரயோகிக்கப்பட்டது. முரணுராய் வுச் சில்லுகள் மீது தடையின்றிச் சுழல்கின்ற கிடையான தண்டொன்றில் கப்பியொன்று இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது ; கப்பியிலுள்ள தவாளிப்பொன் றிலே சுற்றப்பட்டிருக்கின்ற நாணென்று ஒரு சுமையைக் காவுகின்றது. பதார்த்தத்தாலான உருளையின் சதுரமாக்கப்பட்ட முனையைப் பிடித்திருக் கும் பொருட்டுத் தண்டில் சதுரத் தாங்குகுழியொன்று உளது ; முனை யானது குழியிலே சரியாகப் பொருந்தியிருக்குமாறு செய்யப்பட்டுள்ளது. அதுபோன்ற ஆனால் நிலைத்த, தாங்குகுழியொன்று உருளையினது மறு முனையின் சுழலலைத் தடுக்கிறது. தண்டில் ஏற்றப்பட்டிருக்கின்ற ஓர் அளவுச்சட்டமீது அசைகின்ற சுட்டியொன்றை நோக்கிச் சுழற்சி வீதம் துணியப்படுகின்றது.

உருளைவடிவமுடைய மாதிரியை வசதியாகக் கஞ்சுகக்குழாயொன்றில் வைத்து, அதை விரும்பிய எந்த வெப்பநிலையிலும் நிலைநிறுத்த முடியுமாதலால், பதார்த்தமொன்றின் பிசுபிசுப்புக் குணகத்தை வெவ் வேருன வெப்பநிலைகளில் துணிதற்கு இம்முறை சிறப்புடைத்து.

முனைவிளைவுகளைத் தவிர்க்கும் பொருட்டு இரு சுழலும் சுட்டிகளைப் பயன் படுத்துதல் வேண்டும் எனவும், தெரிந்த இடைத்தூரம் விட்டு அவற்றை மாதிரியுடன் இணைத்தல் வேண்டும் எனவும், அப்பிள்யாட் (Appleyard) எனபார் திரௌற்றன், அன்ட்றூஸ் ஆகியோரின் இம்முயற்சியை ஆராயுங் காலே, தன் கருத்தைத் தெரிவித்துள்ளார்.

கீழே தரப்பட்ட பேறுகள் பெறப்பட்டன :—

பதார்த்தம்	வெப்பநிலை	பிசுபிசுப்பு (கி. சமீ. $^{-1}$ செக். $^{-1}$)
கிசில்	0° ச.	$5{\cdot}1 \times 10^{11}$
	8° ச.	$9{\cdot}9 \times 10^{10}$
	15° ச.	$1{\cdot}3 \times 10^{10}$
சோடாக் கண்ணடி	575° ச.	$1{\cdot}1 \times 10^{13}$
	660° ச.	$2{\cdot}3 \times 10^{11}$
	710° ச.	$4{\cdot}5 \times 10^{10}$

பிசுபிசுப்பும் வெப்பநிலையுடன் அது மாறுதலும்.—(*a*) திரவங்கள் : திரவங்களினிடத்து வெப்பநிலையுடன் பிசுபிசுப்பானது கவனிக்கத்தக்க வளவில் மாறுகின்றபடியால், குறிப்பிட்ட திரவமொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணியும்போதுள்ள வெப்பநிலையைக் கூறுமல் அப்பிசுபிசுப்பின் பெறுமா னததை மட்டுமே கூறுதல் பொருளற்றதாகும். உதாரணமாக, நீரின் பிசுபிசுப்பானது 20° ச. இல் 0·0101 கி. சமீ $^{-1}$ செக் $^{-1}$ ஆயிருந்து, 60° ச. இல் 0·0047 கி. சமீ. $^{-1}$ செக். $^{-1}$ ஆகின்றது ; ஆமணக்கெண்ணெயினிடத்து 10° ச. இலிருந்து 20° ச. வரையுள்ள வெப்பநிலையுயர்வால் அதன் பிசுபிசுப்பானது 24·18 போயிசிலிருந்து 9·86 போயிசுவரை குறைகின்றது. வெப்பநிலையுடன் பிசுபிசுப்பின் இத்தகைய மாறலை விவரிக்கும் பொருட்டுப் பல அனுபவ சூத்திரங்கள் பிரேரிக்கப்பட்டிருக்கின்றன ; அதாவது

$$\eta_\theta = \eta_0 (1 + \alpha\theta + \beta\theta^2)^{-1}, \text{ அல்லது } \eta_\theta = \eta_0 (1 + b\theta)^{-n},$$

அல்லது

$$\text{மட} \quad \eta = A + \frac{B}{T};$$

இங்கு η_θ என்பது θ° ச. இலுள்ள பிசுபிசுப்பும், T தனிவெப்பநிலையும் η_0 α, β, b, A, B என்பவை மாறிலிகளும் ஆகும்.

சூத்திரமொவ்வொன்றும் அண்ணளவாகவே இருக்கின்றது ; எண்ணெய்களைப் பொறுத்தமட்டில் இரண்டாவது சமன்பாடு பிழையானது. 1934 இல், அன்ட்றேட்* (Andrade) என்பார், அறிமுறை அடிப்படையொன்

* அன்ட்றேட், *Phil. Mag.*, 17, 497 உம் 638, 1934 உம்.

றைப் பயன்படுத்தி

$$\eta\rho^{-\frac{1}{3}} = \text{A அடு.}\left(\frac{c\rho}{\text{T}}\right)$$

ஆகும் எனப் பிரேரித்துள்ளார் ; இங்கு ρ அடர்த்தியும், T தனிவெப்ப நிலையும், A யும் c யும் மாறிலிகளும் ஆகும். நீரும் சில அல்ககோல் களும் ஒழிந்த திரவங்களிடத்து இது பரிசோதனையுடன் நன்கு ஒத்திருக் கின்றது. அன்ட்றேட்டின் ஆய்கூடத்தில் ஆராயச்சி நடாத்திய **ஸ்பெல்ஸ்** (Spells) என்பார், 30°ச. இல் திரவமாய் இருக்கின்றதும் 1600°ச. கொதி நிலையுடையதுமான கல்லியம் என்பதன் பிசுபிசுப்பை 52°ச. இலிருந்து 1100°ச. வரையுள்ள வீச்சில் துணிந்து

$$\eta\rho^{-\frac{1}{3}} = (2{\cdot}468 \times 10^{-3})\ \text{அடு.}\frac{79{\cdot}05\rho}{\text{T}}$$

எனக கண்டார் ; இது η வின் நோக்கிய பெறுமானங்களுடன் 3 சத வீதத்தை மீறுமல் ஒத்திருக்கிறது.

(*b*) **வாயுக்கள்.**—திரவங்களைப் போலல்லாது வாயுக்கள் வெப்பநிலையுடன் பிசுபிசுப்பு உயர்வதைக் காட்டுகின்றன. தனிவெப்பநிலை T யுடன் η வின் மாறலானது

$$\eta = \kappa \text{T}^{\frac{1}{2}}$$

எனபதால் தரப்படுகின்றது என எளிய இயக்கப்பாட்டுக் கொள்கை கூறு கின்றது ; இங்கு κ ஒரு மாறிலி.† 1893 இல் **சதலண்ட்**‡ (Sutherland) எனபார் அடுத்தடுத்துள்ள மூலக்கூறுகளிடையே சிறு வரையறுத்த கவர்ச்சி யொன்று உளது எனவும், அதன் விளைவாக அதே வெப்பநிலையில் இலட்சிய வாயுவொன்றில் நிகழ்கின்ற மூலக்கூற்று மோதுகைகளைக்காட்டி லும் மெய்வாயுக்களில் நிகழ்கின்றவையே கூடுதலாக இருத்தல் வேண்டும் எனவும் கொண்டு

$$\eta = \eta_0 \cdot \frac{a\text{T}^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{\text{S}}{\text{T}}}$$

எனக் காட்டியுள்ளார் ; இங்கு η_0 ஆனது 0°ச. இல் பிசுபிசுப்பும், a யும் S உம் மாறிலிகளும் ஆகும். S என்பது **சதலண்டின் மாறிலி** எனப்படும். பல வாயுக்களிடத்து இச்சூத்திரத்தை மிதமான வெப்ப நிலை வீச்சுக்களிலே பயன்படுத்தலாம் ; ஆனல், ஆய்கூடத்தில் கிடைக்கக் கூடிய முழு வெப்பநிலை வீச்சிலே பரிசோதனையை நடாத்துமிடத்து, உயர் வெப்பநிலைகளிலும் தாழ்வெப்பநிலைகளிலும் சூத்திரம் பிழைபடு கின்றது.

† தொகுதி II ஐப் பார்க்க.

‡ சதலண்ட், ***Phil. Mag.***, **36, 507, 1893.**

பயிற்சி XI

11·01. திரவமொன்றின் பிசுபிசுப்பை அளத்தற்கு ஒன்றில் மயிர்த்துளைக் குழாய் முறையை அல்லது ஓரச்சுருளை முறையை விவரித்துக் கூறி அதற்கான கொள்கையைத் தருக.

அக்கொள்கையின் பிரயோகத்தையிட்டு நிறைவேற்றப்பட வேண்டிய நிபந்தனைகளைக் கூறுக.

11·02. புவாசேயின் ஆய்கருவியைப் பயன்படுத்தும் பரிசோதனையொன்றிற் பதிவு செய்துள்ள நோக்கல்கள் பின்வருமாறு :—10 நிமிடங்களில் வெளியேறியுள்ள நீரின் கனவளவு 80·7 க. சமீ., நீரின் அமுக்கவுயரம் 39·1 சமீ., குழாயின் நீளம் 60·24 சமீ., குழாயின் சராசரி உள்ளாரை 0·0523 சமீ. பரிசோதனை நடாத்தப்பட்ட வெப்பநிலையில் நீரின் பிசுபிசுப்புக்குப் பெறுமானங் காண்க. [0·0139 கி. சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$.]

11·03. நீளம் l உம் ஆரை a யும் உடைய மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று நிமிர்ந்த பாத்திரமொன்றின் அடியூடே நிலைக்குத்தாக நிறுவப்பட்டிருக்கிறது. குழாயூடே நீர் பாயுங்காலே பாத்திரத்தில் அதன் ஆழம் h ஆக நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கிறது. நீரானது குழாயிலிருந்து சிறு வேகத்துடன் பிரிகின்றது எனக் கொண்டு குழாயூடே உள்ள பாய்ச்சல் வீதத்தைக் க. சமீ. செக்.$^{-1}$ இல காண்க ; நீரில் இருக்கின்ற குழாய் நீளம் l' எனக் கொள்க.

எவ்வாறு பிசுபிசுப்பு துணிதல்களில் இப்பேற்றைப் பிரயோகிக்க முடியும் என்பதை விளக்குக. (G)

11·04. மாறுக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு A உடைய உருளைப் பாத்திரமொன்றுனது, அதனது பக்கத்திலுள்ள துவாரமொன்று ஆழம் h இல அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கும் வண்ணம், திரவமொன்ருல் நிரப்பப்பட்டிருக்கின்றது. நீளம l உம் சராசரி உள்ளாரை a யும் உடைய கிடையான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று துவாரத்தில் பற்றப்பட்டிருக்கிறது. நேரம் $A\cdot\frac{8\eta l}{\pi a^4 g\rho}$ இ. ம. 2 இலே பாத்திரத்தில், பக்கத்துத் துவாரத்திற்கு மேலேயுள்ள திரவத்தின் கனவளவானது அரைவாசியாக்கப்படும் எனக் காட்டுக ; இங்கு η திரவத்தின் பிசுபிசுப்பும் g புவியீர்ப்புச் செறிவும், ρ திரவத்தின் அடர்த்தியும் ஆகும். [நு. கு. இந்நேரமானது h இலே தங்கியிராது ; அது தொடக்க அமுக்கவுயரத்தின அரையாக்கலையே பொறுத்திருக்கிறது.]

11·05. தொட்டியொன்றிலிருந்து 50 சமீ. நீளமும் 0·024 சமீ. விட்டமும் உடைய கிடையான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று வழியாக நீர் ($\eta = 0\cdot010$ கி. சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$) வெளியேறுகின்றது. தொட்டியில நீர்மட்டமானது குழாயின் மட்டத்திற்கு 50 சமீ. மேலே இருக்கும் பொழுது தொட்டிநீரின் பாய்ச்சல் வீதம் யாது ? தொட்டியின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பளவு எங்கும் 100 சமீ.^{2} ஆனுல், நீரின மட்டம் இன்னும் 10 சமீ. குறைதற்கு எவ்வளவு நேரம் செல்லல் வேண்டும். [$7\cdot98\times10^{-4}$ சமீ.^{3} செக்.$^{-1}$; $7\cdot40\times10^6$ செக்]

11·06. 20·6°ச. இல் ஐதரசனின் பிசுபிசுப்பைத் துணிதலுக்குப் பக். 653 இல் விவரித்துக் கூறியுள்ள பரிசோதனையொன்றில் மயிர்த்துளைக் குழாயின் நீளம் 48·5 சமீ. ஆகவும் அதன் சராசரி விட்டம் 0·0323 சமீ. ஆகவும் இருநதன. அமுக்கமிகை 11·07 சமீ. எண்ணெய் (அடர்த்தி 0·870 கி. சமீ.$^{-3}$) உம் ஓட்டம் 0·2244 அம்பியரும் ஆகும். ஐதரசனின் மின்னிரசாயனச் சமவலு $1\cdot045\times10^{-5}$ கி. கூலோம்$^{-1}$ எனவும் நி. வெ. அ. இல் ஐதரசனின் ஒரு மூல் 22·24 லீற்றர் கனவளவு உடையது எனவும் கொண்டு, 20·6°ச. இல் ஐதரசனின் பிசுபிசுப்புக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறுக. [வளிமண்டல அமுக்கம் 75·4 சமீ. இரசம்.]
[$9\cdot26\times10^{-5}$ போயிசு.]

11·07. தேவையான சூத்திரத்தைப் பெற்று, எவ்வாறு 0° ச. இலிருந்து 100°ச. வரையுள்ள வீச்சில் வெப்பநிலையுடன் நீரின் பிசுபிசுப்பு மாறலை நீர் ஆராய்வீர் என்பதை விவரித்துக் கூறுக.

அம்மாறலின் பொது இயல்பையும், எவ்வாறு அதே வீச்சில் அம்மாறலானது வெப்பநிலையோடு வளியின் பிசுபிசுப்பு மாறலுடன் ஒத்திருக்கின்றது என்பதையும் விளக்குக.

11·08. "பிசுபிசுப்பு", "உறுதிப் பாய்ச்சல்" என்னும் பொருள்களுக்கு வரைவிலக்கணம் கூறுக. திருத்தமான பேறென்றைப் பெறும் பொருட்டு நீர் செய்யவேண்டிய முற்காப்புக்களை வற்புறுத்தி, எவ்வாறு நீர் குழாய்நீரின் பிசுபிசுப்பைத் துணிவீர் என்பதை விவரித்துக் கூறுக.

11·09. மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே திரவமொன்றின் பாய்ச்சலுக்கான சூத்திரத்தை எடுத்துக் கொண்டு, வாயுவினிடத்து அதற்கு ஒத்திருக்கின்ற சூத்திரத்தைப் பெறுக. எவ்வாறு இம்முறையால் ஐதரசனின் η வைக் காணப் பரிசோதனையொன்றை நீர் நடாத்துவீர் என்பதைக் காட்டுக.

11·10. இரு கிடையான தட்டுக்களுக்கிடையேயுள்ள இடமானது பிசுக்குப் பாயியொன்றால் நிரப்பப்பட்டிருக்கின்றது. தட்டுக்களுள் ஒன்று ஓர் உறுதிச் சுழற்சி நிலையில் நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கும் போது மற்றையதில் மையமாகவிருக்கின்ற வட்டப் பரப்பளவொன்றுமீது ஆற்றுகின்ற இணையைக் காண்க.

11·11. ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் வளியின் பிசுபிசுப்பைத் துணியும் பொருட்டு, மிலிக்கன் என்பார் செய்ததுபோல், காவல்வளையங்களிட்ட ஈர் ஓரச்சுருளைகள் ஏற்படுத்தப்பட்டுள்ளன. (காவல் வளையங்கள் இல்லாத) உள்ளுருளையின் நீளம் 20 சமீ. ஆகும்; அது வழக்கம்போல் ஓய்வில் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. வெளியுருளையானது செக்கனொன்றில் 10 முறை சுழலுங்கால் உள்ளுருளைமீது 3000 தைன்.–சமீ. இற்குச் சமனான இணையொன்று ஆற்றுகின்றது. உள்ளுருளையின் குறுக்குவெட்டு ஆரை 5·00 சமீ. உம் அதற்கும் வெளியுருளைக்குமிடையேயுள்ள அகறசி 0·062 சமீ. உம் ஆனால், வளியின் பிசுபிசுப்புக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறுக. [$1{\cdot}85\times10^{-4}$ போயிசு.]

11·12. நீளம் l உம் உள்ளாரை a யும் உடைய கிடையான குழாயொன்றில் திரவமொன்று அருவிக் கோடுகளிற் பாய்கிறது. குழாயின் முனைகளுக்கிடையேயுள்ள பவித அமுக்க வித்தியாசம் p ஆனால், நேரவலகொன்றிற் பாய்கின்ற திரவத்தின் கனவளவுக்கான கோவையொன்றைப் பெறுக. குழாயில் அதனுடன் ஓரச்சானதும், ஆரை $a/2$ உம், நீளம் l உம் உடையதுமான உருளைக் கோலொன்று புகுத்தப்பட்டிருந்தால், முனைகளுக்கிடையேயுள்ள அதே அமுக்க வித்தியாசத்துககான பாய்ச்சல் வீதமானது கிட்டத்தட்ட 88 சதவீதம் குறைக்கப்படுகின்றது எனக் காட்டுக. (S)

11·13. இமப் பனிக்கட்டியானது நீளமும் ஆரையும் 10 மீற்றர் உடைய கிடையான வட்டவுருளைக் குடைபாதையூடே செலுத்தப்படுகிறது. பனிக்கட்டியின் பிசுபிசுப்புக் குணகம் $1{\cdot}2\times10^{-4}$ ச. கி. செ. அலகுகள் உம், அதன் அடர்த்தி 0·9 கி. சமீ.$^{-3}$ உம், அதன் உருகல மறைவெப்பம் 80 கலோ. கி.$^{-1}$ உம் ஆனால், அது பிசுபிசுப்பின் எளிய விதிப்படி பாய்கின்றது எனக் கொண்டு, குடைபாதையிலிருந்து வெளியேறுகின்ற பனிக்கட்டியை அதே வீதத்தில் உருக்கிவைக்கும்பொருட்டு அக்குடைபாதையின் வெளி வாயிலில் வேண்டிய வெப்ப வழங்கல் வீதத்தைக் காண்க. குடைபாதையின் முனைகளுக்கிடையேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசம் 10^8 தைன். சமீ.$^{-2}$ ஆகும். கணிப்பிற் பயன்படுத்தியுள்ள சூத்திரத்தைப் பெறுக.

(S) [$2{\cdot}4\times10^4$ கலோ. செக்$^{-1}$.]

11·14. ஓர் ஒடுங்கிய குழாயூடே பாய்கின்ற திரவமொன்றின் பாய்ச்சல் வீதத்தைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு அத்திரவத்தின் பிசுபிசுப்பைத் துணியமுடியும் என்பதை விளக்கி, இவ்வெடுத்துககாட்டிற்குப் பொருத்தமான கணியங்களைப் பயன்படுத்தி அப் பாய்ச்சல் வீதத்திற்கான கோவையைப் பெறுக.

ஆரை a யும் நீளம் l உம் உடைய ஒடுங்கிய குழாயொன்று சீரான கிடைக்குறுக்குவெட்டு A உடைய தொட்டியுடன் கிடையாகத் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. தொட்டியில் நீரின் தொடக்கவாழம் H ஆகும்; நேரம் t யிற்குப் பின்னர் ஆழமானது h இற்குக் குறைந்து விடுகிறது. நீரின் பிசுபிசுப்பு η ஆனால், பாய்ச்சலானது மெதுவாகவும் உறுதியாகவும் நிகழ்கிறது எனக் கொண்டு h இற்கும் t யிற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைத் துணிக.

(G)

11·15. பிசுபிசுப்புக் குணகத்திற்கு வரைவிலக்கணம் கூறி அதன் பரிமாணங்களைக் காண்க.

பரிமாணப் பகுப்பு முறையைப் பயன்படுத்திப் பிசுபிசுப்பு η வும் அடர்த்தி ρ வும் உடைய பாயியொன்றில், ஆரை r உடைய கோளமொன்று வேகம் v யுடன் அசையுங்காலே, அது அனுபவிக்கின்ற பிசுக்குத் தடை R ஐ ஆராய்க; R ஆனது v^n இற்கு விகிதசமம் எனக் கொள்க.

(a) $n=1$, (b) $n=2$ ஆகும் போது மேற்படி விளைவின் கருத்தைப் பற்றியும் நடைமுறையில் அவ்விளைவின் முதன்மை பற்றியும் எடுத்துக் கூறுக. (G)

11·16. சீரான குறுககு வெட்டுடைய நீளமான மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றைத் தவிர்த்து மூடப்பட்டிருக்கின்ற பெரிய பாத்திரமொன்றிலுள்ள வளியானது, பாத்திரத்தில் அமுககம் வளிமண்டல அமுககம் p_0 ஐ மீறியிருக்கும்போது, வெளியே தப்பிப்பாய்கின்றது. பாத்திரத்தில் அமுக்கமானது p_1 இலிருந்து p_2 வரை குறைவதற்கான நேரம் t ஆனது

$$t=\frac{8\,\eta l V}{\pi a^4 p_0} \text{ இ. ம. } \frac{(p_2+p_0)\,(p_1-p_0)}{(p_1+p_0)\,(p_2-p_0)}$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது எனக் காட்டுக; இங்கு V பாத்திரத்தின் கனவளவும், η ஆனது வளியின் பிசுபிசுப்புக குணகமும், a ஆனது மயிர்த்துளைக் குழாயின் ஆரையும் ஆகும். இச்சூத்திரத்தைப பிரயோகித்து வளியின் பிசுபிசுப்புத் துணிதலுக்குத் தெரிந்த முறையொனறை விவரித்துக் கூறுக (அலலது ஒன்றைச் சுட்டிக்காட்டுக). (S)

11·17. பிசுபிசுப்புக் குணகம் η உடைய நீரானது ஒரு மாறு அமுக்கவுயரம் p யின் ஆற்றலால் ஆரை a யுடைய கிடையான மயிர்ததுளைக் குழாயொன்றூடே பாயகின்றது. குழாயின் நீளம் l ஆனல செக்கனெனறில் குழாயிலிருந்து வெளியேற்றப்படுகின்ற கனவளவைக் காண்க. வெளியேறும் வேகததிற்கான திருத்ததைதப் புறக்கணிக்கலாம்.

எவ்வாறு நீரின பிசுபிசுப்புக் குணகத்தைத் துணிய இச்சூத்திரம் பிரயோகிக்கப்படுகினறது என்பதை விளக்கிக் காட்டுக.

அமுக்கமானது மாறிலியாய் இருப்பதற்குப் பதிலாக குறுக்குவெட்டு A உடைய ஒரு பாத்திரத்திலுள்ள நீரால் பேணப்படுமாயின அந்தப் பாத்திரத்தின் அடியிலிருந்து மயிர்த்துளைக குழாயானது கிடையாக நீட்டியிருக்குமபோது நீரின் ஆழமானது h_1 இலிருந்து h_2 வரை இறங்குவதற்கான நேரம் எவ்வளவாகும்? (G)

11·18. 20°ச. **இல் நீரின் பிசுபிசுப்பானது** 0·0101 **போயிசு** என்னும் கூற்றை விளக்குக.

பரிமாணப்பகுப்பு முறையைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு பாயியொன்றில் அசைகின்ற கோளமொன்றின் இயக்கத்தை எதிர்க்கின்ற தடையானது அக்கோளத்தின் வேகத்துடன் மாறுகின்றது என்பதைக் காட்டுக. வேகம் பெரிதாகுமிடத்து யாது நிகழும்?

எவ்வாறு இப்பேற்றைப் பயன்படுத்தி, வாயுவொன்றில் புவியீர்ப்பால் விழுகின்ற சிறு எண்ணெய்த் துளியொன்றின் விட்டத்தைத் துணிய முடியும் என்பதை விளக்குக.

11·19. பிசுபிசுப்பு என்பதன் அளவறிதற்குரிய பொருளைக் கூறி, எவ்வாறு மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றூடே அசையுந் திரவமொன்றில் பாய்ச்சல் வீதத்தை அளந்து அத்திரவத்தின் பிசுபிசுப்பைத் துணியலாம் என்பதை விவரித்துக் கூறுக.

கணித்தலுக்குத் தேவைப்படுகின்ற சூத்திரம் எதையும் பெறுக. (G)

11·20. ஆவியொன்றின் பிசுபிசுப்பைத் துணியும் முறையொன்றைக் கூறி அதற்குரிய கொள்கையைத் தருக.

11·21. பௌதிகக் கணியமொன்றின் பரிமாணங்கள் என்பதன் பொருள் யாது?

பரிமாணப்பகுப்பு முறையைப் பயன்படுத்தி, எவ்வாறு (a) நேரவலகொன்றில் வட்டக் குறுக்கு வெட்டுடைய குழாயொன்றூடே பாய்கின்ற திரவமொன்றின் கனவளவானது குழாயின் ஆரை, குழாய் வழியேயுள்ள அமுக்கப் படித்திறன், திரவத்தின் பிசுபிசுப்பு

என்பவற்றைப் பொறுத்திருக்கின்றது, (b) திரவத்துளியொன்றின் நிறையானது துளி விட்டு விலகுகின்ற துவாரத்தின் ஆரையையும் திரவத்தின் அடர்த்தியையும் பரப்பிழுவையையும் பொறுத்திருக்கினறது எனக் காட்டுக. ஒவ்வோர் எடுத்துக்காட்டிலும் குறிக்கப்பட்ட மாறிகளை மட்டுமே கணிப்பிற் சேர்த்துக் கொள்க.

எவ்வாறு (b) யிற கிடைக்கப்பெற்ற பேற்றை நீர் ஆய்வீர் ? (G)

11·22. வெறிதாக்கப்பட்ட பாத்திரமொன்றின் ஒரு பககத்தில் ஒரு மயிர்த்துளைக குழாய் வைதது ஒடடப்பட்டுள்ளது ; அம்மயிர்த்துளைக் குழாய் வழியாகப் பாத்திரத்தை நிரப்பமுடியும். பாத்திரத்தை மிகத் தாழ்ந்த ஓா அமுக்கததிற்கு வெறிதாக்கிக் குழாயின் முனையொன்றை வளிமண்டலமுகமாகத் திறநது வைத்தால, பாத்திரமானது வளியால் வளிமண்டல அமுக்கத்தின் அரைவாசிவரை நிரப்பப்படுவதற்கு எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும் ? இவ்விடையைக கணிக்கும் பொருட்டுத் தேவையான தரவுகளைப் பயன்படுத்தித் தேவையான சூத்திரத்தைப் பெறுக.

வளியின் பிசுபிசுப்பைத் துணியப் பொருத்தமான முறையொன்றை விவரித்துக் கூறுக. (S)

11·23. பிசுக்குவூடகமொனறில் ஒரு சிறு கோளத்தின் வீழ்ச்சியையிட்டு ஸ்ரோக்சின் விதியைப் பெறும்பொழுது பயன்படுத்தியுள்ள எடுகோள்களைக் கூறி, அவ்விதியின் குறைகளை வெளிப்படுத்தியுளள பரிசோதனைகளை விவரித்துக் கூறுக.

11·24. விட்டம் 0·30 சமீ. உடைய உருக்காலான் கோளமொன்று கிளிசறினில் விழுங்கால் 10 செக. இல 25 சமீ. தூரம் அசைகின்றது. உருக்கு, கிளிசறின் ஆகியவற்றின் அடர்த்திகள் முறையே 7·8 கி. சமீ.$^{-3}$ உம் 1·26 கி. சமீ.$^{-3}$ உம் ஆகும். கிளிசறினின் பிசுபிசுப்புக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறுக.

11·25. தூளாககப்பட்ட சோக்கில் பல்பேறு பருமன்களுடைய துணிக்கைகள் உள. சிறிதளவு சோக்கை நீரோடு கலக்கிவைத்தால் 50 நிமிடங்களுக்குப் பின்னர் தொங்கியிருக்கின்ற மிகப் பெரிய துணிக்கைகளின விட்டத்திற்குப் பெறுமானமொன்றைக் காண்க ; நீரின் ஆழம் 12 சமீ. எனவும், சோக்கின் அடர்த்தி 2·7 கி. சமீ.$^{-3}$ எனவும், அந்நேரத்திலுள்ள வெப்ப நிலையில நீரின் பிசுபிசுப்பு 0·010 கி. சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$ எனவும், கொள்க. [$2{\cdot}66\times10^{-4}$ சமீ.]

11·26. நியூறறனின் பிசுபிசுப்பு விதியைக் கூறி அவ்விதியின் விளக்கத்தையிட்டுப் பிரேரிக்கப்பட்டுள்ள ஏதேனுமொரு முறையை அல்லது கொள்கையை எடுத்து உரையாடுக. முடிவில்லாப் பாயியொனறில் வட்டவுருளையொன்றை அதன் அச்சுப் பற்றிச் சுழலுமாறு செய்வதற்குத் தேவையான முறுக்கததுக்குக் கோவையொன்றைப் பெறுக. (S)

11·27. வெப்பநிலையுடன் திரவமொன்றின் பிசுபிசுப்பு மாறலைத் துணிதலுக்காக பரிசோதனையொன்றை விவரித்துக் கூறுக.

அடர்த்தி 1·21 கி. சமீ.$^{-3}$ உம், பிசுபிசுப்பு 14·0 கி. சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$ உம் உடைய திரவமொன்றில் கண்ணாடியாலான கோளமொன்று விழுகினறது. கோளத்தின் ஆரை 5·50 மிமீ. உம் கணணாடியின் அடர்த்தி 2·48 கி. சமீ.$^{-3}$ உம் ஆனால், கோளத்தின் முடிவு வேகம் எவ்வளவாகும் ? [2·98 சமீ. செக்$^{-1}$]

11·28. ஒரு மோட்டர்க் காாப் பரீட்சையில் ஒரு குறிப்பிட்ட கார் நிலைத்த உயர்வு வலுவொன்றைப் பிறப்பிக்கிறது. இயக்கத்துக்கெதிரான தடை kV^n என்பதாகும்; இங்கு k ஒரு மாறிலியும், V வளியைக் குறித்துக் காரின் தொடாபு வேகமும் ஆகும். பரீட்சையொன்றில் காற்றேடும் காற்றுககு எதிராகவும் கார் செல்லும் போது நோக்கியுள்ள வேகங்கள் முறையே v_1 உம் v_2 உம் ஆகும். அசைவற்ற வளியில் உயர்வு வேகத்தைக் காண்க.

ஒவ்வொரு திசையிலும், அளக்கபபட்ட மைல் ஒன்றில், ஓட்டத்தை நேரம் கண்டு, அந்நேரங்களின் சராசரியிலிருந்தே உண்மையில் வேகம் கணிக்கப்படுகிறது. $n=1$ ஆனால், இம்முறையால், அசைவற்ற வளியினிடத்து மெய்யான வேகமானது குறைத்து மதிப்பிடப்படுகிறது எனக் காட்டுக.

11·29. ஆரை r உடைய கோளமொன்று வேகம் u வுடன் அடர்த்தி ρ உடைய ஒரு திரவத்தில் அசையுங்கால், அது அனுடவிக்கின்ற தடை $\mathbf{F}$ ஆனது

$$\mathbf{F}=\kappa r^{\alpha}\rho^{\beta}\eta^{\gamma}u$$

என்னும் வடிவமுடைய ஒரு சூத்திரத்தால் தரப்படுகிறதெனக் கொண்டு, α, β, γ என்பவற்றைத் துணிக; இங்கு κ ஒரு மாறிலியும் η ஆனது திரவத்தின் பிசுபிசுப்பும் ஆகும்.

அடர்த்தி 0·92 கி. சமீ.$^{-3}$ உம் பிசுபிசுப்பு 16·4 போயிசும் உடைய எண்ணெயொன்றிலே 0·32 சமீ. விட்டமுடைய உருக்காலானவொரு கோளம் புவியீர்ப்பின்கீழ விழும்பொழுது அடைகின்ற முடிவுவேகத்தைக காண்க. உருக்கின் அடர்த்தி 7·82 கி.சமீ.$^{-3}$ எனவும், κ ஆனது 6π எனவும் எடுக்கலாம்.

[$\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=1$; $2{\cdot}34\times10^{-2}$ சமீ. செக்.$^{-1}$.]

11·30. அவற்றூடே ஒரு திரவ ஓட்டம் உறுதியாகப் பாயும் வண்ணம் A, B ஆகிய இரு கிடையான மயிர்த்துளைக் குழாய்கள் தொடரிலே தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. A ஆனது உள்விட்டம் 1 மிமீ. உம் நீளம் 1 மீற்றரும் உடையது ; B ஆனது உள்விட்டம் 0·6 மிமீ. உம், நீளம் 60 சமீ. உம் உடையது. A யின் வாயிலில் திரவத்திலுள்ள அமுக்கமானது வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் காட்டிலும் 20 சமீ. நீர் கூடுதலாக இருக்கிறது. தொடரின் வெளிவாயிலில் அது வளிமண்டல அமுக்கமாகும். குழாய்களின் மூட்டிலுள்ள அமுக்கம் எவ்வளவாகும் ?

மேற்படி குழாய்களின் அதே நீளங்களும் ஆனால் பத்து மடங்கு குறைக்கப்பட்ட விட்டங்களும் உடைய குழாய்த் தொகுதியின் உள், வெளி வாயில்களில் முன்போல அமுக்கங்கள் இருநதால அக்குழாய்களூடே வளியானது உறுதியாகப் பாயுமிடத்து மேற்படி அமுக்கப பங்கீடு காணப்படுமா ? [வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் காட்டிலும் 16·4 சமீ. நீர் கூட.]

11·31. அசைவற்ற நீரிலே கப்பலொன்றின் இயக்கத்தை எதிர்க்கின்ற தடையானது kv^3 ஆகும் ; இங்கு v வேகமும் k ஒரு மாறிலியும் ஆகும். ஓட்டுங் கருவியுதைப்பில் சிறு மாறல்கள் காரணமாக, நேரம் t யிலே வேகம் $a+b$ கோசை ωt ஆகும் ; இங்கு, a, b, ω என்பவை மாறிலிகள். கப்பலின் திணிவு m ஆயின், எந்நேரத்திலுமுள்ள ஓட்டுங்கருவியுதைப்பையும் உஞற்றப்படும் வலுவையும் காண்க. சராசரி வலுவானது வேகம் மாறாமலும் a யிற்குச் சமனாகவும் இருக்கும் போது தேவையான வலுவைக்காட்டிலும் பெரிதெனக் காட்டுக.

11·32. வேகத்தின் முப்படிக்கு விகிதசமமான தடையை அளிக்கின்ற ஊடகமொன்றில் ஒரு துணிக்கை அசைகின்றது ; துணிக்கைமீது வேறெந்த விசைகளும் ஆற்றுகிறதில்லை. காலவிடை τ யில் துணிக்கையின் வேகமானது v_1 இலிருந்து v_2 வரை குறைகின்றது. அதே காலவிடை τ யிலே துணிக்கையானது தூரம்

$$\frac{2v_1v_2\tau}{v_1+v_2}$$

என்பதைக் கடந்து செல்கின்றதெனக் காட்டுக.

11·33. அலகுத் திணிவுடைய துணிக்கையொன்று பிரயோக விசை f கோசை pt என்பதாலும், ஆள்விசை $-n^2x$ என்பதாலும், அதன் வேகத்தின் $2k$ மடங்கிற்குச் சமனான உராய்வுவிசை என்பதாலும் தாக்கப்பட்டு x அச்சு வழியே அசைகின்றது. இயக்கத்தில் தொடக்க நிபந்தனைகளைச் சார்நத பகுதியானது காலஞ் செல்லச் செல்ல அடுக்குக்குறி விதிப்படி மறைகின்றதென நிறுவி, நீண்ட காலவிடைக்குப் பின்னுள்ள இயக்கத்தைத் துணிக.

நீண்ட காலவிடைக்குப் பின் (ஆள்விசைப் புலத்திலே) முழு அலைவுக்காலமொன்றிலுள்ள நிலைச் சக்தியின் சராசரியும், முழு அலைவுக்காலமொன்றிலுள்ள இயக்கச் சக்தியின் சராசரியும் $n^2 : p^2$ என்னும் விகிதத்தில் அமைந்திருக்கின்றனவென நிறுவுக.

11·34. அதன் வேகத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகிதசமமான ஒரு தடையை அளிக்கின்ற ஊடகமொன்றில் எறிபொருளொன்று அசைகின்றது. அது வேகம் v யுடன் நிலைக்குத்தாக மேலநோக்கி எறியப்படுகின்றது. அது நேரம் $\frac{V}{g}$ தான் $^{-1}$ $\frac{v}{V}$ யிலே $\frac{V^2}{2g}$ இ.ம. $\frac{V^2+v^2}{V^2}$ என்னும் உயரம் ஏறுகின்றதெனக் காட்டுக ; இங்கு, V நிலைக்குத்தான வீழ்ச்சிக்குரிய எல்லை வேகம் ஆகும்.

மேலும், வளிமண்டலத்தில் அது இருக்கின்ற முழு நேரம்.

$$\frac{V}{g}\left[\text{தான்}^{-1}\frac{v}{V}+\text{அசைன்}^{-1}\frac{v}{V}\right]$$

என்பதாகும் எனக் காட்டி அது என்ன வேகத்துடன் நிலத்தில் மோதும் என்பதைக் காண்க.

11·35. தொடக்கத்தில் ஓய்விலிருக்கின்ற, திணிவு m உடைய, துணிக்கையொன்று மாறு விசை fm என்பதாலும் தடுக்கும் விசை $mk\dot{x}$ என்பதாலும் தாக்கப்படுகின்றது ; இங்கு, $\dot{x}$ ஆனது துணிக்கை உற்பத்தியிலிருந்து தூரம் x இல் இருக்கும்போது அதன் வேகம் ஆகும். (a) துணிக்கை அடைந்துள்ள முடிவு வேகம், (b) விசையானது நேரம் t பிரயோகிக்கப்பட்ட பின் துணிக்கையின் வேகம், (c) மேற்படி நேரத்தில் துணிக்கை அசைந்துள்ள தூரம் என்பவற்றிற்குக் கோவைகள் பெறுக.

மாறு விசைக்குப் பதிலாகச் சைன்வளையி விசை mA கோசை ωt என்பதைப் புகுத்தி வருகின்ற எடுத்துக்காட்டை ஆய்க.

11·36. அடர்த்தி 0·95 கி.சமீ.$^{-3}$, ஆரை 10^{-4} சமீ. உடையதும் q நி. மி. அ. அளவு ஏற்றம் கொண்டுள்ளதுமான எண்ணெய்த் துளியொன்று 2000 வோ. சமீ.$^{-1}$ என்னும் மின்புலத்தால 0·0013 கி. சமீ.$^{-3}$ அடர்த்தியுடைய வளியில் மாறு வேகம் 0·036 சமீ. செக்.$^{-1}$ என்பதுடன் நிலைகுத்தாக மேல்நோக்கிச் செலுத்தப்படுகின்றது. வளியின் பிசுபிசுப்பானது 180×10^{-6} கி.சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$ எனத் தரப்பட்டிருந்தால் q வின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க. [$24{\cdot}2 \times 10^{-10}$ நி. மி. அ.]

11·37. 20° ச. இலே நீரின் இயககத்தியற் பிசுபிசுப்புக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பரிசோதனைமுறைப்படி எவ்வாறு துணிவீா என்பதை விவரமாய் விளக்குக.

இவ்வியக்கத்தியற் பிசுபிசுப்பை ஏககர். ஆண்டு$^{-1}$ என்பதில் கூறலாமெனக் காட்டுக.

4° ச. இலே நீரின் பிசுபிசுப்பு 0·01570 கி. சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$ ஆகும். அதன் இயக்கத்தியற் பிசுபிசுப்பை மைல், தொன், இருவார காலம் என்னும் அலகுத் தொகுதியில் குறிக்க.

[$7{\cdot}33 \times 10^{-7}$ மைல்^{2}. இருவாரம்$^{-1}$.]

11·38. இரசத்தின் பிசுபிசுப்பும் அதன் அடர்த்தியும் வெப்பநிலையுடன் கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையிற் காட்டியுள்ளவாறு மாறுகின்றன. அன்ட்ரேட்டின் சமன்பாடானது (பக்கம் 703 இற் காண்க) இப்பேறுகளுடன் ஒத்திருக்கிறதெனக் காட்டி, மாறிலிகள் A, c என்பனவற்றிற்கு எண்பெறுமானங்கள் காண்க.

வெப்பநிலை (°ச.) ..	–20	0	20	50	100	200	300
$\eta \times 10^2$ (கி. சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$) ..	1·69	1·56	1·86	1·41	1·22	1·01	0·93
$(\rho - 13.0) \times 10$ (கி. சமீ.$^{-3}$) ..	6·45	5·96	5·46	4·73	3·52	1·13	– 1·25

[$2{\cdot}46 \times 10^{-3}$, 48·]4

அதிகாரம் XII

தொடக்க நீரியலும், ஞெகிழிமையும், நியூற்றன முறையல்லாத் திரவங்களும்

சில வரைவிலக்கணங்கள்.—(*a*) பூச்சிய நெருக்கத்தகவு உடையதும் அதில் கொய் தகைப்பு எதையும் நிலைநிறுத்த முடியாததுமான திரவமே இலட்சியத் திரவம் எனப்படும்.

(*b*) மேற்பரப்பொன்றிலுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் அமுக்கம் ஒரே மாறும் பெறுமானம் உடையதாயிருந்தால் அப்பரப்பானது சமவமுக்கப் பரப்பு எனப்படும்.

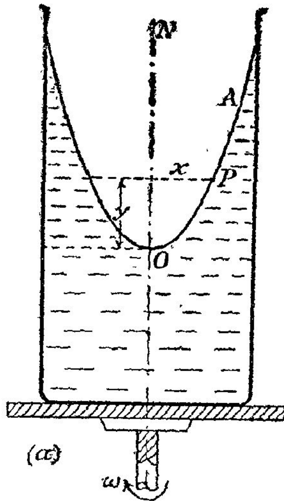
ஈர் அயற் சமவமுக்கப் பரப்புக்களிடையேயுள்ள ஒரு சிறு கனவளவு மூலக மீது ஆற்றுகின்ற விளையுளுதைப்பு.—திரவமானது ஓய்வாயிருக்கின்றது அல்லது இலட்சியத்திரவமொன்று இயக்க நிலையில் இருக்கின்றது எனக் கொள்க. சமவமுக்கம் p உடைய பரப்பில் δS என்பது ஒரு சிறு மூலகமாகுக; $p+\delta p$ என்பதால் வரையறுக்கப்பட்ட சமவமுக்கப்பரப்பில் முடிவுறுமாறு மேற்படி மூலகத்தின் சுற்றயற் புள்ளிகளொவ்வொன்றிலும் செவ்வன்கள் வரையப்படுக. கருதப்படுகின்ற பரப்புக்களிடையே செவ்வன்களினது பாகமொவ்வொன்றின் நீளமும் δn ஆகுக, படம் 12·01. இவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட கனவளவு மூலகமானது சமவமுக்கப் பரப்புக்களுக்குச் செங்குத்தான தளம் ABCD யால் வெட்டப்படுக. அப்பொழுது ABCD யின் பரப்பளவு δA எனின், கருதப்படுகின்ற மூலகத்தின் வளைந்த பாகங்கள் மீது தாக்குகின்ற விசைகள் பருமனில் ஒவ்வொன்றும் $p.\delta A$ யிற்குச் சமனாகவும் திசையில் ஒன்றையொன்று எதிர்த்தும் இருக்கின்றன; அதாவது, அம்மூலகமீது சமவமுக்கப் பரப்புக்களுக்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குகின்ற விசையானது பூச்சியம் ஆகும். எனவே மூலகத்தின் தட்டையான பரப்புக்கள் மீது தாக்குகின்ற அமுக்கத்தால் ஆகின்ற விசை $\delta p.\delta S$ இற்குத் தொடலிக் கூறு இல்லை; அதாவது விளையுள் உதைப்பானது சமவமுக்கப் பரப்புக்களுக்குச் செவ்வனாகும்.

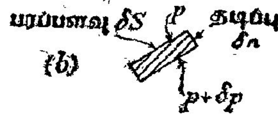


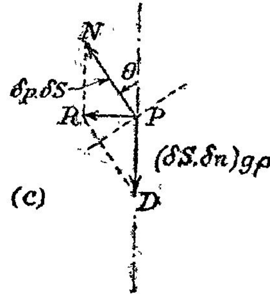
படம் 12·01. ஈர் அயற் சமவமுக்கப் பரப்புக்களிடையேயுள்ள ஒரு சிறு கனவளவு மூலகமீது ஆற்றுகின்ற விளையுள் உதைப்பு.

சுழல் திரவமொன்றினது சுயாதீனப் பரப்பின் வடிவு.—ஓர் உருளைப் பாண்டம் அதனில் இருக்கின்ற இலட்சியத் திரவமும் நிலைக்குத்தான அச்சொன்று பற்றிக் கோணவேகம் ω வுடன் சீராகச் சுழலுக. நிலைக்குத்தான அச்சு ON ஐப் பற்றிப் படம் 12·02 (*a*) யிற் காட்டியுள்ள வளையி OPA சுழலுங்கால் அதனால் இயற்றப்படுகின்ற வடிவைத் திரவத்தின் பரப்பானது கொள்ளுக.

δS ஆனது P யில் பரப்பின் ஒரு சிறு மூலகமாகுக ; அப்பரப்பானது உண்மையில் ஒரு சமவமுக்கப் பரப்பாகும் ; அதற்கு ஒத்த அமுக்கம் p ஆகுக. $p+\delta p$ என்பதால் வரையறுக்கப்பட்டதும், படம் 12·02 (b) யிற் காட்டியுள்ளவாறு, δS இலிருந்து தூரம் δn இல் இருக்கின்றதுமான அயற் பரப்பொன்றைக் கருதுக. கனவளவு மூலகம் $\delta S.\delta n$ இலுள்ள திரவமானது அதனது நிறை $(\delta S.\delta n)g\rho$ என்பதாலும், மூலகத்தின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குச் செங்குத்தான விசை $\delta p.\delta S$ என்பதாலும் தாக்கப்படுகின்றது ; இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவும், ρ திரவத்தின் அடர்த்தியும் ஆகும். இவ்விசைகள் முறையே PD எனவும் PN எனவும் படம் 12·02 (c) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன ; அவற்றின் விளையுள் PR,







படம் 12·02. சுழல் (இலட்சியத்) திரவமொன்றினது சுயாதீனப் பரப்பின் வடிவு.

மூலகம் சுழற்சியச்சைப் பற்றிக் கோணவேகம் ω வுடன் அசைவதற்குத் தேவையான மையநாட்டவிசை ஆதல் வேண்டும். சுட்டப்பட்டிருக்கின்ற கோணம் θ எனின், மூலகமீது தாக்குகின்ற விசைகளைக் கிடையாகவும் நிலைக்குத்தாகவும் துணித்து

$$(\delta p.\delta S) \text{ சைன் } \theta = (\delta S.\delta n)\rho.\omega^2 x \quad \text{எனவும்}$$
$$(\delta p.\delta S) \text{ கோசை } \theta = (\delta S.\delta n)\rho g \quad \text{எனவும்}$$

பெறுகிறோம்

$$\therefore \frac{\omega^2 x}{g} = \text{தான் } \theta$$

$$= \text{P யிலே தொடலியின் சரிவு} = \frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore \quad y=\frac{\omega^2x^2}{2g}+C\;;$$

இங்கு C ஒரு தொகையீட்டு மாறிலி. O ஐ உற்பத்தியாக எடுத்தால் $C=0$ எனப் பெறுவோம் ; அதாவது,

$$y=\frac{\omega^2x^2}{2g}\;;$$

இது நிலைக்குத்தான அச்சு உடைய ஒரு பரவளைவிற்கான சமன்பாடாகும்; அதன் குவியத் தூரம் a ஆகும் ; இங்கு $4a=\frac{2g}{\omega^2}$; அதாவது $a=\frac{g}{2\omega^2}$.

சுழல்திரவமொன்றிலே யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கம்.—O ஆனது நிலைக்குத்தான அச்சொன்றைப் பற்றிக் கோணவேகம் ω வுடன் சுழல்கின்ற திரவமொன்றின் சுயாதீனப் பரப்பின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி ஆகுக, படம் 12·03. Ox உம் Oy யும் மாட்டேற்றச்சுக்களும், P ஆனது திரவத்திலுள்ள புள்ளி (x, y) யும் ஆகுக ; P ஆனது ஒரு சிறு கிடைப் பரப்பு δS இன் மையம் எனக் கொள்க. δS இன் வரைப்பாட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியூடேயும் நிலைக்குத்தாக வரைந்துள்ள நேர் கோடுகளால் இயற்றப்படுகின்ற உருளையானது திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பைக் Q விலே வெட்டுக. $PQ=h$ ஆகுக. மேலும், திரவத்தில் P யிலுள்ள அமுக்கமிகையானது p ஆகுக ; அதாவது, வளிமண்டல அமுக்கம் பூச்சியமெனக் கொள்ளப்படுகின்றது. PQ வை அச்சாகக் கொண்ட உருளையிலிருக்கின்ற திரவமீது தாக்குகின்ற புறவிசைகளைக் கருதுவோமாயின்,

$$p.\delta S-(g\rho h).\delta S=0$$

எனப் பெறுவோம் ;

அதாவது
$$\begin{aligned} p&=g\rho h\\ &=g\rho(AQ-y)\;; \end{aligned}$$

இங்கு நீட்டிய QP ஆனது Ox ஐ வெட்டும் புள்ளி A யாகும். Q திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பில் இருக்கின்றபடியால்

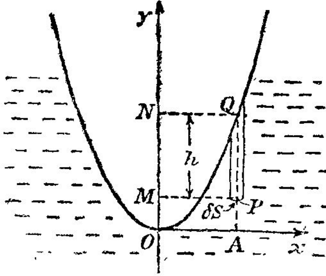
$$AQ=\frac{\omega^2x^2}{2g}.$$

$$\therefore \quad p=g\rho\left(\frac{\omega^2x^2}{2g}-y\right),$$

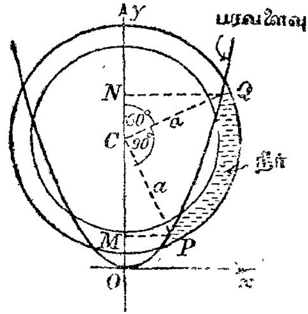
அல்லது
$$\frac{\omega^2x^2}{2g}=y+\frac{p}{g\rho}=y+h.$$

எனவே p என்பது மாறிலியானால், புள்ளி P ஆனது சமவமுக்கப் பரப்பொன்றிலே கிடக்கும். அப்பரப்பானது திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்

பிற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே, ஆழம் h இல் இருக்கின்ற புள்ளியை உற்பத்தியாகக் கொண்ட ஒரு பரவளைவுருவாகும். எனவே சமவமுக்கப் பரப்புக்கள் எல்லாம் சமபரவளைவுருக்களாகும்.



படம் 12·03. சுழல் (இலட்சியத்) திரவமொன்றிலே யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கம்.



படம் 12·04.

உதாரணம்.—வட்டக் குழாயொன்றின் காற்பகுதியானது நீரால் நிரப்பப்பட்டிருக்கிறது; வட்டத்தின் ஆரை a ஆகும்; குழாயினது குறுக்குவெட்டின் ஆரையுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் அது பெரிதாம். நிலைக்குத்தான விட்டமொன்றைப் பற்றிக் குழாயானது சீர்க் கோணவேகம் ω வுடன் சுழலும்போது, திரவத்தில் மிகவும் உயர்ந்த புள்ளியானது குழாயில் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலிருநது கோணத்தூரம் 60°யில் இருக்கிறது. பரப்பிழுவை விளைவு களைப் புறக்கணிக்குமிடத்து $a\omega^2 = 2g(1+\sqrt{3})$ என நிறுவுக; இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவாகும்.

நீரின் பரவளைவான சுயாதீனப் பரப்பானது குழாயை P, Q என்னும் புள்ளிகளி லும், வட்டத்தின் மையம் C யூடே செல்கின்ற நிலைக்குத்து நேர்கோட்டை O விலும் சந்திக்க, படம் 12·04 ஐப் பார்க்க. இந்நேர்கோட்டை முறையே M இலும் N இலும் வெட்டுமாறு PM ஐயும் QN ஐயும் OC யிற்குச் செங்குத்தாக வரைக. அப்பொழுது $\widehat{PCM} = 30°$ உம் $\widehat{QCN} = 60°$ உம் ஆகும்; அதாவது

$$PM = \tfrac{1}{2}a\,; \quad QN = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}\,.$$

$$\therefore \quad \frac{3a^2}{4} = QN^2 = \frac{2g}{\omega^2}\,.\,ON \quad \text{உம்}$$

$$\frac{a^2}{4} = PM^2 = \frac{2g}{\omega^2}\,.\,OM \quad \text{உமாகும்.}$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}a^2 = \frac{2g}{\omega^2}\,NM = \frac{2g}{\omega^2}\left[\tfrac{1}{2}a\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}a\right],$$

அதாவது $$a\omega^2 = 2g(1+\sqrt{3}).$$

பேணுயீயின் தேற்றம்.—இயங்கும் பாயியொன்றிலே நிலேத்த புள்ளி யொன்றை ஒன்றன்பின் ஒன்ருகத் தொடர்ந்து அடைகின்ற பாயித் துணிக் கைகள் ஒரே அடர்த்தியும் ஒரே வேகமும் உடையனவாயும் அங்கு அமுக் கம் மாறிலியாயும் இருந்தால், பாயியின் இயக்கம் உறுதியானது எனப் படும். நடைமுறையில் அரிதாய்த்தான் முற்றிலும் நிறைவேற்ற முடி கின்ற இத்தகைய இலட்சிய நிபந்தனைகளில், இயக்கமானது அருவிக் கோடிட்டது எனப்படும்; இயங்கும் பாயியொன்றில் ஒரு துணிக்கையின் உண்மையான பாதையானது **அருவிக்கோடு** என அழைக்கப்படுகின்றது. மாருக் குறுக்குவெட்டுடைய குழாய்களில் எல்லா அருவிக்கோடுகளும் குழாயின் அச்சுக்குச் சமாந்தரமாகும். பொதுவில் அருவிக்கோடுகள் வளைந்திருக்கும்; மேலும், எந்தக்கணத்திலும் அருவிக் கோடொன்றின் எந்தப் புள்ளியிலும் தொடலியானது அப்புள்ளியிலுள்ள இயக்கத்தின் திசையைத் தருமாறு அவ்வருவிக்கோடு அமைந்திருக்கின்றது. திரவத்தில் குழாயொன்றின் வரைப்பாடானது அருகமைந்த அருவிக்கோடுகளால் ஆக்கப்படின் அக்குழாய் பாய்ச்சற் குழாய் எனப்படும்.

இனி, எவ்வாறு அருவிக்கோடொன்று வழியே அமுக்கம் மாறுகின்றது என்பதைப் பேணுயீயின் தேற்றம் உணர்த்துகின்றது; அத்தேற்றத்தைச் சக்திக் காப்புக் கோட்பாட்டினின்றும் பெறமுடியும். படம் 12·05 (a) யில் AA_1 ஆனது ஒடுங்கிய பாய்ச்சற் குழாயொன்றின் அச்சாகுக; மேலும் A, A_1 என்பவற்றில் a, a_1 என்பவை முறையே அவ்வவற்றிற்குரிய செவ்வன் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்புக்கள் ஆகுக. எதேச்சைத் தரவு மட்ட மொன்றிற்கு மேலே A யும் A_1 உம் முறையே z, z_1 என்னும் உயரங் களில் இருக்க. அப்பொழுது கருதப்படுகின்ற குறுக்குவெட்டுக்களிடையே யுள்ள பாயியின் திணிவானது மாறிலியாக இருக்கின்றபடியால், நேர வலகொன்றில் பாயியின் அதே திணிவு குழாயின் செவ்வன் குறுக்கு வெட்டொவ்வொன்றையும் கடக்கும். நேரம் δt யில் a யின் குறுக்கே பாய்கின்ற பாயித் திணிவு δm ஆனது குழாயில் நீளம் δs ஐக் கொள்ளுக; A_1 இல் அதே திணிவு நீளம் δs_1 ஐக் கொள்ளும். சக்திக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி

$(\text{நி.ச}+\text{இ.ச})_A+A$ இல், நேரம் δt யிலே உட்செல்கின்ற திணிவு மீது செய்யப்பட்ட வேலே

$=(\text{நி.ச}+\text{இ.ச})_{A_1}+A_1$ இல் நேரம் δt யிலே வெளியேறுகின்ற திணி வாற் செய்யப்படும் வேலே; இங்கு, பிற்குறிகள் குழாயிற் கருதப்படுகின்ற இரு குறுக்குவெட்டுக்களேச் சுட்டுகின்றன.

எனவே பாயியில் p யும் p_1 உம் முறையான அமுக்கங்கள் எனின்,

$$\delta m\, gz+\tfrac{1}{2}\delta m\, u^2+pa\,\delta s=\delta m\, gz_1+\tfrac{1}{2}\delta m\, u_1{}^2+p_1a_1\delta s_1$$

எனப் பெறுகின்ருேம்.

ஆனால்

$$\delta m = (a\ \delta s)\rho = (a_1\ \delta s_1)\rho\ ;$$

இங்கு ρ பாயியின் அடர்த்தி ஆகும்; அது மாறிலி எனக் கொள்ளப் படுகின்றது.

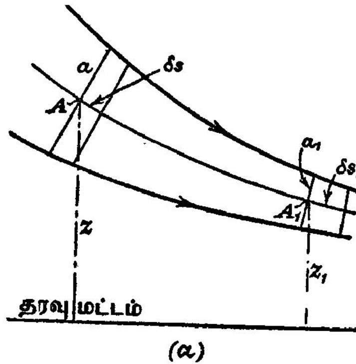
$$\therefore\ \delta m\left(gz + \tfrac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho}\right) = \delta m\left(gz_1 + \tfrac{1}{2}u_1^2 + \frac{p_1}{\rho}\right)\ ;$$

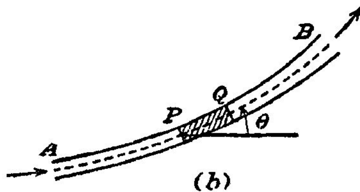
அதாவது ஓர் அருவிக்கோடு வழியே,

$$gz + \tfrac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} = \text{மாறிலி}.$$

இதுவே **பேணுயீயின் தேற்றம்.**

மாற்று நிறுவல்.—AB ஆனது மிக்க ஒடுங்கியதொரு பாய்ச்சற் குழாயாகுக, படம் 12·05 (*b*). P யில் அமுக்கம் p யும், B முகமான வேகம் u வும் ஆகுக ; ஏதேனுமொரு நிலைத்த மாட்டேற்று மட்டத்தைக் குறித்து





படம் 12·05. பேணுயீயின் தேற்றம்.

P யின் உயரம் z ஆகுக. பாய்ச்சற் குழாயிலே, P யிற்கு அயலான புள்ளி Q விலே, மேற்படிக் கணியங்கள் முறையே $p+\delta p$, $u+\delta u$, $z+\delta z$ என்பவை ஆகுக. PQ விலே குழாயின் அச்சானது கிடையுடன் கோணம் θ வை ஆக்குக. P யிலே குழாயின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பு

a யும், பாயியின் (பொதுப்பட ஒரு மாறியான) அடர்த்தி ρ வும் ஆயின், PQ விலுள்ள பாயியைக் குழாய்வழியே செலுத்துகின்ற விசையானது

$$pa-(p+\delta p)a-g\rho a\,(\mathrm{PQ})\text{ சைன் }\theta$$

ஆகும்; இங்கு g புவியீர்ப்புச் செறிவு ஆகும். இது மூலகத்தின் திணிவு, அதன் ஆர்முடுகல் என்பவற்றின் பெருக்கத்துக்குச் சமன். துணிக்கையொன்று P யிலிருந்து Q வரை, ஒரு தூரம் δs, செல்வதற்கான நேரம் δt ஆயின், $u=$ எல் $\dfrac{\delta s}{\delta t}=\dfrac{ds}{dt}$; $\dfrac{du}{dt}$ என்பது ஆர்முடுகல் ஆகும்.

$$\therefore\quad -a\,\delta p-g\rho a\,\delta s\,.\,\frac{\delta z}{\delta s}=\rho a\,\delta s\,.\,\frac{du}{dt}.$$

$$\therefore\quad \rho a\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}+a\,\frac{dp}{ds}+g\rho a\frac{dz}{dt}=0.$$

$$\therefore\quad u\,\delta u+\frac{\delta p}{\rho}+g\,\delta z=0.$$

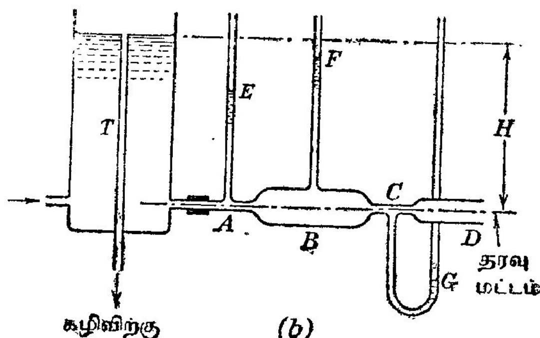
இதைத் தொகையிட்டு

$$\tfrac{1}{2}u^2+\int\frac{dp}{\rho}+gz=\text{மாறிலி}$$

எனப் பெறுகிறோம்; ρ ஆனது மாறிலியாக இருந்தால் மட்டுமே

$$\tfrac{1}{2}u^2+\frac{p}{\rho}+gz=\text{மாறிலி}$$

எனப் பெறலாம்.



படம் 12·06. பேனுயியின் தேற்றத்திற்கான பரிசோதனை எடுத்துக்காட்டு.

பேனுயியின் தேற்றத்தை எடுத்துக்காட்டும் பரிசோதனை.—படம் 12·06 இல் T ஒரு பெரிய தாங்கியாகும்; அதில் அங்கு காட்டியுள்ளவாறு மாரு நீர்

உயரமொன்று நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கின்றது. தாங்கியிலிருந்து நீரானது குறுகிய, கிடையான, மாறுகின்ற குறுக்குவெட்டு உடைய குழாயொன்று வழியே பாய்கின்றது ; அக்குழாயின் வெவ்வேறான இடங்கள் **A, B, C** என்பவற்றிலே குழாய்கள் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றன. முதன்மைப் பாய்ச்சற் குழாயானது மற்றெல்லா இடங்களைக் காட்டிலும் **C** யிலேயே மிக ஒடுங்கியிருக்கின்றது ; அவ்விடத்திற் பொருத்தப்பட்டுள்ள குழாய்க்கு **U** வடிவம் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. குழாய்முனை **D** ஆனது மூடப் பட்டிருக்கும்போது, **T** யில் இருக்கின்ற அதே நீர்மட்டத்திற்கு எல்லா மூன்று குழாய்களிலும் நீர் ஏறுகின்றது; ஆனால் குழாயில் நீர் பாயு மாறு **D** திறந்து வைக்கப்பட்டால், அங்கே காட்டியுள்ளவாறு **A, B, C** என்பவற்றிலுள்ள குழாய்களில் நீர்ப் பரப்புக்கள் முறையே **E, F, G** ஆகிய வெவ்வேறான மட்டங்களைக் கொண்டிருக்கும். குழாயச்சானது மட்டமாக எடுக்கப்பட்டால், அப்பொழுது

$$\frac{p_a}{\rho}+\tfrac{1}{2}u_a^2=\frac{p_b}{\rho}+\tfrac{1}{2}u_b^2=\frac{p_c}{\rho}+\tfrac{1}{2}u_c^2\ ;$$

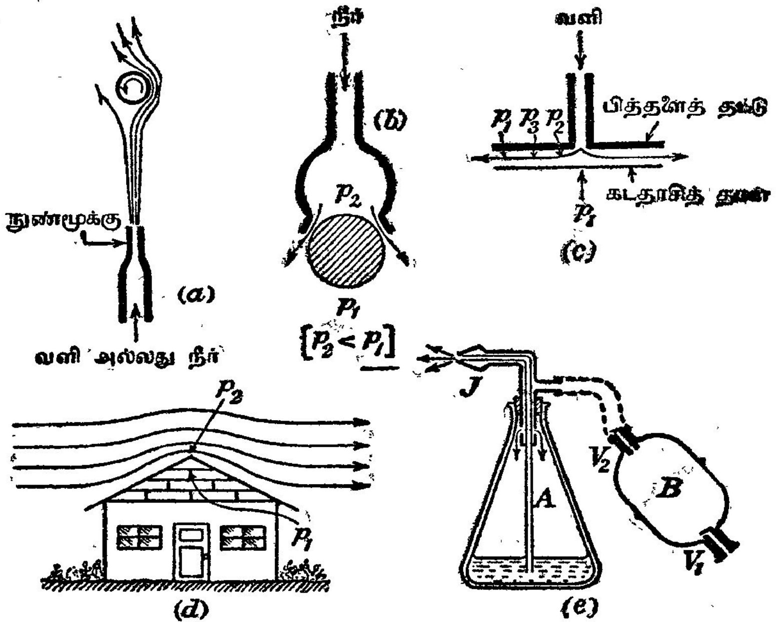
மேலும், $u_a > u_b$ என்பதற்கிணங்கக் குறுக்கு வெட்டுக்கள் இருக்குமாயின், அப்பொழுது $p_a < p_b$; **C** யில் $u_c \gg u_d$ ஆனபடியால் p_c ஆனது வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் காட்டிலும் சிறிதாகும்.

பாய்ச்சல் வேகம் உயர்வாயிருக்குமிடத்து அமுக்கம் சிறிதாயிருக்கும் என் பதைக் காட்டும்பொருட்டு, ஒஸ்பேண் றெனல்ஸ் என்பார் பரிசோதனை ஒன்றைத் திட்டமிட்டுள்ளார். அப்பரிசோதனையில் கூம்புகின்ற குழாயொன்று பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. குழாயின் நுழைவழி விட்டம் கிட்டத்தட்ட 2 சமீ. உம் அதன் வெளிவழிக்கு அணித்தாய் விட்டம் கிட்டத்தட்ட 0·1 சமீ. உம் ஆகும். உயரமுக்கச் செலுத்தலாற் குழாயில் நீர் பாய்ந்த போது பிந்திய இடத்திலே பாய்ச்சல் வேகமானது அவ்வளவு உயர்ந்த தாய் இருந்தபடியால் அந்நீர் கொதித்துச் சீறிச் சத்தமிடுதலுக்கு வேண்டிய அத்துணை சிறிய அளவிற்கு அமுக்கம் குறைந்துவிட்டது. (அப்பொழுது கொதிநிலை உண்மையில் 100° ச. அன்று.)

பேணுயீயின் தேற்றத்துக்கு அதிகப்படியான எடுத்துக்காட்டுக்கள்.— வளியருவியொன்றிலே அல்லது கூர்நுனிக் குழாயொன்றிலிருந்து வெளி யேறுகின்ற நீரிலே சிறு "பிங் பாங்" பந்தொன்றைப் புகுத்தினல், அப்பந்தானது படம் 12·07 (*a*) யிற் காட்டியுள்ளவாறு நிலைத்த தான மொன்றை ஏறி அடைந்து, அத்தானத்தில் அது கறங்கிக்கொண்டும் சுழன்று கொண்டும் விழாது இருக்கும். வளியருவியை வெளியேற்றுகின்ற கூர்நுனி நிலைக்குத்தாக இராதபோதிலும் அல்லது அது மேசைக்குக் கீழேயிருக்கிறபோதிலும் மேற்படி தோற்றப்பாடானது பெரிதும் கவர்ச்சி யுள்ளது ; பிந்திய எடுத்துக்காட்டில் பந்தானது யாதொரு கட்புலனுகும் ஆதாரமுமின்றி மிதக்கின்றது. பந்து ஒரு பக்கமாகப் பெயர நேரிடின் அதனது வலக்கைப் பக்கத்திலுள்ள பாயியானது அதைக் கறங்கச்

செய்கின்றது ; பாயியின் வேகம் உயர்வானதால் அதனுள்ளே அமுக்கம் தாழ்ந்திருக்கும். எனவே இடதுகைப் பக்கத்தில் அமுக்கம் உயர்வாயிருக்கிறபடியால் அருவிக்குப் பந்து மீளுமாறு செய்யப்படுகிறது.

படம் 12·07 (b) யில் ஒரு தலைகீழ் முள்ளிப் புனலும் அதனது வாயோடு கிட்டத்தட்டப் பொருந்துகின்ற பந்தும் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. புனலின் வாய்க்கு அணித்தாயுள்ள பந்தின் பாகமீது விரைந்து செல்கின்ற நீரருவியானது பாயியில் தாழமுக்கத்தை இயற்றுகிறது ; எனவே வளிமண்டல அமுக்கத்தால் ஆகின்ற உதைப்பானது பந்தை நிலைப்படுத்துகிறது.



படம் 12·07. பேணுயியின் தேற்றத்துக்கு அதிகப்படியான எடுத்துக்காட்டுக்கள்.

படம் 12·07 (c) பித்தளைத் தட்டொன்றையும் அதற்குக் கீழான கடதாசித் தாளொன்றையும் காட்டுகின்றது ; தட்டின் மையத்தில் குழாயொன்று பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. அங்கே காட்டியுள்ளவாறு வளியருவியொன்று புறமுகமாகப் பாயுமாயின், தட்டின் மையத்துக்கு அணித்தாய் அவ்வாயுவானது மிக விரைவாக அசையும் ; எனவே, மையத்திற்குக் கிட்ட அமுக்கம் மிகத் தாழ்ந்ததாயிருக்கும் ; ஓரத்தில் அமுக்கம் கிட்டத்தட்ட வளிமண்டல அமுக்கமாக இருக்கின்றபடியால் கடதாசித்தாள் விழாது இருக்கும்.

அதேபோல், தக்க தாஙகு நூல்களாலே தொஙக விடப்பட்டிருக்கின்ற இரு மெல்லிய அடடைத துண்டுகளுக்கிடையே வைக்கப்பட்டிருக்கின்ற ஒரு தாரையிலிருந்து வளியருவியொன்று வெளிப்படுமாயின், அத்தாரையினது நுனியின அயலில் அமுககம் தாழ்ந்து இருப்பதால் அட்டைத் துண்டுகள் ஒன்றையொன்று நோக்குமுகமாக அசையும்.

புயலொன்றின்போது, சிலவேளைகளில் வீடொன்றின கூரையொழிந்த பாகங்களுக்குச் சேதமின்றிக் கூரை மட்டுமே தூக்கி வீசப்படுகிறது. காற்று வீசும்பொழுது, கூரைக்கு மேலே அமுக்கம் (p_2) தாழ்த்தப்படுகிறது, படம் 12·07 (d) ; அமுக்கம் கருதத்தக்க அளவு குறைக்கப்பட்டதும், உறிஞ்சப் பட்டதுபோல் கூரையானது உயர்த்தி எடுக்கப்படுகிறது.

படம் 12·07 (e) ஆனது வாசனைபபொருள் திவலையாக்கி அல்லது அணு வாக்கியொன்றைக் காட்டுகிறது. குமிழ் B யானது அழுத்தப்படும்போது தாரை J யினின்று உயர்வேகத்துடன வளி வெளியேறுகின்றபடியால், அவ்விடத்தில் அமுக்கம் தாழ்த்தப்படுகிறது. திரவத்திற்கு மேலேயும் B யிலும் அமுக்கம் சமமானபடியால், நிலைக்குத்தான குழாய் A யிலே திரவம் ஏறி நுண்திவலையாக விசிறப்படுகிறது. வால்வுகள் V_1, V_2 எனபவை B யுட் புகுகின்ற வளிப் பாய்ச்சலையும் அதிலிருந்து வெளியேறு கினறதையும் ஆளுகின்றன.

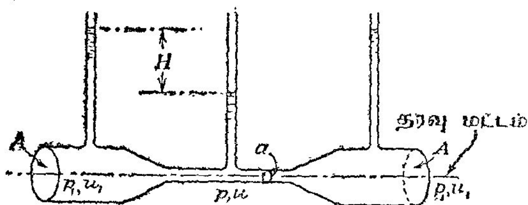
வெந்தூரிமானி.—வெநதூரிமானி எனப்படுவதிலும் பேணுயீயினது தேற்றத்தின செய்முறைப் பிரயோகமொன்று காணபபடுகின்றது ; அது, ஒரு குழாயூடே நீரின் பாய்ச்சல் வீதத்தை, அதாவது அலகு நேர மொனறிற் பாயும கனவளவை, அளக்கும் ஒரு கருவியாகும். 1887 இல் கிளமன்ஸ் ஹேஷெல் எனபவரால் திட்டமிடப்பட்ட இக்கருவியானது கூம்புக் குழாய்களூடே பாய்கினற நீரைப் பற்றிப் பதினெட்டாம் நூற்றுண்டில் பரிசோதனைகள் நடாத்தியுள்ள இத்தாலியரொருவரின் பெயரைக் கொண் டுள்ளது. "தொண்டை" எனப்படும் சிறு துண்டு உருளைக்குழாயால் ஒன்றேடொன்று தொடுககபபட்டிருக்கின்ற இரு முண்டித்த குழாய்களே அதனது எளிமைமிகக அமைப்பாகும். நடைமுறையில் இம்மானி ஒரு குழாய்வழியிலே கிடைநிலையில் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றது ; கூம்பின் அடித்துணடொவ்வொன்றின் பெரிதான நுனியின் விட்டமும் குழாயின் விட்டததிற்குச் சமன ஆகும். படம் 12·08 ஒரு வெந்தூரிமானியின் செயலாற்றும் நிலையை எடுத்துககாட்டுகிறது. மானியூடே நீர் பாயுங்கால், தொண்டையில் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு குறைதலால் அங்கு அதன் வேகம் ஓர் உயர்வு ஆகும் ; எனவே அதே இடத்தில் அமுக்கம் ஒடுங்கும். இவ்வமுக்க ஒடுக்கமானது விளக்கப்படத்தில் காட்டியுள்ள நீர்மட்ட வித்தி யாசம் H ஆல் அளக்கப்படுகிறது.

a என்பது தொண்டையின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவும், A என்பது பிரதான குழாய்வழியின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவும் ஆகுக. அப்பொ ழுது தரவு மட்டமானது மானியின் அச்சினூடே செல்லுமாறல் உராய்வைப்

புறக்கணிக்குமிடத்து,

$$0+\tfrac{1}{2}u_1^2+\frac{p_1}{\rho}=0+\tfrac{1}{2}u^2+\frac{p}{\rho}$$

எனப் பெறுவோம் ; இங்கு பிற்குறிகள் A யிலுள்ள வெட்டுக் குறிக்கின்றன.



படம் 12·08. ஒரு வெந்தூரிமானியின் கோட்பாடு.

செக்கனிலே பாய்கின்ற நீரின் கனவளவு Q ஆகுக ; அப்பொழுது

$$\frac{Q}{A}=u_1 \text{ உம் } \frac{Q}{a}=u \text{ வும் ஆகும்.}$$

மேலும் $$p_1-p=g\rho H\,;$$

எனவே $$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{A^2}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{a^2}-gH,$$

அதாவது $$Q=\frac{aA}{(A^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}\,(2gH)^{\frac{1}{2}}.$$

மானியில் உராய்வு, பிசுக்கு விசைகள், சுரியலியக்கங்கள் தோற்றக்கூடும் ; எனவே உண்மையான வெளிப்பாயம் மேற்படி அறிமுறைப் பெறுமானத்தைக் காட்டிலும் சற்றுச் சிறிதாகவே இருக்கும் ; இதுகாரணமாக நடைமுறையில்,

$$Q=\frac{\kappa aA}{(A^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot(2gH)^{\frac{1}{2}}\,;$$

இங்கு κ தரப்பட்ட எந்த மானிக்குமுரிய ஒரு மாறிலியாகும் ; அதைப் பரிசோதனையால் துணிதல் வேண்டும்.

பிற்றோ குழாய்.—இடையான அருவிக்கோடுகளிற் பாய்கின்ற ஒரு பாயியின் பாய்ச்சலைக் கருதுமிடத்து அவ்வருவிக்கோடுகள் ஒன்றைப் பேணுயியின் சமன்பாட்டிலுள்ள உயரம் z ஐ அளத்தற்கான தரவு மட்டமெனக் கொள்ளல் வசதியாம். அப்பொழுது

$$p+\tfrac{1}{2}\rho u^2=\text{மாறிலி}$$

என நாம் எழுதலாம் ; இங்குள்ள குறியீடுகள் அவ்வவற்றின் வழக்கமான கருத்துக்கள் உடையன.

இனி, இச்சமன்பாட்டில p ஆனது அசையும் பாயியில் உண்மையாக இருக்கின்ற அமுக்கத்தையே எடுத்துக்காட்டுகிறது என்பது குறித்தற்பாலது : அது **நிலையியலமுக்கம்** எனப்படும். p யிறகுப் பெறுமானமொன்றைப் பெறும்பொருட்டுப் பாயியின் இயக்கத்தை எவ்வகையிலேனும் பாதிக்காமல் அப் பாயியில் இருக்கின்ற பரப்பொன்றின் அலகுப்பரப்புமீது தாக்குகின்ற விசையை அளத்தல் வேண்டற்பாலது. பாயியில் விறைப்பான பரப்பொன்று வைக்கப்பட்டிருந்தால் ஒன்றில் (a) அப்பரப்பானது அருவிக கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாக இருத்தல் வேண்டும், அல்லது (b) அதற்கும் அதற்கு நெருங்கியுள்ள பாயிக்கும் இடையே தொடர்பியக்கம் இராதவண்ணம் அப்பரப்பானது பாயியில் அசைதல் வேண்டும் ; இல்லாவிடில், அப்பரப் பானது பாய்ச்சலின் திசையையும் அதன் வேகத்தையும் மாற்றிவிடும். படம் 12·06 இலும் வேறு இடங்களிலும் இருப்பதுபோல, பாய்ச்சற் குழாயொன்றுடன் பக்கக் குழாய்களைத் தொடுத்து வைத்தால் மேற்படி இரு நிபந்தனைகளுள் முதலாவது சொல்லாமலே நிறைவேற்றப்பட்டுவிடும்.

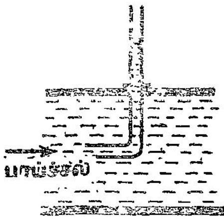
அசையுந் திரவமொன்றிலே, அதனது நுழைவழி எதிர்நோக்கி வருகின்ற அருவியை நோக்குமுகமாகச் சிறு குழாயொன்று புகுத்தப்பட்டிருந்தால், அக்குழாயிலே படம் 12·09 (a) யிற காட்டியுள்ளவாறு திரவம் ஏறும் எனப் பிற்றோ என்பார் 1730 இல் அவதானித்துள்ளார் ; அக்குழாயானது இப்பொழுது **பிற்றோ குழாய்** என அழைக்கப்படுகிறது. இதனை விளக்கும் பொருட்டுப் பிற்றோ குழாயொன்றின் அமிழ்த்தியுள்ள முனையின் உருப் பெருக்கத்தைப் படம் 12·09 (b) ஆனது எடுத்துக்காட்டுகின்றது. குழாயி லுள்ள திரவமானது ஓய்வாயிருக்கின்றது ; எனவே குழாயின் மேற்படி முனைக்கு அயலாயுள்ள புள்ளி B யிலே ஒரு கிடையான அருவிக்கோடு வழியே பாய்ச்சல் வேகத்தின் கூறானது பூச்சியமாகும். எனவே (z என் னும் உறுப்பைப் புறக்கணிக்குமிடத்து)

$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho u^2 = p_B + 0$$

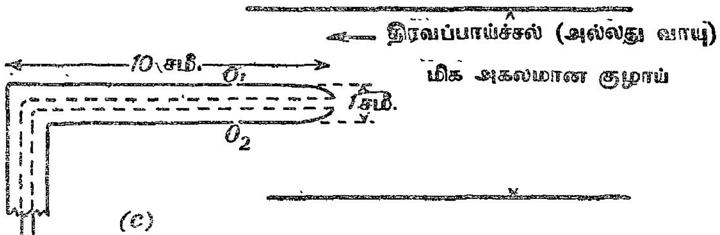
எனப் பேணுயீயின தேற்றம் தருகின்றது ; எனவே, B யிலுள்ள நிலையியல அமுக்கமானது இயக்கவியல அமுக்கம் எனப்படும் $p_A + \frac{1}{2}\rho u^2$ ஐத் தருகிறது ; இவ்விரு அமுக்கங்களின வித்தியாசமானது $\frac{1}{2}\rho u^2$ ஐத் தரும் ; எனவே, ρ வைத் தெரிந்திருந்தால் u இற்குப் பெறுமானங் காணலாம். இப்புள்ளி B **தங்கற் புள்ளி** எனப்படும். வாயுக் களுக்குக்கூட 50 மீ. செக. $^{-1}$ வரையுள்ள வேகங்களுக்கு ρ வை மாறிலி யாகக் கருதலாம் எனப் பரிசோதனைகள் காட்டுகின்றன.

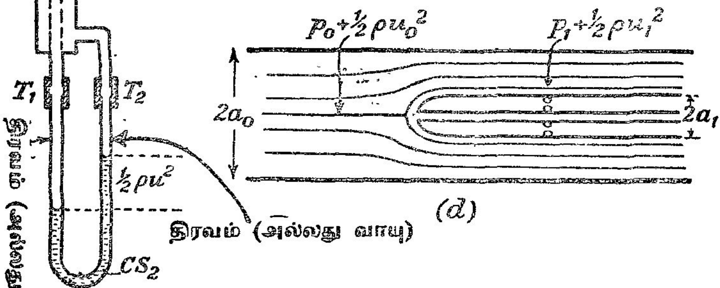
மேற்படி இரு அமுக்கங்களுக்கிடையேயுள்ள வித்தியாசத்தைத் துணிதற் பொருட்டுப் **பிற்றோ நிலையியற் குழாய்** எனப்படுவது திட்டமிட்டமைக்கப் பட்டுள்ளது. அதன் அபிவிருத்தியின் முதலாவது கட்டத்தில் குழாய் கூம்புருவான முனையொன்றைக் கொண்டிருந்தது ; ஆனால் அம்முனை எளிதிற் சேதமுறக்கூடுமாதலால் குழாயின் பிற்காலத்தைய மாதிரிகளில் அதற்கு அரைக்கோளவடிவம் அளிக்கப்பட்டது ; குழாயின் மூக்கு நீள்

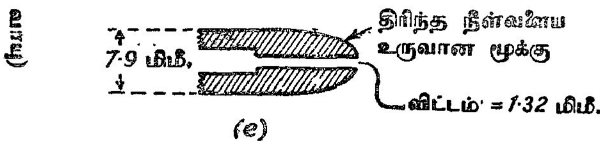
வளையவுரு உடையதாயிருத்தல் வேண்டும் எனத் தே. பௌ. ஆ. இன்று வற்புறுத்துகின்றது. படம் 12·09 (c) யில் காட்டியுள்ள முழுப் பிற்றோ நிலையியற் குழாயின் செம்பாலான உட்குழாயே சரியான பிற்றோ குழாயாகும். நிலையியற் குழாய் பித்தளையாலான வெளியுறையாகும். அவ்வெளியுறையிலே, மூக்குக்கு அணித்தாக, O_1, O_2 எனபவற்றைப் போன்ற ஏழு அல்லது எட்டுச் சிறு துளைகள் ஆக்கப்பட்டிருக்கின்றன.











படம் 12·09. பிற்றோ நிலையியற் குழாயின் கோட்பாடுகளும் அபிவிருத்தியும்.

குழாய்கள் T_1, T_2 எனபன உணர்ச்சிமிக்க வாயுவமுக்கமானியொன றுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன ; எனவே $\frac{1}{2}\rho u^2$ இறகுப் பெறுமான மொன்றை எளிதாகப் பெறமுடிகின்றது.

இவ்வண்ணம் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்ற பிற்றோ நிலையியற குழாய், வளியியககவியற் பிரச்சினைகளை ஆராய்தல், கருத்தாக்கியொன்றைக் குளிரச் செய்வதற்கான வாயுவோட்டங்களை அளத்தல் என்பவற்றிலும், வாயுப் பாய்ச்சலோடு சம்பநதப்பட்ட ஆலைகளில் அதிகமாகவும் பயன்படுததப்படு கின்றது. பிற்றோ குழாயின் உண்மையான துவாரம் 0·2 மிமீ. இலிருந்து 2 மிமீ. வரையுள்ள விட்டமுடையதாயிருக்கலாம் ; ஏனெனில் அவ்வீச்சு முற்றிலும் அதனது அளவீடுகள் மாறுது. இக்கருவியைப் பயன் படுத்தும்போது மூக்கின அச்சு திட்டமாகக் கிடையாயிருத்தல் வேண்டும்.

இத்தகைய ஒரு குழாயைத் திரவஙகளின் பாய்ச்சலை அளக்கும்போது பயன்படுத்துமிடத்துப் பல தொல்லைகள் எழுகின்றன. முதலாவதாகத் தொகுதியில் வளிக்குமிழிகள் இல்லை என ஒருபோதும் உறுதியாகக் கூறவியலாது. இரண்டாவதாகக் குழாயானது திரவத்தைக் குழப்பும் ; ஒபபிட்டுப பார்க்கில், திரவம் பாயும் குழாயின் விட்டம் சிறிதாயிருக்கும் போது அக்குழப்பம் பெரிதாகும். எனவே, பிறறோ நிலையியற குழாய் இருப்பதால் குழாயின் பலிதக் குறுக்குவெட்டு எஙகே குறைக்கப்பட்டி ருக்கிறதோ அங்கே திரவத்தின பாய்ச்சல வேகம் அதிகமாயிருக்கும் எனப் படம் 12·09 (d) யிலிருந்து அறியக் கிடக்கின்றது ; குழாய்களின் தெரிந்த விட்டங்களிலிருந்து அவ்விரு வேகங்களின விகிதத்தை முதலண்ணளவாகக் கணிக்கலாம். இனி இஙகு காட்டியுள்ள குறிப்பீட்டில அளக்கப்பட்ட அமுக்க வித்தியாசம் P யை

$$p_0+\tfrac{1}{2}\rho u_0{}^2-(p_1+g\rho z_0)=\mathrm{P}$$

தருகிறது ; இங்கு $z_0 \simeq (a_0-a_1)$ ஆகும் ; ஆனுல் குழாயச்சு வழியே தொடஙகிக் கிடைத் தளமொன்றில் அமைந்திருக்கின்ற அருவிக் கோட்டிற் குப் பேணுயீயின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்க முடியுமாதலால்

$$p_0+\tfrac{1}{2}\rho u_0{}^2=p_1+g\rho z_0+\tfrac{1}{2}\rho u_1{}^2.$$

எனவே

$$\mathrm{P}=\tfrac{1}{2}\rho u_1{}^2=\tfrac{1}{2}\rho u_0{}^2\left(\frac{a_0{}^2}{a_0{}^2-a_1{}^2}\right)\ ;$$

இஙகு $2a_0$ உம் $2a_1$ உம் குழாய்களின் பொருத்தமான விட்டங்கள் ஆகும்.

திரவத்திலுள்ள சிறு சக்தி நட்டங்களையிட்டு

அளக்கப்பட்ட அமுக்க வித்தியாசம் $=\frac{1}{2}\rho u^2(1-f)$

எனப் பொதுவாக எழுதுதல் வேண்டியிருப்பது பிறிதொரு தொல் லையாகும். இங்கு f என்பது நேர்ப் பெறுமானஙகளையும் மறைப் பெறுமானங்களையும் கொள்ளுமெனினும் அது பூச்சியத்தையே நாடும். $(1-f)$ என்பது **அளவுகோடிடற் காரணி** எனப்படும் ; வாயுக்களுக்கு

$f\simeq 0\cdot003$. இக்குழாய்கள முதனமுதலாகத் திட்டமிடப்பட்டபோது, இட்டத்தட்ட 30 அடி விட்டமுடைய சுழலுந் தண்டொன்றில் சேர்த்திக் குழாயை ஏற்றி அளவுகோடிடற் காரணியானது துணியப்பட்டது ; மூக்கின் கதியைக் கணித்துப் பிற்றே நிலையியற் குழாயிலிருந்து பெற்றதுடன் ஒப்பிட்டு $(1-f)$ இற்குப் பெறுமானம் காணப்பட்டது.

தே. பௌ. ஆ. யின சமீப காலத்திய அறிக்கையொன்றில் (1955) சோல்ற்றர் என்பாரால் சரியாக நீள்வளையவுரு அல்லாத மூக்கைக் கொண்ட பிற்றே நிலையியற் குழாயே ஆதரிக்கப்பட்டிருக்கிறது, படம் 12·09 (e) யைப பாரக்க ; அத்தகைய மூககொன்று பொருத்தப்பட்ட குழாயின் அச்சு, கிடைநிலையிலிருந்து 13° விலகியிருந்தபோதிலும்கூட f ஆனது நடைமுறை யில் இட்டத்தட்டப் புறக்கணிக்கததககதாகவும் கிடைத்த பேறுகளிலுள்ள வழு ஒருசத வீதத்திற்குக் குறைந்ததாகவும் காணப்பட்டன. கடைசியாகக் கிட்டத்தட்ட 50 மீ. செக்.$^{-1}$ கதியுடன் அசையும் வளியுடன் 2 சமீ. நீர்ச் சமவலுவுடைய வேறறுமையமுக்கம் ஆக்கப்படுகிறது என்பது குறித் தற்பாலது ; கதிகள மிகச் சிறிதாயிருக்கும்போது சாற்றக் (Chattock) அமுக்கமானியொன்ருல் அமுக்க வித்தியாசத்தை அளததல் வேண்டும்.

ஒரு குழாயில் பாயியொன்றின் இயக்கத்தை எதிர்க்கின்ற தடைகள் .— ஒரு குழாய் வழியில் பாயியொன்றைப் பாயுமாறு செய்தால், அங்கு இயக்கததைத் தடுக்கும் சில தடைகள் உண்டாக்கப்பட்டு, அவற்றை வெல்லும் பொருட்டுச் சக்தி செலவாகின்றது. உராய்வு, குழாயின விட்டத் தில் தொடர்ச்சியற்ற சுருக்கங்கள் அல்லது பெருக்கங்கள், வளைவுகளைச் சுற்றிய பாய்ச்சல், வாலவுகளைத தொடுத்தல் எனபவை இச்சக்திச் செலவுக் குச் சில காரணங்களெனக கருதுதல வேணடும். சகதிநட்டம் எனக் கூறுது "அமுக்கவுயரநட்டம்" எனக் கூறுவதே வசதிமிக்கது என மேலே காணப்படும்.

ஒரு மாறுவமுக்கத் தாங்கியிலிருந்து நீண்ட ஒடுங்கிய குழாய் AB யினூடாகத் திரவம் (நீர்) பாய்கின்றது எனக் கொள்க, படம 12·10; குழாயின் விட்டம் சீரற்றும், அதன முனை B வளிமண்டலமுகமாகத் திறந்ததாகவும் வளிமண்டல அமுக்கம் P ஆகவும் இருக்கின்றன. இயக்க மானது அருவிககோட்டினது என்றும் எவவகையான தடை அங்கு இலலையென்றும் கொளவது சரியாயின், அப்பொழுது S இலும் B யிலும் பாய்ச்சலுக்குப் பேணுயீயின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்தால்

$$gz_S+\tfrac{1}{2}u_S^2+\frac{P}{\rho}=gz_B+\tfrac{1}{2}u_B^2+\frac{P}{\rho}$$

எனப் பெறுகிறேம் ; மேலும், $u_S\to 0$ ஆதலின

$$gz_S=gz_B+\tfrac{1}{2}u_B^2,$$

அல்லது $$u_B=\sqrt{2g(z_S-z_B)}=\sqrt{2gH}\,;$$

இங்கு $$H=z_S-z_B.$$

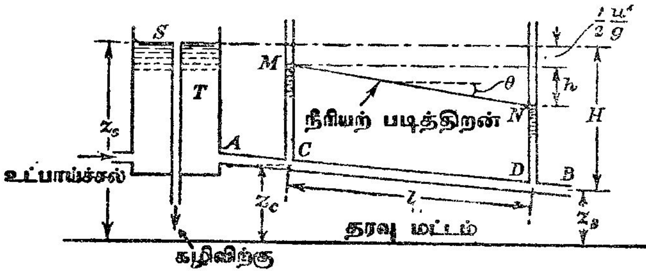
எனவே, இவ்வடிப்படையில் B யிலுள்ள திரவத்திற்குச் சக்தியூட்டுவதற்கு முழுத் திரவவுயரம் H உம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. இருந்தாலும் பரிசோதனையின்படி நீரின் இடை வேகம் u ஆனது u_B ஐக் காட்டிலும் குறைவு; எனவே திரவததின் அலகுத் திணிவிற்குச் சக்திநட்டம்

$$\tfrac{1}{2}(u_B{}^2 - u^2) = gH - \tfrac{1}{2}u^2$$

$$= g\bar{h} \text{ என்க ; } \left[\text{இங்கு } \bar{h} = H - \frac{u^2}{2g}.\right]$$

$\bar{h}$ என்னும் கணியமானது குழாய் வழியேயுள்ள **முழு அமுக்கவுயர நட்டம்** எனப்படும்; அதில் மேற்படி சக்திச் செலவுக்குக் காரணமாயிருக்கின்ற யாவும் அடங்கியிருக்கின்றன.

உராய்வால் அமுக்கவுயர நட்டம்.—குழாய் வழி AB யுடன் இரு நிலைக்குத்தான குழாய்கள் C, D என்பன பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றன எனவும் அக்குழாய்களின் கீழ் முனைகள் உட்சுவருடன் மட்டமாக இருக்கின்றன எனவும் கொள்க, படம் 12·10. B யானது அடைக்கப்பட்டிருந்தால் திரவப்பரப்பு S இன் மட்டத்தை அதன் பரப்பு அடையும்வரை ஒவ்வொரு குழாயிலும் திரவம் ஏறும்.



படம் 12·10. ஒரு குழாயிலே திரவப் பாய்ச்சலால் ஆகின்ற "அமுக்கவுயர நட்டம்".

மேலும், குழாயின் எந்தக் குறுக்கு வெட்டிலும் சராசரி வேகம் u வாயிருக்கும் வண்ணம் B யிலுள்ள ஒரு வால்வைச் செப்பஞ்செய்தால், இயக்கத்துக்குத் தடையிராதபோது, இரு குழாய்களிலும் ஒரே மட்டத்துக்குத் திரவம் ஏறும்; ஆனல் அம்மட்டமானது தாங்கியிலுள்ள மட்டத்தைக் காட்டிலும் $\frac{1}{2}\frac{u^2}{g}$ இற்குச் சமமான உயரம் குறைந்ததாயிருக்கும். இதை நிறுவும் பொருட்டு

$$gz_c + \tfrac{1}{2}u^2 + \frac{P + g\rho MC}{\rho} = \text{மாறிலி} = gz_s + 0 + \frac{P}{\rho}$$

என்பதைப் பேணுயீயின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்துப் பெறுகின்ருேம்.

$$\therefore \quad (z_s - \overline{z_c + MC}) = \tfrac{1}{2}\frac{u^2}{g}.$$

எனவே, C (அல்லது AB யின் வேறெந்தப் புள்ளி) இற்கு மேலேயுள்ள திரவ மட்டமானது தாங்கியிலுள்ளதைக் காட்டிலும் $\frac{1}{2}\frac{u^2}{g}$ அளவால் உயரம் குறைந்ததாயிருத்தல் வேண்டும். ஆனால், இது அவ்வாறன்று, D இற்கு மேலேயுளள திரவப் பரப்பின் மட்டமானது C இற்கு மேலேயுள்ளதின் மட்டத்தைக் குறித்துத் தாழ்ந்திருக்கின்றது எனப் பரிசோதனை காட்டுகின்றது. எனவே, குழாய் வழியே அமுக்கவுயர நட்டமொன்று உளது. குழாய் சீராக இருக்குமிடத்து அமுக்கங்கள் அளக்கப்படுகின்ற குறுக்கு வெட்டுக்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம் l இற்கு அமுக்கவுயரநட்டம் h நேர்விகித சமனாகும்.

நீரியற் படித்திறனும் மாயச் சரிவும்.—குழாய்களை C, D யிலுள்ள திரவ நிரல்களின் உச்சிகளைத் தொடுக்கும் நேர்கோடு MN ஆனது **நீரியற் படித்திறன்** எனவும், தரவு மட்டத்துடன் MN ஆக்கும் கோணம் θ வின் தான்சன் **நீரியற் படித்திறனின் சரிவு** அல்லது **மாயச்சரிவு** α எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. நடைமுறையில், சரிவு சிறிதாயிருக்கிறபடியால் அதைச் சைன் θ வினால் அளக்கலாம் ; எனவே

$$\alpha = \text{சைன்}\ \theta = \frac{h}{l}.$$

குழாய்களில் நீரின் பாய்ச்சல் பற்றி றெனல்சின் பரிசோதனைகள்.—ஒரு குழாயிலே நீர் பாயும்போது உராய்வால் உண்டாகின்ற அமுக்கவுயர நட்டத்தைப் பற்றி 1883 இல் ஒஸ்பேன் றெனல்ஸ் என்பார் ஆராய்ச்சிகள் நடாத்தினார் ; அவற்றின் முதன்மையையிட்டு அவ்வாராய்ச்சிகள் சிறப்பு வாய்ந்தவை. அவரது ஆய்கருவியின் அடிப்படைகள் படம் 12·11 இல் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. 16 அடி நீளமுடைய கிடையான குழாய் AB, முதனீர்க்குழாயுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது; தொகுதியில் முதற் குழாய்க்கும் பரிசோதனைக் குழாய்க்கும் இடையேயுள்ள பகுதியில், தக்க ஓர் ஒழுங்காக்கியைப் புகுத்தி நீரின் பாய்ச்சல் ஆளப்படுகிறது.

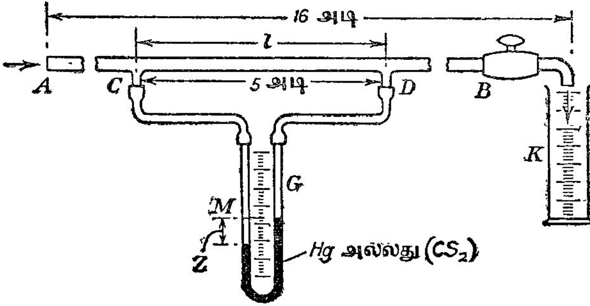
பரிசோதனைக் குழாயின் முனை B இற்கு அணித்தாய், 5 அடி இடைவெளியுடைய, இரு புள்ளிகள் C, D யில் இரு சிறு துளைகள் ஆக்கப்பட்டு, அப் புள்ளிகளில் குழாயுடன் சிறு குழாய்கள் பற்றுச் பிடிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. கண்ணாடியால் ஆக்கப்பட்டுக் காபனிருசல்பைட்டு (அல்லது உயர் அமுக்கவுயர நட்டத்திற்கு இரசம்) கொண்டிருக்கின்ற இறக்கிமானி G உடன் மேற்படிக் குழாய்கள் இந்தியறப்பர்க் குழாயால் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

திரவ இடைமுகங்களின் சிறு மட்ட வித்தியாசங்களுக்குச் சிற்றுயரமானியொன்று பயன்படுத்தப்படுகிறது ; மறுபடி சமீ. முதலியவற்றில், அளவிடைகளால் உயரம் Z ஐத் துணியலாம். ρ_0, மானித் திரவத்தின் அடர்த்தியும், ρ நீரினதும் ஆயின், அப்பொழுது மட்டம் M இலுள்ள நீரில் அமுக்கம் p ஆனால், மற்றைக் குழாயில் அதே மட்டத்தில் அமுக்கம்

$p-g\rho h$ இருக்கும் ; இங்கு h ஆனது CD வழியேயுள்ள முழுவமுக்கவுயர நட்டமாகும் ; எனவே

$$p+g\rho Z=(p-g\rho h)+g\rho_0 Z,$$

அல்லது
$$h=Z\left(\frac{\rho_0}{\rho}-1\right).$$



படம் 12·11. ஒரு குழாயில் நீரின் பாய்ச்சல் பற்றி றெனல்சின் பரிசோதனை.

குழாயின் எந்தச் செவ்வன் குறுக்குவெட்டிலும் நீரின் சராசரி வேகம்

$$u=\frac{\text{செக்கனில் செலுத்தியுள்ள நீரின் கனவளவு}}{\text{குழாயின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு}}.$$

α (அதாவது hl^{-1}), u ஆகியவற்றின் ஒத்த பெறுமானங்களைக் குறித்தால் படம் 12·12 (a) யில் எடுத்துக் காட்டியுள்ள வளையி போன்றதொன்று கிடைக்கின்றது. இவ்வளையியின் பாகம் OG ஒரு நேர்கோடாகும் ; அதற்கு

$$\alpha=\kappa_1 u$$

ஆகும் ; இங்கு κ_1, அதன் சரிவு ஆகும். பாகம் GJ தொடக்கத்தில் சற்று ஒழுங்கற்றது ; ஆனால் J ஐ நோக்கும் பாகமானது

$$\alpha=\kappa_2 u^n$$

என்னும் விதிப்படி அமைந்திருக்கிறது ; இங்கு κ_2, n என்பன மாறிலிகள். n என்னும் மாறிலியைத் துணியும்பொருட்டு மேற்படி சமன்பாட்டை

$$\text{மட}\ \alpha=\text{மட}\ \kappa_2+n\ \text{மட}\ u$$

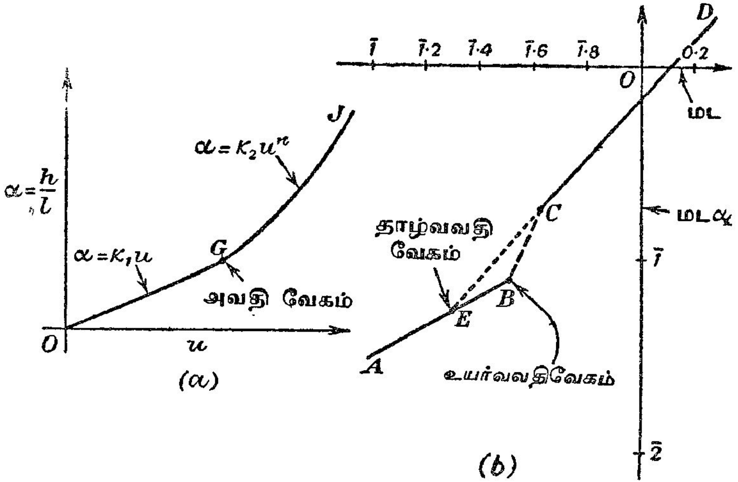
என எழுதலாம்.

$x=$ மட u எனவும் $y=$ மட α எனவும் குறித்தால் படம் 12·12 (b) யில் காட்டியுள்ள வளையி கிடைக்கிறது. நேர்கோடு AB ஆனது $n=1$ இனல் எடுத்துக்காட்டப்படுகின்ற பாய்ச்சல் நிலைக்கு ஒத்ததாகும். அதே நேரம் பாகம் CD இற்கு $n=1·75$.

சீரான ஒரு குழாயில் நீரின் பாய்ச்சலானது அடிப்படையில் இரு வகையானது என மேற்படி வரைபிலிருந்து தெளிவாகின்றது : அவை

(a) புள்ளி B வரை **உறுதியான** அல்லது **அருவிக் கோட்டுப் பாய்ச்சல்.**

(b) வேகமானது B இற்கு ஒத்த வேகத்தை மீறுமிடத்து உறுதியற்ற அல்லது சுரியற் பாய்ச்சல் — இவ்வீச்சில் **கொந்தளிப்புப் பாய்ச்சல்** நிகழ்கிறது.



படம் 12·12. தாழ் அவதி வேகத்தையும் உயர் அவதி வேகத்தையும் வரைபு முறைப்படி துணிதல்.

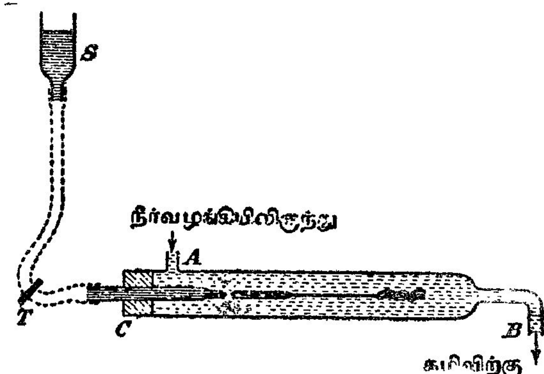
புள்ளி B யை ஒத்திருக்கின்ற பாய்ச்சல் வேகமானது **உயர் அவதி வேகம்** எனப்படும் ; அப்புள்ளியுடன் அருவிக்கோட்டுப் பாய்ச்சல் முடிவடைகின்றது.

வரிப்படத்தில் கோடு BC என்பது அவதி வீச்சொன்றைக் குறிக்கின்றது ; அவ்வீச்சில் பாய்ச்சலானது ஒரு வகையிலிருந்து இனனொன்றுககு மாறுகினறது. றெனல்ஸ் எனபார் முழு வளையியின் பாகம் EBC என்பது நீரின சடத்துவம் காரணமாக உளது எனச் சுட்டிக் காட்டி, நீட்டிய DC ஆனது AB யை வெட்டும் புள்ளி E என்பது **தாழ்** அல்லது **உண்மையான அவதி வேகத்தைத்** தரும் என விவாதித்தார். நீரானது ஓய்விலிருந்து அருவிக்கோட்டு இயக்கமாகப் பாயுங்கால் அவ்வியக்கம் சுரியல்களாகப் பிரியும் வேகமே உயர் அவதி வேகமாகும் ; தொடக்கத்தில் குழம்பிய நீரினிடத்து எவ்வேகத்திறகு மேலே அருவிக்கோட்டியக்கம் செயற்படாதிருந்ததோ அவ்வேகமே தாழ் அவதி வேகமாகும்.

றெனலசின் ஆராய்ச்சிகளில் பயன்படுத்திய குழாய்களின் விட்டங்கள் பல அங்குலம் வரை இருந்தன ; ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையிலும் கூடிய வெப்பநிலைகளில் சில பரிசோதனைகள் நடாத்தப்பட்டன. தாழ் அவதி வேகமானது குழாயின் விட்டத்திறகு நேர்மாறு விகிதசமன் எனவும் அவ்வேகமானது வெப்பநிலை உயர்வுடன் குறைகின்றது எனவும் அவர் கண்டுபிடித்தார்.

அவதி வேகங்களைத் துணிவதற்குரிய நிறப்பட்டை முறை.—ஒரு குழாயிலே பாயும் நீரின் அவதி வேகத்தைத் துணிய ஏறகெனவே சுருக்கிக் கூறியுள்ள முறையைத் தவிரப் பயன்படுத்தக்கூடிய வேறு இரு முறைகள் இங்கு குறித்தற்பாலன.

(*a*) இம்முறைகளுள் முற்பட்டது றெனல்சினுல் ஆனது; அவர் குழாயச்சு வழியே நிறமுடைய மையை மெல்லிய அருவியாக உட்பாய்ச்சினுர் ; அவர் பயன்படுத்திய ஆய்கருவியானது படம் 12·13 இல் எடுத்துக் காட்டப்



படம் 12·13. அவதி வேகத்தைத் துணிவதற்குரிய றெனல்சின் நிறப்பட்டை முறை.

பட்டிருக்கின்றது. அதன் நீளத்தின் பெரும் பகுதியில் விட்டம் 2 சமீ. ஆக இருக்கின்ற குழாய் AB உடன் மாறு மட்டச் சேமிப்புக்கலமொன்று தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது ; திரவம் (நீர்) A இல் உட்சென்று B யில் வெளியேறுகிறது. குழாய் AB யின் முனை C யில், நீளம் கிட்டத்தட்ட 10 சமீ. உம் விட்டம் 0·5 மிமீ. உம் கொண்ட மயிர்த்துளைக் குழாயாக ஆக்கப்பட்ட நுழைவழிக் குழாயொன்றைக் காவுகின்ற றப்பர் அடைப்பானென்று உளது. இந்நுழைவழிக் குழாயானது மையால் நிரப்பப்பட்ட சிறு சேமிப்புக்கலம் S உடன் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விற்கவ்வி T ஆல் மையின் பாய்ச்சல் ஆளப்படுகிறது. நீர் மெதுவாகப் பாயுங்கால், அருவியின் மையவச்சு வழியே, நீண்ட மைநிரலொன்று தாரையினின்றும் நீங்கக் காணப்படும்வரை, A யுடன் சேமிப்புக்கலத்தைத் தொடுக்கின்ற வளைந்த

குழாயால் அக்கலத்தின் நிலை செப்பஞ் செய்யபபடுகிறது. அப்பொழுது திரவமானது அருவிக்கோட்டியககத்தில் உள்ளது ; அதாவது, எல்லா இழைகளும் குழாயின் சுவருக்குச் சமாந்தரமாக இயங்குகின்றன. கொந்த ளிப்பு நிலை அடையப்பட்டதும் நிறப்பட்டை சுரியல்களால் உடைக்கப்பட்டு நீருடன் கலக்கப்படுகின்றது.

(b) இரண்டாவது முறையானது பான்ஸ், கோக்கர் (Barnes and Coker) ஆகியோரால் ஆனது ; அவர்கள 1904 இல் வேற்றுமை இரச வெப்பமானி களைப் பயன்படுத்திப் பாய்ச்சல் வீததுடன பாயியின சுறறுப்புறததைக் குறித்து அதனது மிகை வெப்பநிலையின மாறறஙகளை ஆராய்ந்துள்ளனர். இயக்கமானது அருவிக் கோட்டமைப்பு உடையதாயிருக்கும்போது உராய்வுத் தடையானது வேகம் u விற்கு விகிதசமனுய் இருநதது ; ஆனால், கொந்தளிப்பு நிலையை அடைந்ததும் தடையானது u^n இற்கு விகிதசம னுயிற்று. எனவே n ஆனது 1 ஐ மீறுமிடத்து எவ்வாறு பாய்ச்சல் வேகததில வெப்பநிலைமிகை பொறுத்திருககின்றது என்பதை எடுத்துக் காட்டுகின்ற வரைபின சரிவானது அவதிவேகத்துக்கபபால் மிகக சாய்வுடைய தாயிருத்தல் வேண்டும் என்பது தெளிவு. அவதி வேகமானது வரைபி லுள்ள முறிப்பால் உணர்த்தப்படுகிறது, படம் 12·12 (a) ஐக் காண்க.

றெனல்சின் எண்.—முந்திய பந்திகளில விவரித்துக கூறியுள்ள பரி சோதனைகளிலிருந்து தாழ அவதி வேகம், $[u_c]_1$,

$$[u_c]_1=\frac{2000\eta}{\rho d}$$

என்பதால் தரப்படுகிறது என றெனலஸ் கண்டுகொண்டார் ; இங்கு η திரவத் தின் பிசுபிசுப்பும், ρ அதனது அடர்த்தியும், d குழாயின் உள்விட்டமும் ஆகும். இயக்கத்தியற் பிசுபிசுப்பு $\frac{\eta}{\rho}$ ஐ ν என அழைத்தால்

$$\frac{[u_c]_1 d}{\nu}=2,000.$$

$\frac{[u_c]_1 d}{\nu}$ என்னும கணியம் **றெனல்சின் எண்** எனப்படும் ; அது தூய வெண்ணென்றுகும் ; அதாவது அது பயன்படுத்திய அலகுத் தொகுதி யைச் சாராது.

உயர் அவதி வேகம் $[u_c]_2$ இறகு றெனல்சின் எண் 2500 ஆகும்.

பிசுக்குப் பாயியொன்றிலே ஒரு பொருளின் இயக்கம்.— தரப்பட்ட கேத்திரகணித வடிவும் பருமனுமுடைய ஒரு பொருள் அடர்த்தி ρ வும் இயக்கத்தியற் பிசுபிசுப்பு ν வும் கொண்ட பாயியொன்றிலே வேகம் v யுடன் அசைக ; பொருளின் வடிவும் பருமனும் அதனது ஏதேனு மொரு பாகத்தின் நீளம் l இனுற் குறித்துக் கூறப்படுக ; அப்பொழுது பாயியிலே அப்பொருளைக் குறித்துக் கேத்திரகணித முறைப்படி எந்தவொரு

நிலைத்த புள்ளியிலும் வேகம் u ஐ

$$u=\phi_1(v, \rho, \nu, l)$$

எனனுஞ் சார்புச் சமன்பாட்டாற் கோவைப்படுத்தலாம் ; மேலும் அப் புள்ளியிலுள்ள அருவிக் கோட்டின் சரிவானது

$$\theta=\phi_2(v, \rho, \nu, l)$$

என்னும் வடிவம் கொண்ட ஒரு கோவையால் தரப்படுகிறது.

ϕ_1 இலுளள ஒவ்வோர் உறுப்பும் v^α, ρ^β, ν^γ, l^δ போன்ற வடிவத்தைக் கொள்ளும் ; மேலும், அவ்வொவ்வொனறும் வேகத்தின் பரிமாணங்களை உடையதாயிருத்தல் வேண்டும். எனவே,

$$[LT^{-1}]=[LT^{-1}]^\alpha [ML^{-3}]^\beta [L^2T^{-1}]^\gamma [L]^\delta.$$

குணகங்களை ஒப்பிட்டால்

$$\left.\begin{aligned} 1&=\alpha-3\beta+2\gamma+\delta \\ 0&=\beta \\ -1&=-\alpha-\gamma \end{aligned}\right\}.$$

$\beta=0$ ஆதலின்,
$$\alpha+2\gamma+\delta=1,$$
$$\alpha+\gamma=1.$$
$$\therefore\quad \alpha=1-\gamma;\quad \delta=-\gamma.$$

$\therefore$ ஒவ்வோர் உறுப்பும்

$$v^\alpha\nu^\gamma l^\delta=v^{1-\gamma}\nu^\gamma l^{-\gamma}=v\left(\frac{\nu}{vl}\right)^\gamma$$

போன்று வடிவம் உடையதாகும்.

$$\therefore\quad u=vF_1\left(\frac{\nu}{vl}\right)=vf_1\left(\frac{vl}{\nu}\right). \qquad \text{(i)}$$

அதேபோல்,
$$\theta=f_2\left(\frac{vl}{\nu}\right) \qquad \text{(ii)}$$

[u விற்குரிய சார்பிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் $v^\alpha l^\beta \eta^\gamma \rho^\delta$ போன்ற வடிவம் உடையதாயிருக்கும் வண்ணம் அச்சார்பை நாம் எழுதினுல்

$$[LT^{-1}]=[LT^{-1}]^\alpha [L]^\beta [ML^{-1}T^{-1}]^\gamma [ML^{-3}]^\delta.$$

இதிலிருந்து

$$\delta+\gamma=0\ ;$$
$$1=\alpha+\beta-\gamma-3\delta=\alpha+\beta+2\gamma\ ;$$
$$1=\alpha+\gamma.$$

எனவே, $\beta=-\gamma$; $\alpha=1-\gamma=1+\beta$.

ஆகவே ஒவ்வோர் உறுப்பும்

$$v^{1+\beta} l^{\beta} \eta^{-\beta} \rho^{\beta} = v\left(\frac{vl}{\nu}\right)^{\beta}$$

போன்ற வடிவம் உடையது.

ஆகவே முன்போல

$$u = vf_1\left(\frac{vl}{\nu}\right).]$$

அருவிக்கோடுகளின் வடிவும், எந்தப் புள்ளியிலுமுள்ள இயக்கத்தின் திசையும் பரிமாணமில்லாக் கூட்டம் $\left(\frac{vl}{\nu}\right)$ ஐ மட்டுமே சார்ந்திருக்கும் என்றும் அவை இக்கூட்டத்தின் வெவ்வேறான கூறுகளைச் சாரமாட்டா என்றும் இரண்டாவது சமன்பாடு சுட்டுகிறது. வேகமானது முதலாவது சமன்பாட்டின்படி v, $\left(\frac{vl}{\nu}\right)$ என்பவற்றை மட்டுமே சாரும் எனக் காட்டுகின்றது. எனவே பொருள்களின் பருமன்கள் மட்டும் வித்தியாசமாகவும் அப்பொருள்கள் எல்லாம் கேத்திரகணிதமுறையாக இயல்பொத்தவையாகவுமிருப்பின், அருவிக்கோட்டுத் தொகுதிகளும் அதேபோல் இயல்பொத்ததாய், $\left(\frac{vl}{\nu}\right)$ என்பது மாறிலியாக இருத்தல் வேண்டும் எனநிறுவப்பட்டுள்ளது.

அவரால் நடாத்தப்பட்டுப் பக்கம் 726 இலிருந்து பக்கம் 730 வரை விவரித்துக் கூறியுள்ள மிகச்சிறந்த பரிசோதனைகளின் பேறுகளிலிருந்து $\frac{vl}{\nu}$ என்னும் வடிவமுடைய ஒரு பரிமாணமில்லாக் கூட்டமே உருளைக் குழாயொன்றில் ஒரு பாயி பாயும்போது நடைபெறுகின்றனவற்றை நிர்ணயிக்கின்றது என றெனலைஸ முடிவு செய்துள்ளார். எனவே இத்தகைய ஒரு குழாயின் விட்டம் d யும் அதில் செல்லும் திரவத்தின் வேகம் u வும் ஆயின், $\frac{ud}{\nu}$ என்பது ஓர் அவதிமாறியாகும்; அது உறுதியான ஒரு பெறுமானத்தை அடையும்போது பாய்ச்சலானது, உறுதியான அருவிக் கோட்டுப் பாய்ச்சல் எனப்படுவதிலிருந்து சுரியல்கள் உற்பத்தியாகின்ற கொந்தளிப்புப் பாய்ச்சலாக மாறுகின்றது. R, றெனல்சின் எண (2000)† ஆயின்

$$u = \frac{2000\eta}{\rho d} = \frac{2000\nu}{d}.$$

$$\therefore \frac{ud}{\left(\frac{\eta}{\rho}\right)} = \frac{ud}{\nu} = 2000.$$

† சிலவேளைகளில் றெனலசின எண் குழாயின் குறுக்குவெட்டாரையைக் குறித்துத் தரப்படுகிறது; அப்பொழுது அதன பெறுமானம 1000 ஆகும்.

சுரியல் ஆக்கத்தின் மீடிறன்.—ஒரு பாயி வேகம் u வுடன் திண்மப் பொருளொன்றைத் தாண்டிச் செல்லுங்கால் அல்லது ஒரு குழாயிலிருந்து வெளியேறுங்கால் அதில் சுரியல மீடிறன் f ஆகுக. அப்பொழுது, முந்திய பந்தியில் விளக்கப்பட்டுளள மற்றைக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி

$$f=\psi(u,\ l,\ \nu,\ \rho)$$

என எழுதலாம.

இச்சார்பிலுள்ள ஒவவோர் உறுபபும்

$$u^{\alpha}\, l^{\beta}\, \nu^{\gamma}\, \rho^{\delta}$$

என்னும் வடிவதனதயும் T^{-1} என்னும் பரிமாணத்தையும் உடையதாகும்.

$$\therefore\quad [\mathrm{T}^{-1}]=[\mathrm{LT}^{-1}]^{\alpha}\,[\mathrm{L}]^{\beta}\,[\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}]^{\gamma}\,[\mathrm{ML}^{-3}]^{\delta}.$$

$$\therefore\quad \delta=0\ ;\ 0=\alpha+\beta+2\gamma\ ;\ -1=-\alpha-\gamma\ ;$$

$$\therefore\quad \alpha=1-\gamma,\ \beta+\gamma+1=0.$$

$$\therefore\quad \alpha=2+\beta.$$

எனவே ψ யிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுபபும்

$$u^{2+\beta}\,l^{\beta}\,\nu^{-1-\beta}=\frac{u}{l}\cdot\left(\frac{ul}{\nu}\right)^{1+\beta}$$

என்னும் வடிவம் உடையது.

$$\therefore\quad f=\frac{u}{l}\,\psi\left(\frac{ul}{\nu}\right).$$

பாகம் II — திண்மங்களின் பாய்ச்சல்

ஞெகிழிமை அல்லது திண்மங்களின் பாய்ச்சல்.—சில பொருள்கள் இயற்கையிலே அவற்றின்மீது பிரயோகிக்கப்படுகின்ற தகைப்பானது உறுதியான பெறுமானமொன்றை மீறுமல் இருக்கும்வரை, பாயும் ஆற்ற லில்லாதிருக்க நடைமுறையில் காணப்படுகின்றன ; பேச்சு வழக்கில் அவை திண்மங்களதான் ; அவற்றிற்குக் கரிப்பிசினும் சட்டர்ட்டன் சேர்வையும் நன்கறிந்த உதாரணங்களாகும். தகைப்பு-விகார வரிப்படத்தில் மேற்படி பெறுமானமானது இளகுநிலைப் புள்ளியால் எடுத்துக் காட்டப்படுகிறது (படம் 7·09, பககம் 311 இற் காண்க). தகைப்பானது இளகு நிலைக்கு ஒத்த பெறுமானத்துக்குக் குறைவாக இருக்கும்வரை அத்தகைய பதார்த் தங்கள் எப்பொழுதும் மீளதன்மைப் பொருள்களாகவே விளங்கும் ; ஆனல் அதனினும் பெரிதான தகைப்புக்களிடத்து வடிவழிவின் அளவு, தகைப்பின் பிரயோக நேரத்தைப் பொறுத்துள்ளது. அப்பொழுது பதார்த்தமானது **ஞெகிழி நிலையில்** இருக்கின்றது எனப்படும். இத்தகைய நிலையையும் பிசுக்கு விசைகளால் மட்டும் ஆளப்படுகின்ற திரவப் பாய்ச்

சிலேயும் கவனமாக வேறுபடுத்துதல் வேண்டும்; ஏனெனில், பிந்திய உதாரணத்தில் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற தகைப்பு எவ்வளவு சிறிதாயிருந்த போதிலும் பாய்ச்சலானது முடிவான அளவிலே எப்பொழுதும் இருக்கும். ஓர் இலட்சிய ஞெகிழித் திணமப்பொருளினிடத்துத் தகைப்புக்கள் அவதிப் பெறுமானத்திலும் குறைவாக இருக்கும்போது பாய்ச்சல் வீதம் பூச்சிய மாகவும் அப்பெறுமானத்துக்கு மேலே பாய்ச்சல்வீதம் தகைப்பு மிகைக்கு விகிதசமமாகவும் இருத்தல் வேண்டும் என ஞெகிழிநிலை பற்றிய ஆராய்ச்சியைத் தொடக்கத்தில் நடாத்தியுள்ளவர்களுள் ஒருவராகிய பிங் காம் என்பார் கருதினர். இத்தகைய பதார்த்தமானது "பிங்காம் திண்மம்" எனப்படும். ஆனால் நடைமுறையில் அதைப் பெறமுடியுமோ என்பது பெரிதும் ஐயத்திற்குரியது; ஏனெனில், எல்லா உண்மையான பொருள்களிடத்தும் இளகு நிலையானது ஒருதனியாய் வரையறுக்கப்பட வில்லை; பூரண மீள்தன்மையுள்ள வீச்சுக்கும் ஞெகிழிப் பாய்ச்சல் நிகழும் வீச்சுக்கும் இடையே பூரணமில்லா மீள்தன்மை ஆற்றும் வீச்சொன்று உளது எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கின்றது.

ஞெகிழிமை.— இத்துறையில் ஈடுபட்டுள்ள பலர் ஞெகிழிமைக்கு (πλαστικός) அளவறிதற்குரிய வரைவிலக்கணம் கூற முயன்றுள்ளனர்; ஆனால் ஒன்றேனும் முற்றிலும் திருத்திகரமானதாய் இல்லை. ஞெகிழிமை ஆனது சில பதார்த்தங்களின் ஓர் இயல்பாகும்; அவ்வியல்பு காரண மாக அப்பதார்த்தத்தின் இளகு நிலையை மீறும் தகைப்பொன்றின் பிரயோகத்தின்போது அப் பதார்த்தத்தைத் தெறிப்பின்றித் தொடர்ச்சி யாகவும் நிரந்தரமாகவும் வடிவழிக்கலாம்; இங்கு, இவ்வரைவிலக்கணத் துடன் நாம் திருத்தி அடைதல் வேண்டும்.

ஒரு திரவியத்தின் இளகுநிலை.—இப்பொழுது தரப்படும் வரைவிலக்கண மானது சற்றுப் பருமட்டானது; இருந்தாலும் இப்போதைய தேவைக்கு அது போதியதாகும். கொய்தகைப்பொன்று ஒரு பொருள் மீது ஓரளவு நேரம் தாக்கியபின்பு பூச்சியமாக வரும்வரை அது குறைக்கப்படுகின்றது எனக் கொள்க. தகைப்பு இவ்வாறு நீக்கப்பட்ட பின்பு, பொருள், அதனது தொடக்கப் பருமனையும் வடிவையும் மீளாமல் இருக்கலாம். அப்பொழுது அப்பொருள் **நிலையான அமைப்பு** ஒன்றைப் பெற்றுவிட்டது எனவும் பிரயோகித்த தகைப்பு அதனது **இளகுநிலைப் பெறுமானத்தை** மீறிவிட்டது எனவும் கூறப்படுகிறது. சுமையேற்றும் முறையைப் பற்றியோ நிலைபேறான வடிவழிவின் பருமனைப் பற்றியோ பேச்சு இல்லாத தால் இது திட்டமான ஒரு கூற்றாகாது.

திரவியங்களின் ஞெகிழி வடிவழிவைப் பற்றிய பழைய ஆராய்ச்சி.— ஒரு திரவியத்தின் அமைப்பில் கட்புலனாகும் எம்மாற்றத்தையும் பூரண மீள்தன்மையின் வீச்சினுள் அடங்குகின்ற விகாரங்கள் தோற்றுவிக்கமாட்டா. எனினும், திரவியங்களின் தடைத்திறன் அல்லது (ஈயத்தைக் குறித்து) அவற்றின் வெப்பமின் வலு முதலிய பௌதிக இயல்புகளில் சிறு மாற்

றங்கள் உண்டாகின்றன என்பது தெரிந்ததே ; ஆனல், அம்மாற்றங்கள் பற்றிய பரிசோதனைமுறை ஆராய்ச்சிக்குக்கூட பல தொல்லைகள் உள. மற்றும்படி, நிலையானவமைப்பின தோறறத்திறகு அறிகுறியாகப் பருமனி லும் வடிவிலும் விளங்குகின்ற நிலையான மாற்றங்களுடன் திரவியத்தின் நுண்ணமைப்பிலும் மாணமைப்பிலும் கட்புலனுகும் மாற்றங்கள் எப் பொழுதும் தோற்றுகின்றன.

உயர்தகைப்புக்களைப் பிரயோகித்து உலோகங்களை சிறு துவாரங்களு டாகப் பாயச் செய்யலாம் எனவும், அப்பொழுது அவை உயர் பிசுபிசுப் புத் திரவங்கள்போல் நடந்துகொள்கின்றன எனவும், முதன்முதலாக ட்றெஸ்கா (Tresca) என்பவரால் 1864 இல் நிலைநிறுத்தப்பட்டுள்ளது. இப்பரிசோதனைகளிலே, திண்மக்குற்றியொன்று உண்டாகும் வண்ணம் மெல்லிய உலோகத் தகடுகளை ஒன்றின் மேலொன்ருய் மேற்பொருத்தி பயன்படுத்துவதனல் பாய்ச்சற் கோடுகள் வெளிப்படையாக்கப்பட்டுள்ளன. கங்கணத் துவாரங்கள் ஊடே ஈயம், செம்பு ஈயவெள்ளீயக் கலப்பு லோகங்கள் ஆகிய திரவியங்களைச் செலுத்திக் குழாய்களும் கோல்களும் ஆக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவ்வவற்றின் உருகுநிலைகளுக்கு மிகக் குறை வான வெப்பநிலைகளிலும் அதே முறையைக் கையாளும் போது செம்பு, நாகம் என்பவற்றின் கலப்புலோகங்களும் இளகுகின்றன.

ஞெகிழி வடிவழிவின் உட்பொறியமைப்பு யாது என்னும் கேள்வி இப்பொழுது, உடனடியாக எழுகின்றது. ஈயம் போன்ற ஒரு பல்பளிங்கு உலோகத்தையும் கரிப்பிசின்போன்ற ஒரு திரவியத்தையும் கருதுவோம். இங்கு ஒவ்வொரு பதார்த்தத்தையும் பாயச் செய்யலாம் ; ஆனல் இத் தோற்றப்பாடுகளுக்கிடையேயுள்ள மேலெழுந்தவாரியான ஒறறுமையானது அவ்வவற்றின் முறைகளின் மாறிலியாலானதன்று. பாய்ச்சல் வகையைப் பொறுத்த மட்டில், கரிப்பிசின் உண்மையில் உயர்பிசுக்குத் திரவம் போலவே நடந்துகொள்கின்றது ; ஆனல் ஒரு நுணுக்குக்காட்டியைப் பயன் படுத்தி உலோகங்களிடத்து இத் தோற்றப்பாடு முக்கியமாகவே வேறு என்பதை உடனடியாகத் தெளிவாக்கலாம். இவ்விடயம் முதன்முதலாகப் பனிக்கட்டியாலான மாபெரும் திணிவுகள், அதாவது பனிக்கட்டியாறு களின் பாய்ச்சல் தொடர்பாக ஆராயப்பட்டுள்ளது. பனிக்கட்டிப் பளிங்கு களிடத்துப் பெருந்தகைப்புக்களின் தாக்கத்தால் ஆகின்ற ஞெகிழிப் பாய்ச்சலே பனிக்கட்டியாற்றும் பாய்ச்சலுக்குக் காரணமாகும் என ஃபாப்ஸ் என்பார் 1845 இல் வற்புறுத்தியுள்ளார். இக்கொள் கைக்கு மாருக, 1857 இல், ரின்டல் (Tyndall) என்பார் அமுக்கவுருகல் என்னும் நன்கறிந்த தோற்றப்பாடே இப் பாய்ச்சலுக்குக் காரணமாகும் எனச் சுட்டிக்காட்டினர். அமுக்கங்கள் பிரயோகிக்கபபடுமிடத்துப் பனிக் கட்டியிற்போல் உருகுநிலை தாழ்த்தப்படுகின்ற திரவியங்களிடத்து மட்டுமே இவ்விளக்கம் சரியானது. சரிந்த கூரையொன்றுமீது ஈயத்தகடுகளின் நகர்வு நன்கு தெரிந்த தோற்றப்பாடொனருகும் ; உதாரணமாகப் பிறிஸ்ரல் மாநகரிலுள்ள திருச்சபைக் கோவிலில் பாடகர் குழுவிருக்குமிடத்

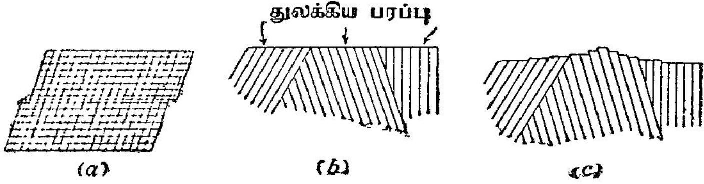
தினது ஈயக்கூரையின் அசைவானது ஆண்டொன்றிற்கு ஒன்பது அங்குலம் ஆகும் என ரின்டல் குறித்துள்ளார்; இந்நகர்தல் ஈர்ப்பாலாகின்ற பாய்ச்சலால் ஆக்கபபடுகினறது. மேலும், நீரானது திரவமாயிருககின்ற வெப்பநிலைகளுக்குக கீழேயும்கூட பனிக்கட்டி ஞெகிழிமையுடையது; எனவே, ஞெகிழிமையானது அமுககவுருகலைச் சாராதிருததல் வேணடும்.

இவ்விடயம் பற்றிய அறிக்கையொன்றில் பேராசிரியர் டேஷ் (Desch) பின்வருமாறு கூறியிருக்கின்றார்—" ஒலியேறறினுல் ஆன இரு பளிஙகு களைப் புள்ளித்தொடுகை வைக்குமாறு செய்வதால் தனிப்பளிஙகொனறு உண்டாகக்கூடிய அத்துணை மென்மையுடைய ஒலியேற்றுக்கள், அல்லது நொறுஙகாமலோ உடையாமலோ கைவிரல்களால் அழுததப்பட்டு வில்லை வடிவடையக்கூடிய பொற்ருசிய மங்கனசுக் குளோரைட்டுப் பளிங்கு [$MnCl_3.2KCl.H_2O$] தோற்றத்தைப் பொறுத்தவரை விறைப்பாக விளங்கு கின்ற சுணணும்புப்பாறை அல்லது இநதுப்புப் பளிங்குகள் வரை அவ்வவற்றின பளிங்குத்தன்மைக்குப் பஙகம் ஏற்படாமல் பல பளிங் குகளை வடிவ மாற்றமடையச் செய்யலாம். சில முற்காப்புககள் எடுக்கப் பட்டிருந்தால இவறறைக்கூட அசாதாரணமான அளவில் வடிவமாற்றம் அடையச் செய்யலாம்."

மிகவும துலக்கப்பட்ட பரப்புடைய ஓர் உலோகத் துண்டுமீது ஈர்க்கும் விசைகள் பிரயோகிக்கப்படுமிடத்து ஒவவொரு மணியிலும் நுண்ணிய சமாந்தரக் கோடுகள் தோற்றுகினறன; அக்கோடுகளின் திசை மணிக்கு மணி வேறுபடுகினறது. இம்மணிகளின் எல்லைகளில் மேறபடி நுண்ணிய கோடுகளின திடீரான திசைமாற்றம் உலோகததின் பளிங்கமைப்பை வெளிப்படுத்துகிறது. " இககோடுகளைக் கண்டவுடன அவறறின் உண்மை யான இயல்பை உணர்தல் எளிதன்று; அவை வெடிபபுக்களும் கங்கு களும அனறு. சரிவான ஒளியில் சோதிக்குமிடத்து, தரப்பட்ட எந்தத் திசையையுடைய கோடுகள் மீதும் படுவொளியானது ஒருதனியான திசையி லிருந்து பட்டாற்ருன அக்கோடுகள் கட்புலனுகும்; எனவே, நுணுக்குக் காட்டியின் மேடையைச் சுழற்றும்போது அவை மாறிமாறித் தோனறி மறையும். ஆதலின், இக்கோடுகள் படிகளாகக் காட்டப்பட்டுள்ளன. அவற்றின இயல்பை நன்கு உணர்த்தும் பொருட்டு அக்கோடுகளுக்கு "நழுவற் பட்டைகள்" எனப் பெயரிடப்பட்டிருக்கின்றது."

நழுவற் பட்டைகள் பின்வருமாறு உருவாகின்றன. ஒரு பளிங்கிலே அணுககளும் அயன்களும் தளங்களிலே ஒழுங்கான வகையில் அமைந் திருக்கின்றன; அதனுல், சில தனிப்பட்ட தளங்கள் வழியே அயன்களின் தொடர்பு நழுவல் மிக எளிதாக நிகழ்வதற்கு இடங்கொடுக்கப்படுகின்றது. இத்தளங்கள வழுக்கற்றளங்கள் அல்லது எளிதாய வழுகுந் தளங்கள் எனப்படுகின்றன. படம் 12·14 (*a*) ஆனது ஒரு பளிங்கினது அமைப்பின் வரிப்பட வகைக் குறிப்பாகும்; பளிங்கமைப்பில் எவ்வித குழபபமுமினறி, கிடைத்தளமொனறிலே ஒரு பெயர்வியக்கம் நிகழக்கூடும் என்பது உடனடி

யாகத் தெளிவு. இதுபோன்ற இயக்கமானது ஒனறிற்கொனறு சமாந்தர மான இத்தகைய தளங்கள் வழியே நிகழலாம். சமாந்தரமான வழுக கற்றளங்களில் பின்னடும் நழுவல்கள் நிகழுஙகாலே நழுவற் பட்டைகள் உறபத்தியாகின்றன. படம் 12·14 (b) ஆனது விகாரம் நிகழ முனணரே துலக்கிய பரப்பொனறின நிலையை எடுத்துக்காட்டுகிறது; அதில் சில பளிங்கு மணிகளின பாகங்கள் காட்டப்பட்டிருக்கினறன. விகாரத்திற்குப் பின் படம் 12·14 (c) யில் காட்டியுள்ளவாறு மணிகள் வடிவழிவுற்றிருக்



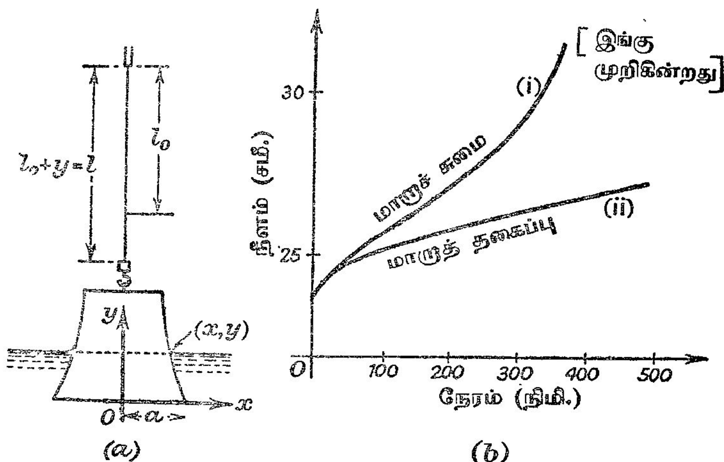
படம் 12·14. உலோகமொன்றிலே நழுவற் பட்டைகளின் உருவாக்கம்.

கின்றன. வழுக்கற்றளங்கள் வழியே நடைபெற்ற நழுவலாலேயே மட்ட வேறுபாடுகள் ஆக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இவ்வண்ணம் பரப்புமீது இயற்றப் பட்ட படிகளே முன்னர் கூறியுள்ள நழுவற்பட்டைகள். இத்தோற்றப் பாடானது புவிச்சரிதப்படைகளிலுள்ள மறிதந்த குறைகளின் உற்பத்தி யுடன் சரியாக ஒத்திருக்கின்றது.

எனவே, உலோகமொன்று தகைப்புறும்போது இளகு நிலைக்கப்பால் அதன் ஞெகிழி இளகலானது எண்ணிலடங்கா வழுக்கற்றளங்கள் மீது நிகழ்கின்ற நழுவலால் ஆகின்றது என முடிவு செய்யலாம்; அவற்றின் அயலிலுள்ளவற்றைக் குறித்துச் சில அணுப்படைகளின் பெயர்வு மட்டுமே பளிங்கின் அமைப்பில் உண்டாகின்ற ஒழுங்கின்மை.

தொடர்ந்து உலோகங்களின் ஞெகிழி வடிவழிவு பற்றி—ஈயம் பற்றிய பழைய ஆராய்ச்சி.—அதனது மீள்தன்மையெல்லையைப் பெரிதும் மீறுமாறு சுமையேற்றியுள்ள ஈயக்கம்பி ஒன்றினிடத்துச் சொற்ப நேரத்திற்குப் பின் நீட்சியானது நேரத்திற்கு நேர்விகிதசமம் ஆகின்றது, அதாவது பாய்ச்சல் பிசுபிசுப்பியல்புடையது, என 1904 இல் ட்றௌற்றனும் ராங்கினும் (Trouton & Rankine) கண்டனர். இத்தோற்றப்பாட்டைப் பறறிய நுணுக்கமான ஆராய்ச்சிகள் 1910 இல் அண்ட்றேட் (Andrade) என்பவரால் முதன்முதலாக நடாத்தப்பட்டன; அவ்வாராய்ச்சிகளின்போது கம்பி ஈர்க் கப்படுங்கால் குறுக்குவெட்டு சுருங்குகின்றது எனவும், ஆகவே மாறுச் சுமையொன்றினிடத்துத் தகைப்பானது கூடுகின்றது எனவும் உணரப் பட்டது. இத்தொல்லையைச் சமாளிக்கும் பொருட்டுக் கம்பியில் மாறுத் தகைப்பொன்றை நிலைநிறுத்துவதற்குப் பின்வருகின்ற தன்னியக்க முள்ள முறை திட்டமிடப்பட்டது. பயனபடுத்திய ஆய்கருவியின் முதன் மையான விவரங்கள் படம் 12·15 (a) யில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன.

கம்பி ஈர்க்கப்படும்போது அதன கீழ நுனியில் பற்றப்பட்டிருக்கின்ற "நிறை" நீரில் தாழுமாறு விடப்பட்டுள்ளது ; இங்கு எந்தக் கணத்திலுமுள்ள மேலுதைப்பு கம்பியின அதே கணத்து நீளத்திற்கு நேர்மாறு விகிதசமமாயிருக்கும்வண்ணம் நிறையின் கேத்திரகணித வடிவம் தெரிநதெடுக்கப்பட்டது. இவ்வாறு, பலித ஈர்க்கும் விசை,



படம் 12·15. ஒரு கம்பியில் மாறுத் தகைப்பொன்றை உண்டாக்குவதற்கு அன்ட்றேட்டின் முறை.

கம்பியின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவுடன் நேராய் மாறிறறு. M சுமையின் திணிவும், V எந்தக்கணத்திலும் திண்மத்தின் அதாவது சுமையின் அமிழ்த்தப்பட்ட கனவளவும் எனின்

$$(\mathrm{M}-\rho\mathrm{V}) \propto \frac{1}{l_0+y};$$

இங்கு ρ நீரின் அடாத்தியும், l_0 கம்பியின் தொடக்க நீளமும், y சுமையின் அமிழ்ப்பாழம், எனவே கம்பியின் நீட்சியும் ஆகும். எனவே,

$$(\mathrm{M}-\rho\mathrm{V})\ (l_0+y) = \text{மாறிலி} = \mathrm{M}l_0.$$

$$\therefore\ \mathrm{V} = \frac{\mathrm{M}}{\rho}\left(\frac{y}{l_0+y}\right).$$

படம் 12·15 (a) யில் சுட்டியுள்ள குறிப்பீட்டில்,

$$\mathrm{V} = \int_0^y \pi x^2\, dy = \frac{\mathrm{M}}{\rho}\left(\frac{y}{l_0+y}\right).$$

y யைக் குறித்து வகையிட,

$$\pi x^2 = \left[\frac{M}{\rho} \cdot \frac{(l_0+y)-y}{(l_0+y)^2}\right],$$

அல்லது
$$x = \frac{1}{l_0+y}\sqrt{\frac{Ml_0}{\pi\rho}}.$$

எனவே நிறைக்கு, அச்சு Oy யைப் பற்றிய அதிபரவளைவுருவொன் றினது ஒருபாக வடிவததை அளிததல் வேண்டும்.

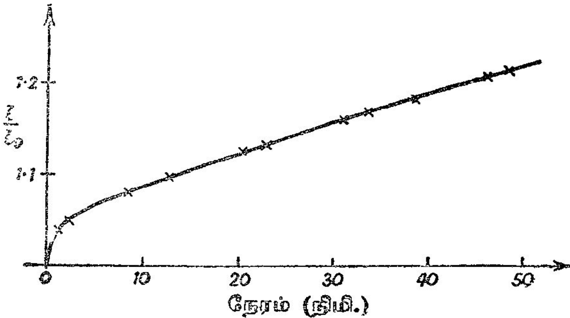
ஈயத்துக்குக கிடைத்த பேறுகள் படம 12·15 (b) யில் வளையிகளால் எடுத்துக்காட்டப்பட்டிருக்கினறன. பரிசோதனைகள் ஆய்கூடத்து வெப்பநிலை யில் நடாத்தப்பட்டன ; தகைப்பு மாறுதிருந்தபோது தொடக்கக் கண நிலை நீட்சியை ஒரு பாய்ச்சல் பின்தொடர்ந்தது ; அப் பாய்ச்சலானது, உயர் தகைப்புக்களிடத்து ஈற்றிலே மாறிலியாகின்றது. மாறுச் சுமையின் போது பாய்ச்சல் வீதம் விரைவாகக் கூடுகின்றது.

மாறுத் தகைப்பின்போது பாய்ச்சலானது

$$l = l_0[1+\beta t^{\frac{1}{3}}] \quad \text{அடுக்} \quad (\kappa t)$$

என்னும் சூத்திரத்தால் எடுத்துக்காட்டப்படுகிறது என அன்ட்றேட் கண்டார் ; இங்கு β, κ என்பன மாறிலிகள்.

இதுபோன்ற பரிசோதனைகளைப் பல்பளிங்குக் கடமியத்திஞேடு அன்ட்றேட், சாமேர்ஸ் ஆகியோர் 1932 இல் நடாத்தியுள்ளனர் ; மேற்படிச் சூத்திரத் திற்கும் பேறுகளுக்குமிடையேயுள்ள சிறந்த ஒற்றுமையானது படம் 12·16 ஆல் வெளிப்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றது.



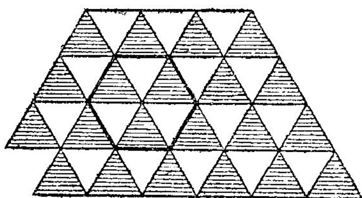
படம் 12·16. மாறுத் தகைப்பின்போது பல்பளிங்குக் கடமியத்தின் பாய்ச்சலுக்கு $l = l_0[1+\beta t^{\frac{1}{3}}]$ அடுக் (κt) என்னுஞ் சூத்திரத்தின் பொருத்தம்.

பளிங்குகள் பற்றிய குறிப்பு.—கிட்டத்தட்ட 1912 ஆம் ஆண்டுவரை பளிங் கானது சதுரமுகி, நான்முகி, பன்னிருமுகி, அறுகோணி அரியம் முதலிய வற்றின் வடிவு போன்று நன்கு வரையறுத்த கேத்திரகணித வடிவுடைய

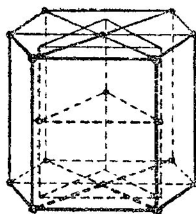
பொருளொன்ருகும் எனக் கருதிவரப்பட்டுள்ளது. ஆனல் ஒரு பளிங்கின் புற வடிவமானது அதனது அடிப்படை இயல்புகளுள் ஒனருகாது என்னுஞ் செய்தி வியப்பூட்டுகிறது ; அப புற வடிவமானது பளிங்கின் அயன், அணு அல்லது மூலக்கூற்று உறுப்புக்கள் வெளியில் ஒழுஙகாகவோ முறைமையாகவோ அமைந்திருக்கின்றன என்பதை மட்டுமே தெளிவாக்கு கின்றது.

எமது உடனடியான தேவையையிட்டு அறுகோணி அரியததின புற வடிவ முடைய பளிங்குகள் மட்டுமே கருதப்படும். இப்பெயரானது மிக்க பொருத் தமான தொன்றன்று என X கதிர்களைப் பயன்படுத்திக் காட்டப்பட்டிருக்கின் றது; ஏனெனில் அத்தகைய பளிங்குகளில் அயன்கள் அல்லது அணுக்கள், அலகு அரியஙகளின் அடிகள் சமபக்க முக்கோணிகளாகவுள்ள சாலகத்திலே உள எனத் தெளிக. தக்க சூழலில் அறுகோண வடிவுடைய ஒரு பளிங கைப் பெறுவதற்கு எவ்வாறு அலகு அரியங்களின் முக்கோண அடிகள் ஒன்றேடொன்று பொருந்தியிருக்கின்றன என்பதைப் படம் 12·17(*a*) காட்டு கின்றது ; அவ்வடிகள் படத்தில நிழற்றப்பட்டிருக்கின்றன. (நிழற்றப்பட்ட அடிகளை உடைய அரியங்கள் மட்டுமே பளிங்கின அமைப்பில் பங்குபற்று கின்றன எனக் கருதப்படுகின்றது.)

எளிய முக்கோணச் சாலகமொன்றிலே, அணுக்கள் முக்கோண அரியங் களின் முனைவுகளில் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றன ; ஒவ்வோர் அணுவையும் ஆறு அரியங்கள் பங்கு கொள்கின்றன. இதனல் அறியக்கிடப்பது யாதெனில், படம் 12·17 (*a*) யில் நிழற்றிக் காட்டப்பட்டிருக்கின்ற அடியுடைய ஒவ்வொரு அரியத்துடனும் ஒரு அணு தொடர்புகொண்டிருக் கின்றது என்பதேயாம்.



(*a*)



(*b*)

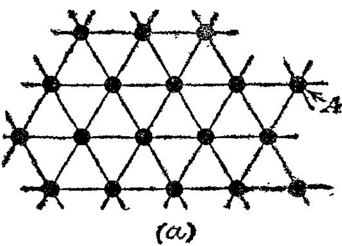
படம் 12·17. ததைந்த முக்கோண அரியம் (அலகு).

அரியமொவ்வொன்றின் உடல்மையத்தில் அணுவொன்று மேலதிக மாக வைக்கப்பட்டிருந்தால் அவ்வணுக்கள் தோனறும் சாலகமானது "ததைநத அறுகோணிச்" சாலகம் எனப்படும ; அத்தகைய சாலக மொன்று படம் 12·17 (*b*) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. இத்தகைய சாலகமொன்றை மிகத் தெளிவாகக் கருதும்பொருட்டு ஒவ்வோர் அணுவும்

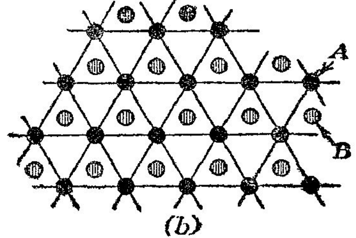
(அல்லது அயனும்) கோளமொன்றால் எடுத்துக்காட்டப்படுகின்றது எனக் கற்பனை செய்யலாம் ; இங்கு எல்லாக் கோளங்களும் சமன் ஆகும். இக்கோளங்கள் படையொன்றிலே ஒழுங்காக்கப்பட்டு கூடியமட்டில் ததைந்திருந்தால், அக்கோளங்களின் மையங்கள் சமபக்க முக்கோணிகளின் முனைகளிற் கிடக்கும் ; மேலும் உட்கோளம் ஒவ்வொன்றும் அறுகோணியொன்றின் முனைகளிற் கிடக்கின்ற மையங்களுடைய ஆறு, உடனடியான அயற் கோளங்களாற் சூழப்பட்டிருக்கும். இத்தகைய கோளங்கள் படம் 12·18 (a) யில் A என்பதாற் குறியிடப்பட்டிருக்கின்றன.

இனி, இப்படைமீது குழியொன்றில் அல்லது மூன்று A க் கோளங்களிடையேயுள்ள நாபியிடையொன்றில், அணைக்கப்பட்டு இருக்கும்வண்ணம் சர்வசமனான கோளம் B ஆனது வைக்கப்படுக. இவ்வண்ணம் B க் கோளங்களைத் தொடர்ந்துவைத்து முதலாவது படைக்குச் சர்வசமனான இன்னுமொரு படையை அமைக்கலாம். இதைச் செய்தபின், முதற்படையிலுள்ள ஒன்றுவிட்ட நாபியிடுக்கொவ்வொன்றும் இரண்டாவது படையிலுள்ள கோளமொன்றால் மூடப்பட்டிருக்கக் காணப்படும் — படம் 11·40 (b) யைப் பார்க்க.

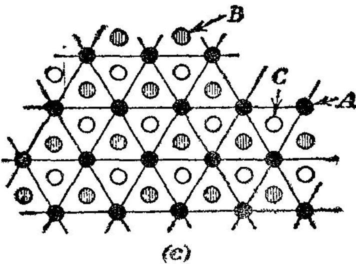
இனி, வேறு C என்னும் கோளங்களைச் சேர்த்து மூன்றாவது படையொன்றை அமைக்கலாம் ; அதன்பொருட்டு இரு வகைகளுள்



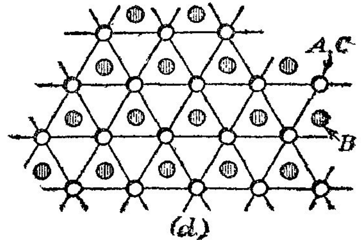
(a)



(b)



(c)



(d)

படம் 12·18. ததைந்த சாலகங்களை அமைத்தல்.

ஒன்றைப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். ஒன்றில் படம் 12·18 (c) யில் இருக்கிறதுபோல் முதற் படையில் எஞ்சியிருக்கின்ற குழிகளை C க் கோளங்

களால் மூடலாம், அல்லது படம் 12·18 (d) யிற் காட்டியுள்ளவாறு ஒவ்வொரு C க் கோளத்தையும் படை A யிலுள்ள கோளமொன்றுமீது வைக்கலாம்.

முதலாவது ஒழுங்கில், முகமையச் சதுரமுகிச் சாலகமொன்றைப் பெறுவோம் ; சதுரமுகியின் மூலைவிட்டம் வழியே நோக்கினுல் இதை உணரலாம். ஒவ்வொரு கோளமும், அதனது சொநதப் படையிலே, வளையமொன்றிலே, அதற்கு அடுத்திருக்கின்ற ஆறு கோளங்களுடனும, அதன் சொந்தப படைக்கு நேரே மேலும் கீழும் இருக்கினற படைகளொவவொனறிலுமுள்ள மூன்று கோளங்களுடனும் தொடுகை வைத்திருக்கின்றது ; இவ் வண்ணம் எந்த வேற்றுக கோளத்துடனும் தொடுகை வைததிருக்கினற கோளங்களின் மொத்த எண்ணிககை பன்னிரண்டு ஆகும்.

இரணடாவது ஒழுங்கில் தகைநத அறுகோணிச் சாலகமொன்றைப் பெறுகிருேம் ; இஙகும் கோளமொவ்வொனறும் பன்னிரண்டு வேறு கோளங்களுடன தொடுகை வைத்திருக்கின்றது. தகைந்த தளங்கள் அடித் தளங்களாகும்.

தனிப்பளிங்குகள்.—உருகிய உலோகத்திணிவுகள் குளிரடையும்போது அவற்றிலுள்ள கருக்களிலே உலோகப் பளிங்குகள் உற்பத்தியாகின்றன. 1913 இல **அன்ட்றேட்** எனபார் பெரிய தனியுலோகப் பளிங்குகளை வெற்றிகரமாகத் தயாரித்தார். உலோகக் கம்பிகளை அவற்றின் உருகுநிலைக்குச் சற்று மேலான வெப்பநிலைவரை சூடாக்கிப் பின்பு அவற்றை மிக்க மெதுவாகக் குளிரச் செய்து இத்தனிப்பளிங்குகள் ஆக்கப்பட்டுள்ளன. **சொக்ருல்ஸ்கி** (Czochralski) என்பவராலான பிறிதொரு முறையில் அதனது உருகுநிலையை ஒருசில பாகை அளவில் மீறியிருக்கின்ற உருகிய உலோகத்தில் தக்க ஒட்டுகோலொன்றின் கீழ் முனையை அமிழ்த்தி, அவ்வுருக்கினின்று பளிங்கு நூலொன்று மெதுவாகவும் மேன்முகமாகவும் இழுக்கப்படுகிறது ; எவ்வேகத்துடன இது இழுக்கப்படவேண்டும் என்பதைப் பரீட்சை முறையாலேயே துணிதல் வேண்டும். 1921 இல் **காப்பென்ரர்** (Carpenter), **ஏலாம்** (Elam) ஆகியோர் ஈர்ததலைப் பின்தொடர்கின்ற மீளப்பளிங்காக்கல் என்னும் கோட்பாட்டை அடிப்படையாகக் கொண்ட முறையொன்ருல் தனி அலுமினியப் பளிங்குகளை ஆக்கினர். காய்ச்சிப் பதனிடுதல் முறையால் திரவியத்திலிருந்த தொடக்க விகாரங்கள் நீக்கப் பட்டுள்ளன ; அடுத்து இரண்டு சதவீத அளவில் ஞெகிழியீர்ப்பு ஆக்கப் பட்டது. அடுத்தாற்போல் ஒன்று விட்டொன்ருக வெப்பமாக்குதல் விகாரப் படுத்துதல் என்பதைக் கொண்ட செயன்முறையொனறு கையாளப்பட்டுள்ளது. வளர்ச்சியானது விகாரத்தால் உண்டாக்கப்பட்ட உறபத்திகளிலிருந்தே நிகழ்கின்றது ; அது வெப்பமுறையால் ஊக்கமடைகினறது.

பின்பு **அன்ட்றேட்**, **றெஸ்க்கோ** (Roscoe) ஆகியோர் சிறு மின்னுலையொனருற் சூழப்பட்ட கிடையான கண்ணுடிக் குழாயொன்றிலே ஓரளவு தளர்ச்சியாகக் கம்பியொன்றை அடைத்தனர் ; மின்னுலையானது மெது

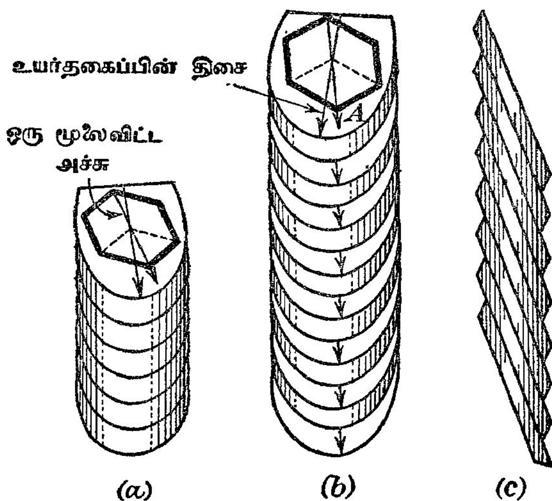
வாகக் குழாய வழியே இயங்கிற்று. உலையுடன ஒத்தியங்கும் சிறு நீளமொனறிலே கம்பியானது இடம் சார்ந்து சரியாக உருகிற்று. இவ்வண்ணம் கட்மியம் போன்ற உலோகங்களின் விகாரமில்லாப் பளிங்குகளை ஆக்க முடிகின்றது.

தனிப் பளிங்கொன்றின் பொறிமுறை வடிவழிவு.—கம்பி வடிவிலுள்ள தனிப் பளிங்கொன்ருனது மிகச் சிறிய ஈர்க்கும் விசையொன்றிற்கு உட்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றபோது அப்பளிங்கு நீட்சியுறுகின்றது எனக் காணப்பட்டது; பளிங்கின் வெளிப்பரப்பைச் சுற்றிக் கோடொன்று தோன்றிக் கம்பியின் மேற பாகத்திற்கும் அதன்து கீழ்ப் பாகத்திற்குமிடையே பெயர்ச்சியொன்று நிகழ்ந்துள்ளது எனக் காட்டுகிறது; ஆனல் நீட்சி தொடர்ந்து நிகழ்வதில்லை. தகைப்பை உயர்த்திஞல் இன்னுமொரு கோடு தோன்றும்; அதாவது இனனுமொரு பெயர்ச்சி நிகழ்ந்து அதறகுப் பின்பு ஈர்ப்பு முடிவடைகின்றது. இவவண்ணம் இம்முறையைத் தொடர்ந்து நடாத்தலாம; பினனரும் நீட்சியொவ்வொனறும் இனனுமொரு கோட்டைத் தருகின்றது; அக்கோடானது கம்பியின் பரப்பும் நழுவற்றளமொனறும ஒன்றையொன்று வெட்டும் இடமாகும். இம்முறையின்போது தொடக்கத்தில் ஒப்பமாக இருந்த கம்பியின பரப்பானது செதிள தோற்றம் பெறுகினறது. தொடக்கத்தில உருளைக்குரிய வெட்டுடையதாயிருந்த கம்பியானது இத்தகைய பல கோடுகள் ஆக்கப்பட்டபின் நாடா வடிவத்தைப் பெறுகின்றது; அப்பொழுது அது நீளப்பாட்டில் தள்ளப்பட்ட சீட்டுக் கட்டொன்றுபோல் கிட்டததடடத் தோனறுகிறது. கமபியின் வடிவழிவானது " எளிய வழுக்கல தரு தளங்கள " எனக் குறிக்கப்படுகின்ற பளிங்கியற்றளங்கள் வழியே பளிங்கிலே உள்ள பொருள்களாய் அசைகின்ற முழுக்குறுக்கு வெடடுக்களால் ஆகின்றது. ஈற்றிலே கம்பி முறியும்போது முறிவானது நழுவற்றளஙகளுககுச சமாந்தரமாகவும் ஆடிபோன்ற மேற்பரப்புடையதாகவும் காட்சியளிக்கும்.

கருதப்படுகின்ற திரவியத்தின் இளகுநிலையானது மிகத தாழ்ந்த பெறுமாணம் உடையது என்பதும, அதே திரவியம் பல்பளிங்குநிலையில் இருக்கிற போது ஞெகிழி வடிவழிவின தோறறத்திற்கான தகைப்பைக் காட்டிலும் பன்மடஙகு தாழ்ந்ததிலேயே இஙகு அது தோற்றுகிறது, அதாவது தனிப பளிங்குகள் மிகவும் பலமற்றவையும் ஞெகிழித்தன்மையுடையவையும், என்பது இத்தோற்றப்பாட்டின குறிப்பிடததக்க அம்சம் ஆகும். மேலும் நீட்சியானது முதற் பளிஙகினது நீளத்தின் பன்மடங்காகவும கூடும். செம்பின் தனிப்பளிங்கினிடத்து 150 கி – நிறை. மிமீ.$^{-2}$ போன்று அத்துணைச் சிறிதான இழுவைத் தகைப்பாலுங்கூட நிலையான அமைப்பைத் தோற்றுவிக்கலாம்; மாதிரியின் நீளம் வழியே பின்ன வடிவழிவானது கிட்டத்தட்ட ஐம்பது சதவீதமானதும் பொறிமுறைவலு கிட்டத்தட்ட ஐம்பது சதவீத அளவிற் கூடிவிடும்.

நழுவலின்போது தனிப் பளிங்கொன்றினது இரு பகுதிகளின் தொடர்பு வழுக்கலானது ஈர் அழுத்தமான, நன்கு மசகிட்ட உலோகத் தட்டுக்களின் வழுக்கலிலிருந்து வேறுபடுகின்றது ; இவ்வேறுபாடுகள் பின்வருமாறு : (*a*) தட்டுக்கள் எத்திசையிலும் வழுக்கக்கூடும் ; ஆனால் பளிங்கொன்றில் வழுக்கற்றிசையானது ஏதோவொரு பளிங்கியலச்சாலும் உயர்வுத் தகைப்பின் திசையுடன் அவ்வச்சின் சாய்வாலும் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது ; (*b*) பளிங்குகளில் வழுக்கலுக்குள்ள உராய்வுத் தடையானது வடிவழிவின் அளவுடன் கூடுகின்றது ; ஆனால் தட்டுக்களின் தொடுகைப் பரப்பளவானது மாறாமல் இருந்தால் வழுக்கலுக்குள்ள தடையும் மாறாது இருக்கும் ; (*c*) தட்டுக்களின் வழுக்கலையிட்டுச செய்யப்படும் வேலையானது வெப்பமாக மாறறப்படுகின்றது ; ஆனல் பளிங்கொன்றின் வடிவழிவின் போது சக்தியின் ஒரு பங்கானது மாதிரியில் நிலைச் சக்தியாகச் சேமிக்கப்படுகின்றது.

ஏற்கெனவே குறித்துள்ளவாறு தனிப்பளிங்குகளில் வடிவழிவானது குறிப்பிட்ட " வழுக்கற்றளங்கள் " மீது பளிங்கின் கொய்தலால் ஆகின்றது. நாகம்போல, ததைந்த அறுகோணிப் பளிங்குகளிடத்து வழுக்கல் முறையை மிக்க எளிதாய் ஆராயமுடிகின்றது. இனி நாகமானது



படம் 12·19. கம்பி வடிவமுடைய தனிப் பளிங்கொன்றிற்குப் போலன்யியின் மாதிரியுரு.

அறுகோணி முறையில் அணுக்களின் ததைந்ததோர் உலோகமாகும் ; அதில் வழுக்கலானது வழக்கமாக அடித்தளமொன்று மீதே, அதாவது அணுக்கள் மிக்க அடர்த்தியாக அமைந்திருக்கின்ற தளம் மீதே நிகழ்கின்றது. வழுக்கல் தொடர்ந்து நிகழுங்காலே நீட்சியை எதிர்க்கும்

தடையானது கூடுகின்றது ; அதாவது உலோகம் விகாரவன்மை பெறு கின்றது. அடித்தளமொன்றிலே வழுககற்றிசையானது வழக்கமாகச் சாலகத்தில் நிரையடர்த்தி மிக உயர்ந்ததாயிருக்கின்ற திசைகொண்டதும், உயர்தகைப்பு இருக்கினற திசைக்கு மிகக அணித்தாயிருக்கின்றது மான மூலவிட்ட அச்சுக்குச் சமாந்தரம். நழுவல் நடைபெறும்போது நழுவற்றிசையானது கொஞ்சம் கொஞ்சமாக மாறுகின்றது ; மேலும் நழுவறறளங்கள் ஈர்க்கும் விசைகளின் திசைக்குச் சமாந்தரமாக அமைய நாடுகின்றன.

பல்பளிங்கு மாதிரியொன்றில் தம்மிலே நழுவல் உண்மையாக நடைபெறும் வண்ணம் சில பளிங்குகள் திசைகொண்டிருக்கும் ; ஆனால் அவற்றைச் சூழ்ந்திருக்கினற பளிஙகுகள் அதற்குப் போதியவளவில் அநுகூலமாக அமைந்திராவிடில் நழுவலானது பெரிதும் இடர்ப்படும்.

நாகத்தினது தனிப்பளிஙகொன்றின் வடிவழிவிற்கு ஏதுவாகவுள்ள செயல்களைத் தெளிவு செய்யும்பொருட்டுப் பொலன்யி (Polanyi) என்பார் (1924) மரமாதிரியுருவொன்றை ஆக்கினர். இம்மாதிரியின் வரிப்படமொன்று படம் 12·19 இற் காடடப்பட்டிருக்கின்றது. படம் 12·19 (*a*) யில் சமதடிப்புடைய மரத்தட்டடுக்கொன்று காட்டப்பட்டிருக்கினறது ; இங்கு தட்டுக்களின தட்டைப் பரப்புகளை பளிங்கின அடித்தளங்களை எடுத்துக்காட்டுகின்றன. தடடையான இப்பரபபுக்கள் கம்பியச்சுக்குச் செவ்வனன்று என்பது குறித்தறபாலது. மிகமேலான பரப்பிலுள்ள அறுகோணியானது நாகவணுக்களின் பளிஙகுத் திசையளிப்பை, அல்லது சரியாகக் கூறுமிடத்து அவ்வணுக்கள் ஒழுங்கு முறையில் அமைநதிருக்கின்ற சாலகத்தைச் சுட்டிக்காட்டுகின்றது. மேலும் மூலேவிடட அச்சுக்கள் மூன்றினுள் ஒன்று காட்டப்படடிருககினறது. பளிஙகானது ஓரளவு வடிவழிவுற்ற பின் அப்பளிங்கைப் பிரதிசெயகினற மாதிரியுரு படம 12·19 (*b*) யாற் காட்டப்படுகிறது. வழுக்கற்றிசையானது அம்புக்குறி A என்பதாற சுட்டிக்காட்டப்படுகிறது ; அடித்தளமொனறில் உயர்வுத்தகைப்பின் திசையை இரண்டாவது அம்புக்குறி காட்டுகின்றது. நழுவல் தொடரும்போது நழுவற்றிசையானது ஈர்க்கும் விசைகளின திசைககுச் சமாந்தரமாக அமைந்திருக்க நாடுகின்றது. தனிப்பளிஙகின் நீட்சியானது நழுவற்றளம் ஈர்ததற்றிசைக்குச் சமாந்தரமாக அமையும் நாட்டத்தால் ஆகின்றது. படம் 12·19 (*c*) யைப் பார்க்க. பிரயோகிக்கப்படுகினற ஈர்க்கும் விசைகளுக்குத் தொடக்கத்தில் அடிததளமானது தற்செயலாகச் செவவனக இருக்க நேரிடின் நழுவல் நிகழமாட்டாது ; அவ்விசைகள் அதிகரிக்குமிடத்து ஈற்றிலே நழுவலின்றி முறிவு உண்டாகும்.

இனி அறுகோணிச் சாலகமொன்றின் அடித்தளம் ஒருதனியானது ; ஏனெனில், ஒரேயொரு நழுவற்றளம்தான் இருக்கக்கூடும் எனத் தெளிக ; ஆனால் மற்றைச் சாலகஙகளில், எடுத்துக்காட்டாக முகமையச் சதுரமுகிச் சாலகத்தில் எண்முகித்தளஙகள் நான்கினுள ஒவ்வொன்றும் நழுவற்றள

மாகப் பயன்படக்கூடும். அவ்வெடுத்துக்காட்டுக்களில் நழுவலானது முதன் முதலாகத் தொடையொன்றிலும் பின்பு வேறொன்றிலும் நிகழக்கூடும். முதலாவது நழுவலைத் தோற்றுவிக்கும் பொருட்டுத் தேவையான தகைப்பே மீள்தன்மையெல்லையின் உண்மையான அளவாகும்; அத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில், பல்பளிங்கு மாதிரிகளைப் பயன்படுத்துகின்ற பரிசோதனை கள் தரும் போலி மீள்தன்மையெல்லையானது மிகச் சிறிதளவிலேதான் அறிமுறை முக்கியத்துவம் உடையது.

தனிப் பளிங்கு மாதிரியின் வெப்பநிலை உயர்த்தப்படுமிடத்து வடிவழித்த லால் ஆகின்ற வலிபடுதல் ஆனது குறைவாகவே உணரப்படுகின்றது; ஆனால் உறுதிப்பாய்ச்சல் முயற்சியானது முதன்மை பெறுகின்றது.

பாகம் III—நியூற்றன முறையல்லாத் திரவங்கள்

தோற்றுவாய்.—பிசுக்குப் பாயியொன்றின் உறுதிப் பாய்ச்சல் பற்றிய நியூற்றனின் கருதுகோள்

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}=\eta\frac{du}{dz}=\eta\frac{d\phi}{dt}$$ [பக்கங்கள் 620 ஐயும் 671 ஐயும் பார்க்க]

என்னுஞ் சூத்திரத்தால் சுருக்கிக் கூறப்படுகின்றது.

எல்லா எளிய திரவங்களிலும், அதாவது ஒரேயொரு அவத்தை உடையதும் நூல்போன்ற அமைப்பில்லாததுமான திரவங்களில் அடர்ப் பாய்ச்சல் முறையானது என்னும் நிபந்தனையின்கீழ், தகைப்பு $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}$ ஆனது கொய்வுவீதம் $\frac{d\phi}{dt}$ யிற்கு நேர்விகிதசமமாகும். தரப்பட்ட வெப்பநிலை, அமுக்கங்கள் என்பவற்றில் η மாறிலியாயிருக்கின்ற திரவங் கள் நியூற்றன திரவங்கள் எனப்படும். கொய்வு வீதமானது 0·002 ஆரை செக்.$^{-1}$ இலிருந்து 10,000 ஆரை. செக.$^{-1}$ வரை மாறுமிடத்து வளியில் நீரின் பிசுபிசுப்பில் அளந்துணரக்கூடிய மாற்றமொன்றுமிராது எனக் கிரிஃபித்ஸ் என்பார் 1921 இல் காட்டினர்.

சிறு துளைகளுடைய குழாய்களூடாகப் பாய்கின்ற நீரையும் நீர்க் கரைசல்களையும் நோக்கியே தொடக்கத்தில் புவாசேயின் விதி பெறப் பட்டது என்பதும், மனிதவுடலிலுள்ள நாளங்கள், மயிர்க்குழாய்கள் என்பவற்றில் குருதியின் பாய்ச்சலை நிருணயிக்கின்ற விதிகளைக் கண்டு பிடிப்பதே அவ்வாராய்ச்சிகளின் முதன்மையான நோக்குகளுள் ஒன்றா கவிருந்தபோதிலும், குருதியினிடத்துப் புவாசேயின் விதி சித்திப்பதில்லை என இன்று தெரிந்திருப்பதும், இங்கு கவனத்தைக் கவரும் செய்திகளா கும். பல தூய்மையற்ற திரவங்கள், அரைத்திரவங்கள், அரைத் திண்மங்கள் என்பவை தினசரி வாழ்வுக்கு இன்றியமையாதவை; அவற்றின் பாய்ச்சல் குருதியின் பாய்ச்சலுடன் ஒத்திருக்கின்ற இயல்பினால் அது சீரற்றதாய்க் காணப்படுகின்றது. இத்தகைய திரவங்கள் **நியூற்றன**

முறையல்லாதவை எனப்படுகின்றன ; அதாவது அவற்றினிடத்து கொய்வு வீதமானது கொய்வுத் தகைப்புக்கு விகிதசமமாகாது ; மேலும் அவை புவாசேயின் விதிக்கோ ஸ்ரோக்சின் விதிக்கோ இணங்குவனவுமல்ல.

இவ்வாறு சீரற்ற முறையில் செயலாற்றுகின்ற திரவங்கள் பல்லின மானவை எனக் காணப்பட்டிருக்கிறது ; எடுத்துக்காட்டாக (**திரவக்கூழ்** போன்ற) ஒரு திரவத்திலே, அதினின்று வேறுபட்ட தன்மையுடைய துணிக் கைகள் பரவிக் கிடக்கலாம் ; மேலும் திரவியமானது கட்டிக் கூழாக இருக்கலாம் ; அதாவது அத்திரவியமானது ஓர் அரைதிண்மமாக ஆவதற்கான அமைப்பைக் கொண்டிருக்கலாம்.

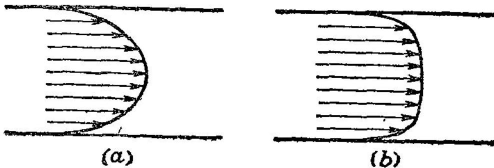
நியூற்றன முறையல்லாத ஒரு திரவத்தின் "தோற்றப் பிசுபிசுப்பு".— நியூற்றன முறையல்லாத திரவமொன்றில் தரப்பட்ட

$$\frac{\text{தகைப்பு}}{\text{வேகப் படித்திறன்}}$$

என்னும் கணியமானது நிலைத்த ஒரு பெறுமானத்தைக் கொண்டிருக் கும் ; அது திரவத்தின் "**தோற்றப் பிசுபிசுப்பு**" எனப்படும். கொய்வு வீதம் கூடும்போது தோற்றப் பிசுபிசுப்பு குறைகினறது என்பது சீரில் திரவங்களின பொதுப் பண்பொன்றுகும்.

இனி, குருதியானது சிறுதுணிக்கைகளைக் கொண்டிருப்பதால் அது ஓர் ஏகவினத திரவமன்று ; ஆனுல் அவை போதிய செறிவில் இராதபடியால் குருதியின் பிசுபிசுப்பானது கொய்வுவீதத்துடன் அவ்வள வாக மாறமாட்டாது. சிலவேளைகளில் அதிலுள்ள துணிக்கைகளை வெறுங் கண்ணுல் மட்டும் அவதானிக்கலாம். ஆனுல் பெரும்பாலும் துணிக்கை கள் அத்துணை சிறிதாயிருக்கிறபடியால் நுணுக்குக்காட்டியொன்றுலுங்கூட அவற்றைக் காணமுடியாது ; இருந்தாலும் திரவததின ஏகவினமின்மை அத்திரவத்தின் ஒளியலைச் சிதறல் ஆறறலால் வெளிப்படுத்தப்படுகின்றது

எவ்வாறு ஒரு குழாயிலே கொந்தளிப்பினறிப் பாய்கினற ஒரு நியூற்றன திரவத்தின் பாய்ச்சல வீதமானது அக்குழாயின குறுக்கே மாறுகின்றது



படம் 12·20. ஒரு திரவம் பாயும் குழாயொன்றிற்குக் குறுக்கே வேகப் பரம்பல் (a) நியூற்றன திரவங்கள், (b) நியூற்றன முறையல்லாத் திரவங்கள் (செருகிப் பாய்ச்சல்).

என்பதைப் படம் 12·20 (a) காட்டுகின்றது. திட்டமான நியூற்றன முறையல்லாப் பாய்ச்சலினிடத்து வேகப்பரம்பல் படம் 12·20 (b) யில்

காட்டப்பட்டிருக்கிறது. குழாயினது குறுக்குவெட்டின் பெரும்பகுதியில் வேகம் கிட்டத்தட்ட மாறிலியாக இருந்து சுவர்களின் அண்மையில் வேகமாறுவீதம் பெரிதாயிருக்கின்றது. எனவே இத்தகைப் பாய்ச்சலானது **செருகிப் பாய்ச்சல்** எனப்படுகின்றது.

இப்பொழுது கருதப்பட்டு வருகின்ற இரு திரவவகைகளுக்குமிடையே யுள்ள வேறொரு முதன்மையான வித்தியாசம் பின்வருமாறு : நியூற்றனின் கருதுகோளின்படி ஓர் ஏகவினத் திரவத்திலே மிக மிகச் சிறிதாயிருக்கக்கூடிய அளவில் கொய்வுவீதம் ஆக்கப்பட்டதும் அத்திரவம் இயங்கத் தொடங்கும் என்பது அத்தகைய ஒரு திரவத்தின் பண்பாகும். இருந்தாலும் திரவத்தில தொங்கியிருக்கின்ற திரவியத்தின் செறிவு உயர்வாயிருக்கும்போது திரவம் அசையத் தொடங்காது, சிறு கொய்வுத் தகைப்புக்களை எதிர்க்கும். திரவியம் பாயத்தொடங்குமுகமாகத் தகைப்பு உயர்த்தப்பட்டால், அப் பாய்ச்சல் எத்தகைப்பில் நிகழ்கின்றதோ அத் தகைப்பானது கருதப்படுகின்ற திரவியத்தின் **இளகுநிலைப் பெறுமானம்** எனப்படும். இவ்வண்ணமே சில இறுகிய பசைகள் நடந்துகொள்கின்றன. அதுபோலவே அச்சுக் கலனொன்றிலே உணவுப் பாகுகளை உருவாக்கிப் பின்பு அச்சுககலனை அப்புறப்படுத்துமிடத்துப் பாகானது பாயுமாறு புவியீர்ப்பு விசைகள் தூண்டுகின்றபோதிலும் அது தன் வடிவத்தைப் பத்திரப்படுத்திக் கொள்கின்றது.

"ஓர் ஊனப்பசைக் களிசலின் வடிவ அமைப்பானது **திரவக்கூழ்** எனனும் நியூற்றன முறையல்லாத ஒரு திரவம வெப்பநிலை குறைதலால் உள்ளமைப்புப்பெற்று இளகுநிலையும் மீள்தன்மையும் கொண்ட **கட்டிக்கூழாக** மாறுகின்றது என்பதற்குரிய கருததைக் கவரும் ஓர் எடுத்துக் காட்டாகும்" என இவ்விடயம் தொடர்பாக **றிச்சேட்சன்** என்பார் குறிப்பிட்டுள்ளார்.† "சமநிலையினின்று கொஞ்சம் பெயர்க்கப்பட்ட பாகானது முன்னும் பின்னுமாக நடுங்கிக் கடைசியாகச் சமநிலையை அடைகின்றது ; இது மேற்படி மீள்தன்மையை எடுத்துக்காட்டுகின்றது. வெப்பமாக்கியோ, சிலவேளைகளில் குலுக்கியோ, கட்டிக்கூழைத் திரவக் கூழாக மாற்றலாம். விட்டுவைக்கப்பட்ட நிலையில் கட்டிக்கூழ்ப் பண்புகள் உடையதும குழப்பமுறும்போது (தற்காலிகமாகத்) திரவக் கூழாய் மாறுகின்றதுமான தொகுதி **தொடனிலை மாறுதன்மையுடையது** எனப்படும். சிறந்த பூச்சானது இவ்வியல்புடையதாயிருத்தல் வேண்டும் ; அப்பொழுது தான் அதை ஒரு பரப்பின்மீது பூசி அல்லது வழுவழுப்பாக விசிறி விட்டால அது சீரான அமைப்பையும் பளபளப்பையும் பெறுகின்றது. மேலும் இப்பூச்சானது பரவவேண்டிய பரப்பில் மெதுவாகப் படியும்போது அது உயர் பிசுபிசுப்பு உடையதாயிருக்கிறது ; (இது இறுதியில் அழகான "தோற்றத்தை" வருவிக்க முயல்கின்றது) ஆனால், விசிறுபம்பி மூக்கினின்று உயர் வேகத்துடன் செலுத்தப்படும்போது அதன் பிசுபிசுப்பு குறைவாக இருக்கிறபடியால் மூக்கிற் சக்தி நட்டங்கள் இழிவாக்கப்படுகின்றன.

† 'Endeavour', 4, இதழ் 14, ஏப்பிரல், 1945.

நியூற்றன முறையல்லாத் திரவங்களைப் பரிசோதனை முறைப்படி ஆராய்தல்.—சீரில்லாப் பிசுபிசுப்பாராய்ச்சியில் அடிப்படைப் பரமானம் கொய்வு வீதமே. எனவே அதில் தெரிந்த வெவ்வேறு கொய்வுவீதங்களை ஆக்கக்கூடிய ஓர் ஆய்கருவியைத் திட்டமிட்டமைக்க வேண்டியிருக்கின்றது. தற்பொழுது இத்துறையிற் போதிய முன்னேற்றம் இல்லாதபடியால் மயிர்த்துளைக் குழாய்களைப் பயன்படுத்த முடியாது. எனவே ஓர் உருளைப் பிசுபிசுப்புமானியைப் பயன்படுத்த வேண்டியதாகிறது. இத்தகைய ஒரு பிசுபிசுப்புமானியிலே உண்மையான திரவமொன்று இருக்கும்போது அத்திரவத்தின் பிசுபிசுப்பு

$$\eta=\frac{b^2-a^2}{4\pi a^2b^2l}\cdot\frac{\Gamma}{\omega_0}$$ [பக்கம் 673 ஐப பார்க்க].

மேலும் η மாறிலியாயின $\frac{\Gamma}{\omega_0}$ உம மாறிலியாகும். பயணபடுத்தப்படுகினற திரவம் நியூற்றன முறையல்லாததொனருயின $\frac{\Gamma}{\omega_0}$ எனபது மாறிலியாகாது.

இவ்வகையான பிசுபிசுப்புமானியிலே கொய்வு வீதம்

$$r\frac{d\omega}{dr}=\frac{\Gamma}{2\pi\eta l}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

பக்கம் 673 ஐப் பார்க்க ; எனவே அது ஆரையின் குறுக்கே மாறுகின்றது. இவ்விடயத்தைப் பற்றி உசாவுமிடதது அன்ட்ரேட் என்பாா பின்வருமாறு கூறியுள்ளார் :—" திரவமானது நியூறறன முறையல்லாததாயின், பிசுபிசுப்புக்கு, வீச்சில் ஏதேனுமொரு சிறப்பியல்பான கொய்வுவீதத்துக்கொத்த பெறுமானமொன்றைப் பெறுகிறேம். எவ்வாறு மிகப் பொருத்தமான பெறுமானத்தை எடுக்கவேண்டும் என்பதே பிரச்சினை ...... ஒவ்வொரு மூலகப் பரப்பையும் அதற்குப் பொருத்தமான வீதத்தால் பெருக்கித் தொகையிட்டுப் பின்பு உருளைகளுக்கிடையேயுள்ள பரப்பளவாற் பிரிதது, கொய்வு வீதத்தின் ஒரு சராசரிப் பெறுமானத்தைப் பெறலாம் ; இம்முறைப்படி

$$\text{சராசரிக் கொய்வுவீதம்}=\frac{\int_a^b 2\pi r.r\frac{d\omega}{dr}.dr}{\pi(b^2-a^2)}$$

$$=\frac{4a^2b^2\omega_0}{(b^2-a^2)^2}\,\text{இ.ம.}\left(\frac{b}{a}\right);$$

அல்லது புறவுருளையின் ஏகபரிமாண வேகத்தை எடுத்து, அதை ஆரையினுல் பிரித்துக் கொய்வுவீதத்துக்கு $\frac{b\omega_0}{b-a}$ என்னும் பெறுமானத்தைப் பெறுகிறேம். இங்கு முந்தியதையே செய்தல் வேண்டும்".

1940 இல், பிறைஸ்–யோன்ஸ் என்பார் படம் 12·21 இல் காட்டியுள்ள ஆய்கருவியைத் திட்டமிட்டமைத்தார். அது உண்மையில் இரட்டை உருளைப் பிசுபிசுப்புமானியாகும் ; அதாவது, வரிப்படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு

படம் 12·21. நியூற்றன முறையல்லாத திரவங்களின் ஆராய்ச்சிக்கான பிசுபிசுப்புமானி.

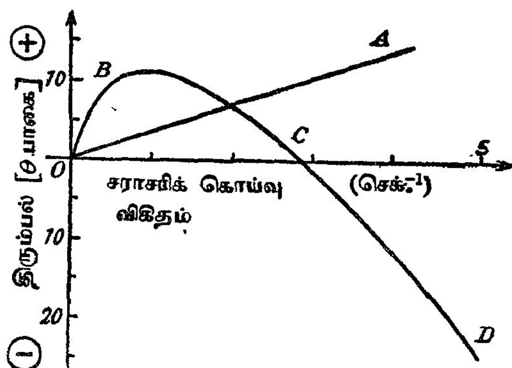
ஒன்று மற்றதற்கு நிலைக்குத்தாய் மேலே அமைந்திருக்கின்ற இரு கூயேற்று பிசுபிசுப்புமானிகளாலானது. மேற்றொகுதியானது தெரிந்த பிசுபிசுப்புடைய ஓர் உண்மையான திரவத்தைக் கொண்டிருக்கிறது ; மற்றையதில் சோதிக்கப்படுகின்ற திரவியம் உண்டு. சுழலா உள் உருளைகள் FC_1, FC_2 என்பன குழிவாடி M ஆனது விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற

அலுமினிய நுகம் FFFF இனால் ஒன்றேடொன்று விறைப்பாகத் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. நுகமானது முறுக்கற்கம்பி TT யினால் தொங்கியிருக்கின்றது.

மாறுவேக மோட்டருடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற கப்பி DP ஆனது தொடர்ச்சியாக மாறும் துணைப்பொறி ஒன்றால் துணைப்பொறிப் பெட்டி GB யைச் செலுத்துகின்றது. முந்தியது வில்லாற் றெழிற்படும் உராய்வுத் தட்டு FD_2 இனாலும் உராய்வுச்சில்லு FW_2 இனாலும் ஆனது. தட்டின் மையம் குறித்துச் சில்லின் நிலையைச் செப்பஞ் செய்யலாம்; எனவே தட்டின் வேகத்தைத் தொடர்ச்சியாக மாற்றலாம். ஆய்கருவியில் எஞ்சி யிருக்கின்ற பகுதியானது இரு பிசுபிசுப்புமானிகளின் வெளியுருளைகளை எதிரான திசைகளில் சுழற்றிவைப்பதற்கு வேண்டிய உபகரணங்களைக் கொண்டுள்ளது. இவ்விரு உருளைகளையும் ஒரே கோண வேகத்தில் அல்லது வரையறுத்த ஆனால் செப்பஞ் செய்யக்கூடிய விகிதத்தில் உள்ள வேகங் களிற் செலுத்தலாம்.

ஒன்றை மேற் பிசுபிசுப்புமானியிலும் மற்றையதைக் கீழுள்ளதிலும் என்றவாறு இரு வெவ்வேறு நியூற்றன திரவங்களைப பயன்படுத்து மிடத்துத் தொங்கிய நுகமானது திரும்பலுறுமல் இருக்கும்வண்ணம் சுழற்சி வேகங்களின் விகிதத்தைச் செப்பஞ் செய்யலாம். விகிதம் மாருதிருக்க, வேகங்களை அதிகரிக்கச் செய்யுமிடத்து அதே விகிதத்தில் கொய்வு விகிதம் அதிகரிக்கிறபடியால் திரும்பல் பூச்சியமாயிருக்கும். மேற்படித் திரவங்களுள் ஒன்று நியூற்றன முறையல்லாத தாயிருந்தால் இது நிகழமாட்டாது.

மேலும், உண்மையான திரவங்களைப் பயன்படுத்துமிடத்து, வெளியுருளை களின் சுழற்சி வேகங்கள் சர்வசமனுயின், படம் 12·22 இல் OA என்னும்



படம் 12·22. ஒரு வேற்றுமையுருளைப் பிசுபிசுப்புமானியில் உண்மையான திரவம், நேரில்முறைத் திரவம் என்பவற்றின் போக்கு.

நேர்க்கோட்டால் காட்டியுள்ளவாறு, திரும்பலானது வேகத்துடன் ஒருபடி முறையில் மாறும். இந்நேர்கோட்டை

$$\theta = \kappa(\eta_T - \eta_S)\,\sigma$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் குறிக்கமுடியும்; இங்கு θ திரும்பலும், κ ஆய்கருவி மாறிலியும், η_S நியமத் திரவத்தின் பிசுபிசுப்பும், η_T சோதிக்கப்படுகின்ற திரவத்தின் பிசுபிசுப்பும், σ சராசரிக் கொய்வு விகிதமும் ஆகும். வழக்குமுறையில், கீழ் உருளையிலுள்ள திரவம் மற்றையதைக் காட்டிலும் உயர்வான பிசுபிசுப்பு உடையதாயிருக்குமிடத்து திரும்பல் நேர் எனக் கருதப்படும்.

அடுத்து, கீழ் உருளையிலுள்ள திரவத்திற்குப் பதிலாகக் கறயாப பிசினின் இரண்டு சதவீத நீர்க் கரைசல் போன்ற நேரில்முறைத் திரவமொன்று வைக்கப்படுக. அப்பொழுது வளையி OBCD பெறப்படுகின்றது. பிசுபிசுப்பானது கொய்வு வீதத்தில் தங்கியுள்ளது என இது உடனடியாகக் காட்டுகின்றது. இவ்வளையியை

$$\theta = \kappa(\eta_\sigma - \eta_S)\,\sigma$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டாற் குறிக்கலாம்; இங்கு η_σ ஆனது ஒத்ததான கொய்வு வீதத்திலே சீரிலலாத் திரவததின் "தோற்றப் பிசுபிசுப்பு" ஆகும். நியூற்றன திரவத்தினிடத்து உள்ளுருளைமீது தாக்குகின்ற இணையானது சுழற்சி வேகத்தின் ஒருபடிச சார்பாகும்; ஆனல் சீரில்லாத் திரவமொன்றினிடத்து, வேகங்கூடுங்கால் கொய்வு வீதத்தைக் குறித்துக் கொய்வுத் தகைப்பின் விகிதமானது குறைகின்றபடியால் இணை அதனினும் மெதுவாகவே கூடுகிறது.

பயிற்சி XII

12·01. விட்டம் $2a$ கொண்ட ஓர் அரைவட்ட நுண்டுளைக் குழாயிலே பாரமான திரவமொன்று கொள்ளப்பட்டிருககின்றது; குழாய நிலைக்குத்துத் தளமொன்றிலும் அதன் முனைகள் கிடைத் தளமொன்றிலும் இருககின்றன; திரவமானது குழாயின் ஒரு கால் வாசியை நிரப்புகின்றது. நிலைக்குத்து விட்டமொன்றைப பற்றிக கோணவேகம் ω உடன குழாயைச் சுழலச்செய்தபோது குழாயின் ஒரு முனைக்குத் திரவம் ஏறிற்று. பரப்பிழுவை விளைவுகளைப் புறககணிக்குமிடத்து

$$a\omega^2 = 2\sqrt{2}\,g$$

என நிறுவுக; இங்கு g, புவியீர்ப்புச செறிவு.

12·02. பாயியொன்றிலே அருவிக்கோட்டியககத்திற்கு

$$g\delta z + u\delta u + \frac{\delta p}{\rho} = 0$$

எனக் காட்டுக; அதிலிருந்து, ρ மாறிலியாயின், $gz + \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} =$ மாறிலி எனக் காட்டுக.

வாயுக்களைப் பொருத்தமட்டில் z ஐப் புறக்கணிக்கலாம். வாயுவொன்றிற்கு $pv^{\gamma}=$ மாறிலி ; இங்கு γ மாறிலி ; அவ்வாயுவுக்கு

$$u^2+Ap^n$$

எனபது மாறிலியாகும் எனக் காடடுக : இங்கு A ஒரு மாறிலியும்,

$$n=1-\gamma^{-1}$$

உம் ஆகும்.

இதிலிருந்து $u=0$ உம் $p=p_1$ உம் ஆய் இருக்கின்ற பாத்திரமொன்றிலிருந்து $u=U$ வும் $p=p_2$ உம் ஆய இருககினற இடமொனறிற்கு இவ்வாயுவானது பாயுங்காலே, அபபொழுது

$$U^2=A(p_1^n-p_2^n)$$

எனக காட்டுக.

12·03. அருவிக்கோடொனறு வழியே பாயியொனறின் அமுககத்தையும் வேகத்தையும் தொடர்புபடுத துகினற கோவையொனறைப் பெறுக (பேணுயீயின தேற்றம்).

குழாயொன்று வழியே திரவமொனறின் பாய்சசல்வீதம் அளத்தலுககான கருவியொன்றை விவரித்துககூறுக ; பேணுயீயின தேற்றத்தை எடுத்துககொண்டு அப் பாயச்சல வீதத்துக்குக் கோவையொன்றைப பெறுக.

கிடையான கண்ணுடிக குழாயொன்றூடே நீர் பாய்கினறது. A என்னுமிடத்தில் குழாயின் ஆரை 2·0 சமீ. ஆகும் ; B எனபதில் அது 0·5 சமீ. ஆகும். பிசுபிசுப்பாலும் கொந்தளிப் பாலும ஆகின்ற சக்தி நட்டங்களைப் புறககணித்து, A யிற்கும் B யிற்கும் இடையேயுள்ள அமுக்க வித்தியாசம் 1·8 சமீ. நீா ஆய் இருக்கும்போது குழாயில நீரின் பாய்ச்சல் வீதத்துக்குப் பெறுமானமொன்றைக கணிகக. [46·7 சமீ.^{3} செக்.$^{-1}$]

12·04. கிண்ணமொனறிலேயுள்ள நீர்த்துணிககைகள அக்கிண்ணத்தின் மையத்திலுள்ள துளையொன்றை நோககி மெதுவாகக கிட்டததட்ட வட்டமான பாதைகளில $u=\dfrac{a}{x}$ என்னும் விதிக்கு இணங்குமுகமாக அசைகினறன ; இஙகு u, துணிக்கையொன்றின வேகமும், x மைய வசசிலிருந்து அததுணிககையின தூரமும், a ஒரு மாறிலியும் ஆகும. நீரின் பரப்பில்

$$z=A-\frac{a^2}{2gx^2}$$

எனக் காட்டுக.

$A=1$ அடி. எனவும், $a=0·75$ அடி^{2} செக.$^{-1}$ எனவும் கொண்டு, வளைபரப்பின் வடிவத் தைத் தருகின்ற வளையியைக் குறிக்க. $(A-z)$ என்பது எதை எடுத்துக்காட்டுகின்றது ?

அதிகாரம் XIII

பிரௌண அசைவு, பிரசாரணம், நீர்க்கரைசல்களில் பரவுகை

மூலக்கூற்றுக் கரைசல்களும் கூழ்க்கரைசல்களும்.—எடுத்துக்காட்டாக, மிகையான நீருடன் வெல்லம் சேர்க்கப்பட்டால் அவ்வெல்லம் கரைகின்றது; கட்புல நிலையிலிருந்து அது கரைசலில் மறைந்துபோகின்றது. ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் சிறிய கனவளவிலேதான் பரிசோதனைகளில் நீர் பயன்படுத்தப்படுகின்றபோதிலும் வெல்லமானது கரைசலில் சீராகப் பரம்பியிருக்கின்றது எனக் காணப்படுகின்றது. கரைதல் முற்றுப்பெற்றதும் கிடைக்கக்கூடிய மிக்க ஆற்றலுடைய நுணுக்குக்காட்டிகூட வெல்லத் துணிக்கை எதையும் உணரமாட்டாது. இச்செய்தியிலிருந்து வெல்லமானது அதனது பிரிக்கமுடியாத கூறுகளாக, அதாவது வெல்ல மூலக்கூறுகளாகச் சிதையப்பட்டிருக்கின்றது என முடிவு செய்யப்படுகின்றது.

மேலும் சோடியங் குளோரைட்டு, வெள்ளிநைத்திரேற்று என்பவற்றின் நீர்க்கரைசல்களை ஒருமிக்கக் கலக்குமிடத்து வெள்ளிக்குளோரைட்டின் வெள்ளையான வீழ்படிவொன்று உடனே உண்டாகி (அதில் இருக்கின்ற) திண்மத் துணிக்கைகள் எல்லைப் பருமனொன்றை அடையும்வரை வளர்கின்றன. இத்துணிக்கைகள் எளிதிற் கட்புலனாகின்றன; புவியீர்ப்பின தாக்கத்தால் அவை ஈற்றிலே கொள்பாத்திரத்தின் அடியிற் படிகின்றன. வெள்ளிக்குளோரைட்டுத் துணிக்கைகள் அத்துணைப் பெரிதாயிருக்கின்ற படியால் அவை வழக்கமான வடிதாளிலுள்ள நுண்டுளைகளூடே செல்லமாட்டா; எனவே வடித்தலால் வீழ்படிவைக் கலவையிலிருந்து அப்புறப் படுத்தலாம். எனினும் 0·01 சதவீதத்தில் பொன்குளோரைட்டைக் கொண்டிருக்கும் நீர்க்கரைசலுடன் மகனீசியாவைச் சேர்த்துச் சற்றுக் காரமாக்கி, அதிற் கொஞ்சம் போமலிடிகைட்டுத் துளிகள் விடும்போது கலவையானது மாணிக்கத்தின் சிவப்பு நிறத்தைப் பெறுகின்றது; இங்கு நீரில் மகனீசியமொட்சைட்டின கரையுந்தன்மை மிகச் சிறிதே என்பது குறித்தற்பாலது. இந்நிறமாதல் உலோகப் பொனனானது நுண்துணிக்கைகளாக இருப்பதால் நிகழ்கின்றது; ஈர்ப்பானது அவற்றைப் படியச் செய்யமாட்டாது; வடிகட்டலாற் பொன்னை நீர்க்கலவையினின்று அப்புறப்படுத்த முடியாது. இதுபோன்ற எடுத்துக்காட்டுக்களில், இரு தெளிவான கரைசல்களின் கலப்பால் உண்டாகின்ற தொங்கற் பொருளானது மூலக்கூற்றுத் திரள்களைக் கொண்டிருக்கின்றது; அவற்றை எங்களுக்குக் கட்புலனாக்குவதற்கும் போதிய ஆற்றலுடைய நுணுக்குக்காட்டிகளில்லை; இருந்தாலும் திரவத்தினூடே செறிவுமிக்க ஒளிக்கற்றையொன்றைச் செலுத்தி அத்

திரவத்தைப் படுகற்றையின் திசைக்குச் செங்குத்தான திசையில் நோக்கினல், சிதறிய ஒளியாலாகின்ற கலங்கல் எளிதிற் காணப்படுகின்றது. திரவவூடகத்தில் சிறிய, ஆனல் மூலக்கூற்றுப் பரிமாணங்கள் கொண்டிராத திரள்கள் தொங்கியிருக்கின்றன என இக்கலங்கலானது உணர்த்துகின்றது. இத்தகைய தொங்கல் **கூழ்க்கரைசல்** எனப்படுகின்றது.

கூழ்க்கரைசலொன்றை ஆக்குகின்றவையும், கிட்டத்தட்ட எல்லா எடுத்துக்காட்டுக்களிலும நீரைக் காட்டிலும் உயர்ந்த அடர்த்தி உடையவையுமான துணிக்கைகள் படிகிறதில்லை என்பதற்குக் காரணங்காணும் பொருட்டு முந்திய அதிகாரத்தில் எடுத்துரைக்கப்பட்ட ஸ்ரோக்சின் விதியை ஞாபகப் படுத்துதல் தேவையாகின்றது (பக்கம் 687 இற் காண்க). அங்கு பிசுக்கு ஊடகமொன்றிலே புவியீர்ப்புக் காரணமாக இறங்குகின்ற சிறு கோளமொவ்வொன்றும

$$u = \frac{2}{9}\frac{(\rho - \sigma)gr^2}{\eta}$$

என்பதால் தரப்படுகின்ற முடிவு வேகமொன்றை அடைகின்றது எனக் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது ; இங்குள்ள குறியீடுகள் அவ்வவற்றின் வழக்கமான கருத்துக்கள் உடையன. 20° ச. இல் நீருக்கு $\eta = 0{\cdot}01$ போயிசு ஆகும் ; அந்நீரில் 10^{-6} சமீ. ஆரையுடைய பொன்துணிக்கைகள் தொங்கியிருக்கும்போது அவற்றின் முடிவுவேகம் 4×10^{-7} சமீ. செக். $^{-1}$ ஆகும் ; அதாவது அத்துணிக்கைகள் நீரில் 1 சமீ. இறங்கும் பொருட்டுக் கிட்டத்தட்ட $2{\cdot}5 \times 10^6$ செக். அல்லது 30 நாள் செல்லல் வேண்டும்.

பிரௌண அசைவு.—கிட்டத்தட்ட 1828 இல், ஆங்கிலேய தாவரவியல் அறிஞர் **பிரௌண்** என்பார் நீரில் தொங்கியுள்ள சில மகரந்தமணிகளை நுணுக்குக்காட்டியொன்றுல் நோக்கினர். இம்மணிகள் பெரிதும் கிளர்ச்சியுற்றுக் கூத்தாடுகின்றன எனவும் அக்கூத்தின் சுறுசுறுப்பானது ஒருபோதும் குறையாது இருக்கின்றதெனவும் அவர் கண்டுபிடித்தார். இத்துணிக்கைகள் தோற்றமளவில் யாதொரு கட்டுப்பாடுமின்றி, நுணுக்குக் காட்டியின் பார்வைப் புலத்தில் இங்கும் அங்குமாக அசைகின்றன எனக் காணப்பட்டது. எவ்வகையான துணிக்கையும், அது போதியவளவு சிறியதாயிருந்தால், இதே குறிப்பிடத்தக்க தோற்றப்பாட்டை வெளிப்படுத்துகிறது என, தொடர்ந்த பரிசோதனைகளால் தெரியவந்தது ; எனவே இத் தோற்றப்பாடு ஏதேனுமோர் உயிர்த்தொடர்பில்லாத காரணமொன்றுலானது எனப் பிரௌண் முடிவு செய்துள்ளார். இவ்வியக்கத்தின் அடிப்படையான காரணம் பற்றிப் பல கருதுகோள்கள் ஆராயப்பட்டபின், தொங்கிய துணிக்கைகளின் ஒழுங்கற்ற இயக்கமானது அத்துணிக்கைகளைச் சூழ்ந்திருக்கின்ற திரவமூலக்கூறுகளின் வெப்பக் கலக்கத்தாலாகின்றது என 1877 இல் **டெலுசோ** (Delsaulx) என்பாரும், 1888 இல் **கூயி** (Gouy) என்பாரும் முடிவு செய்தனர்.

1828 இற்கும் 1905 இற்கும் இடைப்பட்ட காலத்தில் நடாத்தப்பட்ட பல ஆராய்ச்சிகளின் விளைவாக பின்வருவன உறுதிப்படுத்தப்பட்டுள்ளன :

(*a*) தொங்கிய துணிக்கைகள் பெரிதும் ஒழுங்கற்ற இயக்கங்களை ஏற்படுத்துகின்றன எனவும் அவ்வியக்கங்களுக்குக் குறித்த நோக்கமில்லை எனவும்,

(*b*) திரவவூடகத்தின் பிசுபிசுப்பு எவ்வளவு கூடுதலாயிருக்கின்றதோ அத்திரவத்தில் தொங்கிய துணிக்கைகளின் இயக்கம் அவ்வளவு மெதுவாயிருக்கின்றது எனவும்,

(*c*) துணிக்கைகள் எவ்வளவு சிறிதாயிருக்கின்றனவோ அவற்றின் இயக்கம் அவ்வளவு விரைவாயிருக்கின்றது எனவும்,

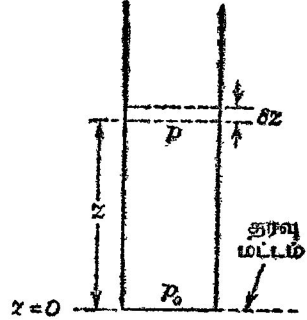
(*d*) தோற்றப்படுகின்ற இயக்கம் தொடர்ச்சியானதும் நிலைபேறுடையதும் எனவும்,

தொங்கிய துணிக்கைகளின் பிரௌண அசைவானது சில படிக வகைகளில் அடைக்கப்பட்டிருக்கின்ற குழிகளிலுள்ள திரவங்களிலும் காணப்படுகினறது எனவும், அக்குழிகளும் அவற்றிலுள்ள திரவங்களும் பல்லாயிரமாண்டு காலமாக அங்கிருந்திருக்க வேண்டும் எனவும் நிலைநிறுத்தப்பட்டுள்ளது.

இவ்வண்ணம் பிரௌண அசைவு எனப்படும் இவ்வசைவானது தனித் தனித் துணிக்கைகளின் ஒரு சிறப்பியல்பாகும் எனவும் துணிக்கையொவ்வொன்றும் அயற்றுணிக்கைகளைச் சாராத வகையில் அசைகின்றது எனவும் நிலைநிறுத்தப்பட்டுள்ளது. இவ்வியக்கமானது நிலையானதாதலால் அதனைப் பேணுவதற்கு வேண்டிய சக்தி முதலானது திரவ மூலக்கூறுகளின் என்றுமுள்ள வெப்பவியக்கத்திலேயே இருத்தல் வேண்டும்.

மேற்படி எண்ணங்களை அடிப்படையாக வைத்துக்கொண்டு, மேற்படி அசைவில், தொழிற்படுகின்ற முறைகளைப் பற்றிய கருத்தொன்றை உருவாக்க முடிகின்றது. திரவ மூலக்கூறுகளுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் தொங்கிய துணிக்கையானது (விகிதம் 10^6 வரிசையில் படுமாறு) பெரிதாயிருந்தால் அத்துணிக்கைமீது நிகழ்கின்ற மூலக்கூற்று மோதுதல் பெரும்பாலும் சீராகவே இருக்கும் ; துணிக்கை எதுவாகிலும் அதன் இயக்கமானது புவியீர்ப்பு, திரவத்தின் பிசுபிசுப்பு ஆகியவற்றால் மட்டுமே நிர்ணயிக்கப்படும். அதனினும் சிறிய துணிக்கைகளிடத்து, நேரவலகொன்றில் மோதுகின்ற துணிக்கைகளின் எண் சிறிதாக இருக்கின்றபடியால் மோதுதலானது குறைவாகவே சீராயிருக்கும் என நிகழ்தகவு விதிகள் உணர்த்துகின்றன. மோதுகின்ற மூலக்கூறுகளின் பரம்பலிலுள்ள இச்சமமின்மையானது தொங்கிய துணிக்கையின் அசைவுக்கு எதுவான விசையொன்றைத் தோற்றுவிக்கின்றது ; தரப்பட்ட எந்த எடுத்துக்காட்டிலும் துணிக்கையின் இயக்கமானது அத்துணிக்கை அசையும் ஊடகத்தின் பிசுபிசுப்பால் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது.

பிரௌண அசைவுகளும் லப்பிலாசின் வளிமண்டல விதியும்.—பதார்த்தமொன்று கரைசலிலிருக்கும்போது கரைந்த அப்பதார்த்தத்தின் மூலக்கூறுகள் பலவகைகளிற் சுயாதீன வளியில் இலட்சிய வாயுவொன்றின் மூலக்கூறுகள்போல் தடையின்றி அசைகின்றன எனக் கரைசல்களின் பௌதிகவிரசாயனவியல் தொடர்பாக நடாத்தியுள்ள பல ஆராய்ச்சிகளிலிருந்து முடிவு செய்யப்பட்டுள்ளது. பிரௌண அசைவுக்கு ஆளாகின்ற தொங்கிய துணிக்கைகளை மேலும மெற்றிடமாக இருக்கின்ற இடத்திலுள்ள மூலக்கூறுகளாலாகும் வாயுமண்டலமொன்றுடன ஒப்பிடலாம் என இனிக் கொள்வோம். ஆனாலும் ஆராய்ச்சியைத் தொடர்ந்து நடாத்தும் பொருட்டு **லப்பிலாசின் வளிமண்டல விதியை** அறிமுறைப்படி நிறுவ வேண்டியதாகின்றது.



படம் 13·01. லப்பிலாசின் வளிமண்டல விதி.

இதன் பொருட்டுப் படம் 13·01 இற் காட்டியுள்ள உயர்ந்த நிலைக்குத்தான உருளைப் பாத்திரமொன்றில் அடைக்கப்பட்டிருக்கின்ற இலட்சிய வாயுவொன்றைக் கருதுக. பாத்திரத்திலே, உயரம் z இல், அமுக்கம் p ஆகுக. உயரம் $z+\delta z$ இலே அமுக்கம் $p+\delta p$ ஆகுக. அப்பொழுது g புவியீர்ப்புச் செறிவும், ρ அமுக்கம் p யில் வாயுவின் அடர்த்தியுமாயின்

$$\delta p = -g\rho\,\delta z = -g\frac{M}{V}\delta z$$

எனப் பெறுவோம் ; இங்கு M கிராமூலக்கூறு அல்லது மூலொன்றின் திணிவும், V ஆனது அமுக்கம் p யில் வாயுவின் மூலொன்றுற் கொள்ளப்படும் கனவளவும் ஆகும். மேலும்

$$pV = RT$$

என்பதும் தெரிந்ததே ; இங்கு T வாயுவின் தனிவெப்பநிலையும், R அகில வாயு மாறிலியும் ஆகும்.

$$\therefore\ \frac{\delta p}{p} = -\frac{Mg}{RT}\delta z\,;$$

தொகையீட்டால் இது,

$$p = p_0\ \text{அடுக்.}\left(-\frac{Mg}{RT}z\right)$$

ஆகின்றது; இங்கு p_0 தரவுமட்டத்தில், அதாவது $z=0$ இல் வாயுவின் அமுக்கமாகும். தொகையிடலில் வெப்பநிலையானது எங்கும் அதே மாறாப் பெறுமானம் உடையது எனக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

மேலும், முறையே உயரம் z இலும் தரவு மட்டத்திலும் கனவள வலகொன்றிலேயுள்ள துணிக்கைகளின் எண்ணிக்கைகள் n, n_0 என்பன p யிற்கும் p_0 இற்கும் நேரடி விகிதசமனுதலால்

$$n = n_0 \text{ அடுக்.} \left(-\frac{Mg}{RT}z\right) = n_0 \text{ அடுக்.} \left(-\frac{mNg}{RT}z\right)$$

எனப் பெறுகிறேம் ; இங்கு N அவகாதரோவின் மாறிலி, அதாவது கிரா மூலக்கூறென்றிலுள்ள மூலக்கூறுகளின் எண், m மூலக்கூறென்றின் திணிவு ஆகும்.

இதுவே லப்பிலாசின் பெயர்பெற்ற வளிமண்டல விதி ; எவ்வாறு வாயுமண்டலமொன்றிலே கனவளவலகொன்றிலிருக்கின்ற துணிக்கைகளின் எண்ணிக்கையானது உயரத்துடன் மாறுகின்றது என்பதை அது திட்டமாக எடுத்துரைக்கின்றது.

உண்மையான வாயுமூலக்கூறென்றின் திணிவானது மிக மிகச் சிறி தாயிருக்கின்றபடியால் அளக்கக்கூடிய அளவில் அடர்த்தி மாறவேண்டு மானுல் அதிகமான உயரங்கள் அடைந்தாகவேண்டும் என்பது மேற்படி வாதத்திலிருந்து தெளிவாகும். மற்றப்படி வெல்ல மூலக்கூறுகள் போன்ற வற்றிற்கு, அம்மூலக்கூறுகளினது பரம்பலின் அடர்த்தியில் நைதரசனின் அடர்த்தியில் தரப்பட்ட மாறலொன்றிற்குச் சமமான பின்னமாற்றம் அடையும் உயரமானது நைதரசனில் அதற்கு ஒத்த உயரத்தின் அடு (0·1) மடங்காகும். வெல்லமூலக்கூறுகளினது திணிவின் 10^5 மடங்கு திணிவுடைய கூழ்த்துணிக்கைகளிடத்து, பரம்பலின் செறிவில் குறிப்பிட்ட பின்ன மாற்றமொன்று ஒருசில மில்லிமீற்றரில் தோன்றும் ; ஆனுல், உண்மையான வாயுமண்டலமொன்றில் அதற்கு ஒத்த மாற்றத்தை உண்டு பண்ண உயரத்தில் பல கிலோமீற்றர் மாற்றம் வேண்டியதாகின்றது.

வாயுவொன்றிலே உயரத்துடன் மூலக்கூறுகளின் பரம்பலே எடுத்துரைக் கின்ற லப்பிலாசின் சமன்பாட்டைக் கூழ்த்துணிக்கைகளிடத்துப் பயன் படுத்துமுன், துணிக்கையொவ்வொன்றும் மிதப்புறுகின்றது என்பதை ஞாபகப்படுத்தல் வேண்டும் ; எனவே g யிற்குப் பதிலாக $\left(1-\frac{d}{D}\right)g$ யைப பிரதியிடல் வேண்டும் ; இங்கு d திரவத்தின் அடர்த்தியும், D துணிக்கைகளின் அடர்த்தியும் ஆகும். அப்பொழுது,

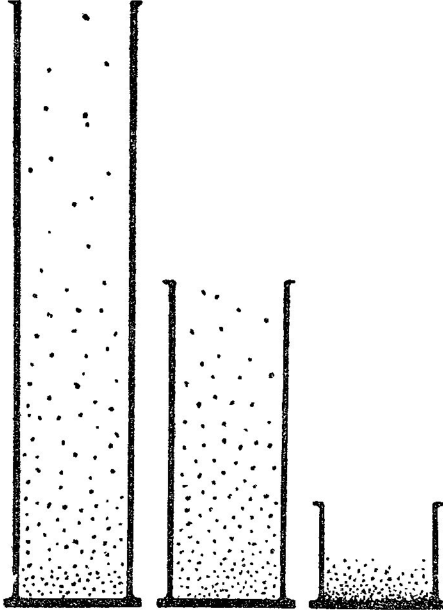
$$\frac{n}{n_0} = \text{அடுக்.} \left[-\frac{N}{RT}m\left(1-\frac{d}{D}\right)gz\right] = \text{அடுக்.} \left[-\frac{N}{RT}U(D-d)gz\right],$$

இங்கு U துணிக்கையொன்றின் கனவளவு ஆகும். மேற்படி சமன்பாட்டை

$$\text{இ.மட.} \frac{n_0}{n} = \frac{N}{RT}U(D-d)gz$$

என எழுதலாம்.

$n = n_0$ அடுக். $\left(-\frac{Mg}{RT}z\right)$ என்னும் கோவையானது தரப்பட்ட ஐதாக்க லொன்றை ஆக்குதற்குத் தேவையான ஏற்றம் கருதப்படுகின்ற வாயு வின் இயல்பைப் பொறுத்துள்ளது எனக் காட்டுகின்றது. அல்லாமலும் Mz மாறிலியாக இருக்குமிடத்து $\frac{n}{n_0}$ என்னும் பின்னமும் மாறிலியா கும். இது வாயுவொன்றின் மூலக்கூற்று நிறையானது வேறொன்றின் மூலக்கூற்று நிறையின் பதினாறு மடங்கு ஆயின், அதே ஐதாக்கலை உண்டாக்குமிடத்து முதல்வாயுவில் வேண்டிய ஏற்றம் இரண்டாவதில் வேண்டிய ஏற்றத்தின் பதினாறின் ஒரு பங்காகும் (அ–து. 16 மடங்கு குறைவாகும்) என உணர்த்துகின்றது. 0° ச. இலுள்ள ஒட்சிசனில் அதன் அடர்த்தியை அரையாக்கும் பொருட்டு 5 கிமீ. ஏறவேண்டியதாதலால் 0° ச. இலுள்ள ஐதரசனில் அதே பின்னவொடுக்கத்தையிட்டு 80 கிமீ. உயரம் அடைதல் வேண்டும்.



படம் 13·02. மிகவும் உயர்ந்த வாயுச்சாடிகளில் சம எண்ணிக்கையில் இருக்கின்ற ஐதரசன், ஈலியம், ஒட்சிசன் மூலக்கூறுகளின் பரம்பல்.

படம் 13·02 ஆனது மிகவும் உயர்ந்த நிலைக்குத்தான மூன்று சாடிகளை எடுத்துக்காட்டுகின்றது (அவற்றுள் உயரம் மிக்கதன் உயரம் 300 கிமீ.

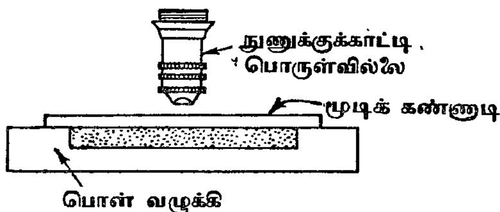
ஆகும்) ; அவை முறையே ஐதரசன், ஈலியம், ஒட்சிசன் ஆகியவற்றின் மூலக்கூறுகளை சம எண்ணிக்கையிற் கொண்டிருக்கின்றன. வெப்பநிலை மாருதது எனக் கருதினுல், படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு மூலக்கூறு கள் பரம்பியிருக்கும் ; மூலக்கூறுகளின் திணிவு எவ்வளவு கூடுதலா யிருக்கின்றதோ அவ்வளவு நெருங்கியே சாடியின் அடியில் அம்மூலக் கூறுகள் கிடக்கும்.

மேற்படி வாதத்தை நுணுக்கமாக ஆராயுங்காலே திரவமொன்றில் தொங்கியுள்ள துணிக்கைகளிடத்து இலட்சியவாயு விதிகளைப் பிரயோகித் துள்ளோம் எனக் காணப்படுகின்றது. இது சரியெனக் காட்டும்பொருட்டு மக்ஸ்வெலின் சக்திச்சமபங்கீட்டுத் தேற்றததைப் பயன்படுத்துதல் வேண் டியதாயிற்று. மக்ஸ்வெலினது கருத்தின்படி இயக்கச் சமநிலையிலிருக் கின்ற தொகுதியொன்றின் சக்தியானது சாத்தியமான எல்லாச் சுயாதீனப் படிகளுக்குமிடையே சமமாகப் பங்கிடப்பட்டிருக்கின்றது. இவ்வாறு ஐதரசன் ($_1H^1$) உடன் கலக்கப்பட்டிருககினற புரோமீன் ($_{35}Br^{80}$) ஆவி என்பதற்கு புரோமீன் மூலக்கூறென்றின் சராசரிச் சக்தியானது ஐதரசன் மூலக்கூறென்றின சராசரிச் சகதிக்குச் சமன ; இங்கு துணிககை களின் திணிவுகள் எணபதுக்கு ஒன்று எனனும விகிதத்தில் இருக்கின் றன. திணிவு இன்னும் கூடுதலாயிருக்கின்ற வாயுமூலக்கூறுகளிடத் தும் மேற்படி தேற்றம் வழுவாதிருக்கின்றது ; மாண்மூலக்கூறுகள், எனவே தொஙகிய நுண் கூழ்த் துணிக்கைகளிடத்து அத்தேறறம் வழங்கும் என்பதை ஐயுறுவதற்கு இடமேயில்லை. இதிலிருந்து அறியக் கிடக்கின்றது யாதெனில், அத்தகைய துணிக்கைகள் இலட்சியவாயுக்களின் விதிகள் வலிதாகும் மிகவும் ஐதான ஒரு வாயுவாகுமெனக் கருதலாம் என்பதேயாம்.

வளிமண்டல விதியைப் பெறின் (Perrin) பரிசோதனைமுறையால் ஆராய் தல்.—லப்பிலாசின் விதிபற்றிய பரிசோதனையாராய்ச்சிக்குப் பெரிக்கைத ரொட்சைட்டு, ஆசனிக்குச் சல்பைட்டுப்போன்ற திரவியங்களின் கூழ்க் கரைசல்கள் தகுந்தவையன்று எனப் **பெறின்** என்பார் கண்டார் ; எனவே அவர் கம்பச்சு அல்லது மரப்பிசினின் குழம்பைப் பயன்படுத்தி ஞர்.

உலர்ந்த தாவரப்பாலொன்றிலிருந்து ஆக்கப்பட்ட கம்பச்சை அற்க கோலிற் கடைந்தால் அந்தப் பண்படுத்தாத திரவியத்தில் ஐந்தில் நான்கு விகிதத்தில் இருக்கின்ற மஞ்சட்பொருளானது கரைந்துவிடும். கரைசலுடன் மிகையான நீரைச் சேர்த்தபோது மிகச்சிறிய கோளங்கள் கொண்ட குழம்பொன்று தோன்றிற்று. அடுத்து இக்குழம்பு மைய நீக்கியொன்றிலே பலமாகச் சுழற்றப்பட்டது ; இவ்வண்ணம் தூய்தாக்கி வந்த குழம்பிலிருந்து அதே பருமனுடையவையும் கருதப்பட்ட பரிசோத னைக்குத் தகுந்தவையுமான சிறு கம்பச்சுக் கோளங்களைப் **பெறின்** பெற்றுக்கொண்டார்.

துணிக்கைகளின் அடர்த்தியானது மூன்று வெவ்வேறான முறைகளால் பின்னர் துணியப்பட்டது ; அவையாவும் இசைவுள்ள பேறுகளை, அதாவது $D = 1\cdot194$ கி. சமீ.$^{-3}$ என்பதைத் தந்துள்ளன. சிறுகோளமொன்றின் கனவளவைத் துணியும்பொருட்டு, அச்சிறுகோளங்களாலான நீண்ட நிரலொன்றின் நீளம் அளக்கப்பட்டது; ஸ்ரோக்சின் விதியைப் பயன்படுத்தி அப்பேறு சரிபிழை பார்க்கப்பட்டது.

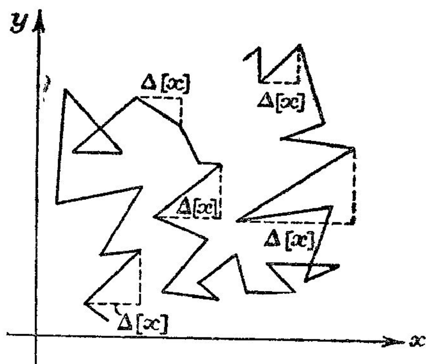


படம் 13·03. அவகாதரோவின் மாறிலியைத் துணிதற்குப் பெறினின் முதலாவது முறை.

அடுத்து படம் 13·03 இற் காட்டியுள்ளவாறு தேர்ந்த துணிக்கைகளைக் கொண்டிருக்கின்ற குழம்பானது சிறு கலமொன்றில் வைக்கப்பட்டது ; நீர்த்தொட்டியொன்றால் அக்கலமானது மாறா வெப்பநிலையிற் பேணப் பட்டது. பின்பு கலமும் அதன் உடன்மூட்டுக்களும் நுணுக்குக்காட்டி யொன்றின் மேடையில் வைக்கப்பட்டுச் சிறு நுண்டுளைத் தடுப்பொன்றால் பார்வைப் புலமானது ஒடுக்கப்பட்டது. அதே நேரத்தில் ஐந்து அல்லது ஆறு மணிகளுக்கு மேலாகக் காணப்படாதவாறு பார்வைப் புலத்தின் பரப்பளவு அமைந்திருந்தது. ஒழுங்கான காலவிடைகளில் பார்வைப் புலம் நோக்கப்பட்டு அவ்வப்போது காணப்படுகின்ற துணிக்கைகளின் எண்ணிக்கை குறிக்கப்பட்டது. பெரும் எண்ணிக்கையான நோக்கல்களின் சராசரி கணிக்கப்பட்டுள்ளது. அடுத்து, நுணுக்குக்காட்டியை உயர்த்தி அப்பொழுது குழம்பிலுள்ள புது மட்டத்தில் மீண்டும நோக்கல்கள் எடுக்கப்பட்டன. இப்பரிசோதனைகளால் வளிமணடல விதியின் உண்மை நிறுவப்பட்டது ; மேலும் அவகாதரோவின் மாறிலி N இன் பெறுமானமானது $6\cdot5 \times 10^{23}$ மூல் $^{-1}$ இற்கும் $7\cdot2 \times 10^{23}$ மூல்.$^{-1}$ இற்கும் இடையேயுள்ள வீச்சின்பாற்படு கின்றது எனக் காணப்பட்டது.

தரப்பட்ட நேரமொன்றிலே பிரௌண அசைவுறுகின்ற துணிக்கைகளின் பெயர்ச்சி ; அயின்ஸ்ற்றைனின் சமன்பாடும் அதன் உண்மை நிறுவலும்.— பருமன் அத்துணை மிக்கதாயில்லாத துணிக்கையொன்றானது திரவமொன் றிலே தொங்கியிருக்கும்போது, மூலக்கூற்று மோதுதலின் விளைவாக அது சமப்படுத்தாத விசைகளால் தாக்கப்படுகின்றது எனக் கடந்த பந்திகளில் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. இச்சமப்படுத்தா விசைகளின் விளையுள் முடிவுள்ள பெறுமானம் உடையதாதலால் துணிக்கையானது திரவத்தில் அசைகின்றது;

அப்பொழுது அது திரவத்தில் இங்கும் அங்குமாகத் திரியும்போது அதனது இயக்கமானது பிசுபிசுப்பு விசைகளால் தடைசெய்யப்படுகின்றது. நோக்கலுக்கு நுணுக்குக்காட்டியொன்று பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது ; அதனது பார்வைப் புலத்தில் இரு செங்குத்தான நேர்கோட்டுத் தொகுதிகள் உள ; ஒவ்வொரு தொகுதியிலுமுள்ள கோடுகள் சமாந்தரமாகவும் சமதூரமாகவும் இருந்தன. எனவே தரப்பட்ட நேரமொன்றில் எந்தத் துணிக்கையின் நிலையையும் குறிக்கமுடிந்தது. துணிக்கையொன்றைத் தேர்ந்து அதன் நிலையானது தேர்ந்த காலவிடைத் தொடர்ச்சி ஏதேனுமொன்றிலுள்ள இடைகளின் முடிவுகளிற் குறிக்கப்பட்டுள்ளது ; 30 செக்கன் ஒரு வசதியான காலவிடையாகும். இவ்வாறு இக்கால



படம் 13·04. பிரௌண கோலமொன்றிலிருந்து $\overline{\Delta [x]}$.

விடையில் துணிக்கையொன்று அசைந்துள்ள தூரத்தின் சராசரி $\overline{\Delta [x]}$ என்பதைத் துணியலாம், படம் 13·04. இவ்வசைவுக்கான கொள்கையொன்றை ஏற்படுத்தும் பொருட்டுக் குறிப்பிட்ட நேரமொன்றில் துணிக்கை அசைந்துளள சராசரித் தூரமானது அத்துணிக்கைமீது தாக்குகின்ற விசைகளைப் பொறுத்துள்ளது எனக் கொள்ளல் வேண்டும் ; அவ்விசைகள் பிசுக்கு ஊடகமொன்றிலே துணிக்கையின் இயக்கத்தினாலும், எல்லாத் திசைகளிலிருந்தும், ஆனால் சரியாக, சீராக அல்லாமல், அத்துணிக்கைமீது மோதுகின்ற திரவமூலக்கூறுகளாலும் ஆகின்றன. இவ்வெடுகோள்களைக் கொண்டிருக்கின்ற கொள்கையுடன் பரிசோதனைப் பேறுகள் ஒத்திருந்தால், அப்பொழுது அவ்வடிப்படையான எடுகோள்கள் சரியெனக் கொள்ளப்படும். அன்றியும் நோக்கல்களிலிருந்து அவகாதரோவின் மாறிலிக்குப் பெறுமானமொன்றைப் பெறமுடிகின்றது எனக் காணப்படும் ; அப்பெறுமானமானது அம்மாறிலிக்கு வேறான முறைகளால் பெற்ற பேறுகளுடன் ஒத்திருக்குமாயின் கூடுதலான உறுதிப்பாடு கிடைக்கும்.

இக்கொள்கையானது முதன்முதலாக அயின்ஸ்றறைன் என்பவரால் 1905 இல் தரப்பட்டது ; சற்றுப் பின்னர் அது ஸ்மொலுக்கௌஸ்க்கி (Smoluchowski) என்பவரால் விரிவாக்கப்பட்டது. 1908 இல், லஞ்சுவின் (Langevin) என்பார் அதை எளிதாக்கினூர் ; அவரது உரையானது பின்வருமாறு. தரப்படட நேரமொன்றிலே x, y, z என்பவை துணிக்கை யொன்றின் தெக்காட்டினுள்கூறுகளைக் குறிக்க ; இங்கு உற்பத்தியானது, $t=0$ என்னும் நேரத்தில் துணிக்கை இருந்த இடத்திலே எப்பொழுதும் இருக்கும். நேரம் t யில், x – அச்சு வழியே துணிக்கையின் இயக்கம்

$$m\ddot{x} = \mathrm{X} - b\dot{x}$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் தரப்படுகின்றது ; இங்கு X, மூலககூற்று மோதுகையால x – அச்சு வழியே துணிக்கை அனுபவிக்கின்ற விளையுள் விசையின் கணக்கூறும், b யைக் கொண்டிருக்கின்ற உறுப்பானது பிசுக்கு ஊடகமொன்றிலே துணிககையின் இயக்கத்தால் ஆகின்ற அமர்முடுகல் விசையும் ஆகும். X ஆற் குறிக்கப்படுகின்ற விசையின் பெறுமானமானது பெரிதும ஒழுங்கற்றதாயிருககும் ; அது அதே முறையில் நேராகவும் மறையாகவும் இருக்கின்றது. மேலும துணிக்கையானது ஆரை a யுடைய ஒரு சிறு கோளமாயின் அப்பொழுது ஸ்ரோக்சின் விதிப்படி $b=6\pi a\eta$ ஆகும் ; இஙகு η திரவததின் பிசுபிசுப்பாகும்.

பிரௌணை அசைவுகளில் இடபபெயர்ச்சிகளின குறியைக் கருதாமல் அவற்றின் பெறுமதிகளில் மடடுமே நாம் அக்கறையுடையோமாதலின் x^2, $(\dot{x})^2$ ஆகியவற்றுடன் சம்பநதப்பட்டிருக்குமாறு மேற்படி சமன்பாட்டை மாற்றுதல் விரும்பததக்கது, எனவே மேற்படி சமன்பாட்டை முற்றிலும் $x\,dt$ என்பதால் பெருககிப் பின் அதைத் தொகையிட்டு

$$m\int_0^t x\ddot{x}\,dt = \int_0^t \mathrm{X}x\,dt - b\int_0^t x\dot{x}\,dt$$

எனப் பெறுகிறோம்.

இனி $x\dot{x}\,dt = d\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$; மேலும், $\int_0^t x\ddot{x}\,dt$ என்பதைப் பகுதிகளாகத் தொகையிடலாம ; உண்மையில் அது $\left[x\dot{x}\right]_0^t - \int_0^t \dot{x}^2\,dt$ ஆகும். எனவே

$$m\Delta\left[x\dot{x}\right] - m\int_0^t \dot{x}^2\,dt = \int_0^t \mathrm{X}x\,dt - \tfrac{1}{2}b\Delta\left[x^2\right]$$

எனப் பெறுகிறோம் ; இங்கு $\Delta[\alpha]$ என்பது $t=0$ இலிருந்து $t=t$ வரையுள்ள காலவிடையில் α வின் பெறுமானத்தில் உண்டாகின்ற மாற்றமாகும்.

இனி $\int_0^t \dot{x}^2\,dt = \overline{\dot{x}^2}t$; இங்கு $\overline{\dot{x}^2}$ அதே காலவிடையில் $\dot{x}^2$ இன் சராசரிப் பெறுமானமாகும். மற்றைப்படி, $\dot{x}$ வேகமாக ஏற்றவிறக்கமுறுகின்றபடியால், $\Delta[x\dot{x}]\to 0$ எனக் காட்ட முடிகின்றது. மேலும் X, அதே முறையில்

நேராகவும் மறையாகவும் இருக்கின்றபடியால் $\int_0^t \mathrm{X}x\,dt$ என்னும் தொகை யீட்டைப் பெருந்தொகையான துணிக்கைகளிடத்துச் சராசரிப்படுத்தினால் அது பூச்சியத்தை நாடும். எனவே எமது வாதத்தில் பெருந்தொகையான துணிக்கைகள் மட்டுமே கருதப்பட்டால்

$$m\overline{\dot{x}^2}t = \tfrac{1}{2}b\overline{\Delta[x^2]}$$

எனக் காண்போம் ; இங்கு கருதப்படுகின்ற எல்லாத் துணிக்கைகளிடத்தும் $\Delta[x^2]$ என்பதைச் சராசரிப்படுத்தி வருகின்றதையே $\overline{\Delta[x^2]}$ என்பது குறிக்கின்றது.

மேலும் அண்ணளவாக $p\mathrm{V} = \mathrm{RT} = \frac{1}{3}\mathrm{N}m\overline{c^2}$; இங்குள்ள குறியீடுகள் அவ்வவற்றின் வழக்கமான கருத்துக்கள் உடையன. எனவே துணிக்கை யொன்றின் சராசரியியக்கச் சக்தியானது $\frac{3}{2}\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{N}}$ ஆகும். இனி x – திசையிலுள்ள இயக்கத்துக்கு மட்டுமுரிய இயக்கச் சக்தியானது துணிக்கையொன்றின் முழு இயக்கச் சக்தியின் மூன்றில் ஒன்று அல்லது $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{N}}$ ஆகும். எனவே மேற்படி சமன்பாட்டை

$$\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{N}}t = \tfrac{1}{2}(6\pi a\eta)\,\overline{\Delta[x^2]}$$

அல்லது

$$\overline{\Delta[x^2]} = \frac{\mathrm{RT}t}{3\pi a\eta\mathrm{N}}$$

என எழுதலாம்.

துணிக்கைகள் கோளவடிவு உடையவை எனவும் அவற்றிற்கிடையே தம்முட் கவர்ச்சியில்லை எனவும் கொள்ளப்பட்டிருககிறபடியால் மேற்படி அறிமுறைச் சூததிரமானது பரிசோதனைப் பேறுகளுடன் திட்டமாக ஒத்திருக்கும் என்பதை எதிர்பார்க்கலாகாது என **ஸ்மொலுகௌஸ்க்கி** வற்புறுத்தியிருக்கின்றார்.

உண்மையிலே பரிசோதனைமுறை ஆராய்ச்சியில் $\overline{\Delta[x]}$ இற்கு முதலிற் பெறுமானம் காணப்படுகிறது ; அடுத்துத் தொடக்க இயக்கப்பாட்டுக் கொள்கை தருகின்ற தொடர்பு

$$\overline{\Delta[x]} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\overline{\Delta[x^2]}}$$

என்பதைப் பயன்படுத்தி அதற்கு ஒத்திருக்கின்ற $\overline{\Delta[x^2]}$ இன் பெறுமானம் கணிக்கப்படுகின்றது.

வாயுக்களில் பிரௌண அசைவு ; அயின்ஸ்ற்றைனின் சமன்பாட்டுக்கு மிலிக்கனின் திட்டமான செவ்வைப்பார்ப்பு.—எங்கே ஸ்ரோக்சின் விதி வழங்குமோ அஙகே அயின்ஸற்றைனின் சமன்பாடும் செல்லுபடியா கிறதால், திரவங்களில் தொங்கியிருக்கின்ற துணிக்கைகளிடததுப்போல வாயுக்களில் தொங்கியிருக்கின்ற துணிக்கைகளிடத்தும் பிரௌண அசைவை

எதிர்பார்க்கலாம் என முதலாவதாகச் சுட்டிக் காட்டினவர் ஸ்மொலுகௌஸ்க்கி என்பவரே. வாயுக்களில் துணிக்கைகளின் பிரௌண அசைவின் நேரடி யான அளத்தல் முதன்முதலாக ஏரன்காஃப்ற் என்பவரால் 1907 இற் செய்யப்பட்டது. கொள்கையானது காட்டியுள்ளவாறு இவ்வியக்கம் சுறு சுறுப்புமிக்கது என அவர் கண்டுகொண்டார்.

வாயுக்களில் பிரௌண அசைவுகள் பற்றிய பரிசோதனைகளில் மிலிக்க னும் அவருடன் சேர்ந்து உழைத்தவர்களும் 1911 ஆண்டளவிலே அடைந் துள்ள திருத்த முன்னேற்றத்தின் விளைவாக அவகாதரோவின் மாறிலிக் குப் பெரிதும் நம்பக்கூடிய பெறுமானமொன்றைப் பெறமுடிந்தது. அளவைகளில் இக்குறிப்பிடத்தக்க திருத்த முன்னேற்றத்திற்கான காரணங் கள் பின்வருமாறு: பெறினின் ஆராய்ச்சி முழுவதிலும் இறுதிப் பேற்றின் திருத்தத்துக்குத் துணிக்கையின் ஆரையைத் திட்டமாகத் துணிதலின் அருமைப்பாடானது பெரும் தடையாயிருந்தது. மேலும் ஸ்ரோக்சின் விதியினது உண்மை பற்றி ஐயமுற வேண்டியதாயிற்று. திரவங்களிடத்து மட்டுமே ஸ்ரோக்சின் விதி செல்லும் எனப் பெறின்கூட நம்பியிருந்தார். கடைசியாகக் கூழ்நிலைத தொங்கல்களையும் வாயுமூலக்கூறுகளையும் ஒப் பிட்டுப்பெற்ற சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தியே கணித்தல் செய்யப்பட்டது எனபதை ஞாபகப்படுத்தல் வேண்டும். வளி அல்லது ஐதரசனில்லா எண்ணெய்த் துளிகளைப் பயன்படுத்தி மிலிககன் மேற்படி மறுப்புக்களை நீக்கினர். துளியொவ்வொன்றும் கோளமாகும்; தேர்ந்த எந்தத்துளி யின் ஆரையும் அவரது சிறப்புவாய்ந்த இலத்திரனேற்றந் துணிதலில் இவ்வாராய்ச்சியாளர் விரிவாக்கியுள்ள முறையால் துணியப்பட்டது.

இஙகு கருதப்படுகின்ற ஆராய்ச்சியில் துளிக்கு ஏற்றம் அளித்து கீழ்வருகின்ற விடயங்கள் பரிசோதனையால் ஆராயப்பட்டுள்ளன:

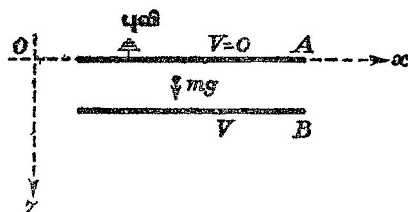
(*a*) வாயுவில்லாத் துளியானது தொங்கியிருக்கும்போது அதனது பக்கமான பிரௌண பெயர்ச்சிகள்; அதன்பொருட்டுத் தக்கவாறு தேர்ந்த மின்புலமொன்றால் துளியின் நிறை சமநிலையாக்கப்பட்டுள்ளது.

(*b*) புவியீர்ப்பு மட்டும் ஆற்றும்போது துளியின் இறக்கவீதம்.

(*c*) மின்புலமொன்றிலே ஏற்றம் பெற்ற துளிமீது தாக்குகின்ற விசையானது புவியீர்ப்பை எதிர்க்கும்போது துளியின் இறக்க அல்லது ஏற்ற வீதம்.

இப்பரிசோதனைக்கான கொள்கை பின்வருமாறு. படம் 13·05 இல், A யும் B யும் முறையே ஒடுக்கியொன்றின் மேற்றட்டும் கீழ்த்தட்டும் ஆகுக; அவ்விரு தட்டுக்களிடையே திணிவு m உடைய துளியொன்று இருக்கின்றது எனக்கொள்க. ஒடுக்கியின் தட்டுக்கள் கிடையாக இருக் கின்றபடியால் மின்புலமானது புவியின் ஈர்ப்புப் புலத்திற்குச் சமாந்தர மாதல் வேண்டும். துளியின் இயக்கமானது Ox, Oz என்னும் செங் கோண அச்சுக்களைக் குறித்து ஆராயப்படுக. எல்லாக் கணியங்களும்

அட்சரகணித முறைப்படி கருதப்படும். கீழ்த்தட்டின் அழுத்தம் V ஆகுக. அப்பொழுது மின்புலமானது $\overrightarrow{E}=\hat{i}0+\hat{j}0+\hat{k}E$ என்பதாகும்; இங்கு, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ என்பன மூன்று அலகுக்காவிகளாகும். துளிமீதுள்ள



படம் 13·05. இடையான ஒடுக்கியொன்றின் தட்டுக்களுக்கிடையே ஏற்றம்பெற்ற துளியொன்றின் இயக்கம்.

ஏற்றம் q ஆகுக. அப்பொழுது மின்புலம் ஆற்றும்போது துளி ஆர்முடுகலின்றி அசைகின்றபடியால் அதனது இயக்கமானது

$$qE+mg-b(\dot{z})_F=0$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது. இச்சமன்பாட்டில் m ஆனது துளியின் திணிவும், b யானது ஏற்கெனவே வரையறுக்கப்பட்ட கணியமும், g யானது புவியீர்ப்புச் செறிவும் $(\dot{z})_F$ ஆனது மின்புலம் பிரயோகிக்கப்படுமிடத்துத் துளியின் வேகமும் ஆகும்.

மின்புலமானது பிரயோகிக்கப்படாதபோது இயக்கம்

$$mg-b(\dot{z})_0=0$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது.

மிலிக்கன் தேர்ந்த துளிக்கு $q=$ இலத்திரனேற்றம் e ஆகும். அப்பொழுது

$$b=\frac{eE}{(\dot{z})_F-(\dot{z})_0}.$$

இனி அயின்ஸ்ற்றைனின் சமன்பாடு

$$\overline{\Delta[x^2]}=\frac{2RT}{N}\cdot\frac{t}{b}$$

ஆகும்; b யின் பெறுமானத்தைப் பரிசோதனைமுறைப்படி ஏற்கெனவே துணிந்திருக்கிறபடியால்

$$\overline{\Delta[x^2]}=\frac{2RT}{E}\left[\frac{(\dot{z})_F-(\dot{z})_0}{Ne}\right]t$$

எனப் பெறுகிறேம்.

மிலிக்கனும் ஃபிளெச்சரும் முதன்முதலாகத் துளியொன்றை ஒடுக்கியின் தட்டுக்களிடையே தொங்கிய நிலையில் நிறுத்தி, பார்வைக் கோட்டிற்கும் புவியீர்ப்புக்கும் செங்குத்தான திசை வழியே அதனது பிரௌண அசைவை அளந்துள்ளனர். நோக்குதலுக்கான தாழ்வலு நுணுக்குக் காட்டியொன்றினது பார்வைததுண்டில் குறுக்கு மயிர்களுக்கிடையேயுள்ள தெரிந்த தூரத்தைக் கடப்பதற்குத் துளி எடுக்கும் நேரத்தை அளந்து இது செய்யப்பட்டது. தாழ் பிசுபிசுப்புடைய வாயுக்களைப் பயன்படுத்தியும் தாழ்வமுக்கங்களிற் பரிசோதனையை நடாத்தியும் $\overline{\Delta[x^2]}$ இற்குப் பயன் படுத்தப்பட்ட பெறுமானங்கள் அதே பருமனும் இயல்பும் உடைய துளியொன்றினிடத்துப் பெறினுற் பயன்படுத்தப்பட்ட பெறுமானங்களின் ஐம்பது மடங்காகும். இவ்வாறு பெறினின் அளவீடுகளைக் காட்டிலும் திருத்தமிக்க அளவீடுகள் பெறமுடிந்தது. ஆய்கருவியின் வெப்பநிலை மிகவும் இலகுவாக ஆளப்பட்டமை இவ்வாராய்ச்சியாளரின் பிறிதொரு வெற்றியாகும். இவ்வாய்வுகளின் விளைவாக

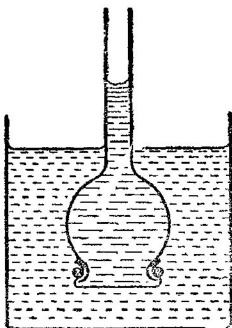
$$Ne = -2{\cdot}88 \times 10^{14} \text{ நி.மி.அ. மூல்.}^{-1}$$

எனக் காணப்பட்டது.

பிரசாரணமும் பிரசாரண அமுக்கமும்

பிரசாரண இயல்பு.—செங்குருதிச் சிறுதுணிக்கைகளை நீரில் வைத்தால் அவை விரைவாக விரிந்து ஈற்றில் வெடிக்கின்றன ; ஆனால் வன்மையான உப்புக்கரைசலில் வைக்கப்பட்டபோது அவை சுருங்கிவிடுகின்றன. இத்தோற்றப்பாடானது விலங்குக் கலங்களையும் தாவரக் கலங்களையும் சுற்றியிருக்கின்ற சவ்வுகளின் சிறப்புப் பண்பொன்றை எடுத்துக்காட்டுகின்றது ; ஏனெனில் அச்சவ்வுகள் நீரைச் சுயாதீனமாக உட்செல்ல விடுகின்றபோதிலும் திண்மங்களின் செல்லுதலை ஒன்றில் தடைசெய்கின்றன அல்லது முற்றிலும் தடுக்கின்றன என்பதேயாம். சவ்வொன்றூடே திரவமொன்றின் இத்தகைய சுய இயக்கத்திற்குப் **பிரசாரணம்** என்னும் பெயர் அளிக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதனது விளைவுகள் முதன்முதலாக நொள்ளே அடிகள் (Abbe Nollet) என்பவரால் 1748 இல் நோக்கப்பட்டன ; விலங்குகளின் சிறு நீர்ப்பையால் நீரும் அற்ககோலும் வேருக்கப்பட்டிருக்கும்போது அற்ககோலில் பையின் தோல் வழியாக நீர் செல்கிறது எனவும் எதிர்த்திசையில் அற்ககோல் செல்வதில்லை எனவும் அவர் கண்டுபிடித்தார். மேற்படி சவ்வுவகையொன்று நீரிலிருந்து நீர்க்கரைசலொன்றை வெருக்குமிடத்து இச் சுயமானதும் வேற்றுமை காட்டுகின்றதுமான பாய்ச்சல் நிகழ்கின்றது எனத் தெரியவந்தது. பின்வருகின்ற எளிய பரிசோதனையானது இத்தோற்றப் பாட்டை எடுத்துக்காட்டுகிறது. பெரிய முள்ளிப்புனலொன்றின் வாய்மீது ஈரமான தோற காகிதமொன்று ஈர்க்கப்பட்டிருக்கின்றது ; கிட்டத்தட்ட உலர்ந்த பின்னர் காகித ஓரம் வழியே பிசின் பூசப்படுகின்றது. கவிழ்க்கப்பட்ட

இப்புனலானது சோடியம் குளோரைட்டு, கரும்புவெல்லம் அல்லது வேறொரு திரவியத்தின் கரைசலால் நிரப்பப்பட்டு படம் 13·06 இற் காட்டியுள்ளவாறு நீரில் அமிழ்த்தப்படுகின்றது. இவ்வாறு சொற்பகாலம் இருந்தபின்னர் கரைசலின் மட்டமானது உணரத்தக்க அளவில் ஏறிவிடும்; எனவே கரைசலுள் தோற் காகிதமூடாக நீர் சென்றிருக்கவே வேண்டும். இக்கூற்று முடிவானதன்று; ஏனெனில், நீரானது முகவையிலிருந்து கரைசலுட் சென்றிருந்த அதே நேரத்தில் கரைசலிலிருந்து நீர் முகவையிலிருக்கின்ற நீருட் போய்விடும் என்பதேயாம்; பிரசாரணப் பாய்ச்சலானது சவ்வுமீது மூலக்கூறுகள் மோதுதலால் ஆகின்றது. சவ்வின் ஒருபுறத்தில் நீர் மூலக்கூறுகள் மட்டுமே வந்து சேர்கின்றன; அதனது மறுபுறத்தில் நீர் மூலக்கூறுகளும் கரைய மூலக்கூறுகளும் உள. எனவே நீரானது குழாயில் ஏறுகின்றது; பிரசாரணத்தால் நீர் கரைசலுட் செல்கின்ற அதே வீதத்தில் அவ்வண்ணம் உண்டாகிய திரவநிரலால் ஆகின்ற நீர்நிலையியல் அமுக்க மிகை நீரை வெளியே செலுத்தும்வரை அவவேற்றம் தொடரும்.



படம் 13·06. பிரசாரணம்.

பயன்படுத்தப்படுகின்ற சவ்வானது உண்மையில் **குறையூடுபுகவிடுகின்ற**தொன்று அன்று; எனவே இத்தகைய எளிய ஆய்கருவிகளைக் கொண்டு அளவறிதற்குரிய பேறுகளைப் பெறமுடியாது; அதனூடே நீரைச் சுயாதீனமாகச் செல்லவிடுவதும் ஆனால் கரையத்தைச் செல்லாவண்ணம் முற்றிலும் தடுப்பதுமான சவ்வொன்றை விவரித்துக் கூறும் பொருட்டு இச்சொற்றொடரானது 1886 இல் **வாநோ** (Van't Hoff) என்பாரால் முதன் முதலாகப் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஏற்கெனவே விவரித்துக் கூறியுள்ள எளிய பரிசோதனைகளிற் பயன்படுத்தப்பட்ட சவ்வுகள் மேற்படி நிபந்தனைகளுக்கிணங்கமாட்டா; ஏனெனில் அவை உண்மையில் தம்மூடே ஓரளவில் கரையத்தைச் செல்லவிடுகின்றன.

அதே இயல்புடைய ஆனால் செறிவில் மட்டுமே வேறுபடுகின்ற இரு கரைசல்களைச் சவ்வொன்று வேருக்கியிருக்குமிடத்தும் கரைப்பானின் பிரசாரணப் பாய்ச்சல் காணப்படுகிறது. கரைசல்களின் செறிவுகள் சமமான பெறுமானத்தை அடையுமாறு கரைப்பானின் பாய்ச்சல் அமைந்திருக்கும்; அதாவது கரைப்பான் மிகையானது மெல்லிய கரைசலிலிருந்து வன்மையானதற்குச் செல்கின்றது.

செயற்கைமுறை குறையூடுபுகவிடுகின்ற சவ்வுகள். 1864 இல், **ட்ரோப்** (Traube) என்பார் செப்புப்பெரொசயனைட்டு $[Cu_2Fe_2(CN)_6]$

என்னும் திரவியமானது மிகச் சிறந்த குறையூடுபுகவிடுகின்ற ஒரு சவ் வாகுமெனக் கண்டுபிடித்தார்; பிரசாரணப் பரிசோதனைகளில் அதுவே மிகச் சிறந்த சவ்வு என இன்றும் கருதப்படுகின்றது.

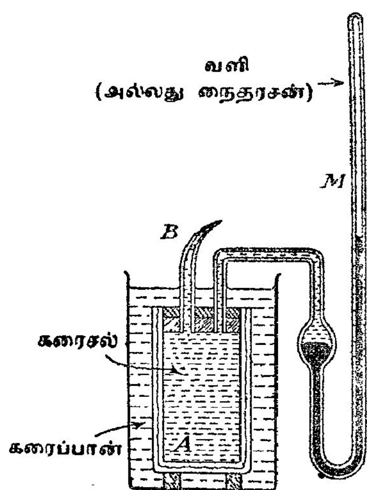
பரிசோதனை. முகவையொன்றின் அடியில் பொற்றுசியம் பெரோசயனேட்டின் மெல்லிய கரைசலொன்றை வைத்து, அது அசைவற்றிருக்கும்போது அப் பெரோசயனேட்டுக் கரைசலுக்குக் கீழே இருக்கும்வண்ணம் செப்புச்சல்பேற்றின் வன்மையான கரைசலொன்றைப் புகுத்துக. செப்புப்பெரோசயனேட்டின் மெல்லிய ஊன்பசை போன்ற வீழ்படிவொன்று உண்டாகின்றது; அது இரு கரைசல்களையும் வேருக்குகின்றது. கரையங்கள் அதனூடே செல்லமாட்டாமையால் சவ்வின் தடிப்பு வளர்கிறதில்லை; ஆனால் கிட்டத்தட்ட இரண்டு மணித்தியாலம் கழிந்தபின் சவ்வு மேன்முகமாக வீங்கியிருப்பது தெளிவாகக் காணப்படும். கூடுதலான நீர் மேன்முகமாகக் காட்டினும் கீழ்முகமாகவே செல்கின்றதென இது நிறுவுகிறது; எனவே செப்புக்கரைசலின் பிரசாரணவமுக்கமே உயர்ந்ததெனபது தெளிவாம்.

பிரசாரணவமுக்கம்.—மேற்படி பரிசோதனையில் ஆக்கப்பெற்ற செப்புப் பெரோசயனேட்டுச் சவ்வானது பெருமளவில் முறிதன்மையுடையதாதலால் அது சிறு அமுக்கவித்தியாசங்களை மட்டுமே தாங்க முடிகின்றது; ஆனால் நுண்டுளைப் பாண்டமொன்றின் சுவருள் அது ஆக்கப் பெற்றிருந்தால் அதன் வன்மை பெரிதும் கருதத்தக்கவளவிற் கூடிவிடும். செப்புப் பெரோசயனேட்டுச் சவ்வானது கூடுதலான பொறிமுறை வன்மை பெற்றிருக் கும் வண்ணம் அதை நுண்டுளைப் பாண்டமொன்றின் சுவருள் ஆக்கு வதற்கான முறையானது முதன் முதலாகப் ஃபெவ்வர் (Pfeffer) என்பவரால் 1877 இல் திட்டமிடப்பட்டது; அதற்குப் பின்னர் அவர் பிரசாரணம் தொடர்பான அளவறிதற்குரிய பரிசோதனைகளை வெற்றிகர மாக நடாத்தினர். இச்சவ்வை ஆக்கும்பொருட்டு, வளிக்குமிழிகளை வெளியேற்றும் நோக்குடன் நுண்டுளைப் பாணடமானது பல மணித்தியால காலமாகக் கொதிக்கின்ற காய்ச்சி வடித்த நீரில் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அடுத்து 0·25 சதவீதச் செப்புச்சல்பேற்றுக் கரைசலொன்று பாண்டத் தின் உள்ளேயும் 0·21 சதவீத பொற்றுசியம் பெரோசயனேட்டுக் கரைசலொன்று அதற்கு வெளியேயும் வைக்கப்படுகின்றன. கரைசல் ஒவ்வொன்றும் பாண்டத்தின் உச்சியைக் கிட்டத்தட்ட அடைந்திருத்தல் வேண்டும். பரவல் நடைபெறுகின்றது; எனவே கரையங்கள் இரண்டும் பாண்டத்தின் சுவர்களுள் ஒனறையொன்று சந்திக்குமிடத்தில் செப்புப் பெரோசயனேட்டுச் சவ்வொன்று உண்டாகின்றது. குழப்பமொன்றும் இல்லாமல் இம்முறையானது இரண்டு நாள் தொடர்நது நடைபெறல் வேண்டும். இவ்வண்ணம் ஆக்கப்பட்ட பாண்டமானது கொதிக்கின்ற காய்ச்சிவடித்த நீரிற் சூடாக்கப்படுகிறது; அந்நீரானது பலமுறை புதுப் பிக்கப்படல் வேண்டும்; அப்பொழுது பாண்டமானது பயன்படுத்தக்கூடிய நிலையில் இருக்கும். பாண்டம் உலர்நது போய்விட்டால் வளியை முற்றிலும் அப்புறப்படுத்தும் பொருட்டு அதை மீண்டும் பல மணித்தி யாலமாகக் கொதிக்கின்ற காய்ச்சி வடித்த நீரில் வைத்திருத்தல் வேண்டும்.

மெழுகாற் கவனமாக நிலையாக்கிய றப்பர் அடைப்பானொன்று அளிக்கப்பட்டதும் நீண்ட மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று பொருத்தப்பட்டதுமான இத்தகைய பாண்டமொன்று கரும்புவெல்லத்தின் நிரம்பிய கரைசலொன்றால் நிரப்பப்பட்டுப் பின்னர் நீரில் அமிழ்த்தப்பட்டிருந்தால், மயிர்த்துளையிலுள்ள திரவமட்டமானது மிகவும் விரைவாக மாறுகின்றது. பல நாட்களுக்குப் பின் திரவமானது 1 மிமீ. விட்டமுடைய குழாயொன்றிலிருந்து வெளியேறுமலிருக்க வேண்டுமானால் அதன் நீளம் பல மீற்றர் ஆதல் வேண்டும். தக்க அமுக்கமொன்றைப் பிரயோகித்துச் சவ்வூடே திரவத்தின் சுய, வேற்றுமைப் பாய்ச்சலை முற்றிலும் நிறுத்த முடியும்; அப்பெறுமானத்தை அமுக்கம் மீறுமிடத்துப் பாய்ச்சல் புறமாற்றப்படுகின்றது.

வரைவிலக்கணம்.—கரைசலையும் கரைப்பானையும் வேறுக்குகின்ற குறையூடுயுகவிடுகின்ற சவ்வொன்றூடே திரவமொன்றின் சுய, வேற்றுமைப் பாய்ச்சலைத் தடுத்தற்பொருட்டு அக்கரைசல்மீது பிரயோகிக்க வேண்டிய அமுக்கமானது அக்கரைசலின் பிரசாரணவமுக்கம் எனப்படும்.

மெல்லிய கரைசல்களின் பிரசாரணவமுக்கத்தைத் துணிதற்குப் ஃபவ்வரின் பரிசோதனைமுறை.—மெல்லிய நீர்க்கரைசலொன்றின பிரசாரணவமுக்கத்தைத் துணிதற்குப் படம் 13·07 இல் திட்டமிட்டுக் காட்டியுள்ள ஆய்கருவியைப் பயன்படுத்தலாம். அது தொடக்கத்தில் ஃபவ்வரால் பயன்படுத்தப்பட்ட ஆய்கருவியொன்றிற்கு ஒப்பாயிருக்கின்றது. வளி, சிறப்பாக நைதரசன், கொண்ட மூடிய உறுப்பொன்றுடைய இரசவமுக்கமானி M என்பது கரைசலைக் கொண்டிருக்கின்ற நுண்டுளைப்பாண்டம் A யுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. குழாய் B வழியாகக் கரைசலானது புகுத்தப்படுகின்றது; தொடுக்குங் குழாய்களிலுள்ள வளியானது கரைசலால் நீக்கப்படுகிறது. இச் செய்கைக்குப் பின்னர் குழாய் B யானது வளிபுகாமல் அடைக்கப்படுகின்றது. நீரானது கரைசலிற் புகுந்து பாண்டத்தில் அமுக்கம் ஏறுகின்றது; அவ்வமுக்கம் M இல் இருக்கின்ற வாயுவுக்குச் செலுத்தப்படுகின்றது. ஈற்றில் ஆய்கருவியில்



படம் 13·07. பிரசாரண அமுக்கத்தை அளத்தல் (ஐதான கரைசல்கள்).

அமுக்கத்தின் மாற்றம் முடிவடைகின்றது ; அம்மாறுவமுக்கமே கரைசலின் பிரசாரணவமுக்கம். அது அமுக்கமானியின் மூடியவுறுப்பிலிருக்கின்ற வாயு (நைதரசன்) இன் கனவளவு மாற்றத்திலிருந்து கணிக்கப்படுகின்றது. கரைசலில் நீர் புகுந்து அதனது செறிவை மாற்றுகின்றபடியால் தொடக்கத்திலிருந்த கரைசலின் பிரசாரணவமுக்கத்துடன் வாசிப்புகள் ஒத்திருக்க மாட்டா ; இது இம்முறையின் ஒரு பெரும் குறையாகும். மேலும் இறுதிக் கரைசலின் செறிவானது சீராகவும் இருக்கமாட்டாது ; எனவே சவ்வை நெருங்கியிருக்கின்ற கரைசலின் செறிவே அளக்கப்படுகினற பிரசாரணவமுக்கத்தை நிருணயிக்கின்றபடியால் மேற்படி வாசிப்புகள் இறுதிக்கரைசலின் பிரசாரணவமுக்கத்துடன்கூட ஒத்திருக்கமாட்டா. ஆகையால் கரைசலையும் கரைப்பானையும் வெவ்வேறுக்குகின்ற குறையூடுபுகவிடுகின்ற சவ்வூடே கரையம் செல்லாவண்ணம் கரைசல்மீது பிரயோகிக்க வேண்டிய வெளியமுக்கத்தை அளத்தலே மிகச் சிறந்த முறையாகும். பொதுவாகத் திட்டமான பரிசோதனைகளிலும் சிறப்பாகச் செறிவுமிக்க கரைசல்களிடத்தும் இத்தகைய முறையையே பயன்படுத்துதல் வேண்டும். பரிசோதனை விவரங்கள் மேலே தரப்படும்.

பிரசாரணத்தின் அடிப்படை விதிகள்.—ஃபவ்வரால் சோதிக்கப்பட்ட நீர்க்கரைசற்றொகுதியில் சுக்குரோசு, தெத்துரோசு, கரும்பு வெல்லம் ஆகியவற்றின் கரைசல்கள் இடம்பெற்றிருக்கின்றன. நீர்க்கரைசலாகவிருக்கினற கரும்புவெல்லத்துக்குக் கிட்டத்தட்ட 15° ச. இலே அவர் பெற்ற பேறுகள்சில அட்டவணை A யிலே குறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

அட்டவணை A

செறிவு (c) [100 க. சமீ. கரைசலில் கிராம் அளவு]	பிரசாரணவமுக்கம p [சமீ. இரசம]	$\frac{p}{c}$
1·003	52.1	52·0
2·014	102	50·5
2·767	152	55·0
4·060	209	51·5
6·138	307	50·0

மேற்படி அட்டவணையின் கடைசி நிரலானது $\frac{p}{c}$ என்னும் விகிதம் அண்ணளவான மாறிலியாகும், அதாவது **மாறு வெப்பநிலையிலே ஐதான கரைசலொன்றின் பிரசாரணவமுக்கமானது கரையத்தின் செறிவுக்கு நேர் விகிதசமன் ஆகும்** என்பதை உணர்த்துகின்றது (விதி 1). இப்பொழுதெல்லாம் இவ்விதியின் உண்மை வரைபு முறைப்படி வெளிப்படுத்தப்படும்.

எவ்வாறு சுக்குரோசின் (ஒரு சதவீத) மாறு வலிமையுடைய நீர்க்கரைசலின் பிரசாரண அமுக்கமானது அதனது தனிவெப்பநிலை T யுடன் மாறுகின்றது என்பதை அட்டவணை B எடுத்துக் காட்டுகின்றது.

அட்டவணை B

தனிவெப்பநிலை [T° கெ.]	பிரசாரணவமுக்கம் [சமீ. இரசம்]	$\left\|\frac{p}{T}\right\|$
279·8	50·5	0·180
286·7	52·5	0·183
295·0	54·8	0·186
305·0	54·4	0·178
309·0	56·7	0·184

$\frac{p}{T}$ ஆனது ஏறத்தாழ மாறிலியாகும் என்னுஞ் செய்தி இவ்வட்டவணையில் தெளிவாம்; இங்கேகூட சிறந்த சோதனையை வரைபுமுறையாலேயே செய்யக்கூடும். எனவே **ஐதான கரைசலொன்றின் பிரசாரண அமுக்கமானது அக்கரைசலின் தனிவெப்பநிலைக்கு நேர்விகிதசமனுகும்** [விதி 2].

வானே என்பார், ஃபவ்வராற் பெறப்பட்ட பரிசோதனைப் பேறுகளை நன்கு ஆராய்ந்த பின்னர் மேலே கூறியுள்ள விதிகள் இரண்டையும் முதன் முதலாக 1886 இல் வெளியிட்டார். மூல். சமீ.$^{-3}$ இல் கரையத்தின் செறிவு C ஆயின், அப்பொழுது $C=V^{-1}$; இங்கு V ஆனது (சமீ.^{3} இல்) கரையத்தின் மூலொன்றைக் கொண்டிருக்கின்ற கரைசலின் கனவளவாகும். எனவே முதலாவது விதியை

$$pV = \text{மாறிலி என எழுதலாம்};$$

அதே நேரம், இரண்டாவது விதியை

$$p = \text{மாறிலி} \times T$$

எனக் கோவைப்படுத்தலாம்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் சேர்த்து

$$pV = R_0T$$

எனப் பெறுகிறேம்; இங்கு R_0 ஒரு மாறிலியாகும். சுக்குரோசுக் கரைசலொனறின பிரசாரண அமுக்கத்தை அதே வெபபநிலையிலும் செறிவிலுமுள்ள ஐதரசனின் அமுக்கத்துடன் ஒப்பிடுமிடத்து R_0 ஆனது அகில வாயுமாறிலி R இற்குச் சரிசமன என வானே காட்டினர். அதற்குப் பின்னர் இச்செய்தியை வெப்பவியக்கவியல் முறைப்படி இவ்வாராய்ச்சியாளர் நிறுவினர் (தொகுதி 2 ஐப் பார்க்க). பிற்பட்ட ஆராய்ச்சியால், கொள்கைக்கும் பரிசோதனைக்குமிடையேயுள்ள இச்சிறப்பான ஒற்றுமையானது பெருமளவில் உறுதிப்படுததப்பட்டமை வாயுக்களுக்கான அவகாத

ரோவின் விதிக்கொப்பான விதியொன்றை ஐதான கரைசல்களிடத்தும் பிரயோகிக்கலாம் எனச் சுட்டுகின்றது. **சம கனவளவுடைய (ஐதான) கரைசல்களில் வெவ்வேறான கரையங்களின் மூலக்கூறுகள் சம எண்ணிக்கையிற் கரைந்திருந்தால், மாறா வெப்பநிலையில், கரைசலின் பிரசாரணவமுக்கமானது கரையத்தின் இயல்பைச் சாரமாட்டாது** என இவ்விதி கூறுகின்றது.

கரையத்தின் χ மூல்கள் கொண்ட கரைசலொன்றின் கனவளவு Ω ஆயின், $\chi V = \Omega$; எனவே,

$$p\left(\frac{\Omega}{\chi}\right) = RT.$$

மூல் சமீ.$^{-3}$ இல் செறிவு $C = \frac{\chi}{\Omega}$ எனின், அப்பொழுது

$$\frac{p}{C} = RT.$$

கி. சமீ.$^{-3}$ இல் செறிவு c எனின்,

$$c = MC \text{ ; எனவே } \frac{p}{c} = \frac{RT}{M}.$$

இவ்வாறு வெப்பநிலை T, செறிவு c என்பவற்றில் கரைசலொன்றின் பிரசாரண அமுக்கமானது தனியலகுகளில் தெரிந்திருக்குமாயின் கரையத்தின் மூலக்கூற்று நிறையைத் துணிய முடியும்.

பிரசாரணவமுக்கமும் மூலக்கூற்றுநிறை துணிதலும்.—பிரசாரணம் பற்றிய பரிசோதனை ஆராய்ச்சியில் அமுக்கத்தை வளிமண்டலங்களிலும் கரைசலிற் கரையத்தின் மூலொன்று கொண்டிருக்கின்ற கனவளவைச் சமீ.^{3} இலும் அளத்தல் வழக்காகும். அமுக்கம் வளிமண்டலங்களில் அளக்கப்பட்டும் கனவளவு V யைக் கொண்டிருக்கின்ற 1 கிராம்–மூலக்கூறு கருதப்பட்டும் இருந்தால், அப்பொழுது இலட்சிய வாயுவொன்றிற்குச் சிறப்பியல்புச் சமன்பாடானது

$$PV = \bar{R}T$$

என்பதாகின்றது ; இங்கு $\bar{R}$ என்பது எல்லா வாயுக்களுக்கும் ஓர் அகில மாறிலியாகும். இருந்தாலும் இலட்சிய வாயுச் சமன்பாடு $pV = RT$ எனபதில் தோறறுகின்ற அகில வாயுமாறிலி R இலிருந்து $\bar{R}$ வேறுபடுகின்றது என்பது குறித்தற்பாலது ; இங்கு p தனியலகுகளிலேயே தரப்படுகின்றது. நி. வெ. அ. இல் வாயுவொன்றின் 1 கிராம் மூலக்கூறானது 22,415 சமீ.^{3} ஐக் கொள்ளும் என்பது தெரிந்ததே. எனவே

$$1 \times 22{,}415 = \bar{R} \times 273$$

அல்லது $\bar{R} = 82{\cdot}06$ சமீ.^{3} வளி ம. ச.$^{-1}$கெ. மூல்.$^{-1}$.

இது கரைசலில மினபகாப் பொருளொன்றின் பிரசாரண அமுக்கத்திற்கோ பிரசாரண அமுக்கம் தெரிந்திருக்குமிடத்துக் கரையத்தின் மூலக்கூற்று நிறைக்கோ பெறுமானங் கணிக்கப் பயன்படுகின்றது. மூலக்கூற்று நிறை M உடைய பொருளொன்றில் m கி. ஆனது θ° ச. இல், 100 சமீ.^{3} நீரில் கரைக்கப்படுக. அப்பொழுது இக்கனவளவிலுள்ள கிராம்–மூலக்கூறுகளின் எண்ணிக்கை $\frac{m}{M}$ ஆகும்; எனவே 1 கிராம்–மூலக்கூறனது $\left(\frac{M}{m}\times 100\right)$ சமீ.^{3} ஐக் கொண்டிருக்கும். P ஆனது வளிமண்டலங்களில் பிரசாரண அமுக்கம் ஆகுக. அப்பொழுது

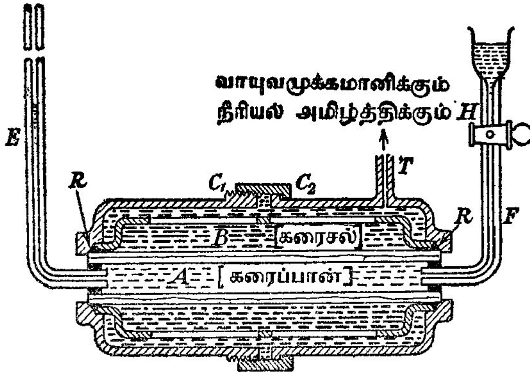
$$P\times\left(\frac{M}{m}\times 100\right)=\bar{R}\times(273+\theta).$$

$$\therefore\quad P=\frac{0{\cdot}821\,m\,(273+\theta)}{M}\text{ வளி ம.}$$

செறிந்த கரைசல்களின் பிரசாரண அமுக்கத்தை அளத்தல்; பேக்கிலி, ஹாற்லி ஆகியோரின் ஆராய்ச்சி.—1906 இல் பேக்கிலி பிரபுவும் அவர்தம் துணைவர் ஹாற்லி என்பாரும் செறிந்த கரைசலொன்றின் பிரசாரண அமுக்கத்தை அளத்தலுக்கான திட்டமிக்க முறையொன்றை விவரித்து வெளியிட்டனர். கலமொன்றிலே, அதன் உள்ளூறையானது கரைப்பானியின்று குறையூடுபுகவிடுகின்ற சவ்வொன்ருற் பிரிக்கப்பட்டிருக்குமிடத்துக் கரைப்பானின் உள்முகப் பாய்ச்சலாலாகின்ற அமுக்கத்தை அளக்காது, கரைப்பானிற்கும் கரைசலுக்கும் இடையேயுள்ள வேற்றுமைப் பாய்ச்சலைத் தடுக்கும்பொருட்டுக் கரைசல்மீது பிரயோகிக்க வேண்டிய அமுக்கத்தை இவ்வாராய்ச்சியாளர் அளந்தனர். அடிப்படையில் கரைப்பானின் தேறிய பாய்ச்சலானது சரி பூச்சியமாகும் வரை கரைசல் மீதுள்ள அமுக்கம் படிப்படியாக உயர்த்தப்பட்டது; அவ்வமுக்கம் கரைசலின் பிரசாரணவமுக்கம் எனக் கொள்ளப்பட்டது.

பயன்படுத்திய ஆய்கருவியின தத்துவமானது படம் 13·08 இல் எடுத்துக் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. A ஒரு நுண்டுளைப் பாண்டமாகும்; உண்மையில் அது நீளம் 15 சமீ. உம், வெளி விட்டம் 2 சமீ. உம், சுவர்த் தடிப்பு 0·4 சமீ. உம் உடைய பீங்கான் குழாயொன்ருகும். நிலைக்குத்தான முனைகள் பளபளப்பாக்கப்பட்டுள்ளன. குறையூடுபுகவிடுகின்ற சவ்வானது கூடியமட்டிற் குழாயின் வெளிச்சுவருக்கு அணித்தாயிருந்தது. B யானது துவக்குலோகத்தாலான ஒரு கூடாகும்; அதன் உருளைப்பாகம் வழியே நீண்ட துவாரமொன்று வெட்டப்பட்டிருக்கின்றது. C_1 உம் C_2 உம் வெளித் துவக்குலோகப் பாத்திரமொன்றின் இரு பாகங்களாகும்; அவற்றை திருகால் ஒன்ரேடொன்று இறுக்க முடியும். இவ்வாறு இறுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, கூட்டை வெளிப்பாத்திரத்தி

னின்று பிரித்து வைக்கின்ற றப்பர் போன்ற வளையங்கள் R என்பவை மீது உதைப்பொன்று தாக்குகின்றது. ஆய்கருவியானது பூர்த்தியடைந்த நிலையில் இருக்கும்போது, வளையங்கள் குழாய் A யின் முனைகளில் சரியாக மேற்பொருந்தியிருக்குமாறு இக்கூட்டின் நீளம் அமைந்திருக்கின்றது.



படம் 13·08. செறிந்த கரைசல்களின் பிரசாரணவமுக்கத்தை அளத்தற்குப் பேக்கிலி, ஹாற்லி ஆகியோர் பயன்படுத்திய முறைக்குரிய தத்துவம்.

உட்குழாய் A யானது நீர் (அல்லது கரைப்பானைக்) கொண்டிருக்கிறது; மயிர்த்துளைக் குழாய்கள் E, F வழியாக ஆய்கருவியில் நீரைப் புகுத்தலாம். பரிசோதனையொன்றின்போது குழாயடைப்பு H ஆல் குழாய் F ஆனது அடைக்கப்பட்டிருக்கின்றது ; E ஒரு நீர் மட்டமானியாகப் பயன்படுகின்றது.

செப்புப்பெரோசயனேட்டுச் சவ்வொன்றே பயன்படுத்தப்பட்டது. செபபுச்சல்பேற்றின் நீர்க்கரைசலொன்றைக் கொண்டிருக்கின்ற பாத்திரத்திலே நுண்டுளைப் பாண்டத்தை அமிழ்த்திப் பின் பாத்திரத்தில் இருந்த வளியானது வெளியேற்றப்பட்டது ; இவ்வண்ணம் நுண்டுளைப் பாண்டத்திலுள்ள வளி அப்புறப்படுத்தப்பட்டது. அடுத்து அதன் பரப்பு உலர்த்தப்பட்டு அதனது திறந்த முனைகள் அடைக்கப்பட்டுக் குழாயானது பொற்றாசியம் பெரோசயனேட்டுக் கரைசலொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டது. குழாய் A யின் வெளிப்பரப்பிற்கு அணித்தாய்ச் சவ்வு அமைக்கப்பட்டுள்ளது ; பின்பு மின்பகுப்பு முறையொன்றால் அச்சவ்வு வன்மை பெறுமாறு செய்யப்பட்டது.

A யிற்கும் வெளிப்பாத்திரத்திற்குமுள்ள இடைவெளியானது சோதிக்கப்படுகின்ற கரைசலால் நிரப்பப்பட்டு அதன்மீது படிப்படியாக அதிகரிக்கின்ற அமுக்கம் பிரயோகிக்கப்பட்டது. குழாய் T அமுக்கமானியொன்றுடனும் அமுக்கத்தை உயர்த்தும் உபகரணமொன்றுடனும் தொடுக்கப்பட்டிருந்தது. பிரயோகித்த அமுக்கமானது கரைசலின் பிரசாரண

அமுக்கத்திற்குக் குறைந்ததாயிருக்கும்வரை நீர் A யிலிருந்து வெளிப் பாத்திரத்திற்குச் செல்வதோடு E யிற் பிறையுருவும் இறங்கிற்று. பிரயோகித்த அமுக்கம் பிரசாரண அமுக்கத்தை மீறியபோது பிறையுருவின் இயக்கம் புறமாற்றமுற்றது.

நீர்மட்டமானியில் பிறையுரு நிலையாயிருக்கின்ற கட்டத்தைச் சரியாகத் தீர்மானிப்பதில் பேக்கிலியும் ஹாற்லியும் பெரிதும் இடர்ப்பட்டனர். எனவே முறையே சமநிலையமுக்கத்துக்குச் சற்று மேலேயும் அதற்குச் சற்றுக் கீழேயுமுள்ள அமுக்கங்களில் பிறையுருவின் ஏற்றவிறக்க வீதங்களை நோக்கிச் சமநிலையமுக்கமானது துணியப்பட்டது. பிறையுருவின் அசைவு வீதமானது பிரயோகித்த அமுக்கத்துக்கும் சமநிலை அமுக்கத்துக்குமுள்ள வித்தியாசத்திற்கு நேர்விகிதசமன் எனக்கொண்டு, நோக்கல்களிலிருந்து பிந்தியதுக்குப் பெறுமானமொன்று கணிக்கப்பட்டது. "காவல் வளையப் பொசிவு" எனப்படுவதையிட்டு இவ்வமுக்கத்தின் பெறுமானம் திருத்தப்பட்டது. பீங்கான் குழாயின் பளபளப்பான முனைகளில் நடைபெறுகின்ற பொசிவே இது.

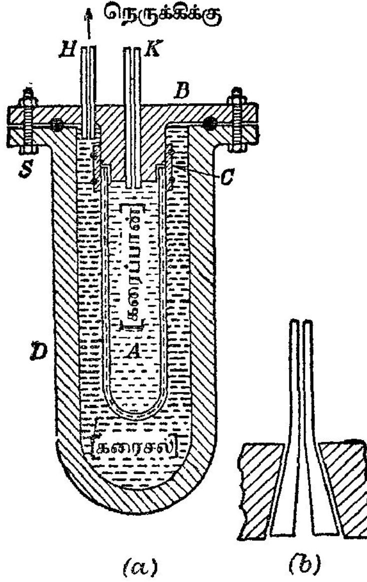
கிடைக்கப்பெற்ற பேறுகள் சிலவற்றையும், வாஞேவின் கொள்கையானது வழங்கப்பட்டு வருகின்றது எனக் கொண்டு பிரசாரணவமுக்கத்திற்குக் கணித்துள்ள பெறுமானங்களையும், கீழ்வருகின்ற அட்டவணை எடுத்துக்காட்டுகின்றது (பக்கம் 779 இற் காண்க).

0°ச. இல் குளுக்கோசின் நீர்க்கரைசல்களின் பிரசாரணவமுக்கம்.

மூல். லீற்றர் $^{-1}$ இல் செறிவு	(வளிம. இல்) பிரசாரணவமுக்கம்	
	நோக்கப்பட்டவை	கணிக்கப்பட்டவை
0·504	13·21	12·42
1·005	29·17	24·82
1·611	53·19	39·72
2·262	87·87	55·83
2·465	121·18	68·27

வேகாட்டின் (Vegard) பிரசாரணமானி.—இம்முறையில் அமுக்கமானது நுண்டுளைப் பாண்டத்தின் புறத்திலிருந்தே பிரயோகிக்கப்படல் வேண்டும் என முடிவுசெய்யப்பட்டது (1908). எனவே இப்பாண்டம் எப்பொழுதும் நெருக்கு தகைப்புக்களுக்கே ஆளாகியது. அப்பொழுது முறிப்புக்கள் எளிதில் உண்டாகமாட்டா. இதே தத்துவத்தைப் பேக்கிலியும் முன்னர் பயன்படுத்தியிருந்தார். வேகாட்டால் திட்டமிட்டமைக்கப்பட்ட பிரசாரணமானியின் அடிப்படையான பகுதிகள் படம் 13·09 (*a*) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. A யானது நுண்டுளைப் பாண்டமாகும். அதன் வெளிச் சுவருக்கு அணித்தாய் செப்புப்பெரோசயனைட்டுச் சவ்வொன்று இருக்கின்றது. நன்கு பொருந்தியிருக்கின்ற றப்பர்க் குழாய்த்துண்டு C யினால் கலமானது

ஆய்கருவியின் மூடியுடன் பற்றப்பட்டிருக்கின்றது. C யின் நுனிகள் நொய்நூலால் இறுக்கிக் கட்டப்பட்டிருக்கின்றன. B யும் வெளிக் கொள்பாத்திரமும் வார்ப்புருக்காலானவை. B யிற்கும் D யிற்கும் இடையே பொசிவைத் தடுப்பதற்குப் பயன்படுத்தியுள்ள ஒழுங்குமுறையை எடுத்துக்காட்டும் பொருட்டு B யிலும் D யின் மடிப்பிலும் சமனன வட்டத்தவாளிகள் வெட்டப்பட்டிருக்கின்றன எனவும், அவை ஒன்



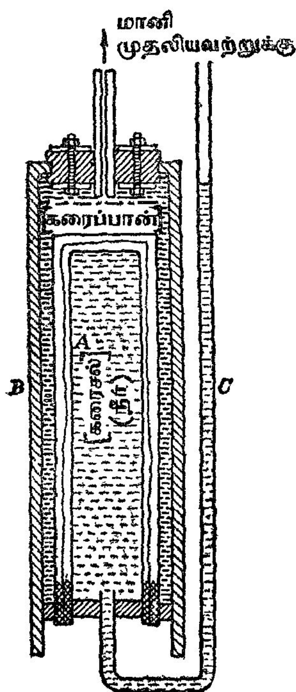
படம் 13·09. வேகாட்டின் பிரசாரணமானி.

றேடொன்று பொருத்தப்படும்போது வட்டக் குறுக்கு வெட்டுடைய றப்பர் வளையமொன்று அத்தவாளிகளை நிரப்பியிருக்கின்றது எனவும் கருதப் படுக. ஆய்கருவியைக் கூட்டி (S உட்பட) ஆறு திருகுகளையும் புகுத்தினுற் பொசிவிறுக்கமான மூட்டொன்று கிடைக்கப் பெறுகின்றது.

H உம் K யும் படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு, மூடி B யூடே செல்கின்ற கண்ணுடியாலான இரு மயிர்த்துளைக் குழாய்களாகும். அவற்றின் கீழ் முனைகள் சற்றுக் கூம்பு வடிவமாக இருக்கின்றன; குழாய்கள் கீழி ருந்தே மூடியிற் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றன. H, K என்பவற்றிற்கும் மூடிக்குமுள்ள இடைவெளியானது உருக்கிய முத்திரையிடு மெழு கால் நிரப்பப்படுகிறது; மெழுகு குளிரடைந்ததும் பொசிவிறுக்கமான மூட்டொன்று கிடைக்கின்றது. இவ்வொழுங்குமுறையானது படம் 13·09 (b) யில் மிகவும் உருப்பெருக்கிக் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

A யிற்கும் D யிற்கும் இடையேயுள்ள வெளியானது கரைசலால் நிரப்பபட்டு, அக்கரைசல் மீதுள்ள அமுக்கம் திருகொன்றால் இயக்கிவைக்கப்படுகின்ற உருளைவடிவமான உருக்கு அமுங்கியொன்றால் அதிகரிக்கப்படுகின்றது. குழாய் H ஆனது நெருக்கி, வாயுகொண்ட அமுக்கமானி என்பவற்றுடன் நேரடியாய்த் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. K யிலுள்ள திரவப் பிறையுருவானது நிலையாக இருக்கும்வரை அல்லது பொதுவாக அதனது இயக்கத்திசை மாறும் நிலையைச் சரியாக அடையும் வரை, கரைசல் மீதுள்ள அமுக்கம் அதிகரிக்கப்படுகிறது. பிறையுருவின் இயக்கததிசையைப புறமாற்றும் அமுக்கமானது சமநிலையமுக்கத்தின் இரு புறங்களிலும் பிறையுருவின வேகத்தை அளந்து துணியப்படுகின்றது.

பிரசாரணவமுக்கம் தொடர்பாக மோசும் அவரது துணையாளரும் நடாத்திய ஆராய்ச்சி.—பிரசாரணவமுக்கம் துணிதலுக்கான அவரது பரிசோதனை ஆராய்ச்சிகளை மோஸ் என்பார் 1911 இல் தொடக்கிவைத்தார். ஃபவ்வரின் முறையையே அவர் உண்மையில் மேற்கொண்டார்; ஆனால் ஆய்கருவியில் நுண்ணிய திருத்தங்கள் செய்யப்பட்டுள்ளன; மேலும் மிகவும் உயர்ந்த அமுக்கங்களைத் தாங்கும் சக்தி ஆய்கருவிக்கு அளிககப்பட்டது. 1916 அளவில் ஃபிறேசர் (Frazer), மைறிக் (Myrick) ஆகியோரால் இதனினும் உயர்ந்த அமுககங்களில் இவ்வாராய்ச்சியானது நடாத்தப்பட்டது.



படம் 13·10. (ஃபிறேசர், மைறிக் ஆகியோரால்) மாற்றியமைக்கப்பட்ட மோசினது பிரசாரணமானியின் தத்துவம்.

பிற்பட்ட இவ்வாராய்ச்சிகளிலே (படம 13·10) அமுக்கமானியொன்று தொடுக்கப்பட்ட வெண்கலவுருளை B என்பதில களியாலான கலம் A யானது அடைக்கப்பட்டிருந்தது. A யிற்கும் B யிற்கும் இடையே கரைசலும் A யிலே கரைப்பானும் (நீர்) வைக்கப்பட்டிருந்தன. குழாய் C யானது A கரைப்பானால் நிரப்பப்பட்டிருக்குமாறு உதவுகிறது; கரைப்பான் மீதுள்ள அமுக்கம் வளிமண்டலவமுக்கமாகும். அப்பொழுது நீரானது கலம் A யினின்று கரைசலுட் செல்கின்றது; கரைசலானது நிலைத்த கனவளவொன்றிலே அடைக்கப்பட்டிருக்கின்றபடியால் விரைவில் அமுக்க வித்தியாசமொன்று தாபிக்கப்படுகின்றது.

படம் 13·10 ஆனது இம்முறையின் தத்துவங்களை மட்டுமே எடுத்துக் காட்டுகின்றது ; நடைமுறையில் ஒழுககடைகளைப் பயன்படுத்தி ஆய்கருவியில் ஒழுக்குகள் தடுக்கப்பட்டன. அமுக்கமானது மின்தடைமானியொன்றுல் அளக்கப்பட்டது. மங்கனின் போன்ற கலப்புலோகமொன்றுல் ஆக்கப் பட்ட கம்பியைக் கொண்டு இரு சர்வசமனுன சுருள்கள் ஆக்கப்பட்டு, ஒன்று வளிமண்டலவமுக்கத்திலும் மற்றையது பிரசாரணவமுக்கம் துணியப் படுகின்ற கரைசலுடன் நேர்த்தொடுகை கொண்டிருக்கின்ற எண்ணெ யொனறில் அமிழ்த்தப்பட்டும் இருக்கின்றன. இவ்விரு சுருள்களின் மின்தடை வித்தியாசமானது கேரி ஃபோஸ்ற்றர் பாலமொன்றுல் வழக்கம் போல் அளக்கப்பட்டது. இத்தகைய மானியொன்றின் (பொறிமுறைத்) திறனுக்குப் பெரும்பாலும எல்லையேயில்லை. இதற்கு முற்பட்ட வாயு நிரம்பிய அமுக்கமானிகளிற் கரைப்பான் கரைசலிற செல்கின்றபடியால் கனவளவானது கருதத்தக்கவளவிற் கூடுகினறது ; அதனுல் கரைந்திருக் கின்ற திரவியத்தின் செறிவு குறைக்கப்படுகின்றது ; ஆனுல் மின்தடை மானி வகையில் ஆக்கப்படுகின்ற ஒன்றுன கனவளவு மாற்றம் திரவங் களின் நெருக்கப்படுதன்மையாலானது. இவ்வண்ணம் கரைப்பானின் உட்செல்கையாற் கரைசலில் ஆகின்ற ஐதாக்கலானது பெரிதும் குறைக்கப் பட்டுச் சமநிலை மிகவும் விரைவாக அடையப்படுகின்றது.

பயன்படுத்தப்படுகின்ற கலத்திலுங்கூடப் பல தெளிவான நயங்கள் உள. முதலாவதாக, இக்கலங்களால் உள்ளமுக்கங்களைக் காட்டிலும் வெளி யமுக்கங்களையே தாங்க முடிகின்றது. இரண்டாவதாக, அமுக்கம் கூடு மிடத்துச் சவ்வானது நுண்டுளைப் பாண்டத்தின் நுண்டுளைகளுட் செலுத்தப் பட்டு அங்கு நெருக்கப்படுகின்றமையால் அது வலிமைபெறுகின்றது : இதனுல் சவ்வின் முறியுந்தன்மை குறைக்கப்படுகின்றது.

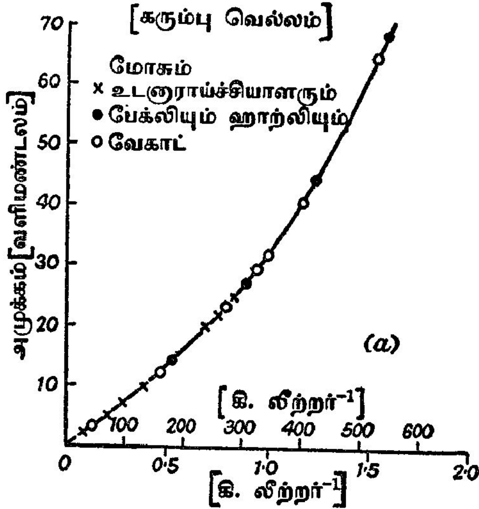
பிரசாரணவமுக்க அளவீடுகளின் பேறுகள்.—கரும்பு வெல்லத்தின் நீர்க் கரைசல்களிடத்துப் பெற்றுள்ள பேறுகள்சில படம் 13·11 (*a*) யில் தரப்பட்டிருக்கின்றன. வெவ்வேறுன ஆராய்ச்சியாளர்களுக்கிடையேயுள்ள ஒற்றுமையானது குறிப்பிடத்தக்கது ; வனமையான கரைசலொன்றின் பிர சாரண அமுக்கமானது இலட்சிய வாயுவிற்கான சமன்பாட்டைப் பயன் படுத்திப் பெற்ற அமுக்கத்திலிருந்து வேறுபடுகின்றது என்பதை வரைபு உடனே காட்டுகின்றது. செறிவானது 0·1 மூல். லீ.$^{-1}$ ஆக இருக்கும் போதுங் கூட விலகல் குறைவறத் தெளிவாயிருக்கின்றது.

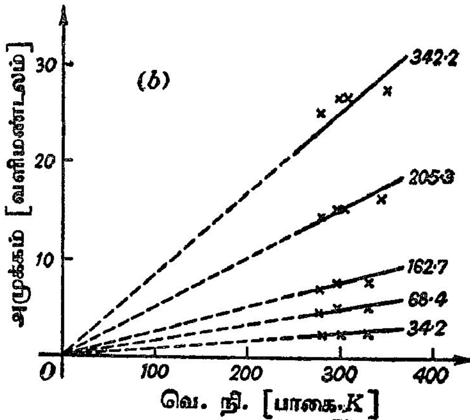
வெவ்வேறுன செறிவுகளுடைய வெல்லக் கரைசல்கள் பலவற்றினிடத்து வெப்பநிலையுடன் பிரசாரண அமுக்கம் மாறும் முறையானது படம் 13·11 (*b*) யில் எடுத்துக்காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. உண்மையில் வெப்பநிலை வீச் சானது சற்றுக் கட்டுப்படுத்தப்பட்டிருக்கின்றது ; இருந்தாலும், மென் கரைசல்களிடத்து மட்டுமே இலட்சிய வாயுச் சமன்பாடுகள் கண்டிப்பாய் வழங்குகின்றன என O வூடே செல்லுமாறும் பொருத்தமான புள்ளி களுக்கிடையே சீராகக் கிடக்குமாறும் வரைந்துள்ள நேர்கோடுகள் சுட்டு

கின்றன. (நேர்கோடொவ்வொன்றிற்கும் அணித்தான எண்கள் 1000 கி. நீரில் உள்ள கிராம் என்னும் அலகில் செறிவுகளைச் சுட்டுகின்றன.)

பரவுகை

நீர்க்கரைசல்களில் உப்புக்களின் பரவுகை.—பரவுகை எனப்படும் முறையானது, கரைசலொன்றிலே உயர் செறிவுள்ள இடங்களிலிருந்து தாழ்



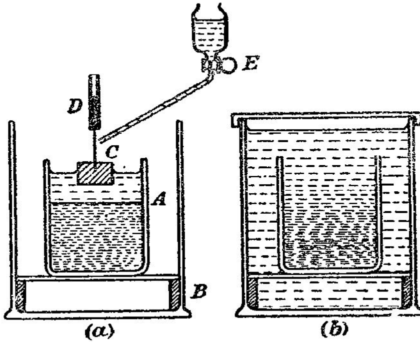


படம் 13·11. பிரசாரணவமுக்க அளவீடுகளின் சில பேறுகள்.

செறிவுள்ள இடங்களை நோக்கி, மூலக்கூறுகள் அல்லது அயன்களின் அலைச்சலாகும். எனவே இது கடத்தியொன்றிலே உறுதிநிலை அடைந்த

பின்னர் நிகழ்கின்ற வெப்பப் பாய்ச்சலுடன் ஒத்திருக்கின்றது. மேலும் இது புறமாற்றமுடியாத ஒரு முறையாகும் ; ஒருகால் கரையம் பட்ட தூய கரைப்பான் வெளிக்கருவியின்றி ஒருபோதும் அதனது தொடக்கநிலையை மீளமாட்டாது. நீர்க்கரைசலில் வன்மையான மின்பகுதிரவங்களிடத்து முழுக் கூட்டப்பிரிவு உள்ளது என நன்கு நிறுத்தப்பட்டிருக்கின்ற போதிலும் பரவுகைத் தோற்றப்பாட்டைக் கருதும்போது கரையத்தின் மூலக்கூறுகள் கூட்டப்பிரிவின்றி இருக்கின்றன எனக் கொள்ளல் வசதியாம்.

1850 இல், இரகாம் (Graham) என்பார் கரைசலில் உப்புக்களின் பரவுகை பற்றிய அவரது முதலாவது ஆராய்ச்சிக் கட்டுரையை வெளியிட்டார் ; 1882 இல் அவ்விடயம் செஃப்ஃபர் (Scheffer) என்பவரால் மேலும் ஆராயப்பட்டது. இவ்வாராய்ச்சியாளர்களால் பயன்படுத்தப்பட்ட ஆய்கருவியின் தத்துவமானது படம் 13·12 (*a*) யில் எடுத்துக்



படம் 13·12. நீர்க்கரைசலில் உப்புக்களின் பரவுகை.

காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. சிறு கண்ணாடியுருளை A யானது அதனினும் பெரிய கண்ணாடிப் பாத்திரம் B யினுள்ளே தாங்கப்பட்டிருக்கின்ற இரு இடையான கண்ணாடிக் கோல்கள் மீது ஓய்விலிருக்கின்றது. A யானது சோதிக்கப்படுகின்ற கரைசலாற் கிட்டத்தட்ட நிரப்பப்பட்டிருக்கின்றது ; தக்கை C யானது திரவமீது நடுவிலே மிதக்கின்றது. தக்கையுடன் இணைக்கப் பட்டிருக்கின்ற நிலைக்குத்தான பின்னலூசியொன்று (படத்திற் காட்டப் படாத) இறுக்கியாலும் தாளாலும் நிலையாக்கப்பட்ட குறுகிய கண்ணாடிக் குழாய் D யிலே மேன்முகமாக அசையக்கூடும். இதனால் தக்கையானது நடுவான நிலையொன்றிலே நிறுத்தப்பட்டிருக்கின்றது. துளிபுனல் E யிற் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்ற நீரானது நன்கு நனைக்கப்பட்டிருக்கின்ற தக்கை யின் முடிமீது செக்கனில் கிட்டத்தட்ட மூன்றுதுளி வீதத்தில் விழுமாறு செய்யப்படுகின்றது. கரைசல்மீது நீர் அடுக்கொன்று விரைவில் தோன்றும் ;

தக்கையானது கரைசலுக்கு அப்பால் வந்ததும் அதை அப்புறப்படுத்திப் பாத்திரம் A நீரால் முற்றிலும் நிரப்பப்படுகின்றது. அடுத்து படம் 13·12 (*b*) யிற் காட்டியுள்ளவாறு, முழு A யும் நீராற் சூழப்பட்டிருக்குமாறு செய்யப்படுகின்றது. உடனகாவுகை ஓட்டங்களைத் தடுக்கும் பொருட்டு வெப்ப நிலையானது மாறாததாக நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கின்றது. தொடக்கத்திலே கரைசலுக்கும் நீருக்குமிடையே தெளிவான எல்லையொன்றுளது. பரவுகை எனப்படும் முறையின் விளைவாக நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட இவ்வெல்லையானது விரைவில் மறைகின்றது. உட்பாத்திரத்தினின்று வெளிப் பாத்திரத்திற்குச் சென்ற கரையத்தின் அளவைத் துணிந்து,

(*a*) பரவுகை வீதமானது கரைந்திருக்கின்ற திரவியத்தின் இயல்பைப் பொறுத்துள்ளது எனவும், எனவே, கரைசலொன்றில் இருக்கின்ற இரு திரவியங்களின் அளவுகளின் விகிதமானது பரவுகை காரணமாக மாறக்கூடும் எனவும்,

(*b*) பரவுகை வீதமானது கரைந்திருக்கின்ற பதார்த்தத்தின் செறிவுக்கு நேர்விகிதசமன் எனவும்,

(*c*) வெப்பநிலை உயர்வானது பரவுகை வீதத்தைக் கூடச் செய்கின்றது எனவும், காணப்பட்டுள்ளது.

ஃபிக்கின் (Fick's) விதி.—பரவல் பற்றி இரகாம் என்பாரின் முதலாவது ஆராய்ச்சிக் கட்டுரை வெளியிடப்பட்டு நான்கு ஆண்டுகட்குப் பின்னர், ஃபிக் என்பார், வெப்பங் கடத்துதல் பற்றிப் ஃபூரியே (Fourier) என்பார் நடாத்தியுள்ள ஆராய்ச்சியால் தூண்டப்பட்டு, பின்வருகின்ற விதியை வெளியிட்டார். **செக்கனில் பரப்பளவு A யின் குறுக்கே செல்கின்ற கரைசலிலுள்ள பதார்த்தமொன்றின் திணிவு *m* ஆனது அப் பரப்பளவு A யின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையிலே கரைந்திருக்கின்ற பதார்த்தத்தின் செறிவு *n* ஆனது குறைகின்ற வீதத்திற்கு நேர்விகிதசமன்.** குறியீடுகளில்

$$\frac{m}{A} = -D\frac{\partial n}{\partial x};$$

இங்கு D ஒரு மாறிலி, $\frac{\partial n}{\partial x}$ ஆனது **செறிவுப் படித்திறன்,** அதாவது தூரம் x உடன் செறிவு n கூடுகின்ற வீதம்; வழக்கமாக n ஆனது அலகுக் கனவளவொன்றில் கிராம், அதாவது கி. சமீ.$^{-3}$ இற் குறிக்கப்படுகின்றது; வெப்பநிலை மாறாது இருந்தாற்றான் சமன்பாடானது பொருந்தும். D யானது செறிவு n கி. சமீ.$^{-3}$ உடைய கரைசலொன்றிலே கரையத்தின் **பரவற் குணகம்** எனப் பெயரிடப்படுகின்றது. இத்துறையில் முற்பட்ட ஆராய்ச்சியாளரின் பரிசோதனைகள் பரவற் குணகத்துக்குச் சராசரிப் பெறுமானங்களை மட்டுமே தந்துள்ளன; ஏனெனில் அக்குணகமானது தரப்பட்ட கரையமொன்றினிடத்து மாறிலியன்று எனவும் அது கரைப்பானிற் கரையத்தின் செறிவைப் பொறுத்திருக்கின்றது எனவும் இன்று அறிகிறோம்.

வகையீட்டுச் சமன்பாடாக ஃபிக்கின் விதி.—மாறுக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு A உடைய உயர்ந்த சாடியொன்று கரைசலொன்றைக் கொண்டிருக்கின்றது எனக் கருதுக. $x=0$ என்பதால் சாடியின் அடி வரையறுக்கப்படுக ; உயரம் x இலுள்ள தளமொன்றின் புள்ளிகள் எல்லாவற்றிலும் செறிவு n ஆகுக. அப்பொழுது செக்கனில் இத்தளத்தைத் தாண்டிச் செல்கின்ற கரைந்த பதாரத்தத்தின் திணிவானது

$$-\mathrm{DA}\frac{\partial n}{\partial x}$$

ஆகும்.

உயரம் $x+\delta x$ இலுள்ள தளத்தில், செறிவு $n+\delta n$ ஆயின், செக்கனில் அத்தளத்தைக் கடந்து செல்கின்ற திணிவானது

$$-\mathrm{DA}\left\{\frac{\partial n}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)\delta x\right\}$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது.

இவ்விரு தளங்களுக்கிடையேயுள்ள கரைசலின் கனவளவு A δx ஆகும் ; செக்கனில் இக்கனவளவில் உட்புகுகின்ற கரைந்த பதார்த்தத்தின் திணிவு

$$-\mathrm{DA}\frac{\partial n}{\partial x}-\left[-\mathrm{DA}\left\{\frac{\partial n}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)\delta x\right\}\right]=\mathrm{DA}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\delta x$$

ஆகும.

கருதப்படுகின்ற மூலகத்தின் கனவளவு A δx ஆதலின், அம்மூலகத்தில் செறிவின் வளர்ச்சிவீதமானது, அதாவது $\frac{\partial n}{\partial t}$ என்பது,

$$\mathrm{DA}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\delta x \div \mathrm{A}\ \delta x$$

ஆகும் ; எனவே

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\mathrm{D}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}.$$

இது வகையீட்டுச் சமன்பாடாகக் கோவைப்படுத்தியுள்ள ஃபிக்கு விதி. இச்சமன்பாட்டில் பரவலின்போது திரவம் ஓய்வாயிருக்கின்றது எனக் கேள்விக்கிடமின்றிக் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்றது. அது அவ்வாறனறு என 1900 இற்கு முன்பு உணரப்படவில்லை ; ஏனெனில் பரவல் தொடர்ந்து நடைபெறுங்கால், கரைசலின் செறிவில் உண்டாகின்ற மாற்றங்கள் காரணமாகக் கரைசலின் கனவளவு மாறுகின்றபடியால் அத்திரவமானது கண்டிப்பாய் அசைதல் வேண்டும் ; எனவே பரிசோதனைப் பேறுகளுடன் ஃபிக்கின் விதி ஒத்திருக்க வேண்டுமானால் அவ்விதியின் விரி தேவைப்படுகின்றது.

பரவலானது உறுதிநிலையை அடைந்த பின்னர் பரிசோதனைகளை நடாத்த ஃபிக் முயன்றார். அதன் இரு முனைகளும் திறந்திருக்கின்ற குழாயொன்று (எடுத்துக்காட்டாகச்) சோடியம் குளோரைட்டுப் பளிங்குகள் கொண்டிருக்கின்ற பாத்திரமொன்றிலே, நிலைக்குத்தாக ஒட்டி வைக்கப் பட்டிருக்கின்றது ; குழாயின் கீழான முனை உப்பைத் தொட்டிருக்கின் றது. குழாய் நீரால் நிரப்பப்பட்டுப் பெரிய நீர்த்தொட்டியொன்றிலே வைக்கப்படுகின்றது ; பரவல் வீதம் உறுதிநிலையை அடையும் வரை அது விடப்பட்டிருக்கின்றது.

இவ்வண்ணம், குழாயின் கீழ் முனையிற் செறிவானது மாறிலியாகப் பேணப்பட்டுள்ளது ; அதே நேரம் அதனது மேல் முனையிற் செறிவு பூச்சியம் எனக் கொள்ளலாம். உறுதிநிலையில் $\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}=0$; எனவே $n=ax+b$; இங்கு a யும் b யும் மாறிலிகள் ஆகும். இம்முடிவைச் சோதிக்கும் பொருட்டு ஃபிக் குழாயினுள்ள திரவத்தில், பல்வேறு ஆழங்களில், சிறு கண்ணாடிக் குமிழொன்றை நிறுத்து அவ்வவ்வாழங் களிற் கரைசலின் அடர்த்திகளைத் துணிந்தார். செறிவுடன் அடர்த்தி மாறுகின்ற விதம் தெரிந்திருந்தபடியால் முந்தியது துணியப்பட்டது ; அது மேற்படி சூத்திரத்துடன் ஒத்திருப்பதை ஃபிக் கண்டுகொண்டார்.

ஃபிக்கின் விதியைச் சோதிக்கும் பொருட்டுப் பின்வந்த ஆராய்ச்சியாளர் பயன்படுத்தியுள்ள வெவ்வேறான முறைகளை இரு முக்கிய வகைகளில் அடக்கலாம் :—

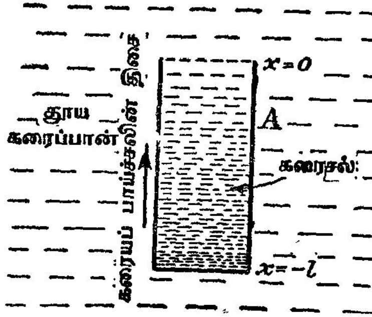
(a) பரவலுக்கான பாத்திரத்தின் மேல் முனையிற் பூச்சியச் செறிவு எப்பொழுதும் பூச்சியமாயிருக்குமாறு பேணப்பட்டிருப்பவை ; இவை " தொட்டி முறை " எனப்படுவதைச் சேர்ந்தவை.

(b) பாத்திரத்தின் மேல் முனையில் அதாவது அதன் வாயில், செறிவுப் படித்திறன் எப்பொழுதும் பூச்சியமாக இருப்பவை. இது " சாடி முறை " எனப்படும் ; இம்முறையில் பாத்திரத்தின் வாயானது வளிமண்டலமுக மாகத் திறந்திருக்கிறபடியால் அதன் குறுக்கே கரையத்தின் பாய்ச்சலானது எப்பொழுதும் பூச்சியமாயிருக்கும், அதாவது

$$-D\frac{\partial n}{\partial x}=0, \text{ அல்லது } \frac{\partial n}{\partial x}=0.$$

தொட்டி முறைக்கான பொதுக்கொள்கை.—இம்முறையில் நீர் அல்லது வேறெந்தக் கரைசலும் உருளைப்பாத்திரம் A யிற் கொள்ளப்பட்டிருக் கிறது, படம் 13·13. உருளையின் அச்சானது நிலைக்குத்தாக இருக்கின்றது ; தொடக்கத்திற் பாத்திரமானது சீரான செறிவு N உடைய கரைசலொன் றால் முற்றிலும் நிரப்பப்படுகின்றது ; அப்பாத்திரம் பெரும் கனவளவி

னுள்ள தூய கரைப்பானுற் சூழப்பட்டிருக்கின்றது. பரிசோதனையில் பாத்திரத்தினின்று கரைந்த பதார்த்தத்தின் பரவல்வீதம் துணியப்படுகிறது. அதன் பொதுவான கொள்கை பின்வருமாறு :



படம் 13·13. பரவற் குணகம் துணிதற்கான தொட்டி முறைக் கொள்கை.

பாத்திரத்தினது உருளைப்பாகத்தின் திறந்த முனையானது $x=0$ இனுல் வரையறுக்கப்படுக ; அதனது கீழ் முனையில் $x=-l$ ஆகுக. தீர்க்கப்பட வேண்டிய சமன்பாடானது

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\mathrm{D}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(i)}$$

ஆகும் ; அது பரவல் பற்றிய எல்லா ஆராய்ச்சிகளுக்கும் பொதுவானது.

$$n=a_0+\{\text{அடுக்.}(-m^2\mathrm{D}t)\}\,(a \text{ கோசை } mx+b \text{ சைன் } mx) \quad . \; . \quad \text{(ii)}$$

என்பது இச்சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாகும், பக்கம் 44 இற் காண்க.

இப்பரிசோதனையில்

எங்கும் $\quad n_{t=0}=\mathrm{N},$

எங்கும் $\quad n_{t=\infty}=0, \qquad \therefore\; a_0=0,$

எப்பொழுதும் $\; n_{x=0}=0, \qquad \therefore\; a=0,$

மேலும் $x=-l$ என்னும் எல்லையைக் கரைந்த பதார்த்தம் கடக்காமல் இருக்கிறபடியால்

$$\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x=-l}=0.$$

கடைசி நிபந்தனையின்படி எப்பொழுதும் b கோசை $ml=0$ ஆகும் என உணரக்கிடக்கின்றது.

$$\therefore\; m=\frac{2p-1}{2l}\pi\;;\; \text{இங்கு } p=1,\,2,\,3\ldots$$

$$\therefore\; n=\sum_{p=1}^{\infty}\text{அடுக்.}\left\{-\frac{(2p-1)^2}{4l^2}\pi^2\mathrm{D}t\right\}.b_p \text{ சைன் }\left(\frac{2p-1}{2l}\right)\pi x \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(iii)}$$

மேற்படி சமன்பாட்டில் $t=0$ எனப் போட்டும், எங்கும் $[n]_{t=0}=N$ என ஞாபகப்படுத்தியும், பூரியே தொடரொன்றில் குணகங்களைக் காணும் வழக்கமான முறைப்படிச் சமன்பாடு முழுவதையும் சைன் $\frac{2p-1}{2l}\pi x\ dx$ என்பதாற் பெருக்கி, $x=-l$ இலிருந்து $x=0$ வரை அதைத் தொகையிட்டு

$$N\int_{-l}^{0} \text{சைன்}\ \frac{2p-1}{2l}\pi x\ dx = b_p\int_{-l}^{0} \text{சைன்}^2\left(\frac{2p-1}{2l}\right)\pi x\, dx$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

$$\therefore\ N\left[\frac{-2l}{(2p-1)\pi}\ \text{கோசை}\ \frac{2p-1}{2l}\pi x\right]_{-l}^{0} = b_p\left(\frac{l}{2}\right).$$

$$\therefore\ b_p = -\frac{4N}{(2p-1)\pi}.$$

எனவே $n=-\frac{4N}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)}\text{அடுக்.}\left\{-\frac{(p-1)^2\pi^2}{4l^2}Dt\right\}\left[\text{சைன்}\left(\frac{2p-1}{2l}\right)\pi x\right].$

உருளையின் முடியினின்று கரைந்த பதார்த்தம் பிரியும் வீதம் $\frac{dM}{dt}$, அதாவது

$$\frac{dM}{dt} = -DA\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x=0}$$

ஆயின்,

அப்பொழுது
$$M = -DA\int_0^t\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x=0} dt\ ;$$

இங்கு M ஆனது t செக்கனில் பிரியும் திணிவும், A ஆனது சாடியின் மாறாக் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவும் ஆகும்.

இனி

$$\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x=0} = -\frac{4N}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\epsilon^{-(\ldots)t}.\frac{1}{2p-1}.\frac{(2p-1)\pi}{2l}\ \text{கோசை}\ \frac{2p-1}{2l}\pi x\right]$$

$$= -\frac{2N}{l}\sum_{p=1}^{\infty}\epsilon^{-(\ldots)t}.$$

$$\therefore\ M = \frac{2DAN}{l}\int_0^t\sum_{p=1}^{\infty}\text{அடுக்.}\left\{-\frac{(2p-1)^2\pi^2Dt}{4l^2}\right\}dt$$

$$= \frac{2DAN}{l}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\frac{-4l^2}{(2p-1)^2\pi^2D}\epsilon^{-(\ldots)t}+\frac{4l^2}{(2p-1)^2\pi^2D}\right\}\right]$$

$$= 2ANl\left[\frac{4}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2p-1)^2}-\frac{1}{(2p-1)^2}\text{அடுக்.}\left(-\frac{\overline{2p-1}^2\pi^2Dt}{4l^2}\right)\right\}\right]$$

$$= M_0\left[1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)^2}\text{அடுக்.}\left\{-\frac{(2p-1)^2\pi^2Dt}{4l^2}\right\}\right],$$

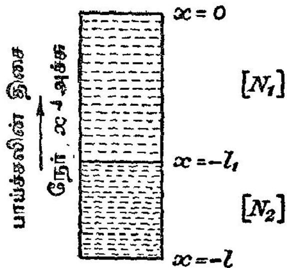
$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$ ஆதலின் [பக்கம் 29 இற் காண்க.]

இங்கு M_0 ஆனது தொடக்கத்திலே, உருளையில் வைத்துள்ள உப்பின் திணிவு ஆகும். இத்தொடரானது விரைவாக ஒருங்குகின்றபடியால், நடைமுறையில்

$$M = M_0\left[1 - \frac{8}{\pi^2} \text{ அடுக். } \left(-\frac{\pi^2 Dt}{4l^2}\right)\right]$$

என்னுஞ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால் அது போதியதாகும்; இச் சூத்திரத்திலிருந்தே D இற்கு வழக்கமாகப் பெறுமானங் காணப்படுகின்றது.

திரவங்களிலே பரவலின் "சாடி" முறை ஆராய்ச்சிக்கான பொதுக் கொள்கை.—சீரான குறுக்குவெட்டுடைய, உயர்ந்த உருளைச் சாடி யொன்று தொடக்கத்தில் கரைப்பான் (நீர்) ஆல் நிரப்பப்படுகின்றது ; அடுத்து அவ்விரு (திரவங்களின்) தொடக்கத் தோற்றம் படம் 13·14 இற் காட்டியுள்ளவாறு இருக்கும்படி நீருக்குக் கீழே கரைசல் புகுத்தபடுகின்றது. $x=0$ என்பது சாடியின் மேல் முனையையும், $x=-l_1$ எனபது தொடக்கத்தில் கரைப்பானி னின்று நீரைப் பிரித்து வைக்கும் தளத்தையும் வரையறுக்க ; $x=-l$ என்பது திரவநிரலின் அடியைக் குறிக்க.



படம் 13·14. "சாடி" முறையால் பரவற் குணகம் துணிதற்குரிய பொதுக் கொள்கை.

இனி ஃபிக்கின் விதியானது

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

என்பதாகும்.

இச்சமன்பாட்டிற்கு

$$n = a_0 + [a \text{ கோசை } mx + b \text{ சைன் } mx] \times \text{ அடுக். } (-m^2 Dt)$$

என்பது ஒரு தீர்வாகும்.

இப்பரிசோதனையின் நிபந்தனைகளுக்கேற்ப $\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x=0}$ என்பது எப்பொழுதும் பூச்சியம் ஆகும் ; ஏனெனில், $x=0$ என்னும் எல்லைக்குக் குறுக்கே கரையமானது ஒருபோதும் செல்லமாட்டாது எனத் தெளிக. இங்கு முறையே $-l_1 < x < 0$ என்பதாலும் $-l < x < -l_1$ என்பதாலும் வரையறுக்கப்பட்ட வீச்சுக்களில் பொதுமையையிட்டு N_1, N_2 என்பன கரையத்தின் தொடக்கச் செறிவுகள் ஆகும் எனக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆனால்,

$$\frac{\partial n}{\partial x} = [-ma \text{ சைன் } mx + bm \text{ கோசை } mx] \text{ அடுக். } (-m^2 Dt).$$

எனவே $b=0$.

மேலும், அதுபோன்ற காரணமொன்றால் $\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{x=-l}$ எப்பொழுதும் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore\ ml=p\pi\ ;\ \text{இங்கு}\ p=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

$$\therefore\ \ n=a_0+\sum_{p=1}^{\infty} a_p\ \text{கோசை}\ \frac{p\pi x}{l}\ \text{அடுக்.}\left(\frac{-p^2\pi^2 \mathrm{D}t}{l^2}\right).$$

$t=0$ ஆனபோது

$$n_{t=0}=a_0+\sum_{p=1}^{\infty} a_p\ \text{கோசை}\ \frac{p\pi x}{l}\ ;$$

இது a_0 ஐப் பின்வருமாறு காண்பதற்குப் பயன்படுகின்றது. பின்வரும் சமன்பாட்டின் பக்கங்கள் இரண்டும் $t=0$ என்னும நேரத்தில், அலகுப் பரப்பளவு உடையதும் சாடியின் முடியிலிருந்து அதன அடிவரை விரிந்து கிடக்கின்றதுமான திரவநிரலொன்றிலே இருக்கின்ற முழுக் கரையத்தையும் எடுத்துரைக்கின்றபடியால்

$$\int_{-l}^{-l_1}\mathrm{N}_2\,dx+\int_{-l_1}^{0}\mathrm{N}_1\,dx=\int_{-l}^{0}a_0\,dx+\int_{-l}^{0}\sum_{p=1}^{\infty}a_p\ \text{கோசை}\ \frac{p\pi x}{l}\,dx$$

என்னும் இச்சமன்பாடானது சரியெனக் கொள்கின்றோம்.

இச்சமன்பாடானது

$$\mathrm{N}_2(-l_1+l)+\mathrm{N}_1(l_1)=a_0(l)+0$$

என்பதைத் தருகின்றது.

$$l_2=-l_1+l\ \text{எனில்,}\ a_0=\frac{\mathrm{N}_1 l_1}{l}+\frac{\mathrm{N}_2(-l_1+l)}{l}=\frac{\mathrm{N}_1 l_1+\mathrm{N}_2 l_2}{l}\ \text{ஆகும்.}$$

a_p யைக் காண்பதற்கு பின்வருமாறு நடந்து கொள்கிறோம்:

$$n_{t=0}=a_0+\sum_{p=1}^{\infty}a_p\ \text{கோசை}\ \frac{p\pi x}{l}$$

என அறிவோம். இச்சமன்பாடெங்கணும் கோசை $\frac{p\pi x}{l}\,dx$ என்பதாற் பெருக்கித் தொகையிடுக. அப்பொழுது

$$\int_{-l}^{-l_1}\mathrm{N}_2\ \text{கோசை}\ \frac{p\pi x}{l}\,dx+\int_{-l_1}^{0}\mathrm{N}_1\ \text{கோசை}\ \frac{p\pi x}{l}\,dx$$
$$=a_0\int_{-l}^{0}\text{கோசை}\ \frac{p\pi x}{l}\,dx+\int_{-l}^{0}\sum_{p=1}^{\infty}a_p\ \text{கோசை}^2\ \frac{p\pi x}{l}\,dx$$

எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore\ \mathrm{N}_2\left[\frac{\text{சைன்}\ \frac{p\pi x}{l}}{\frac{p\pi}{l}}\right]_{-l}^{-l_1}+\mathrm{N}_1\left[\frac{\text{சைன்}\ \frac{p\pi x}{l}}{\frac{p\pi}{l}}\right]_{-l_1}^{0}=0+\int_{-l}^{0}a_p\ \text{கோசை}^2\ \frac{p\pi x}{l}\,dx=a_p\left(\frac{l}{2}\right).$$

$$\therefore\ a_p = \frac{2(N_1 - N_2)}{p\pi} \text{ சைன் } \frac{p\pi l_1}{l}.$$

எனவே பொதுத் தீர்வானது

$$n = \frac{N_1 l_1 + N_2 l_2}{l} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(N_1 - N_2)}{p\pi} \text{ சைன் } \frac{p\pi l_1}{l} \text{ கோசை } \frac{p\pi x}{l} \text{ அடுக்.}\left(-\frac{p^2\pi^2 Dt}{l^2}\right)$$

என்பதாகும்.

$$N_1 = 0 \text{ உம், } N_2 = N \text{ உம், } l_1 = l_2 = \tfrac{1}{2}l \text{ உம்}$$

எனின்,

$$n = \frac{N}{2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2N}{p\pi} \text{ சைன் } \frac{p\pi}{2} \text{ கோசை } \frac{p\pi x}{l} \text{ அடுக். } \left(-\frac{p^2\pi^2 Dt}{l^2}\right)$$

$$= \frac{N}{2} - \frac{2N}{\pi}\Big[\text{சைன் } \frac{\pi}{2} \text{ கோசை } \frac{\pi x}{l} \text{ அடுக். } \left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)$$

$$+ 0 + \tfrac{1}{3} \text{ சைன் } \frac{3\pi}{2} \text{ கோசை } \frac{3\pi x}{l} \text{ அடுக். } \left(-\frac{9\pi^2 Dt}{l^2}\right)$$

$$+ 0 + \tfrac{1}{5} \text{ சைன் } \frac{5\pi}{2} \text{ கோசை } \frac{5\pi x}{l} \text{ அடுக். } \left(-25\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right) + \ldots\Big]$$

எனப் பெறுகிறோம்; மேலும் $x = -\frac{1}{2}l$ என்னும் தளத்தில்,

$$\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)_{n=-\frac{1}{2}l} = -\frac{2N}{l}\ [\text{அடுக். } (\alpha t) + \text{ அடுக். } (9\alpha t) + \text{ அடுக். } (25\alpha t) + \ldots];$$

இங்கு $\alpha = -\dfrac{\pi^2 D}{l^2}$.

t செக்கனில், சாடியின் கீழ்ப்பாகத்தை விட்டு அதன் மேற் பாகத்தை அடைகின்ற கரையத்தின் திணிவு M உம், சாடியின் குறுக்குவெட்டுப் பரப்பளவு A யும் ஆனால்,

$$M = -AD\int_0^t \left(\frac{\partial n}{dx}\right)_{x=-\frac{1}{2}l} dt$$

$$= \frac{2ADN}{l} \cdot \frac{1}{\alpha}\ [\text{அடுக். } (\alpha t) + \tfrac{1}{9} \text{ அடுக். } (9\alpha t) + \tfrac{1}{25} \text{ அடுக். } (25\alpha t) + \ldots$$

$$- (1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \ldots)]$$

$$= \frac{2DAN}{l} \cdot \frac{l^2}{\pi^2 D}\left[(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \ldots) - \text{அடுக். } \left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)\right];$$

இங்கு சிறிய உறுப்புக்கள் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன.

$$\therefore\ M = \frac{2DAN}{l} \cdot \frac{l^2}{\pi^2 D}\left[\frac{\pi^2}{8}\left\{1 - \frac{8}{\pi^2} \text{ அடுக். } \left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)\right\}\right],$$

$$= \frac{ANl}{4}\left[1 - \frac{8}{\pi^2} \text{ அடுக். } \left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)\right].$$

நீர்க்கரைசலிலிருக்கின்ற உப்பொன்றிற்கு ஆய்கூட முறையாகப் பரவற் குணகத்தைத் துணிதல்.—இம்முறையானது "சாடி" முறையைச் சேர்ந்தது; அது ஸ்ரீஃபின்ஸ் (Stephens), ராம்சே (Ramsay) ஆகியோராலானது; ஆனால் இங்கு விவரித்துக் கூறப்பட்டது நிறமாக்கப்பட்ட கரைசல்களிடத்து மட்டுமே பயன்படும். தரப்பட்ட தளமொன்றிலே, தெரிந்த காலவிடை யொன்றின் முடிவிலே, செறிவைத் துணியும்பொருட்டு ஒளியினகலமொன்றால் கரைசலூடே செல்கின்ற ஒளிக்கற்றையொன்றின குறைதலே அளத்தலே இக்குறைக்குக் காரணமாகும். ஏற்கெனவே சாடிமுறைக்கு விரித்துக் கூறியுள்ள கொள்கையில் நேரம் t ஆனது அதநுணே அதிகமாயிருந்தால் அக்கொள்கையின முதலாவது உறுப்பு ஒழிநத எல்லா உறுப்புக்களையும் புறக்கணிக்க முடியும், அப்பொழுது தளம் x இலுள்ள செறிவானது

$$n=\frac{N}{2}-\frac{2N}{\pi}\left[\text{கோசை}\ \frac{\pi x}{l}\ \text{அடுக்.}\left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)\right]$$

என்பதால் தரப்படுகிறது.

பரிசோதனைப் பேறுகளுடன மேற்படி சமன்பாட்டை இணைப்பதறகு இரு வெவ்வேறான முறைகள் உடனே தோனறுகின்றன; ஆனால் மறை உறுப்புக்கள் தோன்றுவண்ணம் சமன்பாடடை ஒழுங்குபடுத்துதல் வேண்டற பாலது என்பதை ஞாபகப்படுத்தல் வேண்டும். மறை எண்ணொன்றின் மடக்கை கற்பனையானது என்பதே இதற்குக் காரணம்; ஏனெனில்

$$-1=\text{கோசை}\ \pi=\text{கோசை}\ \pi+j\ \text{சைன்}\ \pi=\text{அடுக்.}\ (j\pi)\ ;$$

எனவே $$\text{இ. மடக்.}(-1)=j\pi.$$

(*a*) முதலாவது முறையில், நிலைத்த தளமொன்று தெரிந்தெடுக்கப் பட்டு அதில் வெவ்வேறான நேரங்களில் செறிவு n ஆனது குறிக்கப்படுகின்றது. கருதத்தக்க அளவில் நேரம் செலவான பின் எவ்வாறு x உடன் n ஆனது மாறுகின்றது என்பதைக் காட்டும் சமன்பாட்டை

$$\left(\frac{N}{2}-n\right)\frac{\pi}{2N}=\text{கோசை}\ \frac{\pi x}{l}\ \text{அடுக்.}\left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)$$

என எழுதலாம். $-\frac{1}{2}l<x<0$ ஆயின், அதாவது x ஆனது சாடியின் மேலான அரையிலுள்ள புள்ளியொன்றைக் குறிக்குமாயின், அப்பொழுது நடைமுறையில் எந்நேரமும் $n<\frac{N}{2}$ ஆதலால், மேற்படி சமன்பாட்டிலுள்ள உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் நேராகும்; எனவே,

$$\left(\frac{N}{2}-n\right)=B\ \text{அடுக்.}\left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right);$$

இங்கு B யானது நேராகும். இச்சமன்பாடானது செல்லுபடியாகுமிடத்து, t தொடர்பாக இ.ம. $\left(\frac{N}{2}-n\right)$ ஐக் குறித்தால், $\left(-\frac{\pi^2 D}{l^2}\right)$ என்னும் படித்திற னுள்ள நேர்கோடொன்றைப் பெறல் வேண்டும்.

ஆனால் $-l<x<-\frac{1}{2}l$ ஆயின், அதாவது x ஆனது சாடியின் கீழ் அரைவாசியிலுள்ள புள்ளியொன்றை வரையறுக்குமாயின் அப்பொழுது, நடைமுறையில் எந்நேரமும் $n>\frac{N}{2}$ ஆதலால்,

$$\left(n-\frac{N}{2}\right)\frac{\pi}{2\pi}=\left(-\text{கோசை }\frac{\pi x}{l}\right)\text{ அடுக்.}\left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)$$
$$=\text{கோசை }\frac{\pi(l-x)}{l}\text{ அடுக்.}\left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)$$ எனப் பெறுகிறோம்.

இப்பொழுது, எல்லா உறுப்புக்களும் நேர் ஆகும்; முன்னர்போல் t தொடர்பாக இ. ம. $\left(n-\frac{N}{2}\right)$ ஐக் குறித்துக் கொள்ளலாம்.

(b) இரண்டாவது முறையில் x மாறியெனவும், n ஒரு மாறிலியென வும் கருதப்படுகின்றன. எமது அடிப்படைச் சமன்பாடானது

$$\text{கோசை }\frac{\pi x}{l}\text{ அடுக்.}\left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)=\left(\frac{N}{2}-n\right)\frac{\pi}{2N}$$

என்பதாகும்.

$-\frac{1}{2}l<x<0$ எனின், $n<\frac{N}{2}$; மேலும் கோசை $\alpha=$ கோசை $(-\alpha)$ ஆதலின், உறுப்பொவ்வொன்றும் நேராகும் ; எனவே

$$-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}+\text{இ. ம. கோசை }\frac{\pi x}{l}=\text{மெய் மாறிலி.}$$

$-l<x<-\frac{1}{2}l$ எனின், $n>\frac{N}{2}$; இங்கு

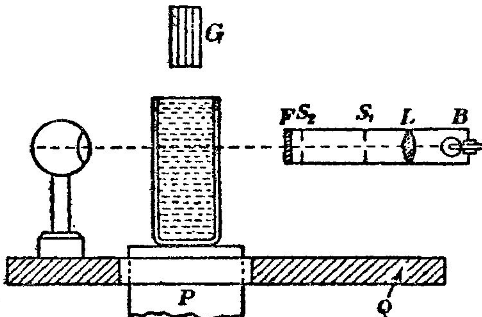
$$\left(n-\frac{N}{2}\right)\frac{\pi}{2N}=\left[\text{கோசை }\frac{\pi(l-x)}{l}\right]\text{அடுக்.}\left(-\frac{\pi^2 Dt}{l^2}\right)$$

என எழுதல் வேண்டும்; எனவே, ஏகபரிமாணத் தொடர்பொன்றைப் பெறும்பொருட்டு மடக்கைகள் எடுக்குமிடத்து மெய்க் கணியங்கள் தோன்றும்.

எனவே, D யைத் தரக்கூடிய படித்திறன் உடைய ஏகபரிமாண வரைபொன்றைப் பெறும்பொருட்டு, n இன் தேர்ந்த பெறுமானத்திற் கேற்ப, t தொடர்பாக ஒன்றில் இ.ம. கோசை $\frac{\pi x}{l}$ என்பதை அல்லது இ.ம. கோசை $\frac{\pi(l-x)}{l}$ என்பதைக் குறித்தல் வேண்டும்.

தேர்ந்த முறை எதுவாகிலும், பரவற் குணகம் D யானது செறிவைச் சார்ந்துள்ளது என்பதை ஞாபகப்படுத்தல் வேண்டும் ; எனவே D யிற்குக் கிடைத்த பெறுமானமானது அண்ணளவான கருத்தை மட்டுமே உடையது.

ஆய்கருவியும் பரிசோதனைச் செயன்முறையும்.—பயன்படுத்தியுள்ள சாடியானது (5 சமீ. × 1 சமீ.) செவ்வக வெட்டுடைய ஒரு சிறு கண்ணாடிப் பாத்திரமாகும் ; அதன் ஆழமானது கிட்டத்தட்ட 10 சமீ. ஆகும். அது உறுதியான கற்றூண் P மீது வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது, படம் 13·15 ; ஒளியின் கலமும் ஒளிமுதலும் ஒடு சட்டத்தோடு சிறுபற்சில்லு என்பதால்



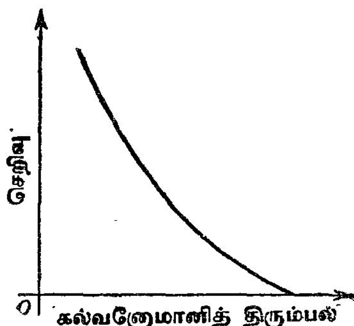
படம் 13·15. பரவற் குணக ஆய்கருவி. [Q வை உயர்த்தலுக்கான பொறியமைப்பானது காட்டப்படவில்லை.]

உயர்த்தக்கூடிய ஒரு கிடையான மேடை Q மீது நிலையாக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இவ்வண்ணம் திரவத்தின் எந்தக் கிடையான அடுக்கூடேயும் மோட்டர்வண்டி முன்விளக்கொன்றின் குமிழ் B யிலிருந்து குறுகிய, கிடையான ஒளிக்கற்றையொன்றைச் செலுத்தலாம். சமாந்தர ஒளிக்கற்றையொன்றைப் பெறும் பொருட்டுப் பயன்படுத்தப்படுகின்ற ஒருங்குவில்லை L ஐக் கொண்டிருக்கின்ற பொருத்தமான அதே அடைப்பிற் குமிழும் ஏற்றப்பட்டிருக்கின்றது. கற்றையின் அகலமானது இரு குறுகிய பிளவுகள் S_1, S_2 என்பவற்றால் வரையறுக்கப்படுகின்றது. ஒளியின் கலமானது உணர்ச்சியுள்ள கல்வனோமானி, உயரிழுவைக் கலம், பொருத்தமான உயர்தடை என்பவற்றுடன் தொடரிலே தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அலை நீளமிக்க ஒளிக்குச் சீசியம் வகை ஒளியின் கலமானது கொண்டிருக்கின்ற உயருணர்திறனையிட்டு, ஒரு சிவப்பு வடி F பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

நோக்கலானது பல நாட்கள் நீடித்திருக்க வேண்டியதாதலால் ஒளிமுதலின் மெழுகுதிரிவலுவை மாறிலியாக உறுதிப்படுத்தற் பொருட்டு நடவடிக்கைகள் எடுக்கப்படல் வேண்டும். விளக்கு B யில் ஓட்டமானது அண்ணளவான மாறாப் பெறுமானமொன்றுடையதாய் இருக்கும் வண்ணம் செப்பஞ் செய்யப்படுகின்றது. அடுத்து ஒளியானது கண்ணாடித்தட்டு அடுக்கு G யினூடாகச் செல்லவிடப்படுகின்றது ; அது ஒரு மாறுவுறிஞ்ச

லூடகமாகப் பயன்படுகின்றது. கடைசியாக G நிலையில் இருக்க, கல்வனோ மானியில் மாறுத் திரும்பலொன்று தோன்றும் வண்ணம் B யில் ஓட்டமானது செப்பஞ் செய்யப்படுகின்றது.

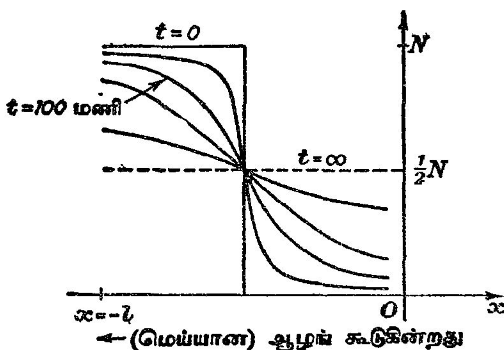
கலம் தொழிற்படும்போது கிடைக்கப் பெறுகின்ற திரும்பலைச் செறிவுடன் இணைக்கும்பொருட்டுக் கலத்தைத் தெரிந்த சீரான வலுவுடைய கரைசல்களால் நிரப்பிப் படம் 13·16 இற் காட்டியுள்ள அளவு கோடுதரு



படம் 13·16. படம் 13·15 இற் காட்டியுள்ள ஆய்கருவிக்கான அளவுகோடுதரு வரைபு.

வரைபு போன்றதொன்று வரையப்படுகின்றது. ஒளிமுதல், பரவற் கலம், ஒளியுணரி ஆகியவற்றை மரப்பெட்டியொன்றுள் வைப்பதால் வெளியொளி தவிர்க்கப்படுகின்றது.

படம் 13·17 இல் மாதிரி வரைபுத் தொடையொன்று காட்டப்பட்டிருக்கின்றது; புள்ளியிட்ட கிடையான கோடானது கலத்தல் முடிவடைந்த பின்



படம் 13·17. ஸ்ரீஃபின்ஸ், ராம்சே ஆகியோரின் பரவுகை ஆய்கருவியாற் கிடைக்கப்பெற்ற மாதிரி வரைபுகள்.

னுள்ள, அதாவது $t \to \infty$ போதுள்ள, செறிவைச் சுட்டுகிறது. ஏற்கெனவே விளக்கிக் காட்டியுள்ள முறைப்படி இவ்வரைபுகளிலிருந்து நேர்கோட்டு வரைபொன்றை ஆக்கலாம் ; பின்னர் அவ்வரைபைப் பயனபடுத்திப் பரவற் குணகத்திற்குப் பெறுமானங் காணப்படுகின்றது.

பரவலேயிட்டு அயின்ஸ்ற்றைனின் கொள்கை.—சாதாரணப் பரவல் தோற்றப்பாடானது தனித் துணிக்கைகளின் பிரௌண இயக்கங்களின் விளைவாலேயே ஆகின்றது. இக்கருத்தைக் கொண்டும், நிகழ்தகவுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தியும், பக்கம் 764 இல் விளக்கிக் காட்டியுள்ள $\overline{\Delta[x^2]}$ ஆனது பரவற் குணகம் D என்பதுடன்

$$\overline{\Delta[x^2]} = 2Dt$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் தொடர்பு படுத்தப்பட்டிருக்கின்றது என அயின்ஸ்ற்றைன் காட்டியுள்ளார் ; இங்கு நேரம் t என்பதற்கே $\overline{\Delta[x^2]}$ இன் சராசரிப் பெறுமானம் கணிக்கப்படுகின்றது.

$$\overline{\Delta[x^2]} = \frac{RTt}{3\pi a\eta N} \qquad \text{ஆதலால் (பக்கம் 764)}$$

$$N = \frac{RT}{6\pi a\eta D}$$

எனப் பெறுகின்றோம் ; இங்கு N அவகாதரோவின் மாறிலி ஆகும்.

இனி 17° ச. இல் வெல்லத்தின் நீர்க்கரைசலொன்றிற்கு $D = 2 \cdot 9 \times 10^{-6}$ சமீ.^{2} செக்.$^{-1}$ ஆகும். ஆரை $4 \cdot 15 \times 10^{-8}$ சமீ. உடைய விறைப்பான கோளங்களாக வெல்லமூலகங்கள் நடந்து கொள்கின்றன எனவும், 17° ச. இல் நீரின் பிசுபிசுப்பு 0·010 கி. சமீ.$^{-1}$ செக்.$^{-1}$ எனவும் கொண்டால்

$$N = \frac{8 \cdot 3 \times 2 \cdot 9 \times 10^{7+2}}{6\pi \times 4 \cdot 15 \times 1 \cdot 0 \times 2 \cdot 9 \times 10^{-8-2-6}}$$

$$= 10 \cdot 6 \times 10^{23} \text{ மூல்.}^{-1}$$

எனப் பெறுகிறோம் ; இங்கு R, $8 \cdot 3 \times 10^7$ எக். °ச$^{-1}$. மூல்.$^{-1}$ எனக் கொள்ளப்படுகின்றது.

அவகாதரோவின் எண்ணிற்கான திருத்தமான அளவீட்டு முறைகள் $N = 6 \cdot 02 \times 10^{23}$ மூல்.$^{-1}$ எனத் தருகினறபடியால் மேற்படி கணிப்பின் அண்ணளவியல்பு தெளிவாகும்.

பயிற்சி XIII

13·01. பிரசாரணம், பிரசாரண அமுக்கம் என்பவற்றிற்கு வரைவிலககணங் கூறி எவ்வாறு கரைசலொன்றின் பிரசாரண அமுககத்தை அளககலாம் எனபதை விளககிக கூறுக. கரும்புவெல்லத்தின் ஐதான கரைசலொன்றின் பிரசாரண அமுக்கமானது அதே மூலக்கூற்றுச் செறிவுடைய பொற்றுசியம் குளோரைட்டின் கரைசலொன்றின் பிரசாரண அமுககத்தின் அரைவாசிக்குக் கிட்டத்தட்டச் சமன் என்பதை எவ்வாறு விளக்கிக் காட்ட முடியும்?

13·02. பிரசாரணம், பிரசாரண அமுக்கம் என்பவற்றை விளக்குக.

எக்காரணிகளிலே கரைசலொன்றின் பிரசாரண அமுக்கமானது சார்ந்திருக்கின்றது என்பதைக் கூறுக.

V மிலீ. இல் மூலக்கூற்று நிறை M உடைய கரையமொன்றை N கிராம் அளவில் கொண்டிருக்கின்ற ஐதான மின்பகாப்பொருட் கரைசலொன்றின் பிரசாரண அமுக்கத்திற்கு 0°ச. இல் கோவையொன்றைப் பெறுக. $\left[\frac{273\ RN}{VM}\right]$.

13·03. பரவல், பிரசாரணம் என்னும் தோற்றப்பாடுகளைப் பற்றிச் சுருக்கிக் கூறுக.

13·04. ஒன்றில் (*a*) பிரசாரண அமுக்கம் அல்லது (*b*) பரவற் குணகங்கள் என்பவற்றை அளக்கப் பயன்படுத்தியுள்ள முறைகளை விவரித்துக் கூறுக. (S)

13·05. **பிரசாரணம்** என்னும் தோற்றப்பாடு பற்றியும் **பிரசாரண அமுக்கம்** என்பதன் குறிப்பிடத்தக்க கருத்து, அதனை அளத்தல் என்பவை பற்றியும் சிறு குறிப்புத் தருக. (G)

13·06. பிரௌண அசைவு பற்றிச் சுருக்கமான கட்டுரையொன்றை வரைந்து எவ்வாறு பிரௌண அசைவைத் தக்கவாறு நோக்கி அவகாதரோவின் மாறிலி (அதாவது கிராம் மூலக் கூறொன்றில் இருக்கின்ற மூலக்கூறுகளின் எண்ணிக்கை)யை மதிப்பிடலாம் என்பதைச் சுட்டிக் காட்டுக. (G)

13·07. திரவமொன்றிலே தொங்கியிருக்கின்ற துணிக்கைகளின் இயல்புகள் இலட்சியவாயு வொன்றின் இயல்புகள் போன்றவையாம். உயரத்துடன் தொங்கிய துணிக்கைகளின் பங் கீட்டில் சீரான ஈர்ப்புப் புலத்தால் ஆகின்ற விளைவை ஆராய்ந்து மேற்படி செய்தியை எடுத்துக்காட்டுக.

இயன்றவளவில் பரிசோதனைக்கான விவரங்களைத் தந்து, எவ்வாறு அவகாத்ரோவின் மாறிலியைக் காணும்பொருட்டு இவ்வாராய்ச்சிப் பேறானது பிரயோகிக்கப்பட்டுளவது என்பதை விளக்கிக் கூறுக. (S)

13·08. முகிலறையொன்றிலே அயனுக்கும் துணிக்கையொன்று சென்று *t* செக்கன்கள் ஆனதும் சுவடொன்று ஆக்கப்படுகின்றது.

$$f(x, t) = \frac{C}{\sqrt{t}} \text{ அடுக்.} \left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

என்னுஞ் சூத்திரத்தின்படி அயன்களின் விம்பங்கள் பரவியிருக்கின்றன ; இங்கு *f* பரப்பளவல கொன்றிலுள்ள விம்பங்களின் எண்ணிக்கையும், *x* ஆனது சுவட்டின் அச்சிலிருந்து தூரமும் C, D என்பன மாறிலிகளும் ஆகும்.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் தரப்படுகின்ற வீதத்துடன் சுவட்டிலிருந்து அயன்கள் பரவுகின்றன எனக்கொண்டால் மேற்படி பரவலை விளக்கிவைக்க முடியும் என்பதைக் காட்டுக.

அயன்களின் இயக்கத்துக்குப் பரவற் சமன்பாடொன்றைப் பயன்படுத்துமிடத்து உட்படுத்தப் படுகின்ற எடுகோள்களைச் சுருக்கமாக விவரித்துக் கூறுக. (S)

அதிகாரம் XIV

வெற்றிட முறைகள்

வரலாற்றுக் குறிப்பு.—1879 ஆம் ஆண்டிலே காபனிழை மின்விளக்கும் அத்துடன் தாழமுக்கம் உண்டாக்குதலில் ஓர் அக்கறையும் தோன்றின ; அவ்வக்கறையானது இன்றுவரை காட்டப்பட்டு வந்திருக்கின்றது ; அல்லாமலும் தாழமுக்கம் உண்டாக்குதலானது என்றும் முதன்மையான துறையொன்ருக விளங்கும் என்பது தெளிவு. உண்மையைக் கூறுமிடத்து, அதற்கு முன்பு, ஒருசில பௌதிகர் மட்டுமே உயர்வெற்றிடம் உண்டாக்குதல் பற்றிச் சிந்தித்துள்ளனர். இங்கிலாந்தில் குறுக்ஸ் (Crookes) என்பவரும் யேர்மனியில் ஹிற்ரேஃப் (Hittorf) என்பவரும் தாழமுக்கங்களில் வாயுக்கள் ஊடே மின்னின் பெயர்ச்சியை ஆராய்ந்துள்ளனர் ; அத்தாழமுக்கங்களை உண்டாக்க அவர்கள் பொறிமுறைப் பம்பிகளைப் பயன்படுத்தினர். இத்தகைப் பம்பிகளிடத்து கிடைக்கக்கூடிய மிகவும் தாழ்வான அமுக்கமானது கிட்டத்தட்ட 0·25 மிமீ. இரசம் ஆகும் ; கையால் இயக்கிவைகககப்படுகின்ற ரோபபிளர் பம்பியொன்றைப் பயன்படுத்தியே 10^{-3} மிமீ. இரசவமுக்க வரிசையில் படும் அமுக்கங்கள், ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில், எளிதாகக் கிடைக்கப் பெற்றுள்ளன ; இவ்வண்ணம் அடைந்துள்ள தாழமுக்கமானது ஒருபோதும் கிட்டத்தட்ட $0{\cdot}05 \times 10^{-3}$ மிமீ. இரசத்துக்குக் குறைவாக இருக்கவேயில்லை.

மின்விளக்குகளின திருந்திய திட்டவமைப்பு, அவ்விளக்குகளின் ஆயுட்காலத்தை நீடிக்கச் செய்தல் வேண்டும் பற்றி என்றுமுள ஆர்வம் ஆகியவற்றையிட்டுச் சிறப்புமிக்க பம்புகருவித் தொடரொன்று தேவையாயிற்று. கண்ணுடியாலான ஆய்கருவியொன்றிலே அமுக்கத்தைக் கிட்டத்தட்ட 10^{-4} மிமீ. இரசம் வரை தாழ்த்தக்கூடிய எண்ணெய்ச் சுழற்சிப் பம்பியொன்றை முதன்-முதலாகத் திட்டமிட்டவர்களுள் யேர்மனியைச் சேர்ந்த கேயிடே (Gaede) என்பவர் ஒருவராவர். 1905 இல் கேயிடே இரசச்சுழற்சிப் பம்பியொன்றை ஆக்கினுர் ; அதற்கு எண்ணெய்ப்பம்பியொனறு முற்பம்பியாகச் செயலாற்றியபோது 10^{-5} மிமீ. இரசவமுக்கத்தை அடைய முடிந்தது ; ஆனுல் பம்புகதி மெதுவாகவேயிருந்தது. பத்தாண்டுகள் சென்றதும் கேயிடே பரவற் பம்பி என்பதைத் திட்டமிட்டார் ; அதை அடுத்த ஆண்டில் லாங்மூயரின் ஒடுக்கற் பம்பியானது பினதொடர்ந்தது. இவ்வொவ்வொரு பம்பி வகையிலும் இரச ஆவியே " வேலைசெய்யும் கருவி "யாக அமைந்திருந்தது ; இவற்றைப் பயன்படுத்தி 10^{-7} மிமீ. (அல்லது 10^{-4} மைக்கிரன்) போன்று அத்துணைத் தாழமுக்கஙகள் கிடைக்கப்பெற்றன. இவ்வெற்றியின் உடனடியான பயன வெப்பவயன் வால்வுகள், கூலிஜ் (அல்லது வெப்பவிழை) வகை X—கதிர்க் குழாய்கள் ஆகியவற்றின் திருந்திய செயலாற்றல் ஆகும்.

1928 இல் பேர்ச்சு (Burch) என்பார் ஒடுக்கற் பம்பியில் இரசத்துக்குப் பதிலாகப் பெற்ரேலின் உயர்கொதிநிலைப் பெறுதியொனறைப் பயன்படுத்த முடிகிறது எனக் கண்டார்; 1930 இல், ஹிக்மான் (Hickman) என்பார் ஓரளவு வரையறைப்படாத இச்சேர்வைக்குப் பதிலாகத் தொகுப்புத்த லேற்று அல்லது செபசேற என்பதைப் பயன்படுத்திஞர். இரசததுக்குப் பதிலாக இவ்வகைப் பொருள்களைப் பயனபடுத்துவதால் வருகினற முக்கிய மான நயமானது ஆய்கூட வெப்பநிலையில் அவவெல்லாவற்றினிடத்தும் நிரம்பிய ஆவியின் அமுக்கம் கிட்டத்தட்ட 10^{-6} மிமீ. இரசமாக இருக்கிற படியால் பம்பிக்கும் வெளிப்படுத்துகைக்கான தொகுதிக்கும் இடையே பொறிகள் வேண்டியதேயில்லை என்பதாகும். இத்தகையவொரு பொறியா னது தலைமைப் பம்புத்தொடரில் புகுத்தப்பட்டிருக்கின்ற ஒரு குழாயா கும்; அது தாழ்வெப்பநிலையில் நிலைநிறுத்தப் பட்டிருக்கின்றபடியால் ஆவியானது தொடரினின்று அப்புறப்படுத்தி உறைந்துவிடும். பொறி யொனறைப் பயன்படுத்துதலால் பம்புகதி, அதாவது வெளிப்படுத்துகை யின் வீதம் எப்பொழுதும் குறைக்கப்படுகின்றது. உயர்வெற்றிடமொன்றைப் பிறப்பித்தல் மட்டுமே பிரச்சினையாயின் அப்பொழுது பொறியொன்றின் கட்டாயமின்மை விரும்பத்தக்கது. எனினும் ஆவியானது எங்கும் இருக் கின்றபடியால், அது திரவப்படலமாக ஒடுங்க நேரிடும்; அப்பொழுது எடுத்துக்காட்டாக அதன் ஒளியியலியல்புகளை ஆராயும்பொருட்டு அவ் வெற்றிடத்தில் வைக்கப்பட்ட உலோகப் படலமொன்றை அத்திரவப் படலங் கள் எளிதில் கறைப்படுத்தக்கூடும்; இதை நாம் ஞாபகப்படுத்தல் வேண்டும். இதுபோனற எடுத்துக்காட்டுகளிற் பம்பியின் செயலாற்றலுக் குப் பயன்படுத்தப்படுகின்ற பதார்த்தமானது தாழாவியமுக்கமுடையதா யிருக்கின்றபோதிலும் பொறியொன்றைப் பயன்படுத்துதல் கட்டாயமாகின் றது.

வெற்றிடப்பம்பிகள் பற்றிப் பொதுவான குறிப்புக்கள்.—வெற்றிடப்பம்பி களை ஒன்றேடொன்று ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்பொழுது கீழ்வருகின்ற விவரங் களை மனத்தில் வைத்திருத்தல் வேண்டும் :—

(*a*) **வெளிப்படுத்தியமுக்கம் :** பம்பியொன்றின் செயலாற்றலுக்கு அதனது வெளியீட்டுப் பக்கத்தில் நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்க வேண்டிய அமுக்கம் என இதற்கு வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகின்றது. பொதுவாகக் கூறு மிடத்து, பம்பியொன்றின் உள்ளெடுப்புப் பக்கத்தில் வெற்றிடத்தின் தரம் எவ்வளவுக்கு உயர்வாக இருக்கத் தேவைப்படுகிறதோ அவ்வளவுக்கு வெளிப்படுத்தியமுக்கமானது தாழ்ந்ததாக இருத்தல் வேண்டும். தரப்பட்ட எந்தப் பம்பிக்கும் தேவைப்படுகின்ற வெளிப்படுத்தியமுக்கமானது பரு மட்டான பம்பியொன்ருலோ தொடர்நிலையில் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற பருமட்டான பம்பிகள் பலவற்ருலோ பெறப்படுகின்றது. இப்பம்பிகள் முற்பம்பிகள் எனப்படும்; அவற்றின் தொடரில் முதலாவதாக இருக்கின்ற உறுப்பு வளிமண்டலத்தில் நேரே வெளியேற்றவேண்டும்.

(b) **பெறக்கூடிய வெற்றிடத்தின் தரம் :** பம்பியுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற மூடிய தொகுதியொன்றிலே அடையக்கூடிய மிகத்தாழ்ந்த அமுக்கம் என இதற்கு வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகின்றது. இவ்வெல்லை அமுக்கமானது வெளிப்படுத்தியமுக்கத்தைப் பொறுத்துள்ளது எனவும், பம்பியில் வாயுவின் பொசிவே அதற்குக் காரணம் எனவும் காணப்பட்டுள்ளது. மூடிய பாத்திரமொன்றினின்று ஐதரசன், ஈலியம் போன்ற இலேசான வாயுக்களின் வெளியேற்றலினிடத்தே இப்பொசிவானது பெரிதும் கவனிக்கத்தக்கது.

(c) **கம்பியொன்றின் கதி.** இவ்விடயம் பற்றிப் பெருமளவில் இன்னும் மயக்கம் உளது. இங்கு இரு வரைவிலக்கணங்கள் கூறப்பட்டு, அவை ஒன்றிற்கொன்று தொடர்புடையதாக்கப்படும். செக்கனில் வெறிதாக்கப்படுகின்ற பாத்திரம் அல்லது தொகுதியினின்று அப்புறப்படுத்தப்படுகின்ற வாயுவின் திணிவு என்பதே பம்பியொன்றின் கதிககான முதலாவது வரைவிலக்கணம். இக்கதியானது σ என்பதால் குறிக்கப்படுக. இரண்டாவது வரைவிலக்கணப்படி கதி S ஆனது செக்கனில் அப்புறப்படுத்தப்பட்ட வாயுவின் கனவளவு ஆகும் ; இவகு அக்கனவளவானது தொகுதியில் அவ்வப்போதுள்ள அமுக்கத்திலேயே அளக்கப்படுகின்றது. σ வையும் S ஐயும் தொடர்புபடுததும்பொருட்டுக் கீழே வருகின்றதைக் கருதுவோம்.

வெளிப்படுத்தப்படுகின்ற தொகுதியின் கனவளவு V ஆகுக ; அத் தொகுதியில் பம்பியின் ஒரு பாகமும் அடங்கும் ; பொதுவாக V ஒரு மாறிலியாகும். நேரம் t யில் V யில் அடைபட்டிருக்கின்ற திணிவு m உம், நேரம் $(t+\delta t)$ யில் அதற்கு ஒத்த திணிவு $(m+\delta m)$ உம் ஆயின், அப்பொழுது நேரம் δt யில் அப்புறப்படுத்தப்பட்டுள்ள திணிவானது $-\delta m$ ஆகும் ; எனவே

$$\sigma = -\frac{dm}{dt}.$$

நேரங்கள் t யிலும் $(t+\delta t)$ யிலும் தொகுதியிலுள்ள வாயுவின் அமுக்கங்கள் முறையே p யும் $(p+\delta p)$ யும், $\mathcal{R}$ ஆனது அலகுத் திணிவு ஒனறிற்குப் பொருத்தமான வாயு மாறிலியும் எனின், அப்பொழுது

$$pV = m\mathcal{R}T.$$

எனவே $V\frac{dp}{dt} = \mathcal{R}T\frac{dm}{dt}$. [V, $\mathcal{R}$, T என்பவை மாறிலிகளாகும்.]

[அகில வாயு மாறிலி R உம் வாயுவின் மூலக்கூற்று நிறை M உம், $\mathcal{R} = \frac{R}{M}$ என்பதால் தொடர்புபடுத்தப்பட்டிருக்கின்றன.]

எனவே,

$$\sigma = -\frac{dm}{dt} = -\frac{V}{\mathcal{R}T}\frac{dp}{dt}.$$

இனி, அமுக்கம் p யில் திணிவு m உடைய ஒரு வாயுவாற் கொள்ளப் படுகின்ற கனவளவு Ω ஆகுக, அப்பொழுது

$$p\Omega = m \mathscr{R}\,\mathrm{T}.$$

வெப்பநிலை எங்கும் மாருமல் அதே பெறுமானமுடையதாயிருக்கின்றது என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$p\,\delta\Omega = \delta m\,\mathscr{R}\,\mathrm{T}$$

எனப் பெறுகிறேம். இச்சமன்பாடானது அமுக்கம் p யில் திணிவு δm உடைய வாயுவின் கனவளவு $\delta\Omega$ என்பதைத் தருகின்றது. எனவே,

$$\mathrm{S} = -\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\mathscr{R}\,\mathrm{T}}{p}\frac{dm}{dt}$$

$$= -\frac{\mathscr{R}\,\mathrm{T}}{p}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathscr{R}\,\mathrm{T}}\,\frac{dp}{dt} = -\frac{\mathrm{V}}{p}\frac{dp}{dt} = -\mathrm{V}\frac{d}{dt}\ (\text{இ.ம.}\ p).$$

இது பம்புகதியின் கணநிலைப் பெறுமானத்திற்கான கோவை:யொன்றைத் தருகிறது. S ஒரு மாறிலியெனக் கொள்ளல் சரியெனவும், அமுக்கமானது நேரம் t_1 இலிருந்து t_2 $(t_2 > t_1)$ வரை p_1 இலிருந்து p_2 இற்கு இறங்குகின்றது எனவும் கொண்டால், அப்பொழுது

$$\mathrm{S}\int_{t_1}^{t_2} dt = -\mathrm{V}\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}.$$

$$\therefore\ \mathrm{S} = \frac{\mathrm{V}}{t_2 - t_1}\ \text{இ.ம.}\ \frac{p_1}{p_2} = 2{\cdot}303\ \frac{\mathrm{V}}{t_2 - t_1}\ \text{மட}\ \frac{p_1}{p_2}.$$

எல்லா இற்றைநாள் பம்பிகளிடத்தும் இச்சூத்திரமானது உயர் எண் பெறுமானம் உடையதாயிருக்கின்றபடியால், உயர்கதிப்பம்பிகளைச் செய்வோர் அதனையே பெரிதும் விரும்புகின்றனர். திணிவு, நேரம் ஆகியவற்றுடன் கோவைப்படுத்திய கதியே மிகத் திட்டமானது ; மைக்கிரோமில்லிக்கிராமை, அதாவது 10^{-9} கி. ஐ, அலகுத் திணிவாக எடுத்தால், இங்கும் முன்னர் போல் உயர் எண் பெறுமானங்களைப் பெற முடிகினறது.

பம்புகதிக்கு லான்மூயரின் (Langmuir) சூத்திரம்.—தரப்பட்ட தொகுதியொன்றிலே அடையக்கூடிய எல்லையமுக்கம் p_u ஐ p_1 ஆனது அணுகுங்காலே S ஆனது பூச்சியத்தை அணுகுகின்றது என்னுஞ் செய்தியை லான்மூயர் சுட்டிக்காட்டியிருக்கின்ருர். இதன் விளைவாக லான்மூயர் S^* என்னும் இன்னுமொரு கணியத்தைப் புகுத்தியுள்ளார் ; அதைப் பம்பியின் கதி என அழைத்துள்ளார் ; அது

$$\mathrm{S}^* = \frac{\mathrm{V}}{t_2 - t_1}\ \text{இ.ம.}\left(\frac{p_1 - p_u}{p_2 - p_u}\right)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் வரையறுக்கப்படுகின்றது.

இச்சமனபாட்டை அறிமுறைப்படி பின்வருமாறு பெறமுடிகின்றது. எந்தக் கணத்திலும், மாறுக் கனவளவு V உடைய பாத்திரமொன்றிலே வாயுவின் அமுக்கம் p ஆகுக. இவ்வமுக்கமானது P, p_u என்னும் இரு பகுதியமுக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை என நாம் கருதலாம் ; இங்கு P ஆனது மூலக்கூறுகளின கணநிலையமுக்கத்தைச் சுட்டுகிறது ; அம்மூலக்கூறுகள் பாத்திரத்தினது வெளிப்படுத்துகையின் ஈற்றிலே பம்பியால் அப்புறப்படுத்தப்பட்டாகிவிடும். பாத்திரத்தில் நின்ற மூலக்கூறுகளின் பகுதியமுக்கம் p_u ஆகும். அபபொழுது எந்தக் கணத்திலும் பாத்திரத்தில் இருக்கின்றதும், ஆனால் ஈற்றிலே அதனின்று அப்புறப் படுத்தப்படுகின்றதுமான வாயுவின் திணிவு m ஆனது

$$PV = m \, \mathfrak{h} \, T$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது. எனவே,

$$\sigma = -\frac{dm}{dt} \text{ உம், } S^* = -\frac{d\Omega}{dt} \text{ உம் ஆகும் ; இங்கு } \delta\Omega \text{ ஆனது அமுக்கம்}$$

P யில் வாயுவின் திணிவு δm என்பது கொள்ளுகின்ற கனவளவு ஆகும். அப்பொழுது முன்போல,

$$S^* = -\frac{V}{P}\frac{dP}{dt}.$$

மேலும் S^* மாறிலியாயின்,

$$S^*(t_2 - t_1) = -V\int_1^2 \frac{dP}{P}.$$

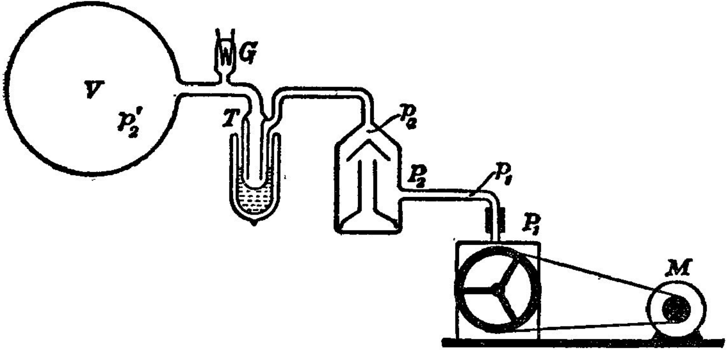
ஆனால், $P = p - p_u$; இங்கு p யானது V யிலுள்ள வாயுவின் அமுக்கம் ஆகும் ; அது மானியொன்றால் அளக்கப்படுகின்றது. எனவே $\delta p = \delta P$.

$$\therefore \; S^* = \frac{V}{t_2 - t_1} \text{ இ.ம. } \left(\frac{p_1 - p_u}{p_2 - p_u}\right).$$

$p_u = 0$ எனின், $S = S^*$; ஆனால், p_u ஆனது முடிவுள்ளதாயிருக்கின்ற மற்றெல்லா எடுத்துக்காட்டுக்களிலும் அமுக்கமானது p_u வை அணுகும் போது கதி S குறைகின்றது ; மேலே கூறியுள்ளவாறு எல்லையமுக்கம் அடைந்ததும் S பூச்சியமாகின்றது.

நிலையியல் வெற்றிடத் தொகுதிகளும் இயக்கப்பாட்டு வெற்றிடத் தொகுதிகளும்.—வெற்றிடத் தொகுதிகள் வழக்கமாக நிலையியற் றொகுதி எனவும் இயக்கப்பாட்டுத் தொகுதி எனவும் வகைப்படுத்தப்படுகின்றன. முந்தியதில் வாயு புகவியலாத, அதாவது பம்பியின் செல்வழி ஒழிந்த எல்லா வழிகளும் மூடப்பட்ட, தொகுதிகள் அடங்கும் ; இவ்வகையின் சிறப்பியல்பு யாதெனில் அதில் ஈற்றிலே அடையப்படுகின்ற அமுக்கத்தின் மிகத் தாழ்ந்த பெறுமானம் என்பதாகும். சிறு ரேடியோ வால்வுகளின் வெற்றிடமாக்குகைக்கெனத் திட்டமிடப்பட்டுள்ள தொகுதியானது இவ்வகைக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும். இங்கு, தொகுதியானது, அதாவது வால்வு

அதைப் பம்பியுடன் இணைக்கின்ற பகுதியும், பொசிவுகள் முற்றிலும் நீக்கப்பட்ட கண்ணாடியாலானது ; உலோகம், கண்ணாடி என்பவற்றாலான எல்லா உறுப்புக்களினின்றும் மேன்மட்டத்தோடொட்டியுள்ள வாயுக்கள் நீக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இரண்டாவதில் அல்லது இயக்கப்பாட்டுத் தொகுதியில், ஆய்கருவியின் வெவ்வேறான பகுதிகளில் தொடர்ச்சியாக வெளிப்படுகின்ற வாயுவையும், சிலவேளைகளில் தொம்சனின் நேரயனாய்கருவியில் அயன் முதலொன்றின் ஆககலையிட்டுச் சிறு ஆனால வேண்டுமென்றே ஆக்கப்பட்ட பொசிவூடே தொகுதியில் நுழைகின்ற வாயுவையும் சமாளிப்பதற்கு மிகவும் உயர்கதிப பம்பிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. வெளிப்படுத்துகையைத் தொடர்ச்சியாக நடாத்தினாறறான திணிவுத் திருசியப்பதியிகள், சைக்கிளத்திரன்கள், வெற்றிடம நிலைநிறுத்தப பட்டிருக்க வேண்டிய, அளவிற் பெரிய, ஆய்கருவிகள் எனபவை செயன்முறைக்கு உகந்தனவாகும் ; இவையே இயக்கப்பாட்டுத் தொகுதிகள்.

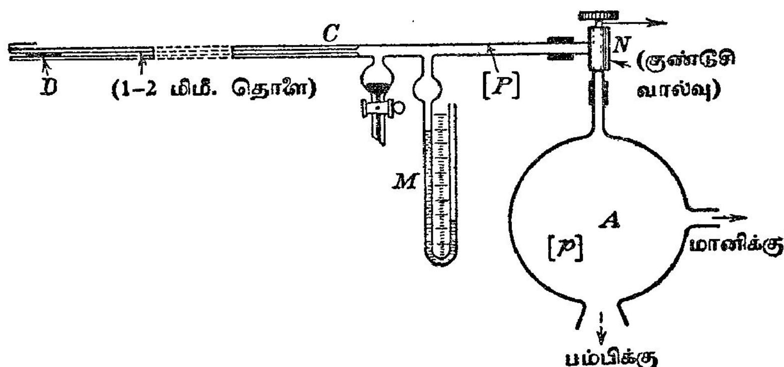


படம் 14·01. எடுத்துக்காட்டான பம்புத்தொகுதி.

வெற்றிடத் தொகுதியொனறின் இன்றியமையாத உறுப்புக்கள் படம் 14·01 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. P_1 என்பது முதல் அலலது ஆதரவுப் பம்பி ஆகும் ; அது வளிமண்டல அமுக்கத்தை எதிர்த்துச் செயலாற்றி இரண்டாவது பம்பி P_2 இன செயற்பாட்டுககுத தேவையான தாழமுக்கத்தை உண்டுபண்ணுகிறது. இவ்விரண்டாவது பம்பியானது வழக்கமாக ஓர் ஒடுக்கற் பம்பியாகும் ; தொழிற்படுகின்ற பதார்த்தம் இரசம் எனின் பம்பிக்கும் வெளிப்படுத்துகைககான தொகுதிக்கும் இடையே இரச ஆவிப் பொறி T என்பதைப் புகுத்தி அத்தொகுதியில் இரச ஆவியானது நுழையாவண்ணம் தடுக்கப்படுகின்றது. படத்திற் காட்டியுள்ள வடிவமுடைய பொறியானது திரவவளி வெப்பநிலையில் நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கின்றது ; எனவே பொறியில் இரசம் ஒடுங்கி உறைந்து தங்கிவிடுகின்றது. கடைசியாக V யானது உயர் வெற்றிடம் தேவைப்படுகின்ற ஆய்கருவியைக் கருதுகிறது. தொகுதியில் ஆக்கக்கூடிய அளவில் அமுக்கமானது

தாழ்ந்திருக்கிறபோதிலும் தொகுதியில் பம்பி P_2 இன் உள்வாய்ப் பக்க மாக இருக்கின்ற எல்லாப பாகஙகளிலும் அமுக்கம் மாறிலியாகும் எனக் கூறமுடியாது. V யின் சுவாகளினின்றும் வேறெதாவது இடங்களினின் றும் வாயு தொடர்ச்சியாக வெளிவிடப்படுதலாலும், மிகவும் கூடிய தாழமுக்கங்களில, ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில், வாயு மூலக்கூறுகளின் இடைச் சுயாதீனப் பாதை பெரிதாயிருககினறபடியாலும் மூலக்கூறுகள் பம்பிகளே உடனடியாக அடையமாட்டா. அதாவது, V யிற்கும் பமபிகளுக்கும் இடையேயுள்ள தொடுககுங் குழாய்கள் வாயுவோட்டத்திற்குத் தடை யொன்றை ஏற்படுத்துகின்றன. தொடுக்குங குழாய்கள் அகலமாகவும் சிறிதாகவும் இருந்தால, இத்தடையைக் கருதத்தகக அளவிற் குறைத்துக் கொள்ளலாம். பாத்திரம் V யில் உண்மையாக அடைந்துள்ள அமுக்கம் அப் பாத்திரத்திற்குக் கூடியமட்டில அணித்தாகத் தொடுககப்பட்ட ஏதேனு மொருவகைத் தாழமுக்கமானி G யால் அளக்கப்படுகின்றது. மேற்படி தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் அடுத்து வருவதில் விவரித்துக் கூறப்படும்.

பம்பியொன்றின் கதியைப் பரிசோதனை முறைப்படி துணிதல்.—(*a*) **மாறு அமுக்க (அல்லது சிறு இரசநிரல்) முறை :** முதன்முதலாகக் கேயிடே என்பவர் ஏற்படுத்திய இம்முறையிலே பாத்திரமொனறினின்றும் பம்பி வாயுவை



படம் 14·02. பம்பியொன்றின் கதியைத் துணிதலுக்குச் சிறு இரச நிரல் (அல்லது மாறுவமுக்க) முறை.

வெளியேற்றுகின்ற வீதத்தை எதிரீடு செய்யுமுகமாக அப் பாத்திரத்தில் எக்கனவளவு வீதத்தில் வாயு வழங்கப்படல் வேண்டும் எனபது துணியப்படு கின்றது ; அப்பொழுது பாத்திரத்தில் அமுக்கமானது மாறிலியாகப் பேணப் படுகின்றது. தே.பௌ. ஆ. இலே திட்டமிட்டபடியான மாறுவமுக்க முறை பின்வருமாறு. கிட்டத்தட்ட ஓர் இலீற்றர் கொள்ளளவுடைய பெரிய கண்ணா டிக் குமிழ் A யானது, கதி துணியவேண்டிய பம்பிக்கு நேராக மேலே

ஏற்றப்பட்டிருக்கின்றது. A யையும் பம்பியையும் தொடுக்கும் உறுப்பானது கூடியமட்டில் சிறிதாயிருத்தல் வேண்டும்; ஏனெனில், தொடுக்கும் இணைப்பின் பரிமாணங்களைப் பொறுத்தவளவில் பம்பியின் கதியள வீடானது அதன் உண்மையான கதியைக காட்டிலும் சிறிதாயிருக்கும். BC யானது எண்ணெய் அமுக்கமானி M, குணடுசிவால்வு N எனபவற்றுடன தொடுககப்பட்டிருக்கின்ற ஒரு நுண்ணிய மயிர்த்துளைக் குழாயாகும், படம் 14·02. பயனபடுததப்படுகின்ற எண்ணெயானது தாழாவியமுக்கமுடையதாயிருத்தல வேணடும்; இதன பொருட்டு சதுரைதரோநத்தலீன ($C_{10}H_{12}$, 20° ச. இல அடர்ததி 0·972 கி. சமீ.$^{-3}$) மிகப் பொருததமானது. வால்வு N ஐத் தக்கவாறு செப்பஞ்செய்து பம்புத்தொடரில் வளி நுழைதல் ஒழுஙகாக்கப்படுகின்றது. எனவே A யில அமுக்கத்தை விரும்பிய எந்தப் பெறுமானத்திலும் நிறுததிக்கொள்ளலாம். இவ் வமுககம் தாழமுக்கமானியொன்றால் அளககப்படுகின்றது. வளிமண்டல அமுக்கத்திறகுச் சற்றுக்குறைவான அமுககத்திலேயே ஆள்வால்வுக்கு வளி வழங்கப்படுகினறது. இவ்வித்தியாசம் எண்ணெய் அமுக்கமானியிற் காட்டப்படுகின்றது. குண்டுசிவால்வு N இன் நிலையொவ்வொன்றிலும் வளியை நுழையவிடும் வீதமானது BC யில், அதிலுள்ள இரு மாட்டேற்றுக் குறிகளினடயேயுள்ள தூரத்தைக் கடப்பதற்கு, சிறு இரசநிரல் D யின் முன்னேறும் முனை எடுக்கின்ற நேரததை அவதானித்துக் காணப்படுகின்றது.

BC யிலுள்ள மாட்டேற்றுக் குறிகளுக்கிடையேயுள்ள கனவளவு ω வும், சிறு இரசநிரலின கடப்பு நேரம் t யும், BC யில் வளியின் அமுக்கம் P யும் எனின், அப்பொழுது நேரம் t யில், பம்புத்தொகுதியிற் புகுகின்றதும் A யிலுள்ள அமுக்கம் p யில் அளக்கப்பட்டதுமான வளியின் கனவளவு Ω ஆனது

$$p\Omega = \mathrm{P}\omega$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது; இங்கு போயிலின் விதியைப் பயன்படுத்துதல் சரி எனக் கொள்ளப்படுகிறது. பம்பியின கதி

$$\mathrm{S} = \frac{\Omega}{t} = \frac{\mathrm{P}\omega}{pt}.$$

இற்றைநாள் உயர்கதிப் பம்பிகளின் கதியானது அமுக்கத்துடன் கருதத்தக்கவளவில் மாறுகினறபடியால் அக்கதியின் துணிதலுக்கு இம்முறையே சிறந்ததெனக் கொள்ளப்படுகின்றது.

(*b*) **மாறுக் கனவளவு முறை:** பம்பியொன்றின் கதியானது

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{V}}{t_2 - t_1} \text{ இ.ம. } \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் தரப்படுகின்றது என ஏற்கெனவே காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

அடிப்படையில், பம்பியின் கதியைத் துணிதலுக்கான மாறுக் கனவளவு முறையானது இச்சமன்பாட்டின் ஒரு நேரடிப் பிரயோகமாகும். (பக்கம் 800

இல் தரப்பட்டுள்ள திருத்தமிக்க சமன்பாடானது இங்கு தேவைப்படாது ; ஏனெனில், நோக்கல்கள் எடுக்கப்படும்போதுள்ள சூழ்நிலையில் pu ஆனது வழக்கமாக மறைகின்ற அளவில் சிறிதாகும்.)

ஆய்கருவியானது பம்பியுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றதும் கனவளவு V உடையதுமான பெரிய பாத்திரமொன்றுலானது ; பமபிமுகமாகப் பாத்திரத்தைத் திறந்தபின் வெவ்வேறுன நேரங்களில், V யிலுள்ள வாயுவின் அமுக்கம் அளக்கப்படுகின்றது. நேரம் $t=0$ இல் அமுக்கம் p_1 உம், நேரம் t யில் அமுக்கம் p யும் எனின், அப்பொழுது

$$S=\frac{V}{t}\ \text{இ.ம.}\left(\frac{p_1}{p}\right)=2\cdot303\ V\left(\frac{1}{t}\right)\ \text{மட}\ \left(\frac{p_1}{p}\right),$$

அல்லது

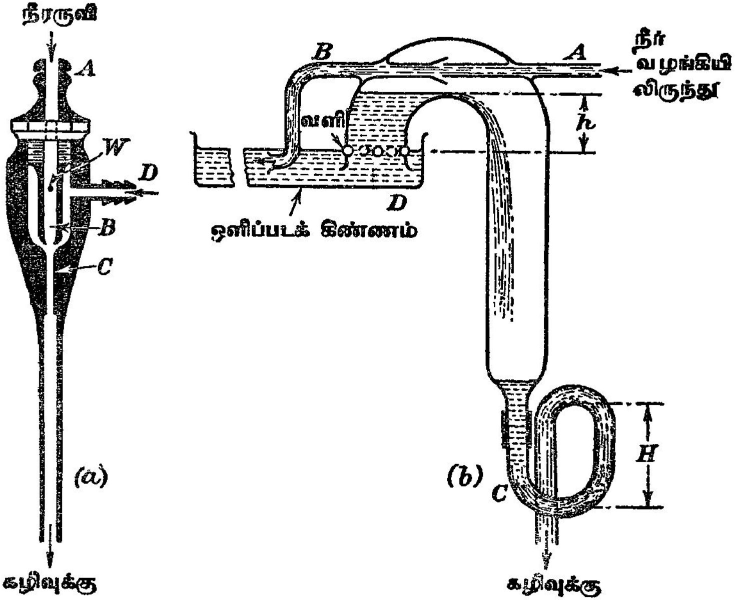
$$t=C-2\cdot303\frac{V}{S}\ \text{மட}\ p$$

எனப் பெறுகின்றேம், இங்கு $C=2\cdot303\ \frac{V}{S}$ மட p_1; ஏதாகிலுமொரு பரிசோதனையில் அது மாறிலியாகும்.

எனவே, S ஆனது அமுக்கத்தைச் சாராமல் இருக்கும்வரை t, மட p வரைபானது ஒரு நேர்கோடாகும். அந்நேர்கோட்டின் சரிவிலிருந்து கதி S ஐத் துணியலாம். அங்குத் தொடுக்குங் குழாய்கள் வாயுப்பாய்ச்சலுக்கு அளிக்கின்ற தடையாலாகின்ற நேரப்பின்னிடைவு காரணமாக இப் பரிசோதனையில் மக்கிளொயட்டமுக்கமானியை வெற்றிகரமாகப் பயன்படுத்த முடியாது என்பது தெளிவாகும்.

நீர்த்தாரைப் பம்பிகள்.—நீர்த்தாரைப் பம்பியானது பாத்திரமொன்றிலுள்ள வளியை வெளிப்படுத்துதற்கான மிகப் பழைய உபகரணமாகும் ; எனினும், அது இன்றுங்கூட கிட்டத்தட்ட எல்லா ஆய்கூடங்களில் நாள்தோறும் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. தொடக்கத்தில் இது கண்ணுடியாலாக்கப்பட்டது ; எனவே அது எளிதில் உடையக்கூடியதாக இருந்தது. இன்று நீர்த்தாரைப் பம்பிகள் வழக்கமாக உலோகத்தால் ஆக்கப்படுகின்றன ; அவற்றுள் ஒன்றுனது படம் 14·03 (a) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. நீரானது மாறுவமுக்க வழங்கியொன்றிலிருந்து பம்பியில், A என்னும் இடத்தில் புகுகின்றது ; அருவிக்குக் குறுக்கே வைக்கப்பட்டிருக்கின்ற தடித்த கம்பி W ஆனது நீரோட்டத்தைக் கொந்தளிக்கச் செய்கின்றது. வெளிவழிமுனை B யானது அடைப்புக்குழாய் C யிற்கு அணித்தாயுள்ளது ; பக்கக்குழாய் D யானது வெளிப்படுத்துகைக்கான பாத்திரத்துடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. நீர்த்தாரையானது B யிலிருந்து C யிற்குச் செல்லும்போது அதிற் சிறு வளிக்குமிழிகள் சிக்கி நீர்த்தாரையால் அப்புறப்படுத்தப்படுகின்றன. பம்புவேகமானது கிட்டத்தட்ட 20 சமீ.^{3} செக்.$^{-1}$ ஆகும் ; அடையக்கூடிய மிகத்தாழ்ந்த அமுக்கம், அதாவது ஆய்கூட வெப்பநிலையில் நிரம்பிய நீராவியமுக்கத்துக்குச் சற்றுக் குறைந்த அமுக்கமானது கிட்டத்தட்ட 1 சமீ. இரசம் ஆகும்.

ஒளிப்படத்தட்டுக்கள், பதிவுகள் என்பவற்றைக் கழுவுவதற்கு ஹிக்மானின் நீர் சுற்றோட்டி.—இது நீர்த்தாரைப் பம்பியின் மாற்று வடிவமாகும்; ஒளிப்படக் கிண்ணமொன்றிற்கு வேகமான நீரருவியொன்றை வழங்கவும் அதே வேகத்தில் அந்நீரை அப்புறப்படுத்தவும் இது திட்டமிடப்பட்டிருக்கின்றது. இதைப் பயன்படுத்தி ஒளிப்படத்தட்டுக்களையும் பதிவுகளையும் கிட்டத்தட்ட ஐந்து நிமிடத்தில் நன்றாகக் கழுவிக் கொள்ளலாம். இவ்வுபகரணமானது கண்ணாடியால் அல்லது உலோகத்தால் ஆனது;

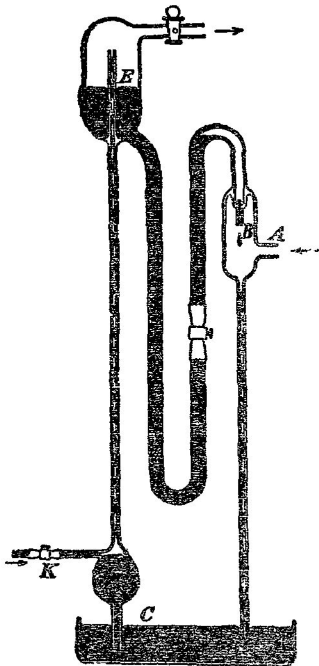


படம் 14·03. (*a*) உலோகத்தாலான நீர்த்தாரைப் பம்பி, (*b*) ஒளிப்பட முறைகளிற் பயன்படுத்துவதற்கு ஹிக்மானின் வேகமான கழுவற்பொறி.

அதனது முழு நீளமும் கிட்டத்தட்ட ஆறு அங்குலம் ஆகும். இது சமனில்லாத உறுப்புகள் உடைய, தலைகீழாக்கப்பட்ட U குழாயொன்றுலானது. அக்குழாயின் வளைவில், படம் 14·03 (*b*) யில் காட்டியுள்ளவாறு, A, B என்னும் இரு குழாய்கள் உருக்கி ஒட்டப்பட்டிருக்கின்றன. A யில் நீரானது புகுகின்றது; வளி–நீர்க் கலவையானது குழாய் B வழியாகத் தப்புகிறது. அதன் செல்வழியானது ஒளிப்படக்கிண்ணம் D யிலுள்ள நீரின் பரப்பிற்குக் கீழே இருக்குமாறு குழாய் B வளைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. C யானது காட்டியுள்ளவாறு வளைக்கப்பட்ட ஒரு கண்ணாடிக் குழாய்த் துண்டாகும்; அது கவிழ்க்கப்பட்ட U குழாயின் நீண்ட

உறுப்புடன் பிணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. பம்பி செயலாற்ற முன்னராக இப்பிணைச்சலானது நீரால் நிரப்பப்பட்டிருத்தல் வேண்டும். U குழாயி னின்று வளி வெளியேற்றப்படும்போது அதனது இடம் கிண்ணத்து நீராற் கொள்ளப்படுகின்றது ; உயரம் h ஆனது H ஐக் காட்டிலும் குறைவாக இருக்கும் வரை இது தொடர்ச்சியாக நிகழும். கிண்ணத்து நீரின் பொதுமட்டத்தில சிறு வளித்துவாரங்கள் அமைக்கப்பட்டிருந்தால், தொகுதியில் வளி புகும்வண்ணம் அத்துவாரங்கள் காட்டியுள்ளவாறு இடங்கொடுக்கின்றன. கிண்ணத்திற் கிடக்கின்ற தட்டுக்கு அல்லது பதிவுக்கு மேலே B யிலிருந்து வருகின்ற நீரானது வேகத்துடன சுற்றியோடுகிறது ; அதே வேகத்தில் அது அப்புறப்படுத்தப்படுவதனுல் வழிதல் நிகழ்வதில்லை. இவ்வுபகரணத்தின் திறன் மிகப்பெரிதாம்.

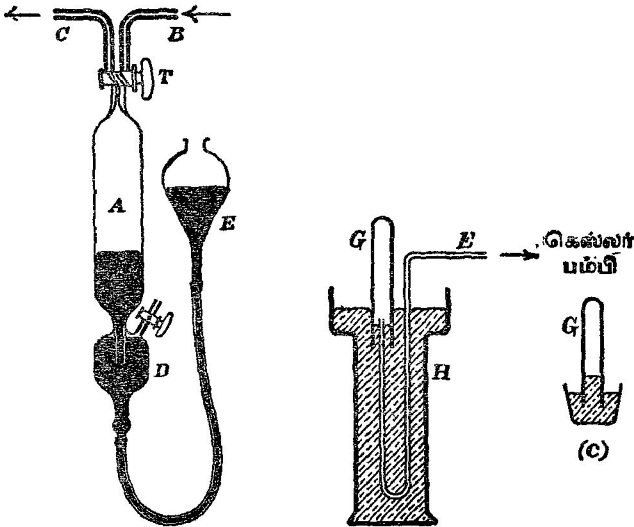
பிறங்கல் (Sprengel) பம்பி.—நீர்ப்பம்பியொன்றுடன் கூடிச் செயலாற்று கின்ற இப்பம்பியின வகையொன்று படம் 14·04 இற காட்டப்பட்டிருக் கிறது. அதிலுள்ள மயிர்த்துளைக் குழாய் களின விட்டம் 0·15 சமீ. ஆகும் ; அவை அண்ணளவில் 2 சமீ. விட்டமுடைய குமிழ்களாக விரியும் இடங்கள்தவிர்ந்து மற்றைக் குழாய்களின் விட்டம் கிட்டத் தட்ட 0·5 சமீ. ஆகும். குழாய் A யானது வெளிப்படுத்துகைக்கான பாத்திரத்திற் குச் செல்கின்றது. தாரை B யிலிருந்து விழுகின்ற சிறு இரசநிரல்கள் அத்தா ரைக்குக் கீழேயுள்ள வீழ்ச்சிக் குழா யுட் புகும்போது வாயுக்குமிழிகளைத் தம் முள் அடைத்துக்கொள்கின்றன. நீர்ப் பம்பியொன்றுடன் நேரே தொடுக்கப் பட்டிருக்கின்ற சேமிப்புக்கலம் E யிலி ருந்து B யில் தேவைப்படுகின்ற இரசம் வழங்கப்படுகின்றது. மயிர்த்துளைக் குழா யொன்று இச்சேமிப்புக்கலத்தின நடு வேயும், பின்பு அதன அடியூடேயும் சென்று தொட்டி C யில் முடிவு பெறுகின்றது. இக்குழாயின் நுனியில் T- துண்டொன்று உளது; அத்துண்டுடன் தடித்த றப்பர்க் குழாயாற் காய்ச்சி நுணணியதாய் இழுக்கப்பட்ட கண்ணு டிக் குழாயொன்று தொடுக்கப்பட்டிருக் கின்றது. நீர்ப்பம்பி தொழிற்படும்போது மேற்படி துவாரம் வழியே வளி உறிஞ்சப்பட்டுச் சிறு இரச நிரல்களைத் தன்னுடன் காவிச் செல்கின்றது.



படம் 14·04. பிறங்கல் பம்பி.

இக்கலவை குழாயின மேலான முனையை அடைந்ததும் அவ்விடத்தில் வளி நீர்ப்பம்பியை நோக்கிச் செல்ல, இரசம் சேமிப்புக்கலத்தில் விழுகின்றது. கவ்வி *K*, ஆய்கருவியுள் வளி புகும் வீதத்தை ஆளுகினறது.

கெஸ்லர் (Geissler) பம்பிகள்.—இன்னும் தாழ்ந்த அமுக்கம் தேவைப் படின, வேறொரு பம்பி வகையைப் பயன்படுத்தல் வேண்டும். வெளிப் படுத்துகைக்கான கனவளவு 200 சமீ.[3] ஐ மீறுமல் இருக்குமிடத்து (பெரும்பாலும் ரோப்பிளர் பம்பி எனப்படும்) கெஸ்லர் பம்பியானது பெரிதும் பயன்படுகின்றது. இவ்வகைப் பம்பியின் எடுத்துக்காட்டொன்று படம் 14·05 (*a*) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. அது கிட்டத்தட்ட 200 சமீ.[3]



படம் 14·05. கெஸ்லர் பம்பி.

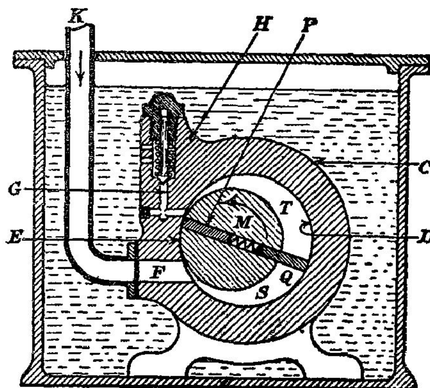
கொள்ளளவுடைய உருளைப்பீப்பா A யைக் கொண்டிருக்கின்றது. பீப்பா வின் மேல் முனையில் இருவழி மயிர்த்துளைக்குழாய்வாயில் T என்பது உளது ; அவ்வாயிலைத் திருப்பிப் பீப்பா A யை ஒன்றில் வெளிப்படுத்து கைக்கான ஆய்கருவியுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற குழாய் B யுடன், அல்லது வளிமண்டலமுகமாகத் திறந்திருக்கின்ற குழாய் C யுடன் இணைத்துவைக்கலாம். A யின் கீழ் முனையில் பக்கக்குழாய்வாயில் தொடுக்கப்பட்ட சிறு பீப்பா D என்பது உளது. அமுக்கக் குழாயால் D யானது இரசச் சேமிப்புக்கலம் E யுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அமுக்கக் குழாய் வழியாக ஆய்கருவியுட் புகுகின்ற வளி D யிற் சிறைப்படுத்தப்பட்டுப் பக்க வாயில் வழியாக அப்புறப்படுத்தப்படுகின்றது.

செயன்முறைகள் பின்வருமாறு. முதலாவதாகச் சேமிப்புக்கலம் E உயர்த்தப்படுகின்றது. T யானது C யுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றபடி யால் பீப்பா A இரசத்தால் முற்றிலும் நிரப்பப்படுகின்றது. T யை மூடி, E யைச் சற்றுத் தாழ்த்தி, B யும் A யும் ஒன்றோடொன்று தொடுப்பு வைத்திருக்குமாறு T திருப்பப்படுகின்றது. B யிலும் அது தொடுக்கப் பட்டிருக்கின்ற பாத்திரத்திலும் உள்ள வாயுவின் அமுக்கமானது A யில் இரசத்தை இறங்கச் செய்கிறது ; கிட்டத்தட்ட A முழுவதையும் வாயு நிரப்பும்வரை E தாழ்த்தப்படுகின்றது. அடுத்து T யை மூடி, A யில் அமுக்க மானது வளிமண்டல அமுக்கத்தை மீறும்வரை E உயர்த்தப்படுகின்றது. இவ்வாறானதும், A இற்கும் C இற்கும் நேர்த்தொடுப்பு உண்டாகும் வரை T திருப்பப்படுகின்றது. இனி A யிலிருந்து வாயுவை அப்புறப்படுத்தலாம். இச்செயன்முறை பத்துத்தரம் அல்லது அதற்குக கூடுதலாகவும் மீண்டும் மீண்டும் நடாத்தப்படுகின்றது ; அதறகுப பினனர் வெளிப்படுத்துகைக்கான பாத்திரத்தில் வெளியேற்றுவதற்கு வாயுவேயில்லை எனக் காணப்படும். A யிலுள்ள இரசமானது T யை அடையும்போது "கிளிக்" போன்ற சிறந்த உலோகச் சத்தமொன்று கேட்கப்படும் ; அது தாழ்வெற்றிடம் கிடைத்துவிட்டது எனபதை உணர்த்துகிறது.

இத்தகைய பம்பியொன்றுடன் சிறு உறுப்பொன்றைச் சேர்த்தால் முன னதாகவே வெளிப்படுத்தியுள்ள பாத்திரமொன்றிலே வாயுவொன்றைப் புகுத்தவும் பின்னர் அதைத் திரும்பப் பெறவும் முடியும் ; இது அப்பம்பி யின் ஒரு சிறப்பியல்பாகும். இச்செயன்முறையை இவ்வாறு நடாத்தும் பொருட்டுக் குழாய் C யானது நீட்டப்படுகின்றது, அல்லது படம் 14·05 (*b*) யிற் காட்டியுள்ள வடிவம் அளிக்கப்பட்ட வேறொரு குழாய் E யுடன் அது தொடுக்கப்படுகின்றது. E யின் U குழாய்போனற பாகமானது இரசம் கொண்ட, தடித்த சுவருடைய சாடி H இல் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்றது ; E யின் திறந்தமுனை இரசப் பரப்புக்குக் கீழே இருக்கின்றது. வெளிப் படுத்தியுள்ள பாத்திரத்தில் புகுத்தவிருக்கின்ற வாயுவானது கவிழ்க் கப்பட்ட சோதனைக்குழாயிற் சேமிக்கப்பட்டிருக்கின்றது ; அக்குழாயின் வாயானது பெரிய புடக்குகை ஒன்றிலிருக்கின்ற இரசத்தால் மூடப்பட்டிருக் கின்றது ; படம் 14·05 (*c*). இக்கொள்பாத்திரமானது H இல் இடம் மாற்றி வைக்கப்படுகின்றது ; H இன் வாய் அகன்றதாயிருக்கிறபடியால் புடக்கு கையை எளிதில் வெளியே எடுத்துக்கொள்ளலாம். E யின் திறந்தமுனை வாயுவில் இருக்குமாறு H இல் வாயுகொண்ட குழாயானது வலிந்து அமிழ்த்தப்படுகின்றது. பம்பி மார்க்கமாக, அப்பம்பியுடன் தொடுக்கப் பட்டிருக்கின்ற பாத்திரமொன்றிலே வாயுவைச் செலுத்தும் முறை உடனே தெளிவாகும்.

சுழற்சி வெற்றிடப்பம்பி.—படம் 14·06 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்ற பம்பி யானது உயர்வெற்றிடவுண்டாக்குகையையும் பெரிய கொள்ளளவுடைய பாத் திரங்களின வெளிப்படுத்துகையையும் இட்டுத் திட்டமிடப்பட்டிருக்கின்றது. வளிமண்டல அமுக்கத்திலிருந்து இது செயலாற்றத் தொடங்குகிறது. இது

முற்றிலும் எண்ணெயில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்றபடியால் உயர்வெற்றிடத்தில் வளியின பொசிவு தடுக்கப்படுகினறது. பம்பியானது உருக்காலான மேலுறை C யைக் கொண்டிருக்கின்றது ; அவ்வுறையின உருளை வடிவமான அறை D துளைக்கப்பட்டிருக்கினறது. இந்த அறையூடே தண்டு



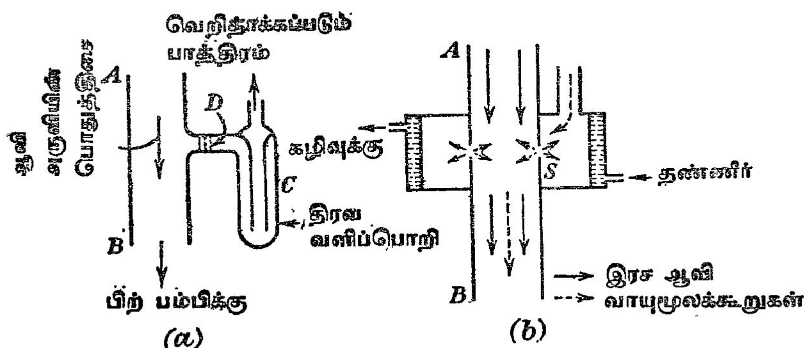
படம் 14·06. ஒரு சுழற்சி வெற்றிடப் பம்பி.

M செல்கின்றது. தண்டின் அச்சு அறையின் அச்சுக்குச் சமாந்தரமாக ஆனால் அதிலிருந்து விலகியிருக்கின்றது. அது எப்பொழுதும் புள்ளி E யில் அறை D யின் சுறறயலுடன் தொடுகை வைத்திருக்கின்றது. தண்டானது தன் அச்சைப்பற்றிச் சுழல்கினறது. இப்புள்ளியின் பக்கமொவ்வொன்றிலும் பலகணியொன்றுளது ; ஒன்று நுழைவழி F ஆகும் ; மற்றது வில்லாள்வால்வு, H, பொருத்தப்பட்ட செல்வழி G ஆகும். தண்டு M இல் நீண்ட துவாரமொன்றுள்ளது ; அதில் தண்டின் அச்சிலிருந்து முனனும் பின்னுமாகச் சுயாதீனமாக வழுக்கக்கூடிய இரு தட்டுக்கள் P, Q என்பன அமைந்திருக்கின்றன. தண்டின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வைக்கப்பட்டிருக்கின்ற விற்சுருளொன்றால் இத்தட்டுக்கள் பிரிக்கப்பட்டும் அவற்றின் புற விளிம்புகள் அறை D யின் சுறறயலைத் தொட்டுக்கொண்டு இருக்கவும் செய்யப்படுகிறது ; வில்லொன்று வெட்டுப்பார்வையிற காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

பம்பியின் செயன்முறை பின்வருமாறு. வரிப்படத்திற் காட்டப்பட்டிருக்கின்ற நிலையைக் கருதுவோம். தண்டு M இடஞ்சுழியாகச் சுழல்கின்றது. அறை D இறகும் தண்டு M இற்கும் உள்ள பயன்படும் இடைவெளியானது S, T என்னும் இரு பாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கினறது. தட்டு Q ஆனது அறையின் சுவரைத் தொடுகின்றபடியால், தண்டு சுழலுங்காலே பாகம் S விரிகின்றது ; அதன் விளைவாக நுழைவழிக் குழாய் K மார்க்கமாக வெளிப்படுத்துகைக்கான பாத்திரத்திலிருந்து வளி வெளியேறுகின்றது. அதேநேரம் பாகம் T யானது சுருங்குகிறது ;

அதன் விளைவாக அங்குள்ள வளி அமுக்கப்படுகின்றது. அமுக்கம் போதியவளவு உயர்த்தப்பட்டதும் செல்வழி வால்வு மார்க்கமாக இவ்வளி தப்புகிறது. இவ்வண்ணம் பம்பியானது நுழை குழாய் K தொடுக்கப் பட்டிருக்கின்ற பாத்திரமொன்றினின்று வளியை வெளிப்படுத்தும்.

இரச ஆவிப் பம்பிகள்.—1915 இல் கேயிடே என்பார் உயர் வெற்றிட உண்டாக்குகைக்கெனப் பம்பி வகையொன்றைத் திட்டமிட்டார்; அத் திட்டத்தில் வேறுபடுத்துகைகள் நிறைவேற்றப்பட்டபின் அவரது பம்பியானது மற்றெல்லாப் பம்பி வகைகளையும் பெரும்பாலும் நீக்கிவிட்டது.



படம் 14·07. (கேயிடேயின்) பரவற் பம்பியின் அடிப்படை.

இவ்வகைப் பம்பிகள் வழக்கமாகப் பைரட்சுக் கண்ணாடி அல்லது உருகிய சிலிக்கா அல்லது உருக்கால் ஆககப்படுகின்றன; ஒவ்வோர் எடுத்துக் காட்டிலும் 20 மிமீ.—10^{-2} மிமீ. இரசம் என்னும் வீச்சில் படும்படி அமுக்கத்தைக் குறைத்தற்பொருட்டு முற்பம்பியொனறு தேவைப்படுகினறது.

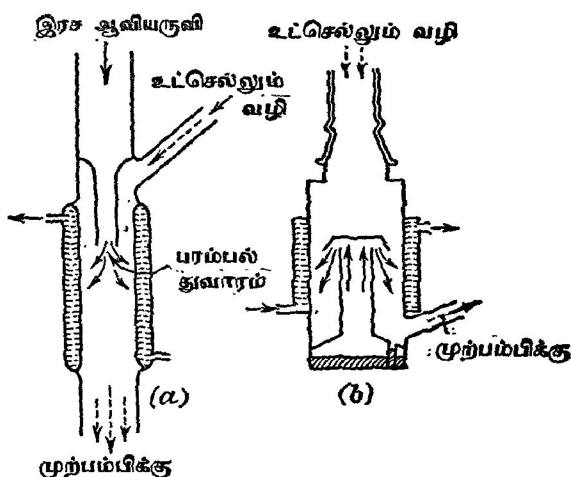
கேயிடேயின முதலாவது ஆவிப்பம்பி வகையானது **பரவற் பம்பி** என அழைககப்படுகின்றது. அது செயலாற்றும் முறையை விளக்கும் பொருட்டு படம் 14·07 (a) யிற காட்டியுள்ள தொகுதியைக் கருதுக. AB கண்ணாடிக் குழாயாகும்; அதனூடே எளிதில் ஒடுங்ககசுூடிய ஆவியருவியொன்று செல்கினறது. C யானது AB யுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கினற ஓர் ஆவிப் பொறியாகும். அங்கு காட்டியுள்ளவாறு D ஒரு நுணடுளை விதானமாகும்; அது AB யிலுள்ள இடத்தை C யில் உள்ளதிலிருந்து வேறுக்குகின்றது. வெளிப்படுத்துகைக்கானதும் ஏற்கெனவே தாழமுக்கத்திலிருக்கின்றதுமான ஆய்கருவியுடன் C யைத் தொடுத்துவைத்தால், அப்பொழுது ஆவிமூலக்கூறுகளும் வளிமூலக்கூறுகளும் விதானம் D யூடே பரவும். ஆவியானது C யில் ஒடுங்குகிறது; ஆனால் AB யில் D யூடே சென்ற வளிமூலக்கூறுகள் ஆவியருவியால் விரைவாக இழுத்துச் செலுத்தப்படு

கின்றன. இது காரணமாக C யுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்ற பாத்திரத்தில் வாயுவமுக்கம் குறைந்து ஈற்றிலே மிகத்தாழ்ந்த பெறுமானமொன்றை அடைகின்றது.

நடைமுறைப் பரவற் பம்பியொன்றிலே விதானமோ பரவல் தட்டோ தேவைப்படுவதில்லை. இதனை விளங்கும்பொருட்டுக குழாய் AB யில் மிகக் குறுகிய உருளைப்பிளவு S என்பது உளது எனக் கருதுக, படம் 14·07 (b). இப்பிளவு வழியாக ஆவிமூலககூறுகள் வளிமூலக்கூறுகள் ஆகியவற்றின் பரவல் நடைபெறுகின்றது. பிளவு வழியாக AB யுட் புகுகின்ற வாயு மூலக்கூறுகளுக்கும் அவற்றைக் காட்டிலும் பாரமான ஆவிமூலக்கூறுகளுக்கு மிடையே நிகழ்கினற மோதுகைகள் காரணமாக அவ்வாயு மூலக்கூறுகள் கீழ்முகமான கூறுடைய உந்தங்களைப் பெறுகின்றன. எனவே, கலவையானது ஓர் இடத்தை அடைந்து, அங்கு ஆவி ஒடுங்குகிறது; ஆனால் வளியானது ஆதரவுப்பம்பியால் இழுக்கப்பட்டு அப்புறப்படுத்தப்படுகினறது. அதே நேரம் பரவலாற் சிறிதளவு ஆவி உயர்வெற்றிடத் தொகுதியுட் செல்லும். முக்கிய அருவியில் ஆவியின் அடர்த்தியைக் கட்டுப்படுத்தியும் மிகக்குறுகிய (எடுத்துக்காட்டாக அகலம் 0·1 மிமீ. உடைய) பிளவொன்றைப் பயன்படுத்தியும் ஆவியின பிற்பக்கப் பரவலானது இழிவாக்கப்படுகின்றது; கேயிடே இரசவாவியையே பயன்படுத்தியுள்ளார். இவ்விழிவாக்கல் இன்றியமையாதது; ஏனெனில் பிற்பக்கப் பரவலாற பம்பியின் கதி குறைக்கப்படுகிறதுமல்லாமல் தரப்பட்ட பம்பியொன்றால் அடையக்கூடிய இறுதியமுக்கத்துக்கு அதனால் ஓர் எல்லையும் விதிக்கப்படுகின்றது. படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு நீர் கொண்ட குளிரற் கஞ்சுகக் குழாயொன்றைப் பயன்படுத்திப பிறபக்கப் பரவலால் ஆகும் விளைவுகள் குறைக்கப்பட்டுள்ளன; இன்னும் தாழ்ந்த (அதாவது ஆய்கூடத்து வெப்பநிலையில் இரசத்தின் ஆவியமுக்கத்துக்குக் குறைந்த) அமுக்கங்களில் பம்பியின் நுழைவழிக்கும் வெளிப்படுத்துகைக்கான பாத்திரத்திற்குமிடையே திரவவளிப்பொறியொன்றைப் புகுதத வேண்டுமெனக் கேயிடே கண்டுகொண்டார்.

இத்தகையவொரு பம்பியானது அதன் உயர்வுக்கதியைப் பெறும் பொருட்டு பிளவு S இன் அகலமும் பின்செல்லும் ஆவியருவியில் மூலக்கூறுகளின் இடைச் சுயாதீனப் பாதையும் அதே பருமன் வரிசையிற் படவேண்டும் எனக் கேயிடே முதல் அறிமுறைப்படி காட்டிப் பின்பு அவரது முடிவுகளைப் பரிசோதனை முறைப்படி நிலைநிறுவியுள்ளார். பரவற் பம்பியொன்றின் வெற்றிகரமான செயலாற்றலுக்கான கேயிடே நிபந்தனையானது (இரச) ஆவி மூலக்கூறுகளின் இடைச் சுயாதீனப் பாதையும் துவாரத்தின் அகலமும் ஒரே பருமன் வரிசையிற் படவேண்டும் என அடிக்கடி கூறப்படுகினறது. அவரால் 1915 இல் வெளியிடப்பட்ட ஆராய்ச்சிக் கட்டுரையில் பின்செல்லும் ஆவியருவியில் வாயுமூலக்கூறுகளின் இடைச் சுயாதீனப் பாதையே முக்கியமானது என்பதை கேயிடே தெளிவாக்கத் தவறியதே இத் தப்பெண்ணத்துக்குக் காரணமாகக்கூடும். 1923 இல் அவர் இவ்விடயத்தைத் தெளிவாக்கிவைத்தார்.

எல்லாப் பொறிமுறைப் பம்பிகளுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில், பரவற் பம்பிகள் பெரும்படியான நயமொன்றுடையன எனத் தெரியவரும் ; அதாவது கொள்கையளவில் இதனுல் அடையக்கூடிய வெற்றிட வரிசைக்கு எல்லேயேயில்லே. வளியின பகுதியமுக்கங்கள் பிளவின இரு பக்கங்களிலும் வேறுபட்டால், பம்பியின நுழைவழியில் அமுக்கம் பூச்சியமாகும்வரை பரவல் நடைபெறும். நடைமுறையில் பிளவு வழியாக மூலக்கூறுகளுட்சில திருப்பப்படுகின்றபடியால் இலட்சியத்தை ஒருபோதும் அடையமுடியாது. இப்பம்பியின் குறைபாடுகளுள் இரண்டைக் கூறுதல் வேண்டும் ; ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில், பம்புவேகம் சிறிதே ; இரச ஆவி பிளவு S ஐக் கடக்கும் போது அதன் அடர்த்தி கவனமாகக் கட்டுப்படுத்தப்படுகின்றது என்னும் நிபந்தனையின்பேரில் மட்டுந்தான் உயர்வுக்கதியை அடைய முடிகின்றது.



படம் 14·08. லான்மூயரின் ஒடுக்கற் பம்பியின் தத்துவம்.
(*a*) கண்ணுடி வகை, (*b*) உலோக வகை.

1916 இல், லான்மூயர் என்பார் பரவற் பம்பியொன்றின் திட்டத்தில் வெளித்தள்ளு பம்பியொன்றின் முக்கியமான சிறப்புக்களேப் புகுத்தி ஏற்கெனவே காட்டியுள்ள குறைபாடுகளே வெற்றிகரமாக நீக்கினுர். லான்மூயர் ஆவிப்பம்பியை மூன்று வெவ்வேருன வழிகளில் திருத்தினுர் :

(*a*) ஆவியருவியின் கதி உயர்த்தப்பட்டது ; மேலும் பம்பியின் கதி இரச ஆவியின் உண்மையான அமுக்கத்திலே பெரும்பாலும் தங்கியிராமல் இருக்கவும் செய்யப்பட்டது ; அதாவது இனிமேல் ஆவியருவி பிறப்பாகின்ற கொதிகலத்திலுள்ள இரசத்தின் வெப்பநிலேயைக் குறுகிய வீச்சொன்றிலே செப்பஞ்செய்தல் வேண்டியதேயில்லே.

(b) வளிமூலக்கூறுகளின் பயன்விளைவிக்கும் உட்படுத்துகையையிட்டு இரச ஆவியருவியின் திசை அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

(c) கேயிடே பயன்படுத்திய குறுகிய பிளவை நீக்கிப் பம்பியின் கதி பன்மடங்கு உயர்த்தப்பட்டுள்ளது.

கேயிடேயின் பரவற் பம்பியிலிருந்து வேறுபடுத்திக் கூறும்பொருட்டு லான்மூயரின் பம்பி "ஒடுக்கற் பம்பி"யென அழைக்கப்படுகின்றது. லானமூயர் பம்பியின் அடிப்படைகள் படம் 14·08 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. துவாரமொன்றினின்று வெளியேறுகின்ற இரச ஆவி மூலக்கூறுகள் உயர் கதி இரச ஆவி அருவியொன்றை ஆக்குகினறன. இவ்வருவியுள் வளி மூலக்கூறுகள் பரவுகின்றன. இங்கிருக்கின்ற இருவகை மூலக்கூறுகளிடையே நிகழ்கின்ற மூலக்கூற்று மோதுதலின் விளைவாக வளிமூலக்கூறுகள் கீழே செலுத்தப்பட்டு ஆதரவுப் பம்பியால் வெளியேறறப்படுகின்றன.

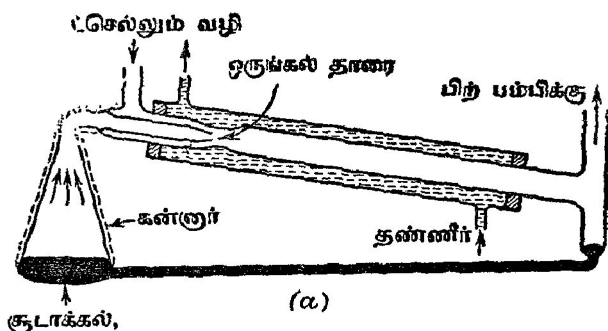
இலட்சியவொடுக்கற பம்பியொன்றிலே, இரசமூலக்கூறுகள் பரவல் துவாரம் அல்லது மூக்கினின்று பம்பியின் சுவர்வரை நேர்கோட்டுக்களிலேயே அசைகின்றன; 'அவை பின்வாங்கமாட்டா.' மூக்குககு இரசத்தின் அணிமையும், மூக்குக்குக் கீழே ஆவியாக்கத்தாற் போதியவளவில் இரச ஆவியுணடுபண்ணுதற்குத் தேவையான உயர் வெப்பநிலையில் இரசம் இருப்பதும், மூலக்கூற்று வேகங்களின் எழுமாற்றுப் பரம்பலுந்தான் இப் பின்வாங்குதலைத் தோற்றுவிக்கின்றன. இப் பின்வாஙகலைத் தவிர்க்கும் பொருட்டு ஆவியானது பம்பியின் சுவரை அடையும் கணத்தில் அதை ஒடுக்க லான்மூயர் முயன்ருர். இவ்வண்ணம் இலட்சியப் பம்பிக்கும் மெய்யான பம்பிக்குமுள்ள வித்தியாசம் குறைக்கப்படுகின்றது.

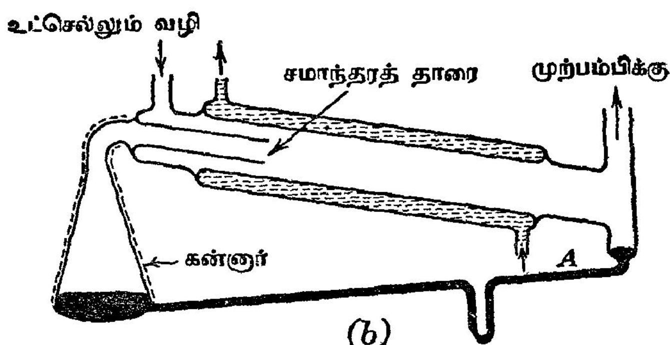
பின்னமுக்கம் உயர்வாக இருக்குமிடத்து (அதாவது நீர்த்தாரைப் பம்பியொன்றைப் பிற்பம்பியாகப் பயனபடுத்துமிடத்து) ஆவியருவியின் கதியை உயர்த்தியும் பரவல் துவாரக் குறுக்குவெட்டைச் சுருககியும் இருத்தல் வேண்டும். பின்னமுக்கம் தாழ்ந்ததாயிருக்குமிடத்துத் துவாரத்தின் குறுக்கு வெட்டைப் பெரிதாக்கலாம்; எனவே ஓரளவு மெதுவான முற்பம்பியைப் பயன்படுத்துமிடத்து, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேலான ஒடுக்கற் பம்பிகளைத் தொடர்நிலையில் அமர்த்தித்தான் உயர்வெற்றிடத்தைப் பெறமுடியும். அப்பொழுது பம்பி அல்லது கட்டமொவ்வொன்றும் பம்புத்தொடரின் நுழைவழிப் பக்கமாகவும் அதற்கு அடுத்ததாகவுமுள்ளதான பம்பிக்கு ஆதரவுப் பம்பியாகச் செயலாற்றும். இப்பம்பிகளால் வாயுக்களையும் ஆவிகளையும் அப்புறப்படுத்தலாம்.

இரச ஆவிப் பம்பிகளின் எளிய வகைகள்.—(a) வாரன் (Waran) பம்பி: 1923 இல், வாரன் என்பார் ஈர் இரச ஆவிப பம்பிகளைத் திட்டமிட்டுக் கூறிஞர்; அப்பம்பிகளின் அமைப்பானது மிக எளிதாக இருக்கிறபோதிலும், கனவளவு அத்துணைப்பெரிதாக இராத பாத்திரங்களில் உயர் வெற்றிடத்தை உண்டாக்கும் ஆற்றலுடையன. இப்பம்பிகளைப் பைரட்சுக் கண்ணுடியால் ஆக்குதல் வேண்டும்; படம் 14·09 இல் தரப்பட்டிருக்கின்ற

கூறுபாடுகள் அவற்றின் அமைப்பை உடனடியாய்த் தெளிவாக்குகின்றன. முதலாவது எடுத்துக்காட்டிற்கு ஒடுங்கிய தாரையொன்றும் அடைப்புக்குழா யொன்றும் அளிககப்பட்டிருக்கின்றன, படம் 14·09 (a). ஓர் எளிய நீர்த்தாரைப் பம்பியை ஆதரவுப் பம்பியாகப் பயன்படுத்துமிடத்து அது கிட்டத்தட்ட 0·1 மிமீ. இரசவமுக்கத்தை ஆக்குகின்றது. இப்பம்பிக்கு விட்டம் கிட்டத்தட்ட 8 மிமீ. உடைய சமாந்தரத்தாரையொன்று அளிக் கப்பட்டு, ஆற்றல்மிக்க ஆதரவுப் பம்பியொன்றைப் பயன்படுத்துமிடத்து மிகவுயர்ந்த வெற்றிடங்களை விரைவிற் பெறமுடிகின்றது.

தொடக்கத்தில் றப்பர் அடைப்பான்களால் நீர்க்குளிரற் கஞ்சுகக் குழா யானது பொருத்தப்பட்டிருந்தது. கஞ்சுகத்தை உருக்கி நிலைப்படுத்தி வைத்தல் பழக்கமில்லாதவருக்குச் சற்றுக் கடினம் எனினும், அவ்வாறு செய்தால் எல்லா நீர்ப் பொசிவுகளும் நீக்கப்பட்டுப் பம்பியானது இடரின்றித் தொழிற்படும். இந்நூலாசிரியரின் கருத்துப்படி இரசமானது கொதிகலனை மீளும் குழாயிலே U குழாயொன்று புகுத்தப்பட்டிருத்தல் வசதியாம்; இதனால், கண்ணாடிச் சட்டப்படலில் ஓரளவு மீள்தன்மை தோன்றி, A யில் இறுதிப்பொருத்து எளிதாகின்றது.

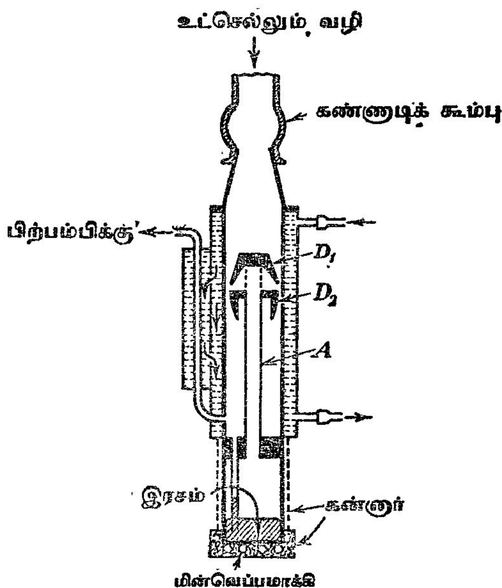




படம் 14·09. வாரனின் இரச ஆவிப் பம்பிகள்.

(b) கேய்–பாக்கேஸ்ற் (Kaye–Backhurst) கங்கணவுருக்குத்தாரைப் பம்பி: தேசிய பௌதிக ஆயகூடத்திலே நிறைவு பெற்ற இப்பம்பியானது உருக் காலானது. அதன் அமைப்புமுறை மிக எளியது ; அடிப்படைகள் படம் 14·10 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. அது ஓர் ஒருகட்டப் பம்பியாகும். இப்பம்பியின் உயர்கதி அதன் ஏராளமான பரிமாணங்களாலானது.

பம்பியின் தொழின்முறைமை பினவருமாறு : இரச ஆவியானது கொதிகலத்திலிருந்து நடுக் குழாய் A யில் மேன்முகமாகச் சென்று பின் மேலே இருககின்ற துவாரஙகள் வழியாகத் திருப்பிகள் D_1, D_2 என்பவற்றிற்கிடையேயுள்ள கங்கணவிடத்தை அடைகின்றது ; அவ்விடத்தி ருந்து அது தாரையாக வெளியேறுகின்றது. வெளியோட்டுக்கும் மேல் திரும்பற்றுண்டுக்கும் இடையேயுள்ள கங்கணவிடமூடே பரவுகின்ற வாயு மூலக்கூறுகள் இரசத்தாரையாற் பற்றப்படுகின்றன. கலவை குளிரடை கிறபடியால், இரசம் ஒடுங்கி, வளி ஆதரவுப்பம்பியாற் காவிச் செல்லப்படு கின்றது. ஒடுங்கிய இரசம் கொதிகலத்துக்கு மீள்கின்றது.



படம் 14·10. கேயின் கங்கணத்தாரையாவிப் பம்பியின் தத்துவம்.

எண்ணெய்ப் பரவற் பம்பி.—இதுகாறும் ஆவிப்பம்பிகளிற் பொதுவாகப் பயன்படுத்தி வந்த இரசத்திற்குப் பதிலாகப் பெற்றோலியத்திலிருந்து காய்ச்சி வடித்தெடுத்த உயர் கொதிநிலைப் பொருள்களைப் பயன்படுத்து முகமாக அவற்றின் ஆக்கலை 1928 இல் பேர்ச்சு (Burch) என்பார்

விவரித்துக் கூறினர். இரசத்தோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில் இவ்வெண்ணெய்கள் தாழாவியமுக்கமுடையன ; எனவே வெற்றிடச் செயன்முறைகள் பலவற்றில் உறைபொறி தேவைப்படாதபடியால் பம்பி தரக்கூடிய உயர்வுக் கதியைப் பயன்படுத்திக் கொள்ள முடிகின்றது. ஆனல் இவ்வடி பொருள் எதுவாகினும் அதன் நிரம்பிய ஆவியமுக்கமானது தாழ்ந்ததாக இருக்கின்றபோதிலும், செயன்முறை நீடித்திருக்குமிடத்துச் சிறு எண்ணெய்த் துளிகள் உயர் வெற்றிடத் தொகுதியிற் கண்டிப்பாய்த் தோன்றும் ; அத்துளிகள் உலோகப்படலங்கள், ஏவப்பட்ட இழைகள், ஒளிமின் கலங்களிலுள்ள கதோட்டுக்கள் ஆகியவற்றைப் பெரிதும் பாதிக்கும். அப்பொழுது, உறைபொறியொன்றைப் பயன்படுத்துதல் வேண்டும் ; ஆனல் அதன் விளைவாகப் பம்புக்கதியானது குறைந்துவிடும்.

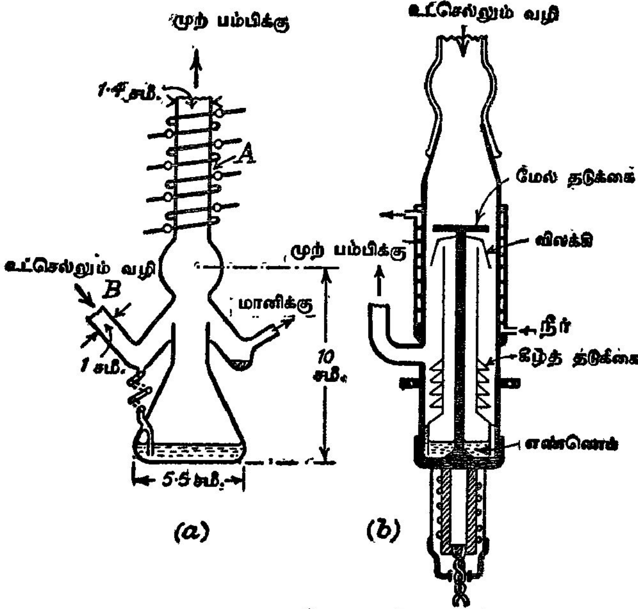
இத்தகைய எண்ணெயொன்றைப் பயன்படுத்தும் பம்பியொன்றின் கதியானது இரச ஆவியைப் பயன்படுத்தும் அதே பருமனுடைய பம்பியின் கதியைக் காட்டிலும் மிகவுயர்ந்தது என்பது அப்பம்பியின் முதன்மையான நயமொன்ருகும். இதற்குக் காரணம் இவ்வெண்ணெயின் மூலக்கூற்று நிறையானது இரசத்தினதை விஞ்சுகின்றன என்பதேயாம்; இங்கு மூலக்கூற்றுக் கனவளவானது பனமடங்காகிறது. இருந்தாலும் குறைபாடொன்றுளது ; இரசம் வாயுக்களையும் ஆவிகளையும் தன்னுட் கரைத்துக் கொள்வதில்லை ; அதற்கு நேர்மாருக சேதனவுறுப்பு எண்ணெய்கள் நடந்துகொள்கிறபடியால் அவற்றை அடிக்கடி துப்பரவாக்கல் வேண்டும்.

இத்துறையில் முன்ஞேடியாக விளங்கிய பேர்ச்சு அவர்களை ஹிக்மான் என்பார் விரைவில் பின்தொடர்ந்தார். ஹிக்மான் செயற்கை முறையால் ஆக்கப்பட்ட

n – இருபியூறறைல் தல்பேற்று $[C_6H_4(COOC_4H_9)_2,\ M = 278]$,
n – இருபியூற்றைல் செபசேற்று $[C_8H_{16}(COOC_4H_9)_2,\ M = 314]$,
i – ஈர் ஏமைல் செபசேற்று $[C_8H_{16}(COOC_5H_{11}),\ M = 343]$,

முதலிய தூய சேதனவுறுப்புச் சேர்வைகளைப் பயன்படுத்தினர். ஆய்கூட வெப்பநிலையில், இவற்றுள் முதலாவது சேர்வையின் ஆவியமுக்கமானது இரசத்தினதைக் காட்டிலும் நூறு மடங்கு சிறியது ; வெப்பநிலை இறங்கும்பொழுது அவ்வித்தியாசம் கூடுகின்றது. மேற்படி சேதனவுறுப்புச் சேர்க்கைகளுள் ஏதேனுமொன்றைப் பயனபடுத்துமுகமாக ஹிக்மான் எளிய கண்ணுடிப் பம்பி வகையொன்றைத் திட்டமிட்டமைத்தார் ; அது படம் 14·11 (*a*) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. 1·5 சமீ. அல்லது அதற்குக் குறைவான விட்டமுடைய குழாய்களிடத்து சிறந்த குளிரல் பெறும்பொருட்டுத் தடித்த செப்புக் கம்பியொன்றிலே அடிக்கடி இடைவிட்ட சுருளிகளை இயற்றி, அச்சுருளிகள் நெருக்கமாக இருக்கும்வண்ணம் அக்கம்பியானது தண்டிலே சுற்றப்பட்டிருக்கின்றது. அமோனியமிருசல்பைட்டால் செப்புக்கம்பியானது கறுப்பாக்கப்பட்டிருக்கிறது. 0·1 மிமீ. இரசம் போன்று தாழ்ந்த வெற்றிடமொன்றை

ஆதாரவுப் பம்பியானது ஆக்கினுல், இத்தகைய பம்பியொன்றைப் பயன்படுத்தி 10^{-6} மிமீ. இரசம் போன்று அத்துணைத்தாழ்ந்த அமுக்கங்களைப் பெறமுடியும். அப்பொழுது கதி கிட்டத்தட்ட 10^{4} சமீ.^{3} செக்.$^{-1}$ ஆகும்.



படம் 14·11. எண்ணெய்ப் பரவற் பம்பிகள்.

எண்ணெயைத் தொழிற்படு பொருளாகக் கொண்டதும் முற்றிலும் உலோகத்தாலானதுமான பம்பியொன்று படம் 14·11 (b) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. மெற்ரேப்பொலிற்றன் விக்கேஸ் மின் கம்பனியால் திட்டமிடப்பட்ட இப்பம்பியானது " ஏப்பியசன் B " என்னும் எண்ணெயைப் பயன்படுத்துகிறது. புறவோடு உருக்காலானது ; ஆனுல் (கீழே பார்க்க) அதனது உயர்வெப்பங்கடத்துதிறன் காரணமாகத் தாரைத் தொடரானது செம்பால் ஆக்கப்பட்டிருக்கிறது. வெப்பம் சரியாக வழங்கப்படுமிடத்துத்தான் சிறந்த பம்பு கதியொன்றை நிலைநிறுத்த முடிகிறபடியால் வெப்பம் வழங்கியைக் குறுகிய வீச்சொன்றிலே செப்பஞ் செய்யக்கூடியதாயிருத்தல் வேண்டும் ; எனவே மின்வெப்பமாக்கியொன்ருலேயே எண்ணெய்க்குச் சூடேற்றப்படுகின்றது ; இரசப் பரவற் பம்பிகளைக் காட்டிலும் இங்குதான் வெப்பநிலையொழுங்குபடுத்தல் மிகக் கடினமானது. அதன் ஆவியமுக்கமானது 1 மிமீ. இரசவமுக்கத்தை மீறச் செய்யக்கூடிய

அளவில் எண்ணெயின் வெப்பநிலை ஒருபோதும் இருத்தலாகாது ; ஏனெனில் அதற்கு மேலான வெப்பநிலைகளில் ஒட்சியேற்றம் விரைவாக நடைபெறுகின்றபடியால் உயர் ஆவியமுக்கமும் உயர் பிசுபிசுப்பும் உடைய எண்ணெயொன்று உண்டாகின்றது.

இப்பம்பியில் ஒரு திருப்புந் தட்டும் இரு கூட்டம் தடக்குகளும் காணப் படுகின்றன. பிந்தியவற்றுள் மேலேயுள்ளது உயர்வெறுறிடத் தொகுதியில் ஆவி புகாவண்ணம் தொழிற்படுகின்றது ; மற்றையது முற்பம்பியில் ஆவி புகுதலைத் தடைசெய்கின்றது.

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து, இரசத்துக்கெனச் சிறப்பாகத் திட்டமிடப்பட் டுள்ள பரவற் பம்பிகளில் சேதனவுறுப்புத் திரவங்களைப் பயன்படுத்து தல் பொருத்தமற்றது. ஏனெனில் (a) இரசப்பம்பிகளில் திருப்பிக்கும் புறவோட்டுக்கும் உள்ள இடைவெளியானது அத்துணைச் சிறிதாகவிருக் கக் கூடுமாதலால் அது மெல்லிய எண்ணெய்ப் படலமொன்றால் அடை படக்கூடும், (b) குழாயானது அத்துணைக் குறுகியிருக்கிறபடியால் இத்த கைய பம்பியொன்றில் எண்ணெயைப் பயன்படுத்துமிடத்து எண்ணெய் ஆவி வழங்கல் கட்டுப்படுத்தப்படுகிறது ; வழங்கலைப் போதியவளவிற்கு உயர்த்தப்போனால் எண்ணெயானது மிதமிஞ்சிச் சூடாக்கப்பட்டுவிடும், (c) எண்ணெயை ஆவிநிலையில் வைத்தற்கு திருப்பியின் வெப்பநிலையானது போதியவளவில் உயர்ந்ததாயிராதபடியால் அதற்கு அணித்தாக ஆவி யொடுக்கம் மிதமிஞ்சி நிகழக்கூடும்.

வாயுநீக்கலும் ‘பற்றுதலும்’.—பொசிவில்லாப் பாத்திரமொன்றிலிருந்து வளி (அல்லது வேறு வாயுக்கள்) இன் நீக்கலானது ஏற்கெனவே விவரித் துக் கூறியுள்ள பம்பிகளுள் ஏதேனுமொன்றால் நிறைவேற்றப்படுகின்றது. உயர்கதிப் பம்பியொன்றால் 10^{-6} மிமீ. இரசவமுக்கம் போன்று அத் துணைத் தாழமுக்கம் அடைதல் வழக்கத்திற்குமாறானதொன்றன்று ; பாத்திரம் தொடர்ந்து பம்பப்பட்டிருந்தால் வெறறிடமுறை தொடர்புள்ள மிகப் பெரும்பாலான ஆய்வுகளிலும் தொழிற்சாலைச் செய்கைகளிலும் அவ்வமுக்கம் போதியவளவில் தாழ்ந்ததாக இருக்கும். (அப்பொழுது இடைச் சுயாதீனப் பாதையானது கிட்டத்தட்ட 6×10^3 சமீ. ஆகும்.) இருந்தா லும், மின்விளக்குகள், X–கதிர்க் குழாய்கள், இரேடியோ வால்வுகள், கதோட்டுக் கதிர்க் குழாய்கள் முதலியவற்றின் ஆக்கலில் நடப்பதுபோல (வெளிப்படுத்தப்பட்ட) பாத்திரத்தைப் பம்பியிலிருந்து உருக்கியடைத்து எடுக்க வேண்டுமாயின், அப் பாத்திரத்தில் அமுக்கமானது 10^{-4} மிமீ. இரசத்தை ஒருபோதும் விஞ்சலாகாது ; ஏனெனில் 10^{-3} மிமீ. அமுக்கத்தில் இடைச் சுயாதீனப் பாதை 6 சமீ. ஆகும் ; அது ஆய்கருவியின் பரிமாண வரிசையிற் படுகின்றது. அதுபோன்ற பெறுமானமொன்றை வாயுவமுக்க மானது அடையுமிடத்து, இழையைச் சூடாக்கும்பொழுது அதிலிருந்து காலப்படுகின்ற இலத்திரன்கள் போதிய சக்தியுடையதாயிருந்தால், அவை எஞ்சிய வாயுவிற் சிறிதளவை அகற்ற முடிகின்றது ; அப்பொழுது

குழாயின் சிறப்பியல்புகள் மாற்றமடைகின்றன. பாத்திரமானது பம்பியிலிருந்து தனிமையாக்கப்பட்ட பின் அதில் அமுக்கம் விரும்பத்தகாப் பெறுமானத்தை அடையாமல் இருத்தற்பொருட்டு அப் பாத்திரத்தின் சுவர்கள், அதிலுள்ள உலோகவுறுப்புக்கள் ஆகியவற்றிலே வாயுநீக்கல் வேண்டும்; அதாவது கண்ணாடியிலும் உலோகத்திலும் மேன்மட்டத்தோடொட்டியுள்ள வாயுவை விடுவித்துப் பம்பிகளால் அப்புறப்படுத்தல் வேண்டும்.

மேன்மட்டத்தோடொட்டியுள்ள வாயுக்களைக் கையாளும் முறைகள்பல உள. அவற்றுட்சில இங்கு குறிப்பிடப்படுகின்றன :—

(a) பாத்திரத்திலுள்ள பதார்த்தங்களின் மென்மைநிலை வரிசையில் மிகத்தாழ்ந்த மென்மையாகும் நிலைக்கு 50°ச. குறைவாகவுள்ள வெப்ப நிலையில், மின் அல்லது வாயுக்கனலடுப்பொன்றில, அப் பாத்திரம் முழுதும் வாட்டப்படுகின்றது; பொதுவாகக் கூறுமிடத்துச் சூழ்பாத்திரத்தின் கண்ணாடியே மிகததாழ்ந்த மென்மைநிலையுடையது.

(b) இரேடியோ மீடிறனுக்குரிய சுரியலோட்டச் சூடேற்றும் முறையால் எல்லா உலோகவுறுப்புக்களும் செஞ்சூடான நிலையை அடையச் செய்யப்படுகின்றன.

(c) இம்முறையில் " பற்றி "யொன்று பயன்படுத்தப்படுகின்றது. பம்பிகள் செயலாற்றுங்கால் பாத்திரமானது " நன்கு வாட்டப்படுகினறது "; அதாவது கண்ணாடி, உலோகம் என்பவற்றாலான உறுப்புக்களுக்கு வாயு நீக்கல் செய்யப்படுகின்றது. அவை அமைக்கப்பட்டிருக்கும் இடத்தில் சமநிலையமுக்கமொனறு நிலைநிறுத்தப்படும்வரை நன்கு வாட்டிய கண்ணாடியும் வாயுநீக்கல் செய்யப்பட்ட உலோகவுறுப்புக்களும் வாயுவை ஓரளவு அவாவுகினறன. '' வாயுக்களுக்குப் பேரவா '' கொண்ட பதார்த்தங்கள் **பற்றிகள்** எனப்படுகின்றன. ''மகனீசியம், பேரியம் ஆகிய மின்னேரான உலோகங்களும் அல்லது அவ்வுலோகங்களாலான கலப்புலோகமொன்றும் பெரும்பாலும் பற்றிகளாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்ற பொதுவான பதார்த்தங்களாகும். இப்பதார்த்தத்தின் குளிகையொன்றை ஆய்கருவியுட் புகுத்திச் சூடேற்றலால் கண்ணாடிச் சுவர்கள்மீது படியச் செய்யப்படுகின்றது; சுவர்கள் பெரும்பரப்பளவில் இப்பற்றியால் மூடப்பட்டுவிடும். உட்கொள்ளப்பட்ட வாயுக்களின் வெளியேற்றலையிட்டுப் பம்பியிலிருந்து பாத்திரத்தை உருக்கியடைக்குமுன் இச்செய்கையைச் செய்தல் வேண்டும்.

படிந்திருக்கின்ற படலத்தால் பெருமளவில் வாயுவானது உறிஞ்சப்படுகின்றது; எனவே அப்படலத்தைப் பாத்திரம் உருக்கியடைக்கப்பட்ட பினபும் தொடர்ச்சியாகத் தொழிற்படுகின்ற உயர்கதிப்பம்பி வகையொன்றெனக் கருதலாம்; மேலும் அதைப் பற்றித் தொடர்ந்து கவனிக்க வேண்டியதேயில்லை.

சொடி (Soddy) என்பவரே முதன்முதலாக 1907 இல், பற்றிகள் பயன்படுத்தப்படுதலை ஆதரித்தார்; அவர் பயன்படுத்தியுள்ள பற்றியானது கல்சியம் ஆகும். நீராவி, CO, CO_2, NH_3, SO_2 ஆகிய வாயுக்கள் கல்சியத்தால் எளிதில உறிஞ்சப்படுகின்றன.

தாழ் அமுக்கங்களை அளத்தல்

U–குழாய் அமுக்கமானிகள்.—கிட்டத்தட்ட 100 மிமீ. இரசத்துக்குக் குறைவாகவும் 5 மிமீ. இரசத்துக்கு மேலாகவும் உள்ள அமுக்கங்களை எளிய இரச அமுக்கமானியொன்றைப் பயன்படுத்தி அளக்கலாம். அதனோடு சிற்றுயரமானியொன்றையும் சேர்த்தால் இவ்வகை அமுக்க மானியொன்றால் 0·5 மிமீ. இரசம் போன்று அத்துணைத் தாழ்ந்த அமுக்கங்களை அளந்துகொள்ளலாம்.

இத்தகைய வாயுவமுக்கமானிகளிற் பல குறைகள் உள்ளன :—

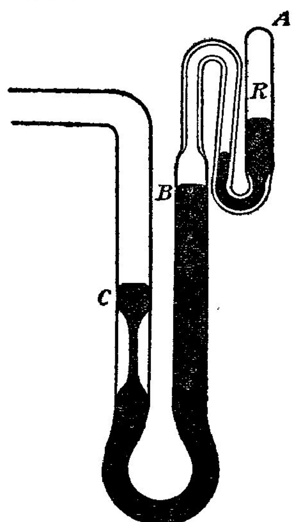
(*a*) இரசம், கண்ணாடி ஆகியவற்றின் பரப்புகளுக்கிடையே நகர்கின்ற வாயுக்களால் மூடிய உறுப்பிலுள்ள வெற்றிடமானது மெதுவாகப் பாழாக்கப்படுகின்றது.

(*b*) ஆய்கருவியில் திடீரெனப் பொசிவொன்று தோற்றுமாயின் மூடிய உறுப்பில் இரசம் விரைவாகத் தள்ளப்படுகிறது ; அப்பொழுது விளைகின்ற மோதுதல் அமுக்கமானியில் ஒரு முறிப்பை ஏற்படுத்தப் போதியதாகின்றது.

(*c*) தாழமுக்கங்களில் இக்கருவி உணாதிறனற்றதாக இருக்கின்றது.

(*d*) இரசமானது கண்ணாடியுடன் ஒட்டும் இயல்பு உடையதாதலின் மெய்யான அமுக்கத்தை நோக்குதல் எளிதன்று.

வாரன் என்பவராலான உபகரணமொன்றைப் பயன்படுத்தி முதல் இரு குறைகளையும் கூடியவரை குறைக்க முடிகின்றது. வழக்கமான அமுக்கமானியுடன் சிறு கண்ணாடிச் சேமிப்புக்கலம் R ஆனது மயிர்த்துளைக் குழாயொன்றால் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது, படம 14·12. முன்னர் போல் முழுவதும் இரசத்தால் நிரப்பப்பட்டிருக்கின்றது. இரசத்தின் சுயாதீனப் பரப்பு மீதுள்ள அமுக்கத்தைத் தாழ்த்துங்கால் அச்செய்கையின் ஏதேனுமொரு கட்டத்தில் இரசமானது புள்ளி A யிலிருந்து பின் வாங்குகிறது. அப்பொழுது ஆய்கருவியை இலேசாகத் தட்டினால், தொடர்ச்சியான இரசவிழையானது முறிந்து வரிப்படத்தில் காட்டியுள்ள நிலையை இரசம் அடைகின்றது. இந்நிலையில் மயிர்த்துளையுட் கிட்டத் தட்டப் பூரணமான வெற்றிடம் உளது ; எனவே C யிலுள்ள அமுக்கத்தை உயரம் BC ஆனது உண்மையாக எடுத்துக் காட்டுகின்றது.



படம் 14·12. மீள உயிர்ப்பிக்கும் வெற்றிடவுபகரணமுடைய அமுக்க மானி.

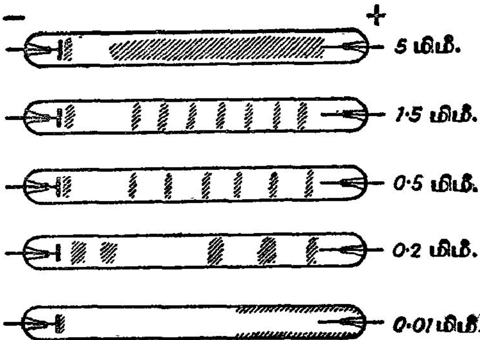
சொற்பநேரம் சென்றதும் மயிர்த்துளையில் வாயுக்கள் உண்டாகக்கூடும் ; அமுக்கமானியை வளிமண்டல அமுக்கத்திற்கு உட்படுத்தி, வாயுக்களை R உட் செலுத்தி அவை வெளியேற்றப்படுகின்றன.

படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு U குழாயின் திறந்த உறுப்பைச் சுருக்கினால் இரசத்தின் அசைவானது தடைபடும் ; எனவே முன்னர் கூறியுள்ள காரணங்களால் ஆகக்கூடிய முறிப்பானது அத்துணை எதிர்பார்க்கக் கூடியதொன்றன்று.

5 மிமீ. இரசத்துக்குக் குறைந்த அமுக்கங்களுக்கான மானிகள்.— வாயுவொன்றின பல பௌதிகவியல்புகள் அமுக்கத்துடன் மாறுந்தன்மை யுடையன ; அவற்றுட்சில கீழே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையிற் குறிக்கப் பட்டிருக்கின்றன ; உயர்வெற்றிடத் தொகுதியொன்றில் அமுக்கத்தைத் துணிவதற்கு அவை பயனபடுகின்றன.

பௌதிகவியல்பு	அமுக்க வீச்சு (மிமீ. இரசம்)
(*a*) மின்னிறக்கங்கள்	$10 - 10^{-3}$
(*b*) நெருக்கத்தகவு, அதாவது அமுக்கத்துடன் கனவளவுமாறல்	$10^{-1} - 10^{-6}$
(*c*) வெப்பச் சக்தியிடமாற்றம்	$10^{-1} - 10^{-4}$
(*d*) அயனுக்க விளைவுகள்	$10^{-2} - 10^{-7}$

இறக்கக் குழாயொன்றால் அமுக்கத்தை அண்ணளவாக மதிப்பிடுதல்.— வெளிப்படுத்துகை நடைபெறுகின்ற தொகுதியுடன் நேரே தொடுக்கப் பட்டிருக்கின்ற எளிய இறக்கக் குழாயொன்றால் வெற்றிடத் தொகுதியி லுள்ள அமுக்கத்தைப் பற்றி அண்ணளவாக அறியலாம். அமுக்கத் தொடரொன்றினிடத்து, வளியில் நடைபெறும் இறக்கத்தின் தோற்றங்கள் படம் 14·13 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன ; ஆனாலும் நடைமுறையில்,



படம் 14·13. இறக்கக் குழாயொன்றால் அமுக்கங்களை அண்ணளவாக மதிப்பிடுதல்.

இறக்கத்தின் உண்மையான தோற்றமானது குழாய், மின்வாய் ஆகிய வற்றின் கேத்திரகணித வடிவத்தாலும், குழாய்க்குக் குறுக்கேயுள்ள அழுத்த வித்தியாசத்தின் அலை வடிவத்தாலும் வேறுபடுத்தப்படுகின்றது என்பதை ஞாபகத்தில் வைத்துக்கொள்ளல் வேண்டும். இறக்கமானது வழக்கமாக ஒரே திசையில்தான் நடைபெறும்; ஆனால் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற அழுத்தத்தின் அலைவடிவம் அரிதாய்த்தான் உண்மையான உறுதி நிலையில் இருக்கும்.

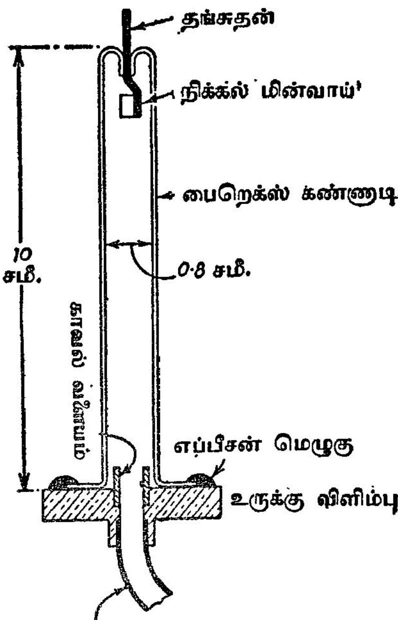
1943 இல் பரோஸ் (Burrows) என்பார் உலோகத் தொகுதிகளுடன் பயன்படுத்தக்கூடிய இறக்கக் குழாயொன்றைத் திட்டமிட்டார். அதன் அமைப்பானது படம் 14·14 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது ; அதன் செய்கைக்கு வளிமண்டல அமுக்கத்தில், வளியிற இட்டத்தட்ட 1 சமீ. நீளமுடைய தீப்பொறியொன்றைத் தரும் தீப்பொறிச் சுற்றொன்று பயன்படுத்தப்படுகின்றது. அமுக்கத்துக்கும் இறக்கத்தின் இயல்புக்கும் இடையே கீழ் வருகின்ற அண்ணளவான தொடர்புகள் உள எனப் பரோஸ் கண்டார்.

ஒளிர்விறக்கத்தின் இயல்பு	அமுக்கம் (மிமீ. இரசம்)
இறக்கம் 0·5 சமீ. விட்டமுடைய நிரல் ..	5
முதலிலே தோன்றும் காலவாயத் தட்டுக்கள் ..	1·5
1 சமீ. இடையீடுள்ள கால்வாயத் தட்டுக்கள் ..	0·5
உட்சுவர்களிற புளோரொளிர்வு	10^{-2}
முழுமறைப்பு	10^{-3} அல்லது அதனினும் குறைந்த அமுக்கம்

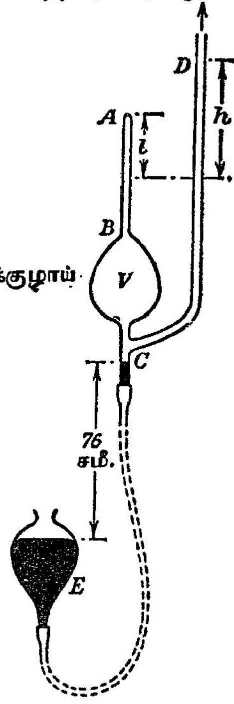
குழாயில் இறக்கத்தின் நிறமானது குழாயிலுள்ள வாயுவின் வகையைப் பற்றி முடிவு செய்தற்குப் பயன்படுகின்றது. மிகு இளஞ்சிவப்பு நிறம் வளியையும் பசுமையையுடைய சாம்பல் காபனீரொட்சைட்டையும் சுட்டுகின்றன ; பிந்தியது அடிக்கடி வெற்றிடத்தில் எண்ணெய்ச் சுவடுகளின் பிரிக்கையால் ஆகின்றது. அதேபோல் மங்கலான நீல நிறம் நீராவியைச் சுட்டிக்காட்டுகின்றது.

மக்கிளௌட்டுமானி.—இதுதான் முதன் முதலாக ஆக்கப்பட்ட உண்மையான தாழமுக்கமானி ; அது 1874 இல் மக்கிளௌட்டு என்பவரால் திட்டமிடப்பட்டது. இன்று அது எல்லா உயர் வெற்றிட முயற்சிகளிலும் பெரிதும் பயன்படுத்தப்படுகின்றது ; மேலும் அதைப் பயன்படுத்தியே மற்றை மானிகள் அளவுகோடிடப்படுகின்றன. இம்மானியின் அடிப்படைகள் படம் 14·15 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன ; அதனது செயலாற்றும் முறையானது பின்வருமாறு. V ஒரு கண்ணடிப் பாத்திரமாகும் ; அதனது மேல் முனையில் மயிர்த்துளைக் குழாயொன்று உருக்கிப் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றது. இவ்விரண்டின் முழுக்கனவளவும் V ஆகும். AB யின் அலகு நீளமொன்றின் கனவளவுந் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும்.

CD யானது V யிலும் CD இணைக்கின்ற உயர் வெற்றிடத் தொகுதியிலும் அதே வாயுவமுக்கம் இருத்தற் பொருட்டுப் போதிய விட்டமுடைய ஒரு பக்கக் குழாயாகும். E யானது மானியின் முக்கிய பகுதியுடன் றப்பர்க் குழாயால் தொடுக்கப்பட்ட ஓர் இரசச் சேமிபபுக்கலமாகும். E யானது காட்டியுள்ள நிலையில் இருக்கும்போது பம்பிகள் வேலைசெய்து கொண்டிருந்தால் V யிலுள்ள வாயுவமுக்கமானது உயர் வெற்றிடத்தொகுதியில்



படம் 14·14. பம்புத்தொகுதியொன்றுடன் பயன்படுத்துவதற்கான இறக்கக்குழாய்.



படம் 14·15. மக்கிளௌட்டு மானியின் எளிய வகை.

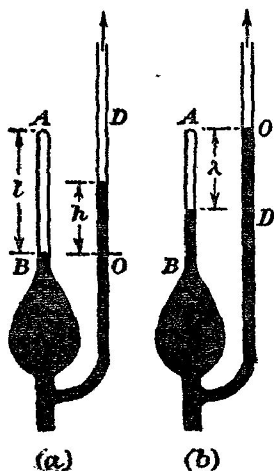
இருப்பதற்குச் சமன். இவ்வமுக்கம் p ஆகுக. E யை மெதுவாக உயர்த்துமிடத்து இரசத்தின் மேல் மட்டமானது C யைக் கடந்ததும் பம்புத்தொகுதியிலிருக்கின்ற வாயுவினின்று V யிலுள்ள வாயு பிரிக்கப் படுகின்றது. E யைத் தொடர்ந்து உயர்த்துமிடத்து V யில் அடைபட்டிருக்கின்ற வாயுவானது மயிர்த்துளை AB யில் அமுக்கிச் செலுத்தப்படுகின்றது.

E யானது அதனது இறுதி உறுதிநிலைக்கு உயர்த்தப்பட்டபின், AB யில் இருக்கின்ற வாயு அக்குழாயில் நீளம் l ஐக் கொண்டிருக்கின்றது எனவும், D யிலிருக்கின்ற இரசத்தின் சுயாதீனப் பரப்பானது மயிர்த்துளைக் குழாயிலுள்ள இரசப்பிறையுருவுக்கு மேலே h என்னும் உயரத்தில் இருக்கின்றது எனவும் கொள்க. அப்பொழுது AB யில் வாயுவின் அமுக்கம் h சமீ. இரசம் ஆகும் [உண்மையில் $(h+p)$ சமீ., ஆனால் $p \to 0$]. AB யில் அலகு நீளமொன்றின் கனவளவு v எனின் போயிலினது விதியின் நேரடிப் பிரயோகத்தால்

$$pV=(vl)h$$

எனத் தரப்படுகின்றது ; எனவே, p யைக் கணித்துக் கொள்ளலாம்.

மானியைக் கையாளுவதற்கு வழக்கில இரு செய்கைகள் உள. முதலாவதில் இரசமானது குழாய் AB யிலுள்ள நிலைத்த குறி B யிற்கு எப்பொழுதும் கொண்டுவரப்படுகின்றது ; அதன் பொருட்டுத் தேவையான அமுக்கமிகை இரச நிரல் h என்பதாற் சுட்டிக்காட்டப்படுகின்றது, படம் 14·16 (a). இவ்வெடுத்துக்காட்டில்



படம் 14·16. மக்கிளௌட்டு மானிக்கான கொள்கை.

$$p=\left(\frac{vl}{V}\right)h\,;$$

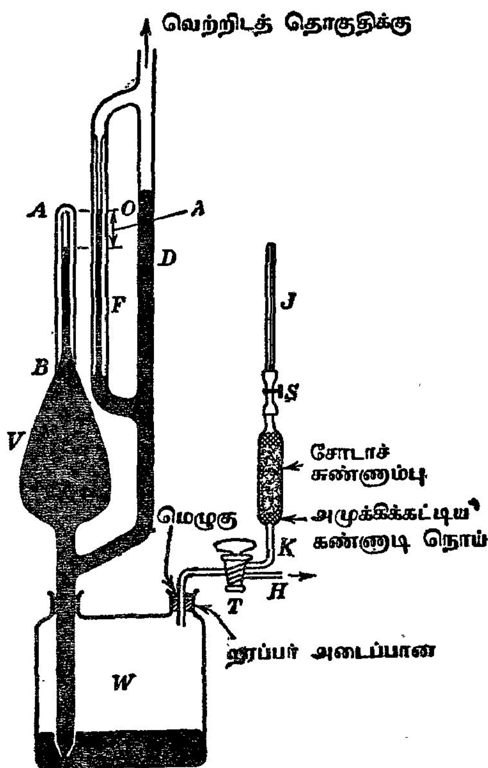
இவ்வண்ணம சீரான அமுக்கவளவுத் திட்டமொன்றைப் பெறுகின்றோம் ; அத் திட்டத்தைக் குழாய் D யின் பக்கமாக வைத்துக்கொள்ளலாம்.

இரண்டாவதில், படம் 14·16 (b) யிற் காட்டியுள்ளவாறு, அதனது சுயாதீனப் பரப்பானது, மயிர்த்துளைக் குழாயின் முனை A யிற்கு எதிரே இருக்குமாறு, குழாய் D யிலுள்ள இரசம் கொண்டு வரப்படுகின்றது. இந்நிலையிலே, AB யில் அமுக்கப்பட்ட வாயுவாற் கொள்ளப்பட்டிருக்கின்ற நீளம் λ ஆகுக. அப்பொழுது போயிலின் விதிப்படி

$$(v\lambda)\lambda=pV, \text{ அல்லது } p=\frac{v}{V}\lambda^2.$$

இம்முறையானது சீரல்லாத அமுக்கவளவுத்திட்டமொன்றைத் தருகின்றது ; அத்தகைய திட்டமொன்று AB பக்கமாக வைக்கப்படுகிறது. இவ்வளவுத்திட்டமானது தாழமுக்கங்களில் படிப்படியாக விரிந்திருக்கின்றது ; இதுவே மக்கிளௌட்டு மானியைப் பயன்படுத்துவதற்கான இவ்விரண்டாவது முறையின் முக்கிய நயம்.

நடைமுறையிலுள்ள மக்கிளௌட்டுமானி.—h ஆனது அமுக்கப்பட்ட வாயுவின் உண்மையான அமுக்கம் அன்று என்பது ஏற்கெனவே விவரித்துக் கூறியுள்ள மக்கிளௌட்டுமானியினது எளிய அமைப்பின் முதன்மையான குறையொன்றுரும். விட்டத்திற் குழாய்கள் A யும் D யும் வேறுபடுகின்றபடியால் அவ்விரு குழாய்களிலும் மயிர்த்துளையிறக்கமானது வெவ்வேறுயிருக்கின்றது ; இதனுல் வழுவொன்று எழுகின்றது. இப்பிரச்சினையைத் தீர்க்கும்பொருட்டு, AB யின அதே விட்டமுடைய குழாய் F ஆனது, படம் 14·17 இற் காட்டியுள்ளவாறு, D யிற்குச் சமாந்தரமாக உருக்கியொட்டி வைக்கப்படுகின்றது ; அவ்விரு மயிர்த்துளைக் குழாய்களிலுள்ள இரசமட்டங்களின் நிலைகளை நோக்கி உயரம் λ ஆனது துணியப்படுகின்றது.



படம் 14·17. நடைமுறையில் மக்கிளௌட்டு மானி.

பெருமளவில் இரசத்திணிவு கொண்ட சேமிப்புக்கலமொன்றைக் கையாளுதலானது மக்கிளௌட்டு மானியின் தொடக்க அமைப்பில் இன்னுமொரு குறை ஆகும். படம் 14·17 இற் காட்டியுள்ள அமைப்புத் திட்டமானது இக்

குறையை நீக்கிவிடுகின்றது. இரசமானது ஊல்வின் (Woulff's) போத்தல் W வில் வைக்கப்பட்டு, அப்போத்தலின் துவாரங்களுள் ஒன்றுடன் மானிப் பகுதி பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றது. இரண்டாவது துவாரத்தில் றப்பர் அடைப்பான் ஒன்று பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றது; படத்திற் காட்டியுள்ள வாறு அவ்வடைப்பானூடே செல்கின்ற கண்ணாடிக் குழாயானது இரு வழிக்குழாயடைப்பொன்றுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. இவ்வடைப்புக் குழாயிலிருந்து குழாய் K ஆனது அதனினும் அகன்றதும் சோடாச் சுண்ணாம்பும் கண்ணாடி நொய்யும் அடைசப்பட்டிருக்கின்றதுமான குழா யொன்றிற்குச் செல்கின்றது; கண்ணாடி நொய்யானது உலர்த்துகருவித் துணிக்கைகள் மானியுட் புகாவண்ணம் தடுக்கின்றது. இக் குழாயுடன், றப்பர்க் குழாயொன்றால் மிகவும் நுண்ணிய மயிர்த்துளைக்குழாய் J ஆனது தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது; தேவைப்படும்போது றப்பர்க் குழாயானது விற்கவ்வியொன்றால் இறுக்கியடைக்கப்படுகின்றது. கண்ணாடிக் குழாய் H ஆனது எளிய பம்பி வகையொன்றுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது; செய்கையின்போது போதிய கவனம் செலுத்த முடியுமானால், W வை உயர் வெற்றிடத்தொகுதிக்குரிய ஆதரவுப் பம்பியுடன் தொடுத்தும் வைக்கலாம்.

H ஆனது W வுடன் நேர்த்தொடர்பு வைத்திருக்கும் வண்ணம் அடைப் புக்குழாயைத் திறந்தால், மானிப்பகுதியிலுள்ள இரசம் முற்றிலும் ஊல்வின் போத்தலில் இறங்கிவிடும்; அப்பொழுது V யிலுள்ள அமுக்க மானது பம்புத்தொகுதியிலுள்ள அமுக்கத்துக்குச் சமன் ஆகும். T யை மூடினால் போத்தலானது ஆதரவுப் பம்பியிலிருந்து வேறாகப் பிரித்து வைக்கப்படுகின்றது; இனி T யைச் சற்றுத் திருப்பினால் W விலே இருக்கின்ற இரசத்துக்கு மேலேயுள்ள இடத்தில் வளி மெதுவாக நுழைய விடப்படுகின்றது. இரசம் மானியிற் செலுத்தப்படுகின்றது; அப்பொழுது ஏற்கெனவே கூறியுள்ள முறைகள் இரண்டினுள் ஏதேனுமொன்றின்படி மானி பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

இவ்வண்ணம் கைவினையாற்றல் குறைக்கப்படுகின்றதைவிட இவ்வகை மக்கிளொளட்டு மானியில் நீண்ட றப்பர்க் குழாயில்லாதது அதன் இன்னுமொரு சிறப்பியல்பு ஆகும். அதனது சுவரூடே றப்பர்க் குழா யானது எப்பொழுதும் வளியைப் பொசியவிடுகின்றது; அவ்வளியானது மானியுட் போய்ச் சேரக்கூடும். அல்லாமலும் றப்பரில் இருக்கின்ற கந்தகத்தால் இரசம் எளிதில் கறைப்படுத்தப்படக் கூடுமாதலால் றப்பர்க் குழாயைப் பயன்படுத்துவது விரும்பத்தக்கதன்று.

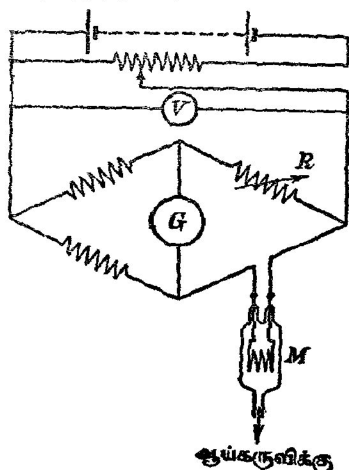
எளிதில் ஒடுங்கக்கூடிய ஆவிகள் இருக்குமாயின் எல்லா மக்கிளொளட்டு மானிகளும் ஒழுங்கற்ற முறையில் தொழிற்படும்; ஆனால் மானிக்கும் உயர்வெற்றிடத்தொகுதிக்கும் இடையே திரவ வளிப் பொறியொன்றைப் புகுத்தினால் அவ்வகையான ஆவிகள் யாவும் எளிதில் அப்புறப்படுத்தப் படும்.

பிராணி (P'rani) (தடை) மானிகள்.—உயரமுக்கங்களில் வாயுவொன்றின் வெப்பங்கடத்துதிறனானது அமுக்கத்தைச் சாரமாட்டாது என்னும் நன்கறிந்த செய்தியானது அறிமுறைப்படி கிடைக்கப்பெற்றும் பரிசோதனையாற் போதிய அளவில் நிலைநிறுத்தப்பட்டும் இருக்கின்றது. 0·1 மிமீ. இரசத்துக்குக் கீழான அமுக்கங்களிலே, வாயுமூலக்கூறுகளின் இடைச் சுயாதீனப் பாதையும் கொள்பாத்திரத்தின் விட்டமும் ஒரே பருமன் வரிசையிற் படும்போது, வாயுவொன்றினூடாகக் கடத்தலால் வெப்ப இழப்பு வீதமானது அமுக்கத்தின ஓா ஏகபரிமாணச் சார்பாகும்; அதாவது, இவ்வீதத்தை γp என எழுதலாம்; இங்கு, γ ஒரு மாறிலி ஆகும். 1907 இற் வார்பேக் (Warburg) எனபார் தாழமுக்கங்களை அளத்தற் பொருட்டு இத்தொடர்பைப் பயன்படுத்தியுள்ளார். இத்தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட மானியொன்றிறகு மக்கிளொட்டு மானியொன்றைப் பயன்படுத்தி மாறிலி γ வைத் துணிதல் வேண்டுமாதலால் இத்தொடர்பு பயன்படும் அமுக்கமானிகள் தனி அமுக்கமானிகள் அனறு.

இம்மானி வகையானது உண்மையிற் பிராணி எனபவராலேயே திட்டமிடப்பட்டது. இவ்வகைககுச் சேர்ந்த எல்லா மானிகளிலும் வெப்பவுலோக இழையொன்று பம்பித் தொடருடன் பற்றப்பட்டிருக்கின்ற சிறு பாத்திரமொன்றிலே ஏற்றபபட்டிருக்கின்றது. அதனது செயலாற்று முறையானது அமுக்கத்துடன் வெப்பவிழைக்கும் கொள்பாத்திரத்தின் சுவர்களுக்கும் உள்ள இடைவெளியை நிரப்பி நிற்கின்ற வாயுவூடே நடைபெறுகின்ற வெப்பங்கடத்தலினது வீதத்தின் மாறலைப் பொறுத்துள்ளது என்பதாகும். வெப்ப இடமாற்ற வீதமானது இழையின் வெப்பநிலையை, எனவே அதனது மின்தடையை, நிாணயிக்கினறது. தொடக்கத்திலேயே மக்கிளொட்டு மானியொன்றைப் பயன்படுத்தி இம்மானிக்கு அளவுகோடு வரையப்பட்டிருந்தால் இழையின தடைக்கும் அதைச் சூழ்ந்திருக்கின்ற வாயுவின் அமுக்கத்துக்கும் உள்ள தொடர்பைத் துணிய முடிகின்றது.

பிராணி மானியொனறின் வெப்பவிழையானது உயர்ந்த அளவில் தடையின் வெப்பநிலைக் குணகம் உடையதாயிருத்தல் வேண்டும்; இழையானது விட்டம் கிட்டத்தட்ட 0·06 மிமீ. உடைய தங்குதனுல் ஆனது. அமைப்பைப் பொறுத்தமட்டில் இம்மானியானது கூண்டுவகை வெள்ளொளிர்வு மின்விளக்குப போனறது; ஆனால் மானியில் இழையானது ஒருபோதும் பழுக்கக் காய்ச்சப்படுவதிலலை. மானியின் திருத்தமான செயலாற்றலின் பொருட்டு இழைக்கும் சுவர்களுக்குமுள்ள இடைத்தூரம் மாறுமல் இருக்க இழை இறுக்கியும் இழை தாஙகிகள் வழியே வெப்ப நட்டத்தை இயன்றவளவு குறைவாக்கியும் இருத்தல்வேண்டும். குமிழானது வெப்பநிலை நிறுத்தியொன்றிலே இருத்தல் பெரிதும் விரும்பத் தக்கது; உருகு பனிக்கட்டியானது வெளிப்படையான ஒரு வெப்பநிலை நிறுத்தியாகும். இழையின் வெப்பநிலையானது கிட்டத்தட்ட 120°ச. வரை உயர்த்தப்பட்டிருத்தல் வேண்டும்.

வெப்பங்கடத்துதிறனைச் சார்ந்த அமுக்கமானியொவ்வொன்றிற்கும் தனி யமுக்கமானியொன்றுடன் ஒப்பிட்டு அளவுகோடிடல் வேண்டுமாதலால், நடைமுறையில் இழையின் குறுக்கே அழுத்த வித்தியாசத்தை மாறிலியாக நிலைநிறுத்தி ஓட்டத்தை மட்டும் நோக்கினால் போதியதாகும். வாயு வமுக்கம் தாழுங்காலே வாயுவின் வெப்பங் கடத்துதிறனும் குறைகின்ற படியால் முன்னர் முடிவுசெய்துள்ள பெறுமானமொன்றிலே இழையின் வெப்பநிலை மிகையை நிலைநிறுத்தற்குத் தேவையான ஓட்டம் குறைவாகவே இருக்கும். அளவுகோடிடல் நடைபெற்ற அதே சூழ்நிலையிலே தான் அளவுத்திட்டம் உண்மையில் வழங்கும் ஆதலால் இழையின் வெப்பநிலையையே மாறிலியாக நிலைநிறுத்தல் வேண்டும் என காம்பெல் **(Campbell)** என்பார் வற்புறுத்தியிருக்கின்றார்.



படம் 14·18. பிரானி மானியும் அதற்கான பாலமும்.

காம்பெலின் கருத்தைச் செயல்முறையாக்கும் பொருட்டு மானி M ஆனது படம் 14·18 இற் காட்டியுள்ளவாறு, வீற்ஸ்ற்றன் **(Wheatstone)** பாலமொன்றின் வலைவேலைப்பாட்டினுள்ள புயமொன்றில் இணைக்கப்படுகின்றது; அவ்வொவ்வொரு கலப்புலோகமும் உண்மையாகப் பூச்சிய வெப்பநிலைக் குணகம் உடையதாதலால், மற்றெல்லாத் தடைகளும் மங்கனின் அல்லது "மினல்ஃபா" வால் ஆக்கப்பட்டிருக்கின்றன. தடை **R** ஆனது செப்பஞ்செய்தற்குத் தகுதியுடையது. கல்வனோமானித் திரும்பல் பூச்சியமாகவிருக்குமாறு **R** இன் பெறுமானம் அமைக்கப்படுகின்றது; அப்பொழுது இழையின் வெப்பநிலையானது கிட்டத்தட்ட 100°ச. ஆகவிருக்கும் வண்ணம் **M** இல் ஓட்டம் அமைந்திருத்தல் வேண்டும். காம்பெலின் முறையில் ஒவ்வொருமுறை அமுக்கம் மாறும்போதும், மேலே காட்டியுள்ளவாறு, பாலம் சமநிலையை மீளும்வரை பாலத்தின்

குறுக்கேயுள்ள அழுத்தம் V ஆனது செப்பஞ்செய்யப்படுகின்றது. இழை அடைகின்ற மாறு வெப்பநிலை மிகையசனது ϕ ஆகுக. அப்பொழுது இணைக் கம்பிகளில் வெப்பநட்டங்கள் சிறிதாயின், அவை ϕ யிற்கு நேர்விகிதசமன் ஆகும்; அதாவது அவை $\beta\phi$ யிறகுச் சமன் ஆகுக; இங்கு β ஒரு மாறிலி யாகும். செக்கனில் இழையில் வெப்பச் செலவு αV^2 என்பதாகும்; இங்கு α ஒரு மாறிலியும், V யானது பாலத்தின் குறுக்கே உள்ள வோல்ற்றளவும் ஆகும். வாயுவிற் கடத்தலால் ஆகும் வெப்பநட்டம் $f(p)$ ஆகுக; இங்கு $f(p)$ ஆனது அமுக்கத்தின் ஒரு தெரியாச் சார்பாகும். எனவே,

$$\alpha V^2 = \beta\phi + f(p)$$

என எழுதலாம்.

$p=0$ என்னுமிடத்துப் பாலத்தின் குறுக்கேயுள்ள வோல்ற்றளவு V_0 ஆகுக; அப்பொழுதுங்கூட மானியிலுள்ள இழையின் வெப்பநிலை மிகை ϕ யேயாகும். எனவே

$$\alpha V_0^2 = \beta\phi.$$

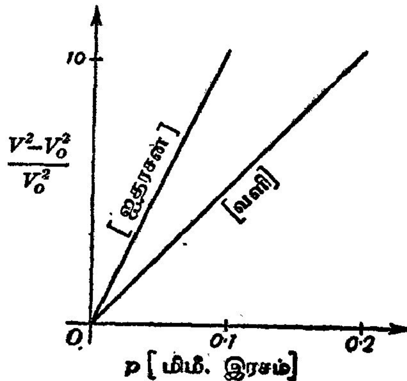
இவ்விரு சமன்பாடுகளும

$$\frac{V^2 - V_0^2}{V_0^2} = \frac{f(p)}{\beta\phi}$$

அல்லது,

$$\frac{V^2 - V_0^2}{V_0^2} = \xi f(p)$$

என்பதைத் தருகின்றது; இங்கு $\xi = (\beta\phi)^{-1}$. அது ஒரு மாறிலி.

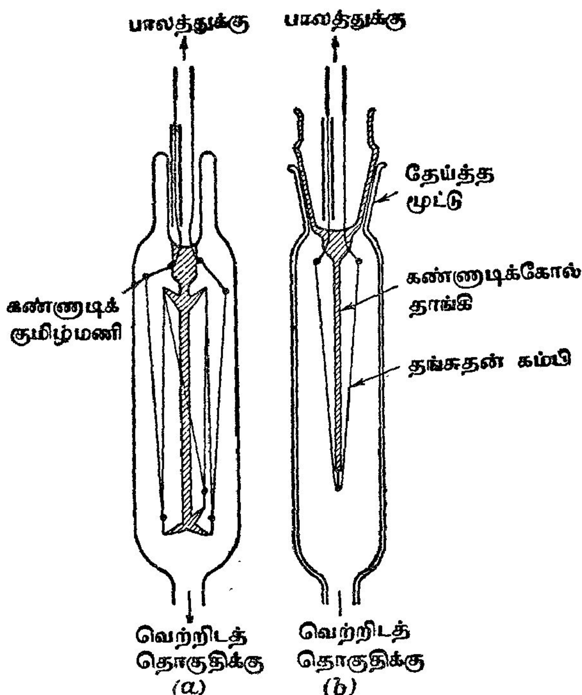


படம் 14·19. பிரானிமானியொன்றிற்கான அளவுகோடிடல் வளையிகள்.

அமுக்கத்தை மக்கிளௌட்டு மானியொன்றால் வேறே அளந்தால் $f(p) = \gamma p$ எனக் காணப்படும்; இங்கு γ ஒரு மாறிலியாகும். எனவே $\frac{V^2 - V_0^2}{V_0^2}$ என்பது அமுக்கத்துக்கு நேர்விகிதசமனுகும். மேலும் ξ ஆனது

பெரும்பாலும் இழையின் நீளத்தையும் அது தங்குதனுலோ பிளாற்றினத்தாலோ ஆக்கப்பட்டிருக்கின்றமையையும் சாராது எனக் காணப்பட்டது. ξ வாயுவின் இயல்புடன் மட்டுமே மாறுகின்றது.

படம் 14·19 இல் காம்பெல் பெற்ற இரு வளையிகள் எடுத்துக்காட்டப்பட்டிருக்கின்றன; இங்கு கிடைக்கூறுகள் மக்கிளெளட்டு மானியொன்ருல் அளக்கப்பட்ட அமுக்கங்களும், நிலைக்கூறுகள் அவ்வவற்றிற்கு ஒத்ததாய்ப் பின்னம் $(V^2-V_0^2)/V_0^2$ எனபது கொண்டிருக்கின்ற பெறுமானங்களும் ஆகும்.



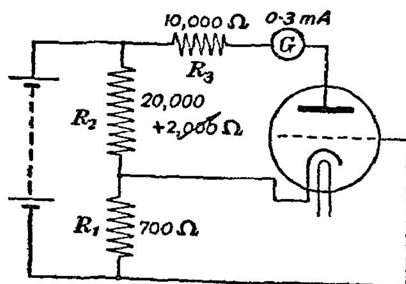
படம் 14·20. பிரானிமானிகள்.

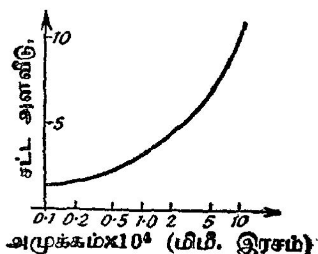
படம் 14·20 ஆனது பிரானிமானியின் இருவகைகளைக் காட்டுகின்றது; அவற்றுள் ஒன்று பிரிக்கக்கூடியது.

இவ்வகை மானியொன்றைப் பயன்படுத்தலை இலகுவாக்கும் பொருட்டு வழக்கமாகக் காம்பெல் காட்டியுள்ள வழியிற் செல்லாது, மானியில் அமுக்கம் மிகத் தாழ்ந்ததாயிருக்கும்போது பாலத்தைச் சமநிலைப்படுத்திப் பின் பாலத்தின் குறுக்கே வோல்ற்றளவை மாறிலியாக வைத்துக் கொண்டு, அமுக்கம் பூச்சியத்திலிருந்து வேறுபடும்போது, கல்வனேமானி

யில் சமநிலையில்லா ஓட்டமானது அளவுத்திட்டப் பிரிப்புகளில் நோக்கப்படு கின்றது. இவ்வளவுகோடிடல் முறையைப் பற்றிய சிறப்பான குறிப்புரை வேண்டியதேயில்லை.

ஸ்கொற் (Scott) மாற்றியமைத்த பிரானி மானிச் சுற்று.—10^{-3} முதல் 10^{-5} மிமீ. இரசம்வரையான வீச்சில் அமுக்கங்களை அளத்தற்குப் பெரும் பாலும் பயன்படுத்தப்படுகின்ற மானிகளிடத்து ஓரளவு கைவினையாற்றல் தேவைப்படுகின்றது. 1939 இல் ஸ்கொற்* என்பார் கீழே தரப்பட்டுள்ள சுற்றைத் திட்டமிட்டு இத்தொல்லையை நீக்கினர்; அச் சுற்றில் பிரானி மானியிலுள்ள இழையின் தடைமாற்றமானது அத்தடை மீதுள்ள வோல்ற்றளவு வீழ்ச்சியை மூவாய் வால்வொன்றின் நெய்யரிக்கு ஊட்டி அளக்கப்படுகின்றது. இவ்வண்ணம் அனோட்டுச் சுற்றில் இருக்கின்ற உணர்ச்சியுள்ள ஒரு கல்வனோமானி G யின் திருத்தப்பட்ட அளவுத்திட்டத்தில் அமுக்கத்தை நேரடியாய் நோக்கலாம். மானியிலுள்ள வாயுவின் அமுக்க மாற்றத்தைப் பின்பற்றியே இழையின் தடையும் மாறுகின்றபடியால், நெய்யரியின் குறுக்கேயுள்ள அழுத்த வித்தியாசமும் மாறும்; அப்பொழுது தட்டோட்டத்தில் அவ்வழுத்த வித்தியாசத்திற்கு ஒத்த மாற்றமானது மானியிலுள்ள அமுக்கத்தை எடுத்துக் காட்டுகின்றது. படம் 14·21 (a)





படம் 14·21. ஸ்கொற் மாற்றியமைத்த பிரானி மானிச் சுற்று.

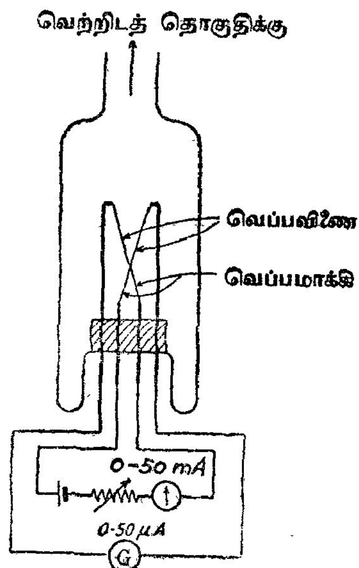
ஆனது சுற்றின் அமைப்பைக் காட்டுகின்றது. R_1 என்பது பிரானியிழை யாகும்; அதன் தடை கிட்டத்தட்ட 700 ஓம் ஆகும். R_2 ஆனது R_1 உடன் தொடரிலிருக்கின்ற ஒரு தடையாகும்; அதன் தடை கிட்டத்தட்ட 20,000 ஓம் ஆகும். R_2 உடன் செப்பஞ்செய்யக்கூடிய 2000 ஓம் தடையொன்று சேர்க்கப்பட்டிருக்கின்றது. படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு மூவாய் வால்வொன் றுடன் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்ற இத்தடைச் சேர்மானத்தின் குறுக்கே உயரிழுவை மின்கலவடுக்கொன்று இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. துண்டிப்பு வோல்ற்றளவிற்கு அணித்தாயுள்ள நெய்யரி வோல்ற்றளவுகளிடத்து மூவாயின் சிறப்பியல்பு வளையிகள் கூடியமட்டில் நேர்கோட்டு வடிவம்

*Rev. Sci. Inst., 10, 349, 1939.

பெறும் பொருட்டுப பொருத்தமான தடை R_3 ஆனது அனோட்டுச் சுற்றில் புகுத்தப்பட்டிருக்கின்றது. தெரிந்த அமுக்கமொன்றினிடத்து ஏதோவோர் அனோட்டோட்டம் கிடைக்கும்வரை R_2 ஆனது செப்பஞ் செய்யப்படுகின்றது.

தொழிற்பாட்டினபோது பிரானியின் தடை R_1 மாறுகின்றபடியால், முறையே R_1, R_2 என்பவற்றிற்குக் குறுக்கேயுள்ள அழுத்த வித்தியாசங்கள் V_1, V_2 எதிர்த்திசைகளில் மாறும்; ஆனால் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை மாறாமலே இருக்கும். பிரானிமானியில் அமுக்கம் இறங்கும்போது R_1 இன தடை கூடுகின்றது; அதன் விளைவாக நெய்யரி வோல்ற்றளவு கூடுகின்றது, தட்டுவோல்ற்றளவு குறைகின்றது. இவ்விரு மாறல்களாலும் தட்டோட்டம் குறைகின்றது. படம் 14·21 (b) யானது ஓர் எடுத்துக்காட்டான அளவுகோடிடல் வளையியாகும்.

வெப்பவிணைமானிகள்.—இது பிரானிமானியின் மாறறுவடிவமாகும்; அதன் அமைப்பானது படம் 14·22 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. வெப்பமாக்கிய இழையானது மெல்லிய, தட்டையான குறுகிய நாடா வடிவமுடைய கொன்சுதன்தானால் ஆனது; அதில் பாய்கின்ற ஓட்டம்பல மில்லியம்பியர்கள் ஆகும். இரும்பு–கொன்சுதன்தான் (அல்லது குரோமல்–அலுமெல்) வெப்பவிணையொன்றின இணைப்பொன்று வெவ்விழையின் நடுவிலே பற்றப்பட்டிருக்கின்றது. இம்மானியின் வெளியேயிருக்கின்ற பகுதியானது 0 °ச. இல் நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கின்றது. இழையினூடான குறிப்பிட்ட ஓட்டமொன்று பாயுமிடத்து, வாயுவூடே சுவர்களுக்கு வெப்பம் செலுத்தப்படும் வீதத்தால் வெப்பவிணையினது வெப்பச் சந்தியின் வெப்பநிலை நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது. மக்லொளட்டு மானியொன்றைப் பயன்படுத்தியே இம்மானியில் அளவுகோடிடல் வேண்டும்; கண்டிப்பாய்த் திட்டமான பரிசோதனையில் இரு கருவிகளிலும் ஒரே வாயுவானது இருத்தல் வேண்டும்.



படம் 14·22. தாழமுக்கத்தை அளத்தற்கான வெப்பவிணைமானி.

அயனாக்கமானிகள்.—பூச்சிய அழுத்தத்திலிருக்கின்ற கதோட்டிலிருந்து வெளியேறி அழுத்தம் V யிலுள்ள அனோட்டொன்றை அடையும் இலத்

திரனொன்றினிடத்துச் சக்திச் சமன்பாடானது

$$e(0)+\frac{1}{2}m(0^2)=eV+\frac{1}{2}mu^2$$

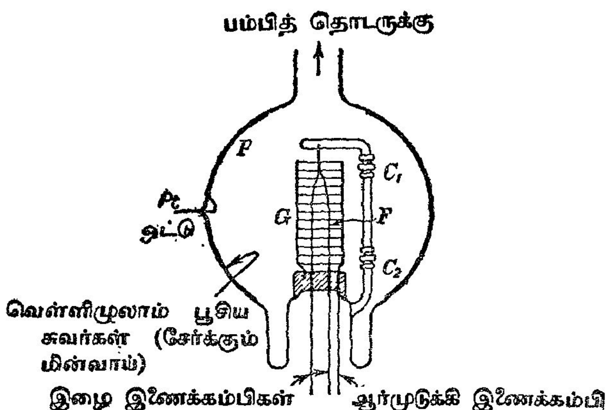
அல்லது

$$\frac{1}{2}mu^2=-eV$$

என்பதாகும் ; இங்கு, m இலத்திரனின் திணிவும், e அதன் ஏற்றமும், u அது அனேட்டை மோதும் வேகமும் ஆகும். இச்சமன்பாட்டை அமைக்கும் போது இலத்திரனுனது உயர்வெற்றிடத்திலேயே அசைகின்றது எனக் கொள்ளபபடுகினறது ; எனவே அதன் அசைவானது வாயுமூலக்கூற்று மோதுகைகளாற் பாதிக்கப்படமாட்டாது. e உண்மையில் மறையாகவும், V நேராகவும் இருக்கிறபடியால் சமன்பாடானது தெளிவாகத் திருப்தியாக்கப படுகிறது. வாயுவொன்று இருக்குமிடதது வரையறுத்த அவதி அழுத்தம் V_i யை மீறும் அழுத்த வித்தியாசமொன்ருல் இலத்திரன்கள் ஆர் முடுக்கப்பட்டால், அவற்றிற்கும் வாயு மூலக்கூறுகளுக்குமிடையே நடை பெறுகின்ற மோதுகைகளால் நேரயன்கள் ஆக்கப்படுகின்றன ; V_i யானது இலத்திரன்கள் அசைகின்ற வாயுவின் அயனுக்கவழுத்தம் எனப்படுகின்றது. உயர்வேக இலத்திரனொன்ருனது வாயுவணுவொன்றுமீது மோதி அவ் வணுவின் புறவோட்டிலிருந்து இலத்திரனொன்றை அப்புறப்படுத்தும் போதெல்லாம் இந்நேரயன்கள் ஆக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு ஆக்கப்பட்ட நேரயன்களைத் துணை அல்லது மூன்ருவதான மின்வாயொன்றிற் சேர்க்கு மிடத்து, V_i யை மீறி நிலைத்திருக்கின்ற ஆர்முடுக்கும் அழுத்தம் ஆற்றும் போது நேரயனேட்டமானது அமுக்கத்துடன் மாறுகின்றது எனக் காணப் பட்டது. தாழமுக்கங்களில் கதோட்டிலிருந்து துணைமின்வாயை நோக்கிச் செல்லும் இலத்திரனுனது ஒன்றிற்கு மேலான மோதுகையை ஏற்படுத்தும் என்பது சாத்தியமன்று ; ஆதலால் அத்தாழமுக்கங்களில் அமுக்கத்துடன் ஓட்டத்தின் ஏகபரிமாணமாறலை எதிர்பார்க்கக்கூடும். மூவாயொன்றின் நெய்யரியைத் துணை மின்வாயாகப் பயன்படுத்துமிடத்து, வால்வில் வாயு வில்லாதபோது, நெய்யரியோட்டம் மிக அற்பமாகவே இருக்கும் என்பதை ஞாபகப்படுத்தல் வேண்டும். வால்வில் வாயுவிருப்பதுடன் அதன் மூலக் கூறுகள் ஏற்கெனவே கூறியுள்ளவாறு அயனுக்கப்படுமிடத்து, இழையைக் குறித்து நெய்யரி மறையழுத்தத்தில் நிலைநிறுத்தப்பட்டிருந்தால் அந் நெய்யரியை நோக்கியே நேரயன்கள் அசையும்.

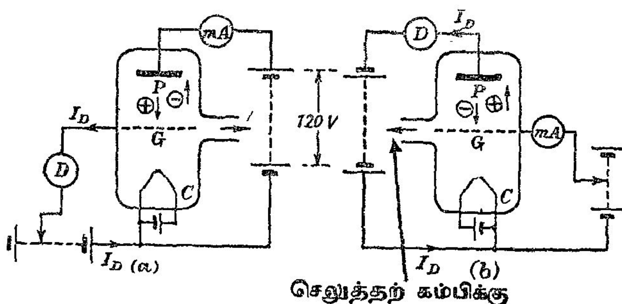
பொதுவான மூவாய் வால்வு எதையும் அயனுக்கமானிகளாகப் பயன் படுத்திக் கொள்ளலாம் ; ஆனுல் மின்வாய்களுக்கிடையே உண்டான மின்பொசிவுகளைக் குறைக்கும் பொருட்டுச் சிறப்பாக ஆக்கப்பட்ட மூவாய் களைப் பயன்படுத்துதல் சாலவும் நன்று ; அத்தகைய வால்வொன்று படம் 14·23 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. இழை F ஆனது அங்கு காட்டி யுள்ளவாறு தாங்கப்பட்டிருக்கின்றது. இழையச்சுடன் ஓரச்சாகவிருககின்ற நெய்யரியால் இழை சூழப்பட்டிருக்கின்றது. வால்வின் சுவர்மீதுள்ள வெள்ளிப்படிவு P யானது ‘தட்டாகப்’ பயன்படுகின்றது. படத்திற் காட்டியுள்ளவாறு கண்ணுடிமேலோட்டில் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்ற பிளாற்

றினம் கம்பியொன்றுல் படிவுடன் மின்தொடுகை ஏற்படுத்தப்படுகின்றது. இழையைத் தாங்குகின்ற கண்ணுடிக்கோல் மீது ஏற்றப்பட்டிருக்கின்ற தளர்ச்சியான கண்ணுடிக் கழுத்துப்பட்டைகள் C_1, C_2 என்பன தாங்கிமீது உலோகப் படலங்களின் படிவைத் தடைசெய்கின்றன ; அப்படலங்கள் இருந்தால் மின்வாய்களிடையே பொசிவுகள் உண்டாகும்.



படம் 14·23. தாழமுக்கங்களை அளத்தலுக்கான அயனுக்கமானி.

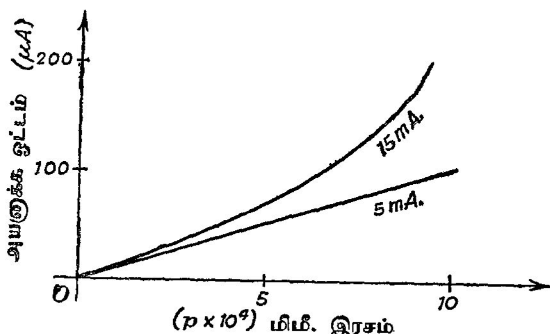
இம்மானியைத் தொழிற்படுத்தற்குரிய மின்சுற்றென்றின் அடிப்படைகள் படம் 14·24 (a) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. நெய்யரியின் வலைக்கண்ணூடே



படம் 14·24. அயனுக்கமானியொன்றைத் தொழிற்படுத்தற்குரிய இரு சுற்றுக்கள். (a) உட்சேர்க்கு மின்வாய், (b) வெளிச்சேர்க்கு மின்வாய் (பேருணர்ச்சியுடையது).

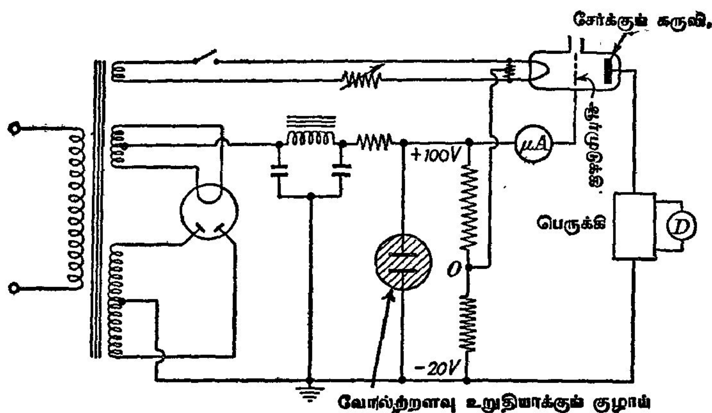
இலத்திரன்கள் செல்கின்றன ; நெய்யரிக்கும் அனோட்டுக்குமிடையே ஆக்கப்படுகின்ற நேரயன்கள் நெய்யரியாற் சேர்க்கப்படுகின்றன. உணர்ச்சியுள்ள கல்வனோமானி D யால் நெய்யரியோட்டத்தை அளத்தல் வேண்டும்.

மாற்றுத்திட்டமொன்று படம் 14·24 (b) யிற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது. இத்திட்டத்தில் இழையைக் குறித்து நெய்யரியானது நேரழுத்தமொன்றிலும், வெள்ளிப்படிவு மறை அழுத்தத்திலும் நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கின்றன. வெவ்விழையிலிருந்து வெளியேறுகின்ற இலத்திரன்கள் நெய்யரிமுகமாக இழுக்கப்படுகின்றன; ஆனல், அவற்றுட்சில, திணிவு வேகங்காரணமாக



படம் 14·25. அயனுக்கமானியொன்றிற்குரிய அளவுகோடிடல் வளையிகள்.

நெய்யரியின் வலைக்கண்ணூடே உந்தப்பட்டு, ஆர்முடுக்கும் அழுத்தமானது V_i யை மீறும்போது, G யிற்கும் P யிற்குமிடையேயுள்ள வாயுவை அயனுக்குகின்றன. நேரயன்கள் P என்னும் தட்டிற் சேர்க்கப்படுகின்றன; G யிற்கும் P யிற்கும் இடையே நுழைந்துள்ள இலத்திரன்கள் P மீதுள்ள மறையேற்றத்தால் தள்ளப்படுகின்றன. நேரயனோட்டமானது உணர்ச்சியுள்ள உணரி D யால் அளக்கப்படுகின்றது.



படம் 14·26. அயனுக்கமானியும் அதன் துணைச்சுற்றும்.

இவ்வகை மானிகள் தனியமுக்கமானிகள் அன்று, அவை மக்கி ளொட்டு மானியொன்றால் அளக்கப்பட்ட அமுக்கத் தொடரொன்றால் அளவுகோடிடப்படுகின்றன. மக்கிளொட்டு மானிபோலல்லாது அயனுக்க மானியானது ஆவிகள், வாயுக்கள் ஆகியவற்றின் அமுக்கங்களை அளக்கிற படியால் அளவுகோடிடலுக்குமுன் தொகுதியில் வாயுநீக்கல் குறைவின் றிச் செய்தலும், ஒடுங்கக்கூடிய எல்லா ஆவிகளை அப்புறப்படுத்தலும் இன்றி யமையாததாகவேண்டும்.

10^{-4} மிமீ. இரசம் அமுக்கத்துக்குக் கீழே, அமுக்கத்துக்கும் அயனுக்க வோட்டத்துக்குமுள்ள தொடர்பானது ஏகபரிமாணமானது. அதனினும் உயர்ந்த அமுக்கங்களில், இழையிலிருந்து இலத்திரன் காலலானது ஒப் பிட்டுப் பார்க்கில் சிறிதாயிருக்கும்வரைதான் அத்தொடர்பு ஏகபரிமாண மாயிருக்கும்; அப்பொழுது மானியின் உணர்திறனானது குறைந்திருக்கும். இழையிலிருந்து இலத்திரன் காலலால் ஆகின்ற ஓட்டத்தின் இரு வெவ் வேறான பெறுமானங்களிடத்து அயனுக்கமானியொன்றின் எடுத்துக்காட் டான அளவு கோடிடல் வளையியொன்று படம் 14·25 இற் காட்டப்பட்டிருக் கின்றது; அவ்வோட்டங்களின் பெறுமானங்கள் வளையிகளின் பக்கங்களிற் குறிப்பிடப்பட்டிருக்கின்றன.

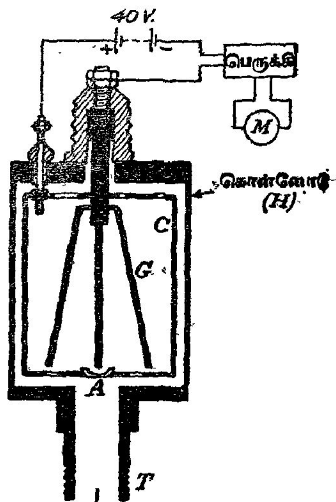
அயனுக்கமானி ஒன்றிற்கெனத் திட்டமிடப்பட்டுள்ள வசதியான மின் சுற்றொன்று படம் 14·26 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றது.

அல்பாக் கதிர் அயனுக்கமானி.— இது டௌனிங் (Downing), மெலன் (Mellen) ஆகியோரால், 1946 இல் திட்டமிடப்பட்ட புதுவகைக் குளிர்க் கதோட்டு அயனுக்கமானியாகும்; அல்பாத் துணிக்கைகளே அயனுக்குங் கருவியாதலால் " அல்பாக் கதிர் " என்னும் சொற்றொடராலேயே அது அழைக்கப்படுகின்றது. 10 மிமீ. இரச அமுக்கம் வரை மட்டுமே ஓட்டத்துக் கும் அமுக்கத்துக்குமிடையேயுள்ள தொடர்பானது ஏகபரிமாணமாக இருக் கின்றபோதிலும், இம்மானியானது 10^{-3} இலிருந்து 1000 மிமீ. வரையுள்ள இரசம் அமுக்கவீச்சை மூன்று கட்டங்களாக்கி, அவ்வொவ்வொன்றிலும் இது தொடர்ந்த அளவீடு தருகின்றது. இம்மானியும் இவ்வதிகாரத்தில் முன்பே விவரித்துக் கூறியுள்ள வெவ்விழை அயனுக்கமானியும் அதே தத்துவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு தொழிற்படுகின்றபோதிலும் பிந் தியது 10^{-3} மிமீ. இரசம் அமுக்கத்துக்குக் கீழேயுள்ள அமுக்கங்களிலே தான் பயன்படுகின்றது. இதனினும் மேலான அமுக்கங்களில் இழைமீது அயன்களின் மோதுகையால் அல்லது இழையைச் சூழ்ந்திருக்கின்ற வாயு வின் இரசாயனத்தாக்கத்தால் வெவ்விழை அயனுக்கமானியொன்றின் ஆயுட்காலமானது குறுகியிருக்கின்றது.

அல்பாக்கதிர் அயனுக்கமானியிலுள்ள கிளர்மின் வீசுகின்ற முதலானது ஒரு சிறு கல்லாகும்; அதன் பரப்பளவு 1 சமீ.^{2} ஆகும்; அதற்குப் பொருத்தமான " காதுகள் " இருக்கின்றபடியால் அதை உரிய நிலையிலே உறுதியாகத் தாங்கலாம். கல்லின் பக்கமொன்றிலே உயிர்ப்புப் பரப்பளவு உளது; அது 0·4 மிகி. இரேடியம் ($_{88}Ra^{226}$) கொண்ட ஒரு பொன்

இரேடியக் கலப்புலோகமாகும். அதனது தேய்வு விளைவுகள் இரேடன் ($_{86}Rn^{222}$), இரேடியம் A ($_{84}Po^{218}$), இரேடியம் B ($_{82}Pb^{214}$) என்பவற்றுடன் அது சமநிலையில் இருக்கின்றது. முதலாவது விளைவு ஒரு வாயுவாகும்; அது தப்பாமல் இருப்பது வேண்டற்பாலதாதலின் உயிர்ப்புப் படைமீது மின்பகுப்பு முறையால் நிக்கற் படலம் ஒன்று படியச் செய்யப்படுகின்றது. இவ்வண்ணம் உயர்திறன், ஆனால் தாழ்வலுச்சுரப்பு உடைய காலியொன்று கிடைக்கப்பெறுகின்றது; மேலும், நிக்கற் படலமானது இரச ஆவியால் ஆகும் கறைப்படுத்தலைத் தடுக்கின்றது. கல்லில் ஏற்படுகின்ற நட்டம் சிறிதாதலால் நான்கு அல்லது ஐந்து ஆண்டுகளுக்கொருமுறை அக்கருவியில் அளவுகோடிடல் போதியதாகும். இருந்தாலும் கவனமின்றிக் கருவியைக் கையாண்டால், உடலுக்குத் தீங்கு விளையக் கூடுமாதலால் அதற்கான முற்காப்பு நடவடிக்கைகளை மேற்கொள்ளல் வேண்டும்.

இம்மானியின் பாகமொன்றும் அதனைத் தொழிற்படுத்தத் தேவையான மின்சுற்றும் படம் 14·27 இற் காட்டப்பட்டிருக்கின்றன. A ஒரு முதலாகும்; அது அயனுக்க அறை C யின் சுவர்களில், உள்மின்வாய் அல்லது நெய்யரி G யின் அழுத்தத்தைக் காட்டிலும் 40 V கூடுதலான அழுத்தத்தில் நிலைநிறுத்தப்பட்டிருக்கின்றது. உள்மின்வாயானது நான்கு "மயிரூசி" வடிவமுடைய கம்பிகளால் ஆனது; எனவே ஒப்பிட்டுப் பார்க்கில், ஆக்கப்படுகின்ற அயன்கள் சிறைபிடிக்கப்படுமுன் பெருந்தூரங்கள் செல்ல வேண்டியதேயில்லை. இத்தூரம் மிகப் பெரிதாயிருந்தால் மிகத் தாழ்ந்த அமுக்கக் கட்டத்திலது வீச்சின் மேலெல்லையில் மிதமிஞ்சிய அளவில் அயன் மீளச் சேரல் நடைபெறுகின்றது; அதனால், தாழவமுக்கத்தில் அயனுக்கவோட்டத்துக்கும் அமுக்கத்துக்குமிடையே இம்மானியின் சிறப்பியல்பாயிருக்கின்ற ஏகபரிமாணத் தொடர்பானது மறைகின்றது.



படம் 14·27. அல்பாக்கதிர் அயனுக்கமானி.

வாயுவானது அயனுக்க அறையிற் சுயாதீனமாகப் புகும் பொருட்டு C யின் அடியானது துளைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. சிறிதாகிய அயனுக்கவோட்டமானது பெருக்கப்பட்டு மைக்கிரோவம்பியர்மானி M இல் வாசிக்கப்படுகின்றது. மானியை மக்கிளௌட்டு மானியொன்றுடன் ஒப்பிட்டு அதற்கு அளவு கோடிடப்படுகின்றது.

தாழமுக்கமானி பற்றிய சில பொதுக்குறிப்புகள்.—வெப்பங்கடத்துமானி, அயனுக்கமானி ஒவ்வொன்றிற்கும் மக்கிளெளட்டு மானியொன்றுடன் ஒப்பிட்டே அளவுகோடிடப்படல் வேண்டுமாதலின், எதற்காகச் சிலவேளை களில் மக்கிளெளட்டு மானியைக் காட்டிலும் இவை விரும்பப்படுகின்றன என்பதையும், அம் மானிகளின் சில குறைகளையும் சுட்டிக்காட்டுதல் வேண்டற்பாலன.

மக்கிளெளட்டுமானி வகையானது ஒடுங்கக்கூடிய ஆவிகளை உணரமாட் டாது ; அது தொடர்ந்து வாசிப்புகளைத் தரமாட்டாது ; மேலும், அதில் உற்பத்தியாகின்ற இரச ஆவியானது வெற்றிடத்தொகுதியின் எஞ்சிய பகுதியிற் புகாவண்ணம் திரவ வளிப்பொறியொன்றைப் பயன்படுத்தி அவ்விரச ஆவியை உறையைச் செய்தல்வேண்டும். இத்தகைய பொறி யொன்று இருப்பதால் பம்புவேகம் குறைக்கப்படுகின்றது ; அல்லாமலும் மானியானது வெற்றிடத் தொகுதியிலுள்ள அமுக்கத்தைக் காட்டுகின்றது என்பதைப் பற்றி எம்மால் உறுதியாகக் கூறவியலாது. கடைசியாக, 10^{-4} இலிருந்து 10^{-5} மிமீ. இரசம் வரையான அமுக்க வீச்சில் இம்மானியை முற்றிலும் நம்பமுடியாது.

மற்றைப்படி, அயனுக்கமானியானது குறைந்த நேரத்தில் அளவீட்டைத் தருகின்றது ; ஆனால் அதற்கெனப் பெருமளவில் துணை மின்னுபகரணங் கள் தேவைப்படுகின்றன. இம்மானியின் உணர்திறனனது பயன்படுகின்ற வாயுவின் இயல்பைப் பொறுத்துள்ளது ; அல்லாமலும், இழையானது வெள்ளொளிர்வுள்ளதாயிருக்கும்போது தொகுதியில் திடீரென வளி புகுமாயின் அவ்விழையானது சுடுபட்டு, மானி பயனற்றதாகிவிடும். அன்றி யும், சில வாயுக்களிடத்து இழைக்கு 'நஞ்சூட்டும்' இயல்பு உளது ; அதாவது அவ்வாயுக்கள் இழையின் இலத்திரன் காலலைக் கருதத்தக்க வளவிற் குறைக்கின்றன.

பிரானி அல்லது வெங்கம்பிமானியிடத்து இரு முக்கியமான குறைகள் உள. முதலாவதாக அதில் உறுதியான 'பூச்சிய' நிலையை நிறுத்தவிய லாது ; எனவே, அதைப் பயன்படுத்தி 10^{-4} மிமீ. இரசம் அமுக்கத்துக்குக் கீழேயுள்ள அமுக்கங்களைத் திட்டமாக அளக்க முடியாது. இரண்டாவதாக, 10^{-3} மிமீ. இற்குக் கீழேயுள்ள அமுக்கங்களில் வெப்ப நட்டமானது முக்கிய மாகக் காலலாலே நடைபெறுகின்றதேயன்றி கடத்தலாலன்று.

வெற்றிடத் தொகுதியிற் பொசிவுகளைக் கண்டுபிடித்தல்.—வெற்றிடத் தொகுதியொன்றைக் கையாளும்போது, சிறப்பாகத் தொடக்கத்தில், அத் தொகுதியில் அற்பமான பொசிவுகள் இருக்கிறபடியால் பரிசோதனையானது வழக்கமாகத் தாமதிக்கப்படுகின்றது ; சிலவேளைகளில் அத்தாமதமானது கிழமைகளாக இருக்கலாம். தொகுதியின் திட்டமானது எத்துணைச் சிக்க லாக இருக்கின்றதோ அத்துணை அளவிற் பொசிவுகளும் இருக்கக்கூடும் ; அதே அளவில் அப்பொசிவுகளின் இருப்பிடத்தைக் காணுதல் கடின மாகும்.

கண்ணுடியாலான ஆய்கருவிகளினுள்ள சிறு பொசிவுகளைக் கண்டுபிடித்தற்குச் சிறு தூண்டற் சுருளொன்று தரும் தீப்பொறியிறக்கத்தைப் பயன்படுத்தும் பழைமைவாய்ந்த முறையானது பெரிதும் வற்புறுத்தற்பாலது. துணைச்சுற்றின் முடிவிடமொன்ருனது தொகுதியுடன் நேர்த் தொடுகை வைத்திருக்கின்ற உலோகத்துண்டொன்றுடன் தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. மெல்லிய நீண்ட செம்புக் கம்பியொன்று இரண்டாவது முடிவிடத்துடன் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றது. செம்புக் கம்பியின் மறு முனையானது றப்பர்ப் பட்டையொன்ருல் நீண்ட கண்ணுடிக் கோலொன்றிற் பற்றப்பட்டிருக்கின்றது ; கம்பியின் கிட்டத்தட்ட 5 சமீ. ஆனது கண்ணுடிக் கோலின் முனைக்கப்பால் நீட்டியிருக்கின்றது. கண்ணுடிக்கோலானது காவலியாகப் பயன்படுகின்றது ; அதனுல், கண்ணுடியின எந்தப் பாகத்திற் பொசிவு இருக்கின்றது எனக் கருதப்படுகிறதோ அந்தப் பாகமீது உயர மூத்தக் கம்பியானது அசைத்து வைக்கப்படுகின்றது. தொகுதியிலே அமுக்கமானது போதியவளவில் தாழ்ந்திருக்குமாணுல் ஊசித்தொளையொன்றின் இருப்புப் புலனுக்கப்படும். ஏனெனில், அவ்வூசித்தொளையூடே பொறி பாய்கிறதோடு தொகுதியில் இறக்கத்தின் செறிவில் பொதுவான உயர்வு காணப்படுகின்றது. கண்ணுடி மெல்லியதாகவும் மின்புல வலிமை மிக்கதாகவும் இருக்குமாயின், அக்கண்ணுடியானது விகாரப்பட்டு உடையக் கூடும். எனவே, வலுமிக்க தூண்டற் சுருளொன்றைப் பயன்படுத்தலாகாது என்பது வெளிப்படை.

இம்முறையால் தொகுதியின் உலோகத்தாலான பாகங்களிலே பொசிவுகளைக் கண்டுபிடித்தல் சாத்தியமன்று. அவ்விடங்களில் பொசிவுகள் இருக்கக்கூடும் எனக் கருதப்பட்டால் தொகுதியில் ஏதேனுமொரு இறக்கக் குழாயிருப்பது வசதியாகும். சந்தேகப்பட்ட பாகங்கள் அற்ககோல் அல்லது அசற்றேணுற் பூசபபடுகின்றன. அவ்விடத்தில் பொசிவு இருக்குமாயின் பயன்படுத்தப்பட்ட திரவத்தின் ஆவியானது தொகுதியுட் செல்கிறபடியால் இறக்கத்தின் நிறம் இளஞ்சிவப்பிலிருந்து இலேசான நீலமாக மாறும் ; பிந்திய நிறமே இறக்கம் நடைபெறும் இடத்தில் இருக்கின்ற காபன் சேர்வைகளுக்குச் சிறப்பாக உரியது. இத்தகைய ஆவிகளைப் பயன்படுத்துதல் எப்பொழுதும் விரும்பத்தக்கதொன்றன்று ; ஏனெனில், அவை ஆதரவுப் பம்பியின் எண்ணெயை அடைந்து, அப்பம்பி தொழிற்படுகையில் அவ்வெண்ணெய் வெப்பமாகும்போது தொகுதிக்கு மீள்கின்றன. ஆய்கருவியில் சோதிக்கப்படும் பாகமீது காபனீரொட்சைட்டு அருவியொன்றைப் பாயவிடுவது வற்புறுத்தப்பட்டிருக்கின்றது ; தொகுதியில் அவ்வாயுவானது புகுந்தால் இறக்கத்தின் நிறம் மாறிவிடும் ; மேலும் அவ்வாயுவை எளிதில் அப்புறப்படுத்த முடியும்.

பொசிவு சிறிதாயும் இறக்கத்தை நிலைநிறுத்த முடியாத அளவிற்கு அமுக்கமானது அத்துணைத் தாழ்ந்ததாயுமிருக்குமிடத்துத் தொகுதியுடன் பற்றப்பட்டிருக்கின்ற அயனுக்கமானியொன்றைப் பயன்படுத்தி, வெற்றிடத்

தொகுதியில் ஊசித்தொளையொன்றூடே புகுகின்ற ஆவிகளை உணர முடிகின்றது. தொல்லைகள் பின்னர் எழாதிருக்கும் பொருட்டு ஆய்கருவியைக் கோக்குமுன் பொசிவுகளையிட்டு எல்லா உலோகத்தாலான பாகங்களையும் சோதித்தல் வேண்டும். இதன் பொருட்டு அவை அமுக்கப்பட்ட வளியால் நிரப்பப்பட்டு நீரில் அமிழ்த்தப்படுகின்றன. உலோகத்தின் புள்ளியொன்றிலிருந்து எழுகின்ற நுண்குமிழியருவியானது அவ்விடத்திலே சிறு பொசிவொன்றுளது எனச் சுட்டுகின்றது.

பயிற்சி XIV

14·01. வரிப்படஙகளைப் பயனபடுத்திக் கெஸ்லர் பம்பியொன்றின தொழிற்பாட்டை விளககிக் காட்டுக. 3 சமீ. இரசம் அமுக்கததில் வளியைக் கொண்டிருக்கின்ற, 2 லீறறர் கனவளவுடைய குடுவையொனறை வெற்றிடமாக்க 500 மிலீ. கனவளவுடைய குமிழைக் கொண்ட பம்பியொன்று பயன்படுத்தப்பட்டால, பம்பியை (*a*) 12 முறை, (*b*) 24 முறை தொழிற்படுத்தியதும் குடுவையிலே வளியின் அமுக்கத்தை மதிப்பிடுக. (வெப்பநிலை மாறவில்லை எனக் கொள்க.)
[(*a*) 0·069, (*b*) 0·0047 சமீ. இரசம்]

14·02. 1 லீற்றர் கொள்ளளவுடைய பாத்திரமொன்றிலே, வளிமணடல அமுக்கத்திலிருந்து தொடங்கி மிகவும் உயர்ந்த வெற்றிடமொன்றைப் பெறுதற்கான முறையின் விவரங்களைச் சுருக்கமாக விளக்கி, பரவற் பம்பியொன்றின் தொழிற்பாடடை கூடியமட்டில் விவரமாக விளககிக் காட்டுக. உம்முடைய விடையின் இரு பாகங்களையும் வரிப்படங்களால் எடுததுக் காட்டுக. (S)

14·03. 10^{-4} மிமீ. இரச வரிசையிலே வாயுவொன்றின் அமுக்கத்தை அளத்தற்குப் பொருத்தமான முறையொன்றை விவரிததுக் கூறி விளக்குக. விவரித்துக் கூறப்பட்டுள்ள ஆய்கருவியின் (*a*) உணர்திறன், (*b*) அளவுகோடிடல என்பவற்றைச் சுருககமாக ஆராய்க. (S)

14·04. மிக உயர்ந்த அமுக்கங்களை ஆக்கலுககும அளத்தலுககும் பயனபடுத்தப்படுகின்ற கலைத்திறனைப் பற்றிக் குறிப்பிடுக. (S)

14·05. மக்கிளௌட்டு மானியின் முதன்மையையும் எல்லை வரையறையையும் கூறித் தாழ்முக்கங்களை அளக்க அதைப் பயன்படுத்தல பற்றிக் குறிப்பிடுக. அதன் தொழிற்பாட்டிற்கான கொள்கையைத் தந்து வாயுக்களின் மிகத் தாழந்த அமுக்கங்களை அளத்தலுக்கான பிறிதொரு கருவிவகையை விவரித்துக் கூறுக. (S)

14·06. ஆரை *a* உடைய கோளமொனறுனது எல்லைவேகம் *u* வுடன் பாயியொன்றிலே அசையுங்காலே அதனமீது தாக்குகின்ற பிசுக்கு விசையானது $6\pi a\eta u$ ஆகும் என ஸ்ரோக்சின் விதி கூறுகினறது ; இஙகு η ஆனது பாயியின் பிசுபிசுப்பாகும். இவவிதியானது பரிமாணமுறைப்படி சரியெனக் காட்டி, எவ்வாறு அதன் உண்மையை நீர் பரிசோதனை முறைப்படி ஆய்வீர் என விவரித்துக் கூறுக.

மிகத் தாழ்ந்த ஆவியமுக்கமுடைய எண்ணெய் ஒன்றைக் கொண்டிருக்கும் பாத்திரமொன்றுனது புறக்கணிககத்தக்க அளவிற்கு எண்ணெய்க்கு மேலேயுள்ள நின்றவாயுக்களின் அமுக்கத்தைக் குறைக்கின்ற வெற்றிடப் பம்பியொன்றுடன் இணைக்கப்பட்டிருககின்றது. எண்ணெயில் எழுகின்ற கோள வளிக் குமிழியொன்றிற்கு நேரம் கணிக்கப்படுகின்றது ; எண்ணெய்ப் பரப்பிற்குச் செல்லும் வழியின் நடுவை அடைவதற்கு 10 செக்கன் வேண்டியதாயிற்று. எண்ணெயின் பரப்பு வரையுள்ள பயணத்துக்கான முழு நேரம் யாது? [குமிழியிலுள்ள வளியின் திணிவு மாறிலியாகும் எனவும், பரப்பிழுவை புறக்கணிக்கத்தக்கது எனவும் கொள்க.]
[31·3 செக்.]

பின்னிணைப்பு

A

ஒவெனின் சட்டவூசல்; அதனைப் பயன்படுத்தற்கான திட்டமான முறை.—நீளம் a யும், அகலம் b யும் உடைய சீரான சட்டவூசலொன்றிடத்து அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் அதன் புவியீர்ப்பு மையமூடாகவும் செல்கின்ற அச்சொன்றைப் பற்றி அவ்வூசலின் சுழிப்பாரை $12\kappa^2 = (a^2 + b^2)$ என்பதால் தரப்படுகின்றதாதலாலும், $r = \kappa$ ஆகும் போது அலைவுக்காலம் இழிவாகின்றதாதலாலும், ஒவெனின் சட்டவூசலை $r = \kappa$ என்னும் நிலையிற் பயன்படுத்திக் கிடைக்கின்ற நோக்கல்களிலிருந்து புவியீர்ப்பை மிகத் திட்டமாகத் துணிய முடிகின்றது என்பது தெளிவாம்; ஏனெனில், r ஐ அளத்தலில் ஏறபடும சிறு முதல்வரிசை வழுவொன்று T யில் இரண்டாவது வரிசை வழுவொன்றை மட்டுமே தோற்றுவிக்கின்றது எனத் தெளிக. இந்நிலையில் புவியீர்ப்பைத் துணிதலின் திருத்தமானது அடிப்படையில ஈர் அளவீடுகளை, அதாவது சட்டத்தின் முழு நீளத்தையும் அதன் அலைவுக்காலத்தையும் பொறுத்துள்ளது. 100 சமீ. நீளமுடைய சட்டமொன்றிடத்து, இலட்சிய நிலை $r = \kappa$ என்பதில் 0·1 சமீ. விலகலானது T யின் பெறுமானத்தைப பத்து இலட்சத்தில் மூன்று என்னும் அளவில் மட்டுமே பாதிக்கின்றது எனக் காட்டலாம். ஊசலின் நீளத்தை 0·02 சமீ. இற்குக் கீழான குறைவுடன் எளிதிலே துணியலாம். கருதப்படுகின்ற நிலையில்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\kappa}{g}}$$

ஆதலால், κ யின் கணித்த பெறுமானத்திலுள்ள வழுவானது 10,000 இல் 1 ஐ மீறுமல் இருக்குமானல், அதே திருத்தவரிசையில் T யைத் துணிதல் வேண்டும் என்பது வற்புறுத்தற்பாலது; அதாவது அலைவுக் காலத்தைத் துணிகையிற் கிட்டத்தட்ட 10 நிமிடம் செலவாதல் வேண்டும். நன்கறிந்த செயன்முறையும்,† பயன்படுத்தப்படுகின்ற கடிகாரத்தில் இருக்கக்கூடிய வழுவுக்கான திருத்தமும் மட்டுமே தேவைப்படுகின்றன.

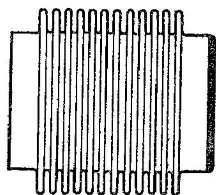
B

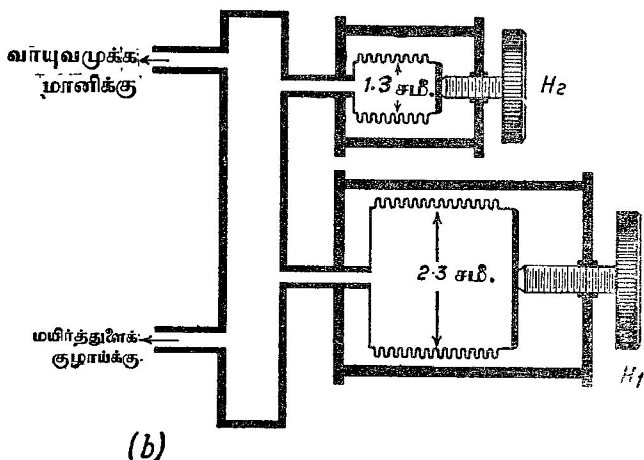
அடைக்கப்பட்டிருக்கின்ற தொகுதியொன்றிலே அமுக்கத்தை உலோகத்தாலான துருத்தியொன்றைப் பயன்படுத்தி ஆளுதல்.—அடிப்படையில் எந்த உலோகத் துருத்தியும் சுவர்த்தடிப்பு கிட்டத்தட்ட 0·01 சமீ. உடைய மெல்லிய தழும்பில் பித்தளைக குழாயால் ஆனது; பித்தளையில் செம்பு 80 சதவீதத்தில் இருக்கின்றது. குழாயை ஒரேயடியாகக் கிடையாகத் தள்ளுமிடத்து அது அமுக்கப்பட்டுத் துருத்தி வடிவம் பெறுகின்றது; அத்தகைய ருத்தியொன்றின் சிறு பாகமானது படம் A 1(a) யிற் காட்டப்பட்டிருக்

† இடைநிலைப் பௌதிகவியல், பாகம் 1, பக். 63 ஐப் பார்க்க.

இன்றது. இவ்வெடுத்துக்காட்டில் துருத்தியின் முனையொன்று மட்டுமே மூடப்பட்டிருக்கின்றது ; அதில் எல்லா மடிவுகளும் தொழிற்படுகின்றன.

குமிழிகளை ஊதவோ, பரப்பிழுவையை அளத்தலுக்கான ஃபகசனின் ஆய்கருவியிற் செய்ததுபோல, பக்கம் 573, திரவச் சுட்டியொன்றின் நிலையை ஆளவோ தேவைப்படுகின்ற வளியமுக்கத்தை ஆளுதலுக்கு இதுபோன்ற இரு துருத்திகள்,† படம் A 1(*b*) யிற் காட்டியுள்ளவாறு, ஏற்றப்பட்டிருக் கின்றன. இதை விவரித்துக் கூறவேண்டியதேயில்லை ; இருந்தாலும் துருத்திகளின தொடர்புப் பெறுமானங்களின் ஆய்வு பொருத்தமாகும்.


(*a*)



(*b*)

படம் A 1.

ஆய்கருவியின் முழுக்கனவளவு V யும், அடைக்கப்பட்ட வளியின் தொடக்க அமுக்கம் p யும் ஆயின், அப்பொழுது pV மாறிலியாகும் ; எனவே,

$$\frac{\delta p}{p}+\frac{\delta V}{V}=0.$$

† இவ்வாய்கருவியானது திரு. ஏ. எஸ். எட்மன்சன் (Edmondson) அவர்களால் ஆக்கப் ட்பட்டது.

ஃபகசனின் ஆய்கருவியோடு பயன்படுத்துமிடத்து, V யை 100 சமீ.^{3} எனவும், p யை 1300 சமீ. எண்ணெய் (அடர்த்தி 8·8 கி. சமீ.$^{-3}$) எனவும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். பெரிய துருத்தியின் விட்டம் 2·3 சமீ. ஆகும்; திருகுத்தலை H_1 இன் 10 சுற்றுகளாலாகின்ற நீளமாற்றம் 1·2 சமீ. ஆகும். எனவே, $\delta V \doteqdot \pi(1{\cdot}2)^2 \times 1{\cdot}2 = 5$ சமீ.^{3} ஆயின், $|\delta p| = 65$ சமீ. எண்ணெயாகும். சிறிய துருத்தியின் விட்டம் 1·3 சமீ. ஆகும்; திருகுத்தலை H_2 இன் 6 சுற்றுக்களாலாகின்ற நீளமாற்றம் 0·4 சமீ. ஆகும். எனவே, $\delta V = 0{\cdot}5$ சமீ.^{3} ஆயின், $|\delta p| = 6$ சமீ. எண்ணெயாகும்.

பரப்பிழுவைப் பரிசோதனையொன்றிலே $\delta p \doteqdot 5$ சமீ. எண்ணெய் ஆகும்; அது பெரிய திருகின் சுற்றொன்றிற்கு ஒத்ததாயிருக்கின்றது. சிறிய துருத்தியைப் பயன்படுத்தி அமுக்கமிகையை 0·05 சமீ. எண்ணெயுள் செப்பஞ்செய்யுமிடத்து, H_2 இன் சுற்றொன்றிற்கு $|\delta p| = 1$ சமீ. எண்ணெய் ஆகும்; அதாவது H_2 ஐக் கிட்டத்தட்ட 20° அளவு சுற்றி அதே அமுக்க மாற்றத்தைப் பெறலாம்.

உட்கனவளவுகள், துருத்திகளின் பருமன்கள், திருகுப் புரியிடை என்பவற்றைப் பொருத்தமாக எடுத்து எல்லா வேறான வீச்சுக்களையும் உணர்திறன்களையும் பெறலாம்.

C

நெருக்கத்தகவும் உயரமுக்கங்களில் அதன் பெறுமானமும்.—பதார்த்தமொன்றின் கனவளவுக் குணகத்திற்கு

$$\beta = -V\frac{\partial p}{\partial V}$$

என்னுஞ் சமன்பாட்டால் வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகின்றது, பக்கம் 345 இற் காண்க.

எனவே, அதனது நெருக்கத்தகவானது

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)$$

என்பதால் தரப்படுகின்றது.

பதார்த்தத்தின் அடர்த்தியானது ρ வும், அலகுத்திணிவொன்றின் கனவளவானது v யும் ஆயின், அப்பொழுது $\rho = \frac{1}{v}$; எனவே,

$$\kappa = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = -\rho\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}$$

எனப் பெறுகின்றோம்.

பரிசோதனையின் போதுள்ள நிலைக்கு ஏற்ப வகையீட்டுக் குணகங்கள் மதிப்பிடப்பட்டிருந்தால் இக்கோவைகள் செப்பமானவையாகும். வழக்கமாக இந்நிலையானது வெப்பநிலை மாருமல் இருக்கின்ற ஒரு நிலையாகும். உயரமுக்க ஆய்வினிடத்து

$$-\frac{1}{V_0}\cdot\frac{\Delta V}{\Delta P}$$

என்னும் பின்னத்தை நெருககத்தகவென எடுத்தல் வசதியாம்; இங்கு V_0 வளிமண்டல அமுக்கத்தில் பதார்த்ததின் கனவளவும், $-\Delta V$ என்பது அமுக்கம் ΔP என்னும் அளவாற் கூடுமிடத்து விளைகின்ற கனவளவுச் சுருக்கமும் ஆகும். ΔP ஆனது பல்லாயிரம் வளிமண்டல அமுக்கமாகலாம்.

D

உதாரணம்.—சீரான ஈர்ப்புப் புலமொன்றிலே பொருளொன்று u என்னும் மாருக் கதியில் இயங்குகையில், புலத்தினது திசையின் வழியேயுள்ள நிறையின் கூறுனது பூச்சியமாகக் குறைக்கப்படுகிறது என்பதை உறுதிப்படுத்தற்கு அப்பொருள் செல்லும் பாதையானது,

$$\left(C-\frac{2gx}{u^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1-C+\left(\frac{2gx}{u^2}\right)$$

என்னும் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும் சார்பு $y(x)$ ஆல் தரப்படுமெனக் காட்டுக; இங்கு ஈர்ப்புப் புலத்தின் திசைக்குச் செங்குத்தாக y யும், சமாந்தரமாக x உம் அளக்கப்படுகின்றன. C என்பது பரிமாணமில்லாத ஒரு மாறிலியாகும்.

$\frac{dy}{dx}$ என்பது 1 இற்குச் சமமாகக் கொள்ளத்தக்கவாறு அம்மண்டிலம் அமையுமெனின், அது பரவளைவு வடிவினதெனக் காட்டுக.

புள்ளி P யிலே அப்பொருள் இருக்கும் போது, r என்பது பாதையின் வளைவாரையும், P யிலுள்ள தொடலியானது Ox உடன் அமைக்கும் கோணம் ψ உம் ஆகும். $\frac{mu^2}{r}$ என்பது மையநாட்ட விசையாதலால்,

$$mg-\frac{mu^2}{r}\text{ சைன் }\psi=0$$

எனின், அப்பொருள் நிறையற்றதாக அமையும்; இங்கு g என்பது புலச் செறிவாகும்.

$$\therefore\ g=u^2\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

ஏனெனில் தான் $\psi = \frac{dy}{dx}$. எனவே $\frac{dy}{dx} = z$ எனின்,

$$\frac{g}{u^2} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2} = \frac{z\frac{dz}{dx}}{(1+z^2)^2}$$

ஆகும். தொகையிட, $\frac{gx}{u^2} = C - \frac{1}{2(1+z^2)}$ அல்லது

$\left[C - \frac{2gx}{u^2}\right]\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 - C + \frac{2gx}{u^2}$ ஆகும். $\frac{dy}{dx} \simeq 1$ ஆகும் போது,

$$r = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \simeq \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$ அத்துடன் சைன் $$\psi = \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \simeq \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}.$$

நிறையற்ற தன்மைக்கான நிபந்தனை

$\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\frac{d^2y}{dx^2} \simeq \frac{g}{u^2}\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$ அல்லது $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2g}{u^2}$ ஆகும். எனவே $y = \frac{gx^2}{u} + Ax + B$,

இங்கு A, B என்பன மாறிலிகளாகும்; ஆகவே அம்மண்டிலம் ஒரு பரவளைவின் பகுதியாகும்.

அட்டவணை